C. SUNYACH

Sur la transience et la récurrence des marches aléatoires en milieu aléatoire

Annales de l'I. H. P., section B, tome 23, nº 4 (1987), p. 613-626

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1987__23_4_613_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 23, n° 4, 1987, p. 613-626. *Probabilités et Statistiques*

Sur la transience et la récurrence des marches aléatoires en milieu aléatoire

par

C. SUNYACH

Université Paris-VI, Laboratoire de Probabilités, associé au C.N.R.S., n° 224, 4, place Jussieu, Tour n° 56, 75252 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — On donne des conditions nécessaires pour qu'une marche aléatoire en milieu aléatoire sur un groupe soit récurrente (moyennabilité du groupe, annulation de l'homomorphisme associé à la mesure invariante), ainsi que des exemples de telles marches réversibles sur $\mathbb{R}^d$ (d arbitraire).

Mots clés : Milieux aléatoires, Markov, transience, récurrence.

ABSTRACT. — We give necessary conditions for a random walk in a random environment (r. w. r. e.) on a group, to be recurrent (the group must be amenable and the homomorphism associated to the invariant measure must be null) and also examples of recurrent reversible R.W.R.E.'s on $\mathbb{R}^d$ for arbitrary d.

Dans la première partie de cet article, nous démontrons la moyennabilité des groupes récurrents pour les marches aléatoires en milieu aléatoire, et le fait que l'homomorphisme caractéristique associé à la mesure invariante

Classification A.M.S. : 60 J 27.

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques - 0294-1449
Vol. 23/87/04/613/14/$3,40/© Gauthier-Villars

d'une marche récurrente est identiquement nul; ces homomorphismes associés aux cocycles de mesures invariantes extrémales jouent un rôle important; dans le cas des marches aléatoires usuelles ils régissent la croissance (ou décroissance) exponentielle des mesures invariantes. Nous reviendrons prochainement sur ce sujet.

Dans la deuxième partie nous démontrons l'existence de marches aléatoires en milieu aléatoire réversibles récurrentes sur $\mathbb{R}^d$, pour toute valeur de d. Ce résultat, notamment pour $d=3$, pourrait avoir des conséquences inattendues en mécanique statistique.

Je tiens à remercier Y. Guivarc'h et Cl. Kipnis qui m'ont initié au vaste et difficile sujet des marches aléatoires en milieu aléatoire et O. Adelman, E. Andjels, J. P. Thouvenot avec qui j'ai eu des échanges stimulants pendant l'élaboration de ce travail.

La première rédaction de ce texte était achevée lorsqu'est paru l'article de R. Durrett dans le dernier numéro des *Communications in Math. Phys.* Il démontre notamment l'existence de marches aléatoires en milieu aléatoire réversibles récurrentes sur $\mathbb{Z}^d$ et surtout le caractère logarithmique de leur diffusion. Pour la question de la récurrence, nos résultats sont similaires bien que les points de vue adoptés soient sensiblement différents. Ce texte développe la Note [13].

I. CONDITIONS NÉCESSAIRES DE RÉCURRENCE

A. Moyennabilité

Considérons un groupe infini dénombrable Γ et une marche aléatoire en milieu aléatoire sur Γ, c'est-à-dire un système dynamique ergodique $(\Omega, \mathscr{A}, \pi, \theta^{\mathbb{x}} [\mathbb{x} \in \Gamma])$ et une famille mesurable de noyaux markoviens $P_\omega(x, y)$ sur Γ tels que

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \forall a,\ x \text{ et } y \in \Gamma$$

$$P_{\theta^a \omega}(x, y) = P_\omega(a.x, a.y).$$

On notera τ^a la translation à gauche de a sur Γ :

$$\tau^a(x)=a.x \qquad \text{et} \qquad \tau^a(f)(x)=f(a.x).$$

Rappelons la propriété suivante des groupes moyennables :

PROPOSITION 1. — *Pour que le groupe Γ soit moyennable il suffit que sur tout sous-espace vectoriel séparable de $l^\infty(\Gamma)$, invariant par toutes les translations τ^a et contenant les constantes, il existe une forme linéaire de norme plus petite que* 1 (*ou égale*), *invariante par toutes les translations τ^a et égale à* 1 *sur la fonction identique à* 1.

Preuve — Pour tout sous-espace vectoriel séparable E de l^∞, contenant les constantes et invariant par toutes les translations à gauche, soit $\tilde{E}$ l'ensemble des formes linéaires sur l^∞, de norme plus petite que 1, dont la restriction à E est invariante par translation à gauche et prenant la valeur 1 sur la fonction identique à 1.

D'après l'hypothèse et le théorème de Hahn-Banach, $\tilde{E}$ est un convexe non vide $\sigma(l^{\infty\prime}, l^\infty)$-compact. Par ailleurs l'ensemble des $\tilde{E}$ est filtrant décroissant. Par suite leur intersection n'est pas vide. Tout élément de cette intersection est une moyenne invariante à gauche, la positivité résultant de la construction et du fait que $l^{\infty\prime}$ est réticulé pour son ordre naturel.

L'énoncé principal que nous avons en vue est le suivant :

THÉORÈME 2. — *Si pour presque tout ω les fonctions P_ω-harmoniques bornées sont constantes, alors Γ est moyennable.*

Preuve. — Soit D une partie dénombrable de $l^\infty(T)$, dense dans un sous-espace vectoriel E contenant les constantes, et invariante par les translations à gauche.

Pour tous $f\in D$ et $x\in\Gamma$, la suite $\varphi_n(\omega, f, x)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_0^{n-1} P_\omega^i f(x)$ est bornée dans $L^\infty(\pi)$ et *a fortiori* dans $L^2(\pi)$. On peut donc trouver par extraction diagonale une suite infinie n_p telle que $\varphi_{n_p}(\omega, f, x)$ converge *faiblement* dans $L^2(\pi)$, pour tous $(f, x)\in D\times\Gamma$. Désignons par $m_{\omega, x}(f)$ la limite. Montrons que l'ensemble Ω_0 des ω tels que $m_{\omega, .}(f)$ soit P_ω-harmonique pour tout $f\in D$ est plein. Soient $g\in L^2(\pi)$, $f\in D$ et $x\in\Gamma$. La suite

$$\sum_{y\in\Gamma}\int \varphi_{n_p}(\omega, f, y)\,P_\omega(x, y)\,g(\omega)\,\pi(d\omega)$$

converge vers $\sum_y \int m_{\omega,\,y}(f)\, P_\omega(x, y)\, g(\omega)\, \pi(d\omega)$. En effet pour toute partie finie K de Γ, on a les majorations :

$$\sum_{y \in K^c} \left| \int \varphi_{n_p}(\omega, f, y)\, P_\omega(x, y)\, g(\omega)\, \pi(d\omega) \right| \leqq \| f \| \int P_\omega(x, K^c)\, | g(\omega) |\, \pi(d\omega),$$

$$\sum_{y \in K^c} \left| \int m_{\omega,\,y}(f)\, P_\omega(x, y)\, g(\omega)\, \pi(d\omega) \right| \leqq \| f \| \int P_\omega(x, K^c)\, | g(\omega) |\, \pi(d\omega),$$

et $\varphi_{n_p}(\omega, f, y)$ converge faiblement vers $m_{\omega,\,y}(f)$ pour tout $y \in K$.

Les restes $\sum_{y \in K^c}$ convergent vers 0 lorsque $K \uparrow \Gamma$ d'après le théorème de Lebesgue, uniformément par rapport à p.

Par ailleurs

$$\sum_{y \in \Gamma} \varphi_n(\omega, f, y)\, P_\omega(x, y) = \frac{n+1}{n} \varphi_{n+1}(\omega, f, x) - \frac{1}{n} f(x),$$

donc

$$\sum_y \int m_{\omega,\,y}(f)\, P_\omega(x, y)\, g(\omega)\, \pi(d\omega) = \int m_{\omega,\,x}(f)\, g(\omega)\, \pi(d\omega).$$

Comme g est arbitraire dans $L^2(\pi)$, il en résulte que :

$$\sum_y m_{\omega,\,y}(f)\, P_\omega(x, y) = m_{\omega,\,x}(f)$$

pour presque tout ω. Par suite Ω_0 est plein, car $D \times \Gamma$ est dénombrable.

Soit $b \in \Gamma$. On a

$$P_{\theta^b \omega}(f) = P_\omega(f \circ \tau^{b^{-1}}) \circ \tau^b,$$

d'où

$$m_{\theta^b \omega,\,x}(f) = m_{\omega,\,b.x}(f \circ \tau^{b^{-1}}) \tag{1}$$

pour presque tout ω.

Par continuité uniforme, les fonctions $f \to m_{\omega,\,x}(f)$ se prolongent en des formes linéaires continues sur $E = \bar{D}$ telles que $| m_{\omega,\,x}(f) | \leqq \| f \|$ (on aurait pu aussi supposer que D est un sous-espace vectoriel sur Q, dénombrable).

Posons :

$$\bar{m}_x(f) = \int m_{\omega,\, x}(f)\pi(d\omega).$$

On sait que $m_{\omega,\, x}(f)$ ne dépend pas de x, lorsque $\omega \in \Omega_0$; donc $\bar{m}_x(f)$ ne dépend pas de x. De plus $\bar{m}_{b\,.\,x} = \tau^b(\bar{m}_x)$ d'après (1). Donc $\bar{m}_x$ est une forme linéaire invariante à gauche sur E, de norme plus petite que 1 et $\bar{m}_x(1) = 1$. Il résulte de la *proposition* 1 que Γ est moyennable.

COROLLAIRE 3. — *Supposons que pour presque tout* ω *et pour tout* $x \in \Gamma$ *il existe un entier* $n \geqq 0$ *tel que* $P^n_\omega(e, x) > 0$, *e désignant le neutre de* Γ, *et que l'ensemble des* ω *pour lesquels* P_ω *possède au moins un état récurrent soit de mesure strictement positive. Alors* Γ *est moyennable.*

Preuve. — Soit $R_\omega = \left\{ x \in \Gamma : \sum_0^{+\infty} P^i_\omega(x, x) = +\infty \right\}$, l'ensemble des états P_ω-récurrents. L'ensemble des ω tels que R_ω ne soit pas vide est θ-invariant; d'après l'hypothèse il est donc de mesure 1. De plus par invariance par translation, pour presque tout ω et pour tous x et $y \in \Gamma$, il existe un entier $n \geqq 0$ tel que $P^n_\omega(x, y) > 0$. Donc pour presque tout ω la chaîne P_ω possède une seule classe récurrente, à savoir Γ. Par suite les fonctions P_ω-harmoniques bornées sont constantes. Il résulte alors du *théorème* 2 que Γ est moyennable.

B. L'homomorphisme caractéristique

Si pour presque tout environnement ω, la chaîne P_ω est récurrente, soit λ_ω une mesure invariante strictement positive. En utilisant l'unicité à une homothétie près de la mesure invariante, on voit que $\lambda(\omega, x) \to \lambda_\omega(x)/\lambda_\omega(e)$ est un Γ-cocycle multiplicatif i. e. $C^\omega(a\,.\,b) = C^\omega(a)\,.\,C^{\theta^a\omega}(b)$. Donc

$$\chi(x) = \int \mathrm{Log}\,[\lambda_\omega(x)/\lambda_\omega(e)]\,\pi(d\omega)$$

est un homomorphisme de Γ dans $(\mathbb{R}, +)$ (si l'intégrale existe). Nous supposerons satisfaite l'hypothèse d'irréductibilité du *corollaire* 3.

THÉORÈME 4. — *Supposons que la marche soit récurrente et qu'il existe une partie symétrique* B *de* Γ *telle que* $\bigcup_{n \geqq 1} B^n = \Gamma$ *et que pour tout* $\omega \in \Omega$ *et* $x \in B$, $\mathrm{Log}\ P_\omega(e, x)$ *soit* π-*intégrable. Alors* χ *est identiquement nul.*

Preuve. — Posons $\nu_\omega(x)=\lambda_\omega(x)/\lambda_\omega(e)$ et commençons par montrer que $\operatorname{Log}\nu_\omega(x)$ est π-intégrable pour tout $x\in\Gamma$.

Pour tout entier i, on a $P^i_\omega(e, x)\leqq\nu_\omega(x)\leqq 1/P^i_\omega(x, e)$, vu que $\sum_x\lambda_\omega(x)P^i_\omega(x, y)=\lambda_\omega(y)$. On voit donc que si $x\in B$,

$\operatorname{Log}\nu_\omega(x)$ est bien π-intégrable car $P_\omega(x, e)=P_{\theta^{x^{-1}}\omega}(e, x^{-1})$.

Si $x\in B^2$, écrivons $x=x_1.x_2$ où $x_i\in B\,(i=1$ et $2)$. D'où

$$P_\omega(e, x_1)P_{\theta^{x_1}\omega}(e, x_2)\leqq P^2_\omega(e, x_1.x_2)$$
$$\leqq\nu_\omega(X)\leqq 1/P^2_\omega(x, e)\leqq 1/P_{\theta^{x_1}\omega}(x_2, e)\times P_\omega(x_1, e)$$

et par suite l'intégrabilité recherchée. On raisonne de même pour B^n et on conclut car $\bigcup_n B^n=\Gamma$.

La propriété de χ est une conséquence directe du théorème limite quotient, mais il faut s'assurer de l'équi-intégrabilité de la suite des quotients.

Désignons par J l'opérateur tel que $Jf(x)=f(x)$ si $x\neq e$ et $(Jf)(e)=0$, et posons $U_\omega=\sum_0^\infty P_\omega(JP_\omega)^n$. Montrons que $\operatorname{Log}U_\omega(x, y)$ est intégrable pour tous x et y.

C'est clair si $x=e$ car $U_\omega(e, y)=\nu_\omega(y)$ et par ailleurs

$$P_\omega(JP_\omega)^i(x, y)\leqq U_\omega(x, y)$$
$$\leqq U_\omega(e, y)/P_\omega(JP_\omega)^i(e, x)$$
$$=\nu_\omega(y)/P_\omega(JP_\omega)^i(e, x);$$

un raisonnement analogue au précédent permet de prouver l'intégrabilité annoncée.

Posons $Vf(x)=f(x)+Uf(x)$ si $x\neq e$ et $Vf(e)=f(e)$. On sait que si le support de f est fini et $\lambda_\omega(f)=0$, alors $f=Vf-P(Vf)$, d'où

$$\sum_0^{n-1}P^i f=Vf-P^n Vf, \qquad (2)$$

(*voir* [8]).

Soient f et g des fonctions positives à support fini, ζ et η des mesures positives à support fini, et posons :

$$Z^n_\omega(\eta, \xi; g, f)=\left(\sum_0^n\langle\eta, P^i_\omega g\rangle\right)\Big/\sum_0^n\langle\xi, P^i_\omega f\rangle.$$

On sait que Z^n converge vers $\langle \eta, 1 \rangle \nu_\omega(g)/\langle \xi, 1 \rangle \nu_\omega(f)$. Admettons que $\operatorname{Log} Z_n^\omega$ soit équi-intégrable (*voir* ci-dessous) et soient a et $b \in \Gamma$; la suite

$$Z^n(\tau^b(\eta), \tau^a(\xi); g, f) - Z^n(\eta, \xi; f, g)$$

converge vers 0 puisque les limites ne font intervenir que les masses des mesures. Mais

$$\sum_0^n \langle \tau^b(\eta), P_\omega^i(g) \rangle = \sum_0^n \langle \eta, P_{\theta^b\omega}^i(g \circ \tau^b) \rangle,$$

donc

$$E \operatorname{Log} Z^n(\tau^b(\eta), \tau^a(\xi); g, f) = E \operatorname{Log} Z^n(\eta, \xi; g \circ \tau^b, f \circ \tau^a),$$

et par suite

$$E \operatorname{Log} \nu_\omega(g \circ \tau^b)/\nu_\omega(f \circ \tau^a) = E \operatorname{Log} \nu_\omega(g)/\nu_\omega(f).$$

Donc l'homomorphisme caractéristique $\chi(a) = E \operatorname{Log} \nu_\omega(f \circ \tau^a)/\nu_\omega(f)$ est nul. Vérifions maintenant que Z_ω^n est bien équi-intégrable. D'après (2), on a

$$\left| \sum_0^n \langle \eta, P^i g \rangle - \frac{\nu_\omega(g)}{\nu_\omega(f)} \langle \eta, P^i f \rangle \right| \leqq 2 \sup_\Gamma \left| V\left(g - \frac{\nu_\omega(g)}{\nu_\omega(f)} f\right) \right| \langle \eta, 1 \rangle,$$

d'où :

$$Z_\omega^n(\eta, \eta; g, f) \leqq \frac{\nu_\omega(g)}{\nu_\omega(f)} + \frac{2}{\sum_0^n \langle \eta, P^i f \rangle} \times \sup_\Gamma \left| V\left(g - \frac{\nu_\omega(g)}{\nu_\omega(f)} f\right) \right| \langle \eta, 1 \rangle,$$

en supposant $\langle \nu_\omega, f \rangle \neq 0$; on peut, dans cette inégalité, remplacer $\sup_\Gamma$ par $\sup_A$, où A est un ensemble fini contenant le support de f et de g, car V vérifie le principe du maximum.

En utilisant les inégalités

$$\operatorname{Log}(s+t) \leqq \operatorname{Log}(1+s) + \operatorname{Log}(1+t)$$

et

$$\operatorname{Log}(1+s) \leqq \operatorname{Log} 2 + \operatorname{Log}^+ s,$$

et l'intégrabilité déjà démontrée de Log $\nu_\omega(g)/\nu_\omega(f)$ et Log $U_\omega(x, y)$, on voit que $Z^n_\omega(\eta, \eta; g, f)$ est majoré par une fonction intégrable indépendante de n; et de plus minoré car $Z^n_\omega(\eta, \eta; g, f)\, Z^n_\omega(\eta, \eta; f, g)=1$.

En raisonnant de manière analogue sur les mesures (ou en appliquant la propriété précédemment démontrée à la chaîne duale par rapport à λ_ω) on voit que Log $Z^n_\omega(\eta, \xi; f, f)$ est équi-intégrable. Il en est donc de même de Log $Z^n_\omega(\eta, \xi; g, f)$ car

$$Z^n_\omega(\eta, \xi; g, f)=Z^n_\omega(\eta, \eta; g, f)\, Z^n_\omega(\eta, \xi; f, f).$$

COROLLAIRE. — *S'il existe un cocycle de mesures invariantes dont l'homomorphisme caractéristique n'est pas nul et sous les hypothèses d'intégrabilité précédentes la marche est transiente.*

Pour les marches réversibles, on peut aisément calculer l'homomorphisme caractéristique associé à la mesure réversible. En effet

$$\lambda(x)\, P(x, y)=\lambda(y)\, P(y, x),$$

d'où

$$\chi(x)=\text{E Log } \lambda(x)/\lambda(e)=\text{E Log } P(e, x)/P(x, e).$$

Si $d=1$, on retrouve le critère de Solomon, car les marches ne chargeant que les proches voisins sont réversibles, dans ce cas [10].

Dans le paragraphe suivant, nous montrerons qu'il existe des marches réversibles récurrentes sur $\mathbb{R}^d$. On peut, en utilisant les critères de Ichihara [4], trouver des conditions suffisantes pour qu'une marche réversible d'homomorphisme nul soit transitoire si $d \geqq 3$ (voir la *proposition* 6 ci-dessus).

Les énoncés ci-dessus peuvent s'étendre aux groupes localement compacts à base dénombrable. Pour une marche usuelle le *théorème* 4 dit que le groupe est unimodulaire (*voir* [3]).

II. DIFFUSIONS EN MILIEU ALÉATOIRE RÉCURRENTES

Le but de cette partie est de montrer que la croissance polynomiale des groupes portant des M.A.M.A. récurrentes réversibles n'est pas limité, comme pour les marches aléatoires usuelles.

Je vois plutôt étudier des diffusions récurrentes sur $\mathbb{R}^d$; pour avoir des exemples de marches aléatoires il suffira de considérer les noyaux résolvants $\alpha V_\alpha = (I - L/\alpha)^{-1}$.

Je supposerai que le générateur est globalement symétrique, en ce sens qu'il existe une fonction borélienne $\psi > 0$ et une matrice symétrique borélienne A_{ij}, telles que :

$$L f = \frac{1}{\psi} \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \qquad (f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d))$$

au sens des distributions. La matrice A_{ij} est supposée localement uniformément elliptique :

pour tout compact K il existe un réel positif $\lambda = \lambda(K)$ tel que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \forall x \in K \, |\xi|^2/\lambda \leqq \sum A_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leqq \lambda |\xi|^2,$$

et de même ψ est supposée localement minorée et majorée.

On sait que la diffusion minimale associée à L est récurrente si

$$\int_1^\infty \frac{r^{3-d} \, dr}{(\sum A_{ij}(x) x_i x_j) \sigma_r(dx)} = +\infty$$

en désignant par σ_r la probabilité uniforme sur la sphère de rayon r centrée en l'origine (*voir* Ichihara [4]; cet auteur suppose que $\psi \equiv 1$. Il est essentiel pour notre propos de ne pas faire cette hypothèse, mais les critères de récurrence restent inchangés).

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P, \theta^x, x \in \mathbb{R}^d)$ un système dynamique ergodique et des variables aléatoires $\psi^\omega(x)$, $A_{ij}^\omega(x)$ telles que pour tout ω les hypothèses précédentes soient vérifiées (les constantes peuvent dépendre de ω). Supposons que pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ il existe une variable aléatoire $U^a(\omega)$ telle que

$$\psi^{\theta^a \omega}(x) = U^a(\omega) \psi^\omega(x + a)$$

et (3)

$$A_{ij}^{\theta^a \omega}(x) = U^a(\omega) A_{ij}^\omega(x + a),$$

pour tous ω, x, i et j. Alors la résolvante V_α^ω est covariante, en ce sens que :

$$V_\alpha^{\theta^a \omega}(f) = [V_\alpha^\omega(f \circ \tau^{a^{-1}})] \circ \tau^a \qquad (\alpha > 0).$$

Rappelons en effet que si f est une fonction borélienne bornée *positive* à support compact, et si u_n est l'unique solution continue et nulle au bord, dans la boule B_n centrée en l'origine et de rayon n, de l'équation $(\alpha - L^{\omega}) u_n = f$, au sens des distributions, alors la suite u_n est croissante et son enveloppe supérieure est $V_{\alpha}^{\omega} f$.

Soit $a \in \mathbb{R}^d$ et v_n la suite correspondant à $\omega' = \theta^a \omega$. On sait que $v_n \in H^1(\mathring{B}_n)$ et

$$L^{\theta^a \omega} v_n = \frac{1}{\psi^{\theta^a \omega}} \sum \partial_i (A_{ij}^{\theta^a \omega} \partial_j v_n) \qquad \text{sur} \quad \mathring{B}_n,$$

donc

$$L^{\theta^a \omega} v_n = \frac{1}{\psi^{\omega} \circ \tau^a} \sum \partial_i (A_{ij}^{\omega} \circ \tau^a \partial_j v_n) \qquad \text{sur} \quad \mathring{B}_n$$

d'où

$$L^{\theta^a \omega} v_n = [L^{\omega} (v_n \circ \tau^{a^{-1}})] \circ \tau^a \qquad \text{sur} \quad \mathring{B}_n$$

ces transformations ayant bien un sens car $\partial_j v_n \in L^2(\mathring{B}_n)$ pour tout j et $L^{\theta^a \omega}(v_n) \in L^{\infty}(\mathring{B}_n)$.

Il en résulte que :

$$f = (\alpha - L^{\theta^a \omega}) v_n = [(\alpha - L^{\omega})(v_n \circ \tau^{a^{-1}})] \circ \tau^a \qquad \text{sur} \quad \mathring{B}_n$$

donc $v_n \circ \tau^{a^{-1}}$ converge vers $V_{\alpha}^{\omega}(f \circ \tau^{a^{-1}})$, et v_n vers $V_{\alpha}^{\theta^a \omega}(f)$ ce qui démontre la covariance annoncée.

THÉORÈME 5. — *Soient* $(\Omega, \mathscr{A}, P, \theta^x, x \in \mathbb{R}^d)$ *un système dynamique ergodique,* $(B_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ *un champ aléatoire à accroissements stationnaires et à trajectoires continues issues de l'origine et* $a_{ij}(\omega)$ *une matrice aléatoire symétrique telle que* $0 < \alpha |x|^2 \leqq (a(\omega) x, x) \leqq \beta |x|^2$, *où* $0 < \alpha \leqq \beta < +\infty$ *sont des constantes. S'il existe* $\varepsilon > 0$ *et* $\eta > 0$ *tels que :*

$$\limsup_{t \to \infty} P\Big(\sup_{t - \varepsilon \leqq |x| \leqq t} B_x / \operatorname{Log} t \leqq -(d-1) - \eta \Big) > 0,$$

alors pour presque tout ω, *la diffusion minimale de générateur :*

$$L^{\omega} f(x) = e^{-B_x(\omega)} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j}(\theta^x \omega) e^{B_x(\omega)} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(x)$$

est récurrente.

Preuve. — D'après le critère rappelé ci-dessus, il suffit de montrer que :

$$\int_1^\infty \frac{dr}{r^{d-1}\int_{|u|=1}\left(\sum_{i,j} a_{ij}(\theta^{ru}\omega)\,u_i u_j\right) e^{B_{ru}(\omega)}\,du} = +\infty,$$

ce qui sera assuré si la variable aléatoire Z définie par

$$Z = \int_1^\infty \exp - \sup_{u \in S_{d-1}} B_{ru}(\omega) \frac{dr}{r^{d-1}}$$

est-elle même infinie.

Posons $\tilde{B}_{r,s} = \underset{r \leqq |x| \leqq s}{sup} B_x$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$Z \geqq \sum_{k \geqq 1} \frac{\varepsilon}{[1+(k+1)\varepsilon]^{d-1}} \exp - \tilde{B}_{1+k\varepsilon,\ 1+(k+1)\varepsilon},$$

d'où

$$\sup_k P\left(\frac{\varepsilon}{[1+(k+1)\varepsilon]^{d-1}} \exp - \tilde{B}_{1+k\varepsilon,\ 1+(k+1)\varepsilon} > a\right) \leqq P(Z > a)$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$, i. e. en posant $t = 1 + (k+1)\varepsilon$,

$$P\left(\frac{1}{\operatorname{Log} t} \tilde{B}_{t-\varepsilon,\ t} \leqq -(d-1) - \frac{1}{\log t} \operatorname{Log} \frac{a}{\varepsilon}\right) \leqq P(Z > a),$$

donc si $\eta > 0$, on aura :

$$p = \limsup_{t \to \infty} P\left(\frac{1}{\operatorname{Log} t} \tilde{B}_{t-\varepsilon,\ t} \leqq -(d-1) - \eta\right) \leqq P(Z > a),$$

et par suite $p \leqq P(Z = +\infty)$ puisque a est arbitraire.

Nous venons de montrer que Z est infini sur un ensemble de mesure positive. Par ailleurs l'énergie de la probabilité d'atteinte de A, soit $e_\omega(A)$ est la borne inférieure de $\int_{A^c} A_{ij}^\omega \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx$, prise sur l'ensemble des fonctions $f \in H^1_{loc}(A^c)$, continues sur $\bar{A}^c$, égale à 1 sur ∂A et nulles à l'infini. La stationnarité de B montre que (3) est satisfaite par le générateur L^ω. D'où $e_{\theta^a\omega}(A) = U^a(\omega) \times e_\omega(A - a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}^d$. Il en résulte que $e_{\theta^a\omega}(A) = 0$ si et seulement si $e_\omega(A - a) = 0$ et par suite l'ensemble des ω

tels que L^{ω} soit récurrent, qui est aussi l'ensemble des ω tels qu'il existe une boule K telle que $e_{\omega}(K)=0$ (*voir* [4]) est θ-invariant. Donc, sous les hypothèses du théorème, L^{ω} est récurrent pour presque tout ω. La construction ci-dessus s'étend vraisemblablement aux groupes nilpotents gradués.

Exemple. — Supposons que le champ (B_x) soit autosimilaire, i. e. il existe $\alpha>0$ tel que les champs $(B_{\lambda x})$ et $(\lambda^{\alpha} B_x)$ aient même loi pour tout $\lambda>0$; la condition ci-dessus est équivalente à $P(\sup_{|x|=1} B_x \leqq 0)>0$. Elle est donc satisfaite si le support du champ $(B_x)_{|x|=1}$ contient une fonction strictement négative, comme me l'a fait rematquer O. Adelman.

Vérifions-le pour les Browniens à d paramètres (*voir* [11]). Il nous suffit de voir que si μ est une mesure bornée sur la boule unité telle que $E\left(\int B_t\, d\mu(t)\right)^2=0$, elle est nécessairement concentrée en l'origine.

Or $\int B_t\, d\mu(t)=0$ p. s., d'où $E\int B_s B_t\, d\mu(t)=0$ et par suite

$$\int |t|^{\beta}+|s|^{\beta}-|t-s|^{\beta}\, d\mu(t)=0$$

pour tous $s\in\mathbb{R}^d$. En remplaçant s par λs et en faisant un développement asymptotique en $\lambda\to+\infty$, on voit que $\int t\, d\mu(t)=0$ et $\int |t|^{\beta}\, d\mu(t)=0$ si $0<\beta<2$.

Il s'ensuit que si μ est une mesure positive non concentrée en l'origine, la loi de $\int B_t\, d\mu(t)$ n'est pas dégénérée sur $\mathbb{R}$; si le signe de μ n'est pas constant, la loi de $\left(\int B_t\, d\mu_+(t), \int B_t\, d\mu_-(t)\right)$ n'est pas dégénérée sur $\mathbb{R}^2$ d'après ce qui précède, donc celle de $\int B_t\, d_{\mu}(t)$ ne l'est pas non plus sur $\mathbb{R}$.

Terminons par un critère de *transience*.

PROPOSITION 6. — *Si le champ* (B_x) *est gaussien et si l'ensemble des* θ *sur la sphère unité tels que :*

$$\limsup_{t\to\infty} E(B_{t\theta})^2/\mathrm{Log}\, t<2(d-2)$$

est de mesure de Lebesgue strictement positive, alors pour presque tout ω, *la diffusion minimale de générateur* L^{ω} *est transiente.*

Preuve. — Elle découle facilement de la condition de transience de Ichihara, à savoir que l'ensemble des θ tels que :

$$\int_{1}^{\infty} e^{-B_{t\theta}} dt/t^{d-1} < +\infty$$

est de mesure strictement positive. Si B est gaussien, on a :

$$E\int_{1}^{\infty} e^{-B_{t\theta}} dt/t^{d-1} = \int_{1}^{\infty} e^{(1/2)\,E\,(B_{t\theta})^2}\, dt/t^{d-1},$$

et la condition ci-dessus s'en suit en écrivant que :

$$e^{1/2\,E\,|B_{t\theta}|^2}/t^{d-1} \leqq C(\theta)/t^{1+\varepsilon}$$

avec $\varepsilon > 0$.

Remarque. — Lorsque $d \geqq 3$ ce résultat est en contradiction apparente avec ceux de [7] et [9]. Mais ces auteurs, en supposant que la moyenne de la marche est nulle pour tout environnement limitent de ce fait beaucoup les effets de l'environnement comme on peut s'en convaincre, et donc la classe de marche aléatoire qu'ils étudient. Il n'y a vraisemblablement pas dans cette classe, si $d \geqq 3$, de marches récurrentes.

Signalons enfin les travaux de Andjels, Kalikov, Key et Solomon sur la récurrence et la transience des marches aléatoires en milieu aléatoire (*voir* [1], [5], [6], [10]).

RÉFÉRENCES

[1] E. ANDJEL, *A Note on One-Dimensional Random Walk in Random Environment* (à paraître).

[2] Y. GUIVARC'H, Exposés et travaux sur les marches aléatoires en milieu aléatoire.

[3] Y. GUIVARC'H, M. KEANE et B. ROYNETTE, Marches aléatoires sur les groupes de Lie, *L.N. in Math.*, vol. **624**.

[4] K. ICHIHARA, Some Global Properties of Symmetric Diffusion Process, *Publ. R.I.M.S., Kyoto*, vol. **14**, 1978, p. 441-486.

[5] S. KALIKOV, Generalized Random Walk in a Random Environment, *The Annals of Proba.*, vol. **9**, n° 5, 1981, p. 753-768.

[6] KEY, Recurrence and Transience Criteria for Random Walk in a Random Environment, *Annals of Proba.*, vol. **12**, n° 2, 1984, p. 529-560.
[7] G. LAWLER, A Discrete Stochastic Integral Inequality and Balanced Random Walk in a Random Environment, *Duke Math. J.*, vol. **50**, n° 4, 1983, p. 1261-1274.
[8] D. REVUZ, *Markov Chains*, North Holland.
[9] V. ANSHELEVICH, K. KHANIN et Y. SINAÏ, Symmetric Randoms Walks in Random Environments, *Comm. Math. Phys.*, vol. **85**, 1982, p. 449-470.
[10] F. SOLOMON, Random Walks in a Random Environment, *Annals of Proba.*, vol. **3**, 1975, p. 1-31.
[11] P. LEVY, *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Gauthier-Villars, Paris, 1948.
[12] R. DURRETT, Multidimensional Random walks in Random Environments with Subclassical Limiting Behavior, *Comm. Math. Phys.*, vol. **104**, n° 87, 1986, p. 102.
[13] C. SUNYACH, Marches aléatoires en milieu aléatoire récurrentes sur un groupe, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. **303**, 1986, p. 479-481.

(*Manuscrit reçu le* 16 *juin* 1986.)