ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN-PIERRE KAHANE

Multiplications aléatoires et dimensions de Hausdorff

Annales de l'I. H. P., section B, tome 23, nº S2 (1987), p. 289-296

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1987__23_S2_289_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Sup. au n° 2, 1987, Vol. 23, p. 289-296. *Probabilités et Statistiques*

Multiplications aléatoires et dimensions de Hausdorff

par

Jean-Pierre KAHANE

Université de Paris-Sud, Unité associée n° 757,
Analyse harmonique, Mathématique, Bât. n° 425,
91405 Orsay Cedex

RÉSUMÉ. — Un produit de poids aléatoires normalisés indépendants sur un espace métrique T définit un opérateur aléatoire Q opérant sur les mesures $\sigma \in M^+(T)$. L'opérateur $\sigma \to EQ\sigma$ est une projection dans $M^+(T)$, dont on étudie, dans des cas particuliers, le noyau et l'image.

Mots clés : Martingales positives, mesures de Radon, mesures et dimensions de Hausdorff.

ABSTRACT. — Given a compact metric space T a product of random independent normalized weights on T defines a random operator Q acting on measures $\sigma \in M^+(T)$. The operator $\sigma \to EQ\sigma$ is a projection in $M^+(T)$. Its kernel and image are considered in particular cases.

I

Soit (T, d) un espace métrique compact, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace de probabilité, et $P_n(t, \omega)$ une suite de poids indépendants normalisés ($t \in T$, $\omega \in \Omega$,

Classification A.M.S. : .

$n=1, 2, \ldots$). Cela signifie que : 1° pour presque tout ω, les $P_n(., \omega)$ sont des fonctions boréliennes $\geqq 0$; 2° pour tout t les $P_n(t, .)$ sont des variables aléatoires $\geqq 0$, telles que $EP_n(t, .)=1$; 3° les tribus engendrées par les $\{P_n(t, .)\}$ sont indépendantes. On pose

$$Q_n(t, \omega)=\prod_{m=1}^{n} P_m(t, \omega). \tag{1}$$

Pour toute mesure de Radon σ positive sur T [nous noterons $\sigma \in M^+(T)$] on considère la mesure aléatoire $S_n=Q_n\sigma$. Ainsi, pour tout borélien B dans T, on a

$$S_n(B)=\int_B Q_n(t, \omega)\, d\sigma(t). \tag{2}$$

Pour tout B, $(S_n(B))_{n=1,2,\ldots}$ est une martingale positive; elle converge donc p. s. vers une limite $S(B)$.

On peut interpréter S comme une mesure aléatoire. En effet, on a le résultat suivant (théorème 1 de [3]).

Proposition A. — *Les mesures aléatoires* S_n *convergent faiblement p. s. vers une mesure* S. *Pour toute collection dénombrable de boréliens* B_j, *on a*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(B_j)=S(B_j) \text{ p. s.} \tag{3}$$

Dans les cas les plus intéressants, S sera presque sûrement singulière par rapport à σ. Il est donc faux que p. s. pour tout B la suite $S_n(B)$ converge vers $S(B)$. Soit Q l'opérateur

$$Q\sigma=S. \tag{4}$$

On dit que Q est dégénéré sur σ, ou tue σ, si $Q\sigma=0$, et que Q agit pleinement sur σ si $EQ\sigma=\sigma$, c'est-à-dire, pour tout borélien B, $ES(B)=\sigma(B)$, c'est-à-dire encore

$$ES(T)=\sigma(T). \tag{5}$$

(5) signifie que la martingale $S_n(T)$ converge vers $S(T)$ dans $L^1(\Omega)$. Il est évident que les mesures tuées par Q sont singulières par rapport aux mesures sur lesquelles Q agit pleinement. On dira que les mesures tuées par Q sont Q-singulières et les mesures sur lesquelles Q agit pleinement sont Q-régulières. Avec cette terminologie, le théorème 4 de [3] s'énonce ainsi.

PROPOSITION B. — *Toute* $\sigma \in M^+(T)$ *est somme d'une mesure* σ' *Q-régulière et d'une mesure* σ'' *Q-singulière. On a*

$$\sigma' = EQ\sigma \tag{6}$$

[*c'est-à-dire* $\sigma'(B) = ES(B)$ *pour tout* B], *et l'opérateur* EQ *est une projection.*

Ainsi EQ est un opérateur « Q-régularisant ». Nous allons voir ce que cela signifie dans un cas particulier simple (théorème 1 et corollaire).

On peut décomposer Q en un produit d'opérateurs indépendants. Pour ce faire, considérons par exemple les poids P_{2n-1} d'une part, et les poids P_{2n} d'autre part. Il leur correspond respectivement un opérateur Q' et un opérateur Q'', mutuellement indépendants. Il est alors commode de représenter Ω comme un espace produit

$$\Omega = \Omega' \times \Omega'', \tag{7}$$

l'opérateur Q' étant défini sur Ω' et l'opérateur Q'' sur Ω''. La formule

$$Q = Q'Q'' = Q''Q' \tag{8}$$

signifie que, pour chaque $\sigma \in M^+(T)$, $S = Q\sigma$ peut s'obtenir en appliquant d'abord Q'' à σ, ce qui donne une mesure aléatoire définie sur Ω'', puis en appliquant Q'; et aussi qu'on peut intervenir Q' et Q''.

Si d'ailleurs nous avons deux familles indépendantes de poids (P'_n) et (P''_n), on peut définir par (8) le produit des opérateurs Q' et Q'' correspondants, et interpréter Q comme l'opérateur associé à des poids P_n tels que (par exemple) $P'_n = P_{2n-1}$ et $P''_n = P_{2n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$; ou encore, aux poids $P'_n P''_n$.

Voici comment on peut utiliser (8). Si Q tue σ, il est presque sûr que Q' tue $Q''\sigma$, c'est-à-dire que $Q''\sigma$ est p. s. Q'-singulière. Si au contraire Q agit pleinement sur σ, il est presque sûr que Q' agit pleinement sur $Q''\sigma$, c'est-à-dire que $Q''\sigma$ est p. s. Q'-régulière.

Ce procédé de décomposition a été utilisé dans les problèmes de recouvrement au hasard (pour le calcul de dimensions de Hausdorff des ensembles non recouverts) [1], et aussi dans la théorie du chaos multiplicatif [2]. Nous allons l'appliquer (théorème 2) à une situation déjà bien explorée, celle des multiplications aléatoires introduites par B. Mandelbrot [5], étudiée dans [4].

II

On fixe un entier $c \geqq 2$, et on choisit pour T le compact

$$T = \{1, 2, \ldots, c\}^{\mathbb{N}} \tag{9}$$

dont les éléments s'écrivent $t = (t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots)$. La distance est la distance ultramétrique ordinaire

$$d(t, s) = c^{-n} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{matrix} \forall j < n, & t_j = s_j \\ & t_n \neq s_n \end{matrix}\right\} \tag{10}$$

On désigne par B_n une boule quelconque de rayon c^{-n} (il y en a c^n). Soit μ la mesure naturelle sur T — telle que la masse de chaque boule B_n soit c^{-n} —.

On donne une v.a. $W \geqq 0$ telle que $EW = 1$, et on choisit le poids P_n constant sur chaque boule B_n, tel que ses c^n valeurs soient des v.a. indépendantes de même loi que W. Le résultat suivant est établi dans [4].

Proposition C. — *Si* $E(W \log W) \geqq \log c$, Q *tue* μ. *Si* $E(W \log W) < \log c$, Q *agit pleinement sur* μ.

Considérons maintenant un cas particulier :

$$\left\{\begin{matrix} P(W = c^{\alpha}) = c^{-\alpha} \\ P(W = 0) = 1 - c^{-\alpha} \end{matrix}\right\} \tag{11}$$

$\alpha > 0$ donné. Le support de Q_n s'obtient à partir de celui de Q_{n-1} en remplaçant chaque boule B_{n-1} par les c^n boules B_n qu'elle contient, et en supprimant les boules B_n où $P_n = 0$ (donc on supprime les boules avec probabilité $1 - c^{-\alpha}$, et indépendamment les unes des autres) : c'est un modèle classique de processus de naissance et de mort. On sait qu'il y a dégénérescence complète (au sens $Q_n = 0$ pour n assez grand, p. s.) dès que $\alpha \geqq 1$; c'est d'ailleurs une conséquence de la proposition C.

Théorème 1. — *Dans l'hypothèse* (11) *avec* $0 < \alpha < 1$, Q *tue toute mesure* σ *concentrée sur un borélien de mesure finie en dimension* α, *et* Q *agit pleinement sur toute mesure* σ *d'énergie finie par rapport au noyau* $(d(t, s))^{-\alpha}$.

Preuve. — La première partie résulte d'une condition donnée en [3] (théorème 3) : pour que $Q\sigma = 0$, il suffit que le support K de σ soit de mesure finie en dimension α (au sens de Hausdorff), et que

$$E \sup_{t \in B} (Q_n(t))^h \leqq C (\operatorname{diam} B)^{(1-h)\alpha} \tag{12}$$

pour un $C>0$, un $h \in]0, 1[$, tout $B \subset K$, et un $n=n(B)$. La seconde partie vient de ce que

$$E(S_n(T))^2 = \iint EQ_n(t)\, Q_n(s)\, d\sigma(t)\, d\sigma(s) \tag{13}$$

et du fait que l'intégrale du second membre est dominée par l'intégrale d'énergie

$$\iint (d(t, s))^{-\alpha}\, d\sigma(t)\, d\sigma(s) = I_\alpha(\sigma). \tag{14}$$

Pour comprendre le sens du théorème 1, il est utile de le comparer à la proposition qui suit, dont une partie est classique et dont le reste est laissé comme exercice au lecteur. Étant donné une fonction φ concave sur $\mathbb{R}^+$, croissante, telle que $\varphi(0)=0$ (fonction déterminante), on va désigner par Λ_φ la classe des mesures $\sigma \in M^+(T)$ telles que

$$\sigma(B) \leqq C\, \varphi(\text{diam } B) \tag{15}$$

pour un $C>0$ et tout borélien B (ou, ce qui revient au même, toute boule B). On désigne par mes_φ la mesure de Hausdorff par rapport à la fonction déterminante φ, et par K un compact dans T.

PROPOSITION D. — *Pour avoir* $\text{mes}_\varphi K>0$, *il faut et suffit que* K *porte une mesure* $\sigma \in \Lambda_\varphi$ *non nulle* (*Frostman*). *Pour avoir* $I_\alpha(\sigma)<\infty$, *il suffit que* $\sigma \in \Lambda_\varphi$ *avec*

$$\int_0^1 \varphi(t)\, t^{-\alpha-1}\, dt < \infty. \tag{16}$$

Pour toute fonction déterminante $\psi(t)=o(t^\alpha)\ (t \to 0)$, *il existe un compact* K *tel que* $\text{mes}_\psi K=\infty$ *et* $\text{Cap}_\alpha K<\infty$ [*ceci signifiant que* K *porte une mesure non nulle* σ *telle que* $I_\alpha(\sigma)<\infty$].

Ainsi, dans la première phrase du théorème 1, la condition $\text{mes}_\alpha B<\infty$ (borélien de mesure finie en dimension α) ne peut pas être remplacée par $\text{mes}_\psi B<\infty$.

Dans la suite, lorsque Q est donné par (11), nous écrirons $Q=Q_\alpha$ et nous désignerons par R_α l'ensemble des mesures Q_α-régulières (c'est-à-dire l'image de l'opérateur EQ_α) et par S_α l'ensemble des mesures Q_α-singulières (c'est-à-dire le noyau de EQ_α).

En vue de préciser la structure de S_α nous utiliserons la notation suivante

$$\sigma \# \Lambda_\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \sigma \notin \Lambda_\varphi \\ (\sigma' \leqq \sigma \text{ et } \sigma' \neq 0) \quad \Rightarrow \quad \sigma' \notin \Lambda_\varphi \end{array} \right\}. \tag{17}$$

La seconde partie du théorème 1, jointe à la proposition B, montre que, pour toute fonction déterminante φ vérifiant (16),

$$\sigma \in S_\alpha \quad \Rightarrow \quad \sigma \# \Lambda_\varphi. \tag{18}$$

PROPOSITION E. — *Si $\sigma \# \Lambda_\varphi$, σ est concentrée sur un borélien de φ-mesure nulle.*

Preuve. — Soit $\sigma \# \Lambda_\varphi$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\sigma \notin \Lambda_\varphi$, il existe une boule B_0 de diamètre maximal telle que

$$\varepsilon\sigma(B_0) > \varphi(\text{diam } B_0).$$

Posons $T_1 = T \setminus B_0$. Si $\sigma(T_1) = 0$ nous nous arrêtons. Si $\sigma(T_1) > 0$ nous posons

$$\sigma_1 = \sigma \big|_{T_1} (= 1_{T_1} \sigma).$$

Comme $\sigma_1 \notin \Lambda_\varphi$ il existe une boule B_1 de diamètre maximal, telle que, en posant $B_1' = B_1 \cap T_1$, on ait

$$\varepsilon\sigma_1(B_1') > \varphi(\text{diam } B_1).$$

On pose $T_2 = T \setminus (B_0 + B_1') = T_1 \setminus B_1'$, et ainsi de suite. Tant qu'on ne s'arrête pas on a

$$\sum \varphi(\text{diam } B_n) \leqq \varepsilon\sigma(T). \tag{19}$$

Si on s'arrête au rang N, σ est concentrée sur $B_0 + B_1' + \ldots + B_N'$. Si on ne s'arrête pas, montrons que σ est concentrée sur $\sum_0^\infty B_n'$ (on pose $B_0' = B_0$). En effet, si ce n'était pas le cas, on poserait $T_\infty = T \setminus \sum_0^\infty B_n'$ et $\sigma_\infty = \sigma \big|_{T_\infty}$, et il existerait une boule B_∞ telle que $\varepsilon\sigma_\infty(B_\infty) > \varphi(\text{diam } B_\infty)$. Or (19) entraîne que diam B_n tend vers 0, et l'existence de B_∞ est contradictoire avec celle de B_n lorsque diam $B_n <$ diam B_∞. Ainsi, σ est concentrée sur un ensemble E_ε réunion de boules B_n telles qu'on ait (19). L'intersection des $E_{1/m}$ ($m = 1, 2, \ldots$) est un borélien de φ-mesure nulle sur lequel σ est concentrée.

Compte tenu des propositions D et E, on peut préciser ainsi la structure de S_α.

COROLLAIRE DU THÉORÈME 1. — *Toute mesure concentrée sur un borélien de α-mesure finie appartient à S_α, et toute mesure appartenant à S_α est concentrée sur un borélien de φ-mesure finie, φ désignant une fonction déterminante donnée vérifiant* (16).

Ainsi, l'opérateur EQ_α a la signification suivante : il retire de σ tout ce qui est concentré sur des boréliens de dimension $<\alpha$, et aussi une partie de ce qui est concentré sur des boréliens de dimension α.

Remarque. — S_α est fonction croissante de α, et R_α fonction décroissante. C'est conséquence de ce qui précède, et aussi de la formule

$$Q_\alpha \cdot Q_\beta = Q_{\alpha+\beta} \tag{20}$$

relative à un produit d'opérateurs Q_α et Q_β indépendants. Si en effet on choisit $Q_\alpha = Q'$ et $Q_\beta = Q''$ dans la formule (8), le poids $P'_n P''_n$ est associé au produit $W' W''$ et, en se référant à (11) on a

$$\left\{\begin{aligned} &P(W' W'' = c^{\alpha+\beta}) = P(W' = c^\alpha)\, P(W'' = c^\beta) = c^{-(\alpha+\beta)} \\ &\qquad\qquad P(W' W'' = 0) = 1 - c^{-(\alpha+\beta)} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

donc $Q = Q' Q''$ s'écrit $Q_{\alpha+\beta}$.

En écrivant

$$\sigma = \int_0^1 d\, EQ_\alpha(\sigma) \tag{22}$$

on a une sorte de décomposition continue de σ en éléments mutuellement singuliers.

III

Désignons par W_α le poids défini par (11), auquel correspond l'opérateur Q_α, et revenons au cas général considéré au début de II. Considérons Q et Q_α indépendants. Le produit QQ_α est alors associé au poids WW_α, et l'on a

$$E(WW_\alpha \log(WW_\alpha)) = E(W \log W) + E(W_\alpha \log W_\alpha)$$
$$= E(W \log W) + \alpha \log c. \quad (23)$$

En vertu de la proposition C, il est presque sûr que $Q_\alpha Q$ tue μ si $E(WW_\alpha \log(WW_\alpha)) \geqq \log c$, et presque sûr que $Q_\alpha Q$ agit pleinement sur μ si $E(WW_\alpha \log(WW_\alpha)) < \log c$. Énonçons le résultat.

THÉORÈME 2. — *Supposons* $E(W \log W) < \log c$, *et posons*

$$D = 1 - E\left(W \frac{\log W}{\log c}\right).$$

Il est presque sûr que la mesure aléatoire $Q\mu$ *appartient à* S_α *pour* $\alpha \geqq D$, *et à* R_α *pour* $\alpha < D$.

COROLLAIRE. — *Presque sûrement* $Q\mu$ *est concentrée sur un borélien de* φ*-mesure nulle, lorsque* φ *est une fonction déterminante donnée vérifiant* (16) — a fortiori, $Q\mu$ *est concentrée sur un borélien de dimension* D — *et la* $Q\mu$*-mesure de tout borélien de dimension* $<D$ *est nulle.*

Ce corollaire supprime une condition parasite dans le corollaire du théorème 4 de [4].

RÉFÉRENCES

[1] J.-P. KAHANE, *Some Random Series of Functions*, 1re éd., Heath Math. Monographs, 1968, 184 p; 2e éd., Cambridge Univ. Press, 1986, 300 p.

[2] J.-P. KAHANE, Sur le chaos multiplicatif, *Ann. Sciences Math. Québec*, vol. **9**, 1985, p. 105-150, *voir* aussi *C.R. Acad. Sc.*, t. **301**, 1985, p. 329-332.

[3] J.-P. KAHANE, Positive Martingales and Random Measures, *Chinese Ann. Math.*, 8B (1987) p. 1-12.

[4] J.-P. KAHANE et J. PEYRIÈRE, Sur certaines martingales de Benoit Mandelbrot, *Advances Math.*, vol. **22**, 1976, p. 131-145.

[5] B. MANDELBROT, Intermittent Turbulence in Self-Similar Cascades: Divergence of High Moments and Dimension of the Carrier, *J. of Fluid Mechanics*, vol. **62**, 1974, p. 331-358.

(*Manuscrit reçu le* 24 *juin* 1986.)