ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ALAIN ROUAULT

Probabilités de présence dans un processus de branchement spatial markovien

Annales de l'I. H. P., section B, tome 23, nº 1 (1987), p. 37-61

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1987__23_1_37_0>

© Gauthier-Villars, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 23, n° 1, 1987, p. 37-61. *Probabilités et Statistiques*

Probabilités de présence dans un processus de branchement spatial markovien

par

Alain ROUAULT
Unité Associée 743, A. D. 4, Mathématique (Bât. 425),
91405 Orsay Cedex

RÉSUMÉ. — Pour un processus de Galton-Watson $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous-critique, n^{-1} Log $P(Z_n > 0)$ et n^{-1} Log EZ_n ont même limite Log m. Nous avons étendu ce résultat [*8*] aux processus de branchement spatiaux homogènes au voisinage d'un point en zone dite sous-critique. Nous étudions ici le cas markovien dans l'asymptotique naturelle des grandes déviations et montrons que, sous une hypothèse de sous-criticité, on a un résultat similaire pour la probabilité de présence au « voisinage » de x, le rôle de $-$ Log m étant joué par l'inf des intégrales d'action de chemins aboutissant en x.

Mots-clés : Spatial branching process, large deviations, action integral, Cramer transform.

ABSTRACT. — For a subcritical Galton-Watson process $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, n^{-1} Log $P(Z_n > 0)$ and n^{-1} Log EZ_n have the same limit Log m. We extended this result [*8*] to branching random walks in the neighbourhood of a point in an area called subcritical. Here we study markovian case in the natural framework of large deviations and show, under a subcritical hypothesis, a similar result for the presence probability in the neighbourhood of x, with $-$ Log m replaced by the infimum of action integrals of paths reaching x.

Vol. 23/87/01/37/25/$ 4,50/© Gauthier-Villars

INTRODUCTION

Un processus de Galton-Watson $(Z_n)_{n\geq 0}$ de moyenne m, avec $Z_0 = 1$, vérifie

i) $EZ_n = m^n$.

S'il est sous critique ($m < 1$) il vérifie de plus :

ii) $\lim_n Z_n = 0$ p. s.

iii) $\underline{\lim}_n \frac{1}{n} \operatorname{Log} P(Z_n > 0) \geq \operatorname{Log} m$ dès que $EZ_1 \operatorname{Log} Z_1 < \infty$ [5].

i) et *iii*) ont comme conséquence immédiate (inégalité de Markov)

iv) $\lim_n \frac{1}{n} \operatorname{Log} P(Z_n > 0) = \operatorname{Log} m$.

L'évolution d'un processus de branchement spacial homogène Z_n sur $\mathbb{R}$ (mesure de comptage sur $\mathbb{R}$) est décrite dans [2] [3]. Si $\mu = EZ_1$ est l'espérance du processus de reproduction on a facilement $EZ_n = \mu^{*n}$ et donc, si h est la transformée de Cramer de μ (duale de Legendre de la Log-Laplace de μ, supposée définie partout [1] [4]), pour tout (a, δ) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$ si Δ_a^δ désigne $[a, a + \delta)$ ou $(a - \delta, a]$ suivant le signe de $h'(a)$, on a notamment :

i') $\lim_n \frac{1}{n} \operatorname{Log} EZ_n(n\Delta_a^\delta) = -h(a)$.

La fonction $-h$ joue le rôle de $\operatorname{Log} m$ et si $h(a) > 0$ on a [2]

ii') $\lim_n Z_n(n\Delta_a^\delta) = 0$ p. s.

Dans [8] nous avons appelé zone sous-critique la région $h > 0$ et montré l'analogue de *iii*) sous une hypothèse de moment d'ordre 2 pour le nombre d'enfants par individu. On se propose ici, dans le cas spatial markovien non homogène de montrer, sous une hypothèse (k Log k) le résultat type *iii*) correspondant, conjecturé en [11] et énoncé en [9]. Le résultat type *i*), beaucoup plus simple est traité comme cas particulier en [10].

On se donne une famille indexée par $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ (temps, espace) de lois de probabilité sur $\mathcal{M}$, espace des mesures ponctuelles finies sur $\mathbb{R}$. L'élément générique est $\mathcal{P}_{t,x}(dv)$, ayant une espérance notée $\mu_{t,x}$, mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}$. $\mathcal{P}_{t,x}$ décrit, à l'échelle 1, la loi des positions des enfants d'un individu situé en x à l'instant t. Si besoin est, on particularisera $\mathcal{P}_{t,x}$ en supposant qu'il est découplé, c'est-à-dire construit à partir d'un nombre aléatoire N (de fonction génératrice $g_{t,x}$) de copies de v. a. indépendantes tirées suivant une loi $\mu_{t,x}^0$. Le cas homogène correspond à $\mathcal{P}_{t,x} \equiv \mathcal{P}$ pour tout t, x.

On construit une famille indexée par ε tendant vers 0 de processus de branchement spatiaux. Pour ce faire, on se donne $x_0 \in \mathbb{R}$, position d'un ancêtre (individu de la génération 0). Il vit un temps ε puis est remplacé par des enfants dont les positions forment un élément (aléatoire) de $\mathscr{M}$ obtenu de la manière suivante : on tire un élément de $\mathscr{M}$ suivant $\mathscr{P}_{\varepsilon,x_0}$, on lui applique une homothétie de rapport ε puis une translation de vecteur x_0. Les enfants de l'ancêtre forment la première génération et sont datés de l'instant ε, de sorte qu'un tel individu, situé en x, sera à l'instant 2ε remplacé par des enfants dont les positions formeront un élément de $\mathscr{M}$ obtenu par tirage suivant $\mathscr{P}_{2\varepsilon,x}$, ε-homothétie et x-translation. On itère la procédure et on s'intéresse pour tout t à l'élément de $\mathscr{M}$ formé par les individus en vie à t $\left(\text{donc de génération } \left[\frac{t}{\varepsilon}\right]\right)$.

L'asymptotique est celle des grandes déviations : les reproductions sont de plus en plus fréquentes (instants $k\varepsilon$, $k \in \mathbb{N}$) et les sauts de plus en plus petits (rapport ε). L'outil fondamental est l'intégrale d'action ([*1*] [*4*] [*12*] : pour les marches aléatoires) définie sur $\mathscr{A}[t_0, t_1]$, ensemble des fonctions absolument continues de $[t_1, t_2]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{I}(t_1, t_2, \varphi) = \int_{t_1}^{t_2} h(s, \varphi(s), \dot{\varphi}(s))ds$$

où $h(t, x, \cdot)$ est la transformée de Cramer [*13*] de la mesure $\mu_{t,x}$.

Un chemin doit être vu comme la limite (en ε) d'une ligne généalogique constituée par les positions des ancêtres successifs d'un individu. Dans le cas homogène, pour des raisons de convexité, ces chemins sont rectilignes. La présence éventuelle de population près de x à l'instant t s'étudie à partir de l'existence de lignes généalogiques dans des « tubes » autour de chemins conduisant de x_0 à x. On montre que si $\inf_{\substack{\varphi(0)=x_0 \\ \varphi(t)=x}} \mathrm{I}(0, t, \varphi)$ est atteint pour un φ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant « grosso-modo » $\inf_{0 \leq s \leq t} h(s, \varphi(s), \dot{\varphi}(s)) > 0$ (notion de sous-criticité) alors l'ε-logarithme de la probabilité, partant de x_0 de présence près de x à l'instant t est, à la limite minorée par (en fait, tend vers, grâce à [*10*]) $- \inf_{\substack{\varphi(0)=x_0 \\ \varphi(t)=x}} \mathrm{I}(0, t, \varphi)$.

Ayant besoin de lignes généalogiques, on construit au § I un espace de probabilité sur les arbres spatiaux aléatoires dans l'esprit de [*7*]. § II sert à présenter les outils de grandes déviations utilisés par la suite. Au § III on établit une minoration de probabilité de présence dite exacte (non-asymptotique). Enfin au § IV on établit les théorèmes limites, d'abord relativement à un tube, puis avec optimisation.

§ I. ARBRES SPATIAUX ALÉATOIRES

Introduction.

Pour l'étude de notre modèle, il nous faut construire un processus de branchement spatial assez général. Le processus le plus simple, que l'on peut appeler homogène est obtenu en conjuguant deux phénomènes aléatoires simples : un processus de Galton-Watson et une marche aléatoire. Chaque individu d'un Galton-Watson est muni d'une position aléatoire dans $\mathbb{R}$ et les variations de position d'une génération à l'autre sont obtenues par des copies indépendantes d'une même loi. Le processus général consiste à :

1) se donner les positions des descendants immédiats d'un individu globalement, c'est-à-dire sous la forme d'une mesure ponctuelle;
2) imposer un caractère markovien : la loi de cette mesure ponctuelle ne dépend que de la position de l'individu considéré (et de l'instant);
3) garder la propriété de branchement : indépendance des descendances d'individus différents appartenant à la même génération.

Dans plusieurs études nous avons eu besoin de renseignements précis sur l'histoire d'un individu, c'est-à-dire les positions de ses différents ascendants. Un formalisme adéquat est fourni par une extension au cas markovien des arbres marqués de Neveu [7].

Mesures ponctuelles.

Soit $\overline{\mathscr{M}_k}$ l'ensemble des mesures de Radon positives sur $\mathbb{R}^k$, $\mathscr{B}(\overline{\mathscr{M}_k})$ la tribu borélienne pour la topologie vague. L'ensemble $\mathscr{M}_k$ des mesures ponctuelles finies (sommes finies de masses de Dirac) appartient à $\mathscr{B}(\overline{\mathscr{M}_k})$ et est muni de la tribu trace notée $\mathscr{B}(\mathscr{M}_k)$. On note $\mathscr{M}$ pour $\mathscr{M}_1$.

Si ∂ désigne un point extérieur à $\mathbb{R}$ et δ_x la masse de Dirac en x, on définit facilement une indexation mesurable, c'est-à-dire une application mesurable φ de $\mathbb{N}_* \times \mathscr{M}$ dans $\mathbb{R} \cup \partial$ telle que :

$$\mu = 0 \Rightarrow \varphi(k, \mu) = \partial \quad \text{pour tout } k$$
$$\mu \neq 0 \Rightarrow \varphi(k, \mu) = \partial \quad \text{pour } k > \mu(1)$$

et
$$\mu = \sum_{k=1}^{\mu(1)} \delta_{\varphi(k,\mu)} .$$

Autrement dit, à l'extension naturelle près, $\varphi(k, \mu)$ désigne le k-ième point de μ. On notera $\varphi_k(\mu)$ pour $\varphi(k, \mu)$. Voir par exemple [*15*].

Espace probabilisable des arbres marqués.

L'outil présenté dans ce paragraphe est dû à Neveu [*7*]. Nous en énonçons succinctement les grandes lignes, avec de légères modifications de notations, et l'appliquons à notre modèle.

U désigne l'espace des suites finies $u = j_1 \dots j_n$ d'éléments de $\mathbb{N}_*$. La suite vide ϕ est dans U. La longueur de $u \in \mathrm{U}$ se note $|u|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{ u \in \mathrm{U} : |u| = n \}$ coïncide avec $\mathbb{N}_*^n$ et donc
$$\mathrm{U} = \sum_{n \geq 0} \mathbb{N}_*^n .$$

On note f la fonction de U dans U définie par :
$$f(\phi) = \phi, \qquad f(j_1 \dots j_n) = j_1 \dots j_{n-1} \quad \text{pour tout } n \geq 1 .$$

La concaténée de u et v de U se note uv.

Un arbre est par définition un sous-ensemble $\tilde{\omega}$ de U, vérifiant

* pour tout n $\quad \tilde{\omega} \cap \mathbb{N}_*^n$ est fini

** $f(\tilde{\omega}) \subset \tilde{\omega}$.

Remarquons que ** entraîne $\phi \in \omega$. Les éléments de $\tilde{\omega}$ sont ses nœuds, $\tilde{\Omega}$ est l'espace des arbres et pour $u \in \mathrm{U}$, $\tilde{\Omega}_u = \{ \tilde{\omega} : u \in \tilde{\omega} \}$. On note $\tilde{\mathscr{I}}$ la tribu engendrée par les $\tilde{\Omega}_u$. Pour $u \in \mathrm{U}$, on note $\tilde{\Theta}_u$ l'application mesurable de $\tilde{\Omega}_u$ dans $\tilde{\Omega}$ définie par :
$$\tilde{\Theta}_u(\tilde{\omega}) = \{ v : v \in \mathrm{U} \text{ et } uv \in \tilde{\omega} \}.$$

(On a translaté l'arbre à son noeud u).

L'espace mesurable $\mathscr{M}, \mathscr{B}(\mathscr{M})$ est l'espace des marques. *Un arbre marqué* sera défini par la donnée d'un arbre $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ et d'une marque $v_u \in \mathscr{M}$ pour chaque noeud $u \in \tilde{\omega}$ soit
$$\omega = (\tilde{\omega} ; (v_u, u \in \tilde{\omega})) .$$

En fait nous marquons chaque individu avec la mesure ponctuelle représentant les positions de ses enfants.

Ω désigne l'espace des arbres marqués et $p : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ la projection canonique. Si $u \in \mathrm{U}$, v_u est une application de $\Omega_u = p^{-1}(\tilde{\Omega}_u)$ dans $\mathscr{M}$. Ω est munie de la tribu $\mathscr{I}$ engendrée par $p^{-1}(\tilde{\mathscr{I}})$ et les applications $v_u : \Omega_u \rightarrow \mathscr{M}$ ($u \in \mathrm{U}$). On note pour tout n, $\mathscr{F}_n$ la tribu engendrée par les Ω_u tels que $|u| \leq n$ et par les v_u tels que $|u| < n$.

Ω est muni des translations $\Theta_u : \Omega_u \rightarrow \Omega$ définies par

$$\Theta_u(\omega) = [\tilde{\Theta}_u(\tilde{\omega}), (v_{uv}, v \in \tilde{\Theta}_u(\tilde{\omega}))] \quad \text{si} \quad \omega = (\tilde{\omega}, (v_u, u \in \tilde{\omega})).$$

On a

$$p \circ \Theta_u = \tilde{\Theta}_u \circ p \quad \text{sur} \quad \Omega_u = p^{-1}(\tilde{\Omega}_u).$$

Si on note $v = v_\phi$ on a pour tout u de U

$$v_u = v \circ \Theta_u \quad \text{sur} \quad \Omega_u \tag{1.1}$$

si $u \in \mathrm{U}$ avec $|u| \geq 1$, $u = j_1 \dots j_n$ on note

$$\sigma(u, \omega) = \varphi_{j_n}(v_{j_1 \dots j_{n-1}}) \quad \text{pour} \quad \omega \in \Omega_u$$

($\sigma(u, \omega)$ donne la position de l'individu identifié au noeud u).

L'application $\sigma(u) = \sigma(u, \cdot)$ de Ω_u dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\partial\}$ est $\Omega_u \cap \mathscr{F}_n$ mesurable.

Dans les mêmes conditions on note

$$s(u) = (\sigma \circ f^{n-1}(u), \sigma \circ f^{n-2}(u), \dots, \sigma \circ f(u), \sigma(u))$$

application de Ω_u dans $\overline{\mathbb{R}}^n$, $\Omega_u \cap \mathscr{F}_n$ mesurable.

Dans le but d'étudier la n^{ieme} génération, $n \geq 1$, on définit

$$z_n(\omega) = p(\omega) \cap \mathbb{N}_*^n$$

$\tilde{\mathscr{I}}$ est engendrée par les $(z_n, n \in \mathbb{N})$. On note $\tilde{\mathscr{F}}_n$ la tribu engendrée par $(z_0, \dots, z_n)$.

Construction de l'espace probabilisé.

Nous probabilisons Ω en adaptant la construction de [7] au cas markovien : celle-ci consiste à prendre un espace canonique Ω^* plus gros et de structure plus simple. En fait $\Omega^* = \mathscr{M}^{\mathrm{U}}$ convient mais la structure markovienne exige quelques vérifications.

PROPOSITION 1. — Pour toute famille mesurable $\mathscr{P}_{i,x}$, $(i, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ de probabilités sur $(\mathscr{M}, \mathscr{B}(\mathscr{M}))$ il existe une (unique) famille mesurable $\mathrm{P}_{i,x}$, $(i, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ de probabilités sur $(\Omega, \mathscr{I})$ telle que pour tout (i, x) de $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$:

1) la loi de v sous $P_{i,x}$ est $\mathscr{P}_{i,x}$

2) pour tout u de U on a $P_{i,x}(\Omega_u \cap \{ \sigma(u) = \partial \}) = 0$

3) pour tout $n > 0$, conditionnellement à $\mathscr{F}_n$ sur $(\Omega, \mathscr{I}, P_{i,x})$ les v. a. Θ_u, $u \in z_n$ sont indépendantes et de lois respectives $P_{\overline{\sigma}(u)}$ où $\overline{\sigma}$ fonction de U dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ est définie par

$$\overline{\sigma}(\phi) = (i, x) \qquad \overline{\sigma}(u) = (i + |u|, \sigma(u)) \qquad \text{si} \quad |u| \geq 1 .$$

Ceci signifie que pour tout choix des fonctions mesurables positives g_u de Ω dans $\mathbb{R}$ on a :

$$E_{i,x}^{\mathscr{F}_n}\left[\prod_{u \in z_n} g_u \circ \Theta_u\right] = \prod_{u \in z_n} E_{\overline{\sigma}(u)}(g_u) .$$

Démonstration succincte. — Soit $\Omega^* = \mathscr{M}^{\mathrm{U}}$ muni des applications coordonnées v_u^* de Ω^* dans $\mathscr{M}$, de la tribu canonique $\mathscr{I}^*$ et pour tout $n \geq 1$ de $\mathscr{F}_n^*$ engendrée par tous les v_u^* pour $|u| \leq n - 1$. Pour tout (i, x) on construit sur $(\Omega^*, \mathscr{I}^*)$ une probabilité par prolongement (Kolmogorov) d'un système projectif, indexé par l'ensemble des arbres finis, muni de la relation d'ordre naturelle (inclusion), par récurrence sur la hauteur des arbres. En passant d'une hauteur à la suivante on impose évidemment les propriétés requises. On définit la position $\sigma^*(u)$ de $u = j_1 \dots j_n \in \mathrm{U}$ par $\sigma^*(u) = \varphi_{j_n}(v^*_{j_1 \dots j_{n-1}})$ et $\sigma^*(\phi) = x$. L'espace $(\Omega^*, \mathscr{I}^*)$ est trop gros car il introduit des positions cimetières (ou individus fictifs). On transporte cette structure sur Ω grâce à l'application ψ de Ω^* définie par :

$$\omega^* \in \Omega^* \qquad \psi(\omega^*) = \{ (u, v_u^*(\omega^*)) : \forall k \leq |u| \quad \sigma^*(f^k u) \neq \partial \} .$$

On vérifie que $p(\psi(\omega^*))$ est un arbre, que ψ est mesurable, que pour tout n on a $\psi^{-1}(\mathscr{F}_n) \subset \mathscr{F}_n^*$ et que $\Theta_u \circ \psi = \psi \circ \Theta_u^*$ sur $\psi^{-1}(\Omega_u)$. On appelle $P_{i,x}$ l'image de $P_{i,x}^*$ par ψ. Les propriétés 1, 2, 3 sont alors des conséquences de la construction (voir [7] dans le cas homogène).

Conséquences : mesures de comptage.

Pour tout (i, x), $P_{i,x}$ ne charge que $\psi(\Omega^*)$ sur lequel on définit, (les sommes vides valant 0 par convention), pour tout $n \geq 1$

$$\zeta_n(\omega) = \sum_{u \in z_n(\omega)} \delta_{\sigma(u)} \quad , \quad Z_n(\omega) = \sum_{u \in z_n(\omega)} \delta_{s(u)} .$$

Par construction ζ_n (resp. Z_n) est une application $\mathcal{F}_n$-mesurable de Ω dans $\mathcal{M}$, $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ (resp. $\mathcal{M}_n$, $\mathcal{B}(\mathcal{M}_n)$). On note $\zeta_n(\omega, g)$ (resp. $Z_n(\omega, g)$) ou $\zeta_n(g)$ (resp. $Z_n(g)$) la valeur de ζ_n (resp. Z_n) appliquée à la fonction g.

Si n est un entier positif fixé, on note $\mathcal{U}^n$ l'ensemble des suites finies de longueur au plus n de nombres réels, y compris la suite vide. On peut écrire si $\mathbb{R}^0$ désigne $\{\phi\}$, $\mathcal{U}^n = \sum_0^n \mathbb{R}^k$. On note $|\phi| = 0$ et si $0 < k \leq n$ et $l \in \mathbb{R}^k$, $|l| = k$. La concaténation, notée [,], se définit de manière naturelle par :

si $l \in \mathcal{U}^n$, $[\phi, l] = [l, \phi] = l$
si $l^1, l^2 \in \mathcal{U}^n$, $|l^1| = k_1$, $|l^2| = k_2$, $k_1 + k_2 \leq n$, $[l^1, l^2] = (l_1^1, \ldots, l_{k_1}^1, l_1^2, \ldots, l_{k_2}^2)$.

Si γ est une fonction mesurable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, on définit, pour chaque l vérifiant $|l| \leq n - 1$, la fonction γ_l de $\mathbb{R}^{n-|l|}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\gamma_l(l') = \gamma([l, l']) .$$

D'après la définition des opérateurs Θ de translation on a, pour $0 < k \leq n$ et $\omega \in \Omega$:

$$Z_n(\omega, \gamma) = \sum_{u \in z_{n-k}(\omega)} Z_k(\Theta_u(\omega), \gamma_{s(u)}) \tag{1.3}$$

et compte tenu de la proposition 1, à k, γ fixés les variables aléatoires $\omega \to Z_k(\Theta_u(\omega), \gamma_{s(u)})$, $\omega \in z_{n-k}$ sont pour tout (i, x_0) de $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $P_{i,x_0}^{\mathcal{F}_{n-k}}$-indépendantes. Pour $k = 1$ on a

$$Z_n(\gamma) = \sum_{u \in z_{n-1}} \nu_u(\gamma_{s(u)}) . \tag{1.4}$$

On supposera en fait que pour tout k, x, $\mathcal{P}_{k,x}$ a une espérance notée $Q(k, x, \cdot)$, mesure de Radon sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour toute fonction de $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ (continue à support compact), si ν est l'élément générique de $\mathcal{M}$ on a

$$\mathcal{E}_{k,x}\nu(f) = \iint_{\mathbb{R} \times \mathcal{M}} f(y)\nu(dy)\mathcal{P}_{k,x}(d\nu) = Q(k, x, f) .$$

On précise maintenant les propriétés demandées à Q.

§ II. NOYAUX ET CRAMER-CHERNOV

Ce paragraphe qui rassemble les propriétés requises par les mesures de transition — ou noyaux — est directement inspiré de Ventsel [*4*] [*12*], étendu au cas de masses différentes de 1, en liaison avec l'usage ultérieur pour les arbres spatiaux aléatoires.

1. Présentation.

Soit Q une fonction de $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \times \mathscr{B}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^+$ dite noyau, vérifiant

a) $\forall (i, A) \in \mathbb{N} \times \mathscr{B}(\mathbb{R}) \quad x \mapsto Q(i, x, A)$ est mesurable (Borel)

b) $\forall (i, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \quad A \mapsto Q(i, x, A)$ est une mesure finie sur $\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Q est dit markovien (resp. sous-markovien) si pour tout (i, x) de $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ on a $Q(i, x, \mathbb{R}) = 1$ (resp. ≤ 1). Pour tout (k, i, x) de $\mathbb{N}_* \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ on définit sur $\mathbb{R}^k$ la mesure $Q_k(i, x, \cdot)$ par la formule $(f \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^k))$

$$Q_k(i, x, f) = \int_{\mathbb{R}^k} f(y_1, \ldots, y_k) Q(i, x, dy_1) Q(i+1, y_1, dy_2) \ldots Q(i+k-1, y_{k-1}, dy_k).$$

Remarque 1. — Si $Q(i, x, \cdot)$ est l'espérance de $\mathscr{P}_{i,x}$ du § I, on déduit de la proposition 1 et de (1.4)

$$E_{i,x}^{\mathscr{F}_{n-1}} Z_n(\gamma) = \sum_{u \in z_{n-1}} Q(\overline{\sigma}(u), \gamma_{s(u)}) \tag{2.1}$$

et par récurrence

$$E_{i,x} Z_n(\gamma) = Q_n(i, x, \gamma). \tag{2.2}$$

On suppose que la fonction ψ de $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\psi(i, x, \theta) = \int_{\mathbb{R}} \exp \theta(\xi - x)\, Q(i, x, d\xi)$$

est finie partout et on note

$$G(i, x, \theta) = \operatorname{Log} \Psi(i, x, \theta). \tag{2.3}$$

Pour tout (i, x) on sait ([*1*] [*4*]) que la fonction $G(i, x, \cdot)$ est convexe et de classe $\mathscr{C}^\infty$ et on suppose que l'enveloppe convexe du support de $Q(i, x, \cdot)$

est $\mathbb{R}$, ce qui implique que sa transformée de Cramer [13], $H(i, x, \cdot)$ définie par

$$H(i, x, v) = \sup_{\theta} \theta v - G(i, x, \theta)$$

est finie partout et de classe $\mathscr{C}^\infty$ (en v).

REMARQUE 2. — S'il existe $M \geq 0$ tel que

$$\inf_{i,x,v} H(i, x, v) \geq -M \tag{2.5}$$

alors $e^{-M}Q$ est un noyau sous-markovien. En effet (2.3) entraîne $\operatorname{Log} Q(i, x, 1) = G(i, x, 0)$ et par dualité $G(i, x, 0) = \sup_v - H(i, x, v) \leq M$. On supposera désormais (2.5) vérifiée.

Pour toute fonction θ de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, on définit pour $(i, x, \xi) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^2$

$$\rho^\theta_{i,x}(\xi) = \exp\{\theta(i, x)(\xi - x) - G(i, x, \theta(i, x))\} \tag{2.6}$$

et le nouveau noyau Q^θ par :

$$Q^\theta(i, x, d\xi) = \rho^\theta_{i,x}(\xi) Q(i, x, d\xi) \tag{2.7}$$

Q^θ est toujours markovien et sa log-Laplace G^θ est fournie par la formule :

$$G^\theta(i, x, \eta) = G(i, x, \theta(i, x) + \eta) - G(i, x, \theta(i, x)). \tag{2.8}$$

Sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ on définit π_i, $i = 0, 1, \ldots$ la suite des applications coordonnées et pour $0 \leq i < j$, on note $\mathscr{G}_{i,j}$ la tribu engendrée par $\pi_i, \ldots, \pi_j$. Pour $l \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $i < j$ on pose :

$$R^\theta_{i,j}(l) = \prod_{k=i}^{j-1} \rho^\theta_{k,l_k}(l_{k+1}). \tag{2.9}$$

$R^\theta_{i,j}$ est $\mathscr{G}_{i,j}$ mesurable, on note $\tilde{R}^\theta_{i,j}$ sa projection sur $\mathbb{R}^{\{i,\ldots,j\}}$. Particularisons θ. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et θ la fonction de $(\mathbb{N} \times \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$(k, y) \to \frac{\partial H}{\partial v}(k, y, \lambda_{k+1} - \lambda_k) \tag{2.10}$$

(Nous forçons, à l'instant k, le déplacement sous-jacent à avoir la vitesse moyenne $\lambda_{k+1} - \lambda_k$.)

Notons pour $l \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$U^\lambda_i(l) = l_i - \lambda_i \qquad i \in \mathbb{N}$

$$V^\lambda(i, j, \lambda) = \theta(i, \lambda_i)\{l_{i+1} - l_i - \lambda_{i+1} + \lambda_i\} + \sum_{i+1}^{j-1} \theta(k, \lambda_k)\{l_{k+1} - l_k - \lambda_{k+1} + \lambda_k\} \tag{2.11}$$

U_i^λ (resp. $V^\lambda(i,j)$ est $\mathcal{G}_{i,i}$ (resp. $\mathcal{G}_{i,j}$) mesurable. La dualité relie de manière simple (2.9) et (2.11) par :

$$\operatorname{Log} R_{i,j}^\theta(l) = V^\lambda(i,j,l) + \sum_{k=i}^{j-1} H(k, l_k, \lambda_{k+1} - \lambda_k) \tag{2.12}$$

Q^θ étant markovien, on note encore π la chaîne canonique associée. (2.8) entraîne, avec des notations évidentes,

$$E_{i,x}^\theta(\pi_{i+1} - \pi_i) = \frac{\partial G}{\partial \theta}(i, x, \theta(i, x))$$

et donc sous Q_{i,λ_i}^θ les 2 suites $(0, (U_j^\lambda)_{j>i})$ et $(0, (V^\lambda(i,j))_{j>i})$ sont des martingales adaptées à $(\mathcal{G}_{i,j})_{j\geq i}$.

Nous allons maintenant introduire une notion de tube généralisé sur lequel la dérivée de Randon-Nikodym R^θ sera presque constante, ce qui permettra des évaluations de la mesure du tube, grâce à l'inégalité de Kolmogorov.

2. **Évaluations sur les tubes.**

Pour $i < j$ et $(u, v, \lambda) \in (\mathbb{R}_*^+)^2 \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$\Gamma^\lambda(i,j,u,v) = \bigcap_{i+1}^{j} \{ \, | U_k^\lambda | \leq u, | V^\lambda(i,k) | \leq v \, \} \tag{2.14}$$

qui appartient à $\mathcal{G}_{i,j}$. On note $\tilde{\Gamma}^\lambda(i,j,u,v)$ la projection de

$$\Gamma^\lambda(i,j,u,v) \cap \{ \, l : l_j = \lambda_i \, \} \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^{\{i+1,\ldots,j\}}.$$

On montre (par ex. d'après [*4*]) les lemmes suivants :

LEMME 1. — Si pour $i < j$ et $\lambda \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $u \in \mathbb{R}_*^+$ on pose

$$I_1(i,j,\lambda) = \sum_{k=i}^{j-1} H(k, \lambda_k, \lambda_{k+1} - \lambda_k) \tag{2.15}$$

et

$$\Delta(i,u) = \sup_{\substack{|k-k'|<i \\ |x-x'|\leq u \\ a\in\mathbb{R}}} \frac{H(k',x',a) - H(k,x,a)}{M + 1 + H(k,x,a)}$$

alors pour tout $v > 0$ les conditions $l \in \Gamma_\lambda(i,j,u,v)$ et $|\, l_i - \lambda_i \,| \leq u$ entraînent

$$\left|\, \mathrm{Log}\, R^\theta_{i,j}(l) - I_1(i,j,\lambda) \,\right| \leq D_1(i,j,u,v,\lambda)$$

où

$$D_1(i,j,u,v,\lambda) = v + \Delta(0,u)(M+1)(j-i) + I_1(i,j,\lambda)) . \qquad \blacksquare$$

LEMME 2. — Avec les notations du lemme 1 on pose

$$D(i,j,\lambda,u,v) = I_1(i,j,\lambda) + \mathrm{Log}\, Q_{j-i}(i,\lambda_i,\tilde{\Gamma}^\lambda(i,j,u,v))$$

$$D_2(i,j,\lambda) = \sup_{\substack{i\leq k\leq j-1\\ x}} \frac{\partial^2 G}{\partial\theta^2}(k,x,\theta(k,x))$$

$$D'_2(i,j,\lambda) = \sup_{\substack{i\leq k\leq j-1\\ x}} \left\{ \frac{\partial^2 G}{\partial\theta^2}(k,x,\theta(k,x))\,|\,\theta(k,x)\,|^2 \right\}$$

où λ et θ sont liés par (2.10).

On a alors

1) $D(i,j,\lambda,u,v) \leq D_1(i,j,\lambda,u,v)$

2) $D(i,j,\lambda,u,v) \geq -D_1(i,j,\lambda,u,v) + \mathrm{Log}\left\{1 - \frac{jD_2(i,j,\lambda)}{u^2} - \frac{jD'_2(i,j,\lambda)}{v^2}\right\}^+ .$

§ III. PROBABILITÉ DE PRÉSENCE. MINORATION EXACTE ET LEMMES TECHNIQUES

Nous allons établir des résultats comparables aux lemmes 2 et 3 de [*8*] mais plus complexes dans la mesure où le processus n'est pas homogène et plus précis dans la mesure où nous avons une formule exacte pour p (formule 3.6) préparant l'utilisation d'une hypothèse type ($k\,\mathrm{Log}\,k$) (lemme 4).

1. Définitions et notations.

On appelle processus ponctuel sur $\mathbb{R}$ découplé, une probabilité $\mathscr{P}$ sur $(M, \mathscr{B}(\mathscr{M}))$ [*8*] telle que $\mathscr{P}$ soit la loi de $\sum_{i=1}^{N} \delta_{\xi_i}$ où δ est la masse de Dirac, les ξ_i, $i = 1, 2, \ldots$ indépendantes et de même loi μ^0 et N (à valeurs dans $\mathbb{N}$) indépendantes des ξ_i. $\mathscr{P}$ a une espérance en même temps que N et pour toute f de $\mathscr{K}(\mathbb{R})$ on a :

$$\mathscr{E}\nu(f) = \int_{\mathscr{M}} \nu(f)\mathscr{P}(d\nu) = (\mathrm{EN})\mu^0(f) .$$

On se donne une famille mesurable $\mathscr{P}_{i,x}$, $(i, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ de processus ponctuels découplés. Suivant la proposition 1, on construit alors la famille $\mathrm{P}_{i,x}$, $(i, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ correspondante, dite processus de branchement spatial découplé. On suppose de plus que $\mathscr{P}$ a une espérance Q vérifiant les conditions de II.

Fixons $(n, i, x_0) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ et définissons $\bar{\tau}$ de $\mathscr{U}^n$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} &\bar{\tau}(\phi) = (i, x_0) \\ &\bar{\tau}(l) = (i + k, l_k) \quad \text{si} \quad 0 < k \leq n \quad l = (l_1, \ldots, l_k) \in \mathbb{R}^k . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Soit γ mesurable à support compact S de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$.

Si $l \in \mathscr{U}^n$ on définit

$$\begin{aligned} &\text{pour} \quad |l| \leq n - 1 \qquad && \mathrm{B}(l) = \{ \mathrm{Z}_{n-|l|}(\gamma_l) > 0 \} \\ & && p(l) = \mathrm{P}_{\bar{\tau}(l)}(\mathrm{B}(l)) \\ &\text{pour} \quad |l| = n && p(l) = \gamma(l) . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Si γ est une indicatrice, $p(\phi)$ est une probabilité de présence. On cherche en fait à la comparer à l'espérance correspondante (voir introduction). On définit donc q par :

$$|l| \leq n - 1 \Rightarrow q(l) = \mathrm{E}_{\bar{\tau}(l)}\mathrm{Z}_{n-|l|}(\gamma_l) . \tag{3.3}$$

Comme dans [*8*], une autre fonction utile, r, est définie par :

$$|l| \leq n - 1 \Rightarrow r(l) = \int_{\mathbb{R}} p_l(y)\mathrm{Q}(\bar{\tau}(l), dy) . \tag{3.4}$$

Si pour tout k tel que $1 \leq k \leq n$, $\pi_{1,k}$ désigne dans $\mathbb{R}^n$ la projection sur les k premières coordonnées, alors p, q, r ont des supports inclus dans

$$\tilde{\mathrm{S}} = \{ \phi \} + \sum_{k=1}^{n} \pi_{1,k}(\mathrm{S}) .$$

Pour le lemme suivant, qui permet une première minoration, on note

$$\mathrm{N} = \mathrm{Z}_1(1) = \nu(1) = \operatorname{card} z_1 \qquad (\text{voir § I})$$

et pour tout $(k, x, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \times [0, 1]$

$$\begin{aligned} &g_{k,x}(s) = \mathscr{E}_{k,x}s^{\mathrm{N}}, \quad m_{t,x} = \mathscr{E}_{k,x}\mathrm{N} = g'_{k,x}(1) = \mathrm{Q}(k, x, 1) \\ &\beta_{k,x} = \frac{\mathscr{P}_{k,x}(\mathrm{N} > 0)}{\mathscr{E}_{k,x}\mathrm{N}}, \quad \rho_{k,x}(s) = \mathscr{E}_{k,x}\left(\mathrm{N} - \frac{1 - s^{\mathrm{N}}}{1 - s}\right), \quad \rho_{k,x}(1) = 1. \end{aligned} \tag{3.5}$$

2. Lemme fondamental.

1) Pour tout l de $\mathcal{U}^n$ tel que $|l| \leq n-1$ on a

a) $$p(l) = r(l)\left[1 - \frac{1}{m_{\bar{\tau}[l)}}\rho_{\bar{\tau}(l)}\left(1 - \frac{r(l)}{m_{\bar{\tau}(l)}}\right)\right] \tag{3.6}$$

b) $$p(l) \geq \beta_{\bar{\tau}(l)} r(l). \tag{3.7}$$

2) Si pour $k \leq n-1$ on note

$$\eta_k = \inf_{\substack{|l|=k \\ l \in \tilde{S}}} \left[1 - \frac{1}{m_{\bar{\tau}(l)}}\rho_{\bar{\tau}(l)}\left(1 - \frac{q(l)}{m_{\bar{\tau}(l)}}\right)\right] \tag{3.8}$$

et si β vérifie
$$\beta \leq \inf_{l \in \tilde{S}} \beta_{\bar{\tau}(l)} \tag{3.9}$$

alors on a

$$p(\phi) \geq q(\phi) \prod_{k=0}^{n-1} (\eta_k \vee \beta). \tag{3.10}$$

Démonstration. — L'idée consiste à conditionner par rapport à la première génération. l est fixé dans la démonstration. D'après (1.3) on a :

$$B(l) = \bigcup_{u \in z_1} F_u \quad \text{où} \quad F_u = \{ Z_{n-|l|-1}(\Theta_u(\cdot), \gamma_{[l,\sigma(u)]}) > 0 \} \tag{3.11}$$

et d'après la proposition 1

$$P^{\mathcal{F}_1}_{\bar{\tau}(l)}(F_u) = P_{i+|l|+1,\sigma(u)}(Z_{n-|l|-1}(\gamma_{[l,\sigma(u)]}) > 0) = p_l(\sigma(u)) \tag{3.12}$$

et d'après l'indépendance conditionnelle

$$P^{\mathcal{F}_1}_{\bar{\tau}(l)}(B(l)^c) = \prod_{u \in z_1} [1 - p_l(\sigma(u)) \}$$

d'où

$$P^{N}_{\bar{\tau}(l)}(B(l)^c) = (1-\pi)^N \quad \text{avec} \quad \pi = \int_{\mathbb{R}} p_l(y)\mu^0_{\bar{\tau}(l)}(dy) = \frac{r(l)}{m_{\bar{\tau}(l)}}. \tag{3.13}$$

En déconditionnant on obtient

$$1 - p(l) = \mathscr{E}_{\bar{\tau}(l)}(1-\pi)^N = g_{\bar{\tau}(l)}(1-\pi). \tag{3.14}$$

1) *a*) découle alors de l'identité classique $g(s) = 1 - m(1-s) + \rho(s)(1-s)$

(l'usage de ρ remplace celui de l'inégalité de Bonferonni [8] nécessitant des moments d'ordre 2, voir aussi plus bas le lemme 4).

Pour 1) b) l'inégalité évidente $kP\left(\bigcup_{i=1}^{k} C_i\right) \geq \sum_{i=1}^{k} P(C_i)$ jointe à (3.11) donne :

$$NP^{\mathcal{F}_1}_{\bar{\tau}(l)}(B(l)) \geq 1_{N>0} Z_1(p_l)$$

puis

$$P^{N}_{\bar{\tau}(l)}(B(l)) \geq 1_{N>0}\pi$$

et en déconditionnant

$$p(l) \geq \beta_{\bar{\tau}(l)} r(l) .$$

Pour montrer le 2) on remarque d'abord que l'inégalité de Markov donne

$$|l| \leq n-1 \Rightarrow p(l) \leq q(l)$$

d'où

$$|l| \leq n-1 \Rightarrow r(l) \leq q(l)$$

$\Big($pour $|l| \leq n-2$ on a $r(l) \leq \int_{\mathbb{R}} q(y) Q(\bar{\tau}(l), dy) = q(l)$ par itération de Q et pour $|l| = n-1$ on a $r(l) = Q(\bar{\tau}(l), \gamma_l) = q(l)\Big)$.

D'après a) et b), à l fixé la décroissance de $\rho_{\bar{\tau}(l)}$ entraîne

$$p(l) \geq r(l)\left\{\left[1 - \frac{1}{m_{\bar{\tau}(l)}}\rho_{\bar{\tau}(l)}\left(1 - \frac{q(l)}{m_{\bar{\tau}(l)}}\right)\right] \vee \beta_{\bar{\tau}(l)}\right\}. \tag{3.17}$$

Cette relation (évidente hors de $\tilde{S}$) entraîne pour $0 \leq k \leq n-1$

$$p \geq (\eta_k \vee \beta) r \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^k . \tag{3.18}$$

Dans ce cas si on note $a_k = \inf_{l \in \tilde{S} \cap \mathbb{R}^k} \frac{p(l)}{q(l)}$ on a, pour $k \leq n-2$ et $l \in \tilde{S} \cap \mathbb{R}^k$

$$p(l) \geq (\eta_k \vee \beta) \int_{\mathbb{R}} Q(\bar{\tau}(l), dy) p_l(y) \geq a_{k+1}(\eta_k \vee \beta) \int_{\mathbb{R}} Q(\bar{\tau}(l), dy) q_l(y)$$

c'est-à-dire

$$a_k \geq (\eta_k \vee \beta) a_{k+1} .$$

L'égalité $q = r$ sur $\mathbb{R}^{n-1}$ entraîne $a_{n-1} \geq \eta_{n-1} \vee \beta$ ce qui termine la preuve. ■

Rappelons que notre but est de minorer $P_{0,x_0}(\zeta_n(\Delta_u(x) > 0)$ où par définition

$$\Delta_u(x) = [x-u, x+u] .$$

Posons x_0, x, n, étant fixés,

$$\lambda_0 = x_0, \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \quad \text{avec} \quad \lambda_n = x, \quad u, v > 0 \\ \text{et} \quad \gamma = 1_{\tilde{\Gamma}_{\lambda[0,n,u,v)}} \quad (\text{voir § II}). \tag{3.19}$$

Dans ces conditions on a

$$P_{0,x_0}(\zeta_n(\Delta_u(x)) > 0) \geq P_{0,x_0}(Z_n(\gamma) > 0) = p(\phi).$$

Pour poursuivre l'étude, vu la proposition précédente il nous faut

1) minorer $q(\phi)$ — ce qui est possible grâce au lemme 2

2) pour tout k minorer η_k et par conséquent

a) majorer $q(l)$ pour $|l| = k$

b) comparer $\rho_{\overline{\tau}(l)}$ à un ρ fixe.

Les 2 lemmes suivants donnent une réponse à *a*) et *b*).

3. Lemmes techniques.

LEMME 3. — Avec les notations de II, III 1, 2 et en particulier (3.19), sous l'hypothèse

$$\inf_{0 \leq k \leq n} H(k, \lambda_k, \lambda_{k+1} - \lambda_k) \geq c > 0 \tag{3.20}$$

la condition $\Delta(0, 2u) \leq 1$ entraîne pour tout k tel que $0 \leq k < n$ et tout l de $\mathbb{R}^k$

$$q(l) \leq d^n_{n-k} \tag{3.21}$$

ou on a noté pour $0 \leq j \leq n$

$$d^n_j = \exp\{-ja + b\} \tag{3.22}$$

avec $a = c(1 - \Delta(0, 2u))^2$, $b = 2v + 2(M + 1)n\Delta(0, 2u)$. ■

Démonstration. — Si $|l| = k$ et si λ' est définie par

$$\lambda'_i = \lambda_i \quad 0 < i < k, \quad \lambda'_k = l_k, \quad \lambda'_i = \lambda_i - \lambda_k + l_k \ \ n \geq i > k$$

alors on a

$$\gamma_l \leq 1_{\tilde{\Gamma}_{\lambda'(k,n,2u,2v)}}$$

et donc d'après le lemme 2

$$q(l) \leq \exp\{2v + (M + 1)n\Delta(0, 2u) - I_1(k, n, \lambda')(1 - \Delta(0, 2u))$$

et comme $|\lambda'_i - \lambda_i| \leq u$ et $\lambda'_{i+1} - \lambda'_i = \lambda_{i+1} - \lambda_i$ pour tout $k \leq i < n$ on a facilement, dès que $\Delta(0, 2u)$ est inférieur ou égal à 1 :

$$q(l) \leq \exp\{2v + 2(M + 1)n\Delta(0, 2u) - I_1(k, n, \lambda)(1 - \Delta(0, 2u))^2\}$$

puis (3.20) permet de conclure. ■

La condition (3.20) se réfère à une « sous-criticité » ([8]).

LEMME 4. — Pour tout $(A, \delta) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$, il existe $s_0 \in [0, 1[$ et $\overline{\rho}$ fonction décroissante de $[s_0, 1]$ dans $[0, \overline{\rho}(s_0)]$ vérifiant $\int_{s_0}^{1} \frac{\overline{\rho}(s)}{1-s} ds < \infty$, telle que pour toute variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$, la condition

$$EN(\operatorname{Log} N)^{1+\delta} \leq A$$

entraîne

$$\rho(s) \leq \overline{\rho}(s) \quad \text{sur} \quad [s_0, 1]$$

où, comme d'habitude $\rho(s) = E\left(N - \frac{1 - s^N}{1 - s}\right)$.

Démonstration. — ρ s'écrit aussi $\rho(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N > n)(1 - s^n)$ ce qui donne pour tout n_0 de $\mathbb{N}$:

$$\rho(s) \leq n_0(EN)(1 - s) + E(N1_{N \geq n_0})$$

ou encore

$$A^{-1}\rho(s) \leq n_0 (\operatorname{Log} 2)^{-1-\delta}(1 - s) + (\operatorname{Log} n_0)^{-1-\delta}.$$

Pour optimiser en n_0, on pose $\theta = (\operatorname{Log} 2)^{-1-\delta}(1 - s)$ et sur $\mathbb{R}^+ \times [1, +\infty)$ $f(\theta, \xi) = \theta\xi + (\operatorname{Log} \xi)^{-1-\delta}$. Le minimum de $f(\theta, \cdot)$ est atteint en un point $\xi_0(\theta)$. On vérifie alors que le choix $s_0 = \left(1 - \frac{1+\delta}{2}(\operatorname{Log} 2)^{-2-2\delta}\right)^+$, $\overline{\rho}(s) = Af(n_0(\theta), \theta)$ où $\theta = (\operatorname{Log} 2)^{-1-\delta}(1-s)$ et $n_0(\theta) = 2 \vee [\xi_0(\theta)]$ convient.

§ IV. PROBABILITÉS DE PRÉSENCE. RÉSULTATS ASYMPTOTIQUES

On va se donner des hypothèses sur le processus ponctuel de base, construire la famille indexée par le paramètre d'échelle ε puis démontrer les 2 théorèmes limites.

Soit $\mathscr{P}_{t,x}$, $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, une famille mesurable de probabilités sur $\mathscr{M}, \mathscr{B}(\mathscr{M})$ telle que pour tout (t, x), $\mathscr{P}_{t,x}$ ait une espérance notée $\mu_{t,x}$. Si ν est l'élément générique de $\mathscr{M}$, on note $N = \nu(1)$.

1. Hypothèses.

a) *Hypothèses sur la famille* $\mu_{t,x}$, $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

Elles sont voisines de certaines de celles de Ventsel [*12*] [*4*]

H0) $\forall (t, x, \theta, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \qquad L(t, x, \theta) = \operatorname{Log} \int e^{\theta\xi} \mu_{t,x}(d\xi)$ et

$$h(t, x, v) = \sup_\lambda \lambda v - L(t, x, \lambda)$$

sont finies.

H1) Il existe $M \geq 0$ tel que $\inf_{t,x,v} h(t, x, v) \geq -M$.

H2) h est de classe $\mathscr{C}^1$ en t, x, vérifie H0, H1 et il existe C mesurable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, localement bornée, telle que pour tout (t, x, v) de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ on ait

$$\left| \frac{\partial h}{\partial t}(t, x, v) \right| + \left| \frac{\partial h}{\partial x}(t, x, v) \right| \leq C(t)(M + 1 + h(t, x, v)).$$

H3) Pour tout $T > 0$, il existe h_1 croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que

$$\forall r > 0, \quad \forall t \leq T, \quad \forall v \quad |v| \leq r \Rightarrow \left| \frac{\partial h}{\partial v}(t, x, v) \right| \leq h_1(r).$$

H4) Il existe h_2 décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+_*$ telle que

$$\forall r > 0, \quad \forall t, x, v \quad |v| \leq r \Rightarrow \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}(t, x, v) \geq h_2(r).$$

b) *Hypothèses sur la loi de* N.

H5) Pour tout compact K de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, il existe c_1, c_2 et δ dans $\mathbb{R}^+_*$ tels que

$$(t, x) \in K \Rightarrow c_1 \leq \mathscr{P}_{t,x}(N > 0), \quad c_2 \geq \mathscr{E}_{t,x} N (\operatorname{Log} N)^{1+\delta}.$$

2. Construction de la famille de processus (modèle avec paramètre d'échelle).

Nous allons modéliser maintenant l'idée de reproductions de plus en plus fréquentes avec sauts de plus en plus petits.

Pour tout $(\varepsilon, x) \in \mathbb{R}^+_* \times \mathbb{R}$ soit $S_{\varepsilon,x}$ l'application de $\mathscr{K}(\mathbb{R})$ dans lui-même définie par $S_{\varepsilon,x} f(z) = f(x + \varepsilon z)$. Elle induit sur $\mathscr{M}$ une application, notée encore $S_{\varepsilon,x}$ définie par $S_{\varepsilon,x}\nu(f) = \nu(S_{\varepsilon,x}f)$. Pour tout i de $\mathbb{N}$ soit $\overline{\mathscr{P}}^{\varepsilon}_{i,x}$, l'image de $\mathscr{P}_{i\varepsilon,x}$ par $S_{\varepsilon,x}$. Pour tout ε, la proposition 1 permet, à partir des $\overline{\mathscr{P}}^{\varepsilon}_{i,x}$ de construire une famille $P^{\varepsilon}_{i,x}$, $(i, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ de lois sur $(\Omega, \mathscr{I})$.

3. Probabilité de présence. Minoration asymptotique relative à un chemin.

Le théorème suivant relie la probabilité de présence près de x à l'intégrale d'action de φ, chemin conduisant à x.

THÉORÈME 1. — Si pour tout ε le processus de branchement spatial construit en § IV, 2 est découplé et vérifie H0), ..., H5) alors pour tout (t, x_0, x_1) de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ et φ de $\mathscr{C}^1([0, t], \mathbb{R})$ tel que $\varphi(0) = x_0$, $\varphi(t) = x_1$, il existe σ positif tel que l'inégalité

$$(*)\qquad \inf_{\substack{k,\varepsilon \\ 0 \leq k\varepsilon < t - \varepsilon}} h\left(k\varepsilon, \varphi(k\varepsilon), \frac{1}{\varepsilon}(\varphi((k+1)\varepsilon) - \varphi(k\varepsilon))\right) > 0 \tag{4.1}$$

entraîne

$$\varliminf_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ u \geq \sigma\sqrt{\varepsilon}}} \varepsilon \operatorname{Log} P^{\varepsilon}_{0,x_0}\left[\zeta_{\left[\frac{t}{\varepsilon}\right]}(\Delta^u_{x_1}) > 0\right] \geq -\mathrm{I}(0, t, \varphi) \qquad \blacksquare$$

Démonstration. — t, x_0, x_1 et φ sont fixés. Comme il a été remarqué avant le lemme 3, si on note $\lambda_s = \varphi(s\varepsilon)$ pour $0 \leq s \leq n = \left[\frac{t}{\varepsilon}\right]$ et $\gamma = 1_{\tilde{\Gamma}_\lambda(0,n,u,v)}$ pour v à choisir plus tard on a :

$$P^{\varepsilon}_{0,x_0}(\zeta_n(\Delta_u(x)) > 0) \geq P^{\varepsilon}_{0,x_0}(Z_n(\gamma) > 0) = p(\phi). \tag{4.2}$$

Pour utiliser les lemmes précédents nous avons besoin de quelques évaluations.

a) Évaluations relatives au II :

On vérifie facilement que $\overline{\mathscr{P}}^{\varepsilon}_{k,x}$ a une espérance notée ${}_\varepsilon Q(k, x, \cdot)$ telle que

$${}_\varepsilon Q(k, x, f) = \int_{\mathbb{R}} f(x + \varepsilon z)\mu_{k\varepsilon,x}(dz)$$

ce qui entraîne, pour les quantités définies en II, si $(k, x, \theta, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^3$

$${}_\varepsilon G(k, x, \theta) = L(k\varepsilon, x, \varepsilon\theta), \quad {}_\varepsilon H(k, x, a) = h\left(k\varepsilon, x, \frac{a}{\varepsilon}\right) \tag{4.3}$$

si on note $B = \frac{1}{2}\exp(2C(t))$ l'hypothèse H2) permet d'écrire :

$$\Delta(j, u) \leq B(j\varepsilon + u) \qquad \text{pour} \qquad (j\varepsilon) \vee u \leq 1 \tag{4.4}$$

et pour tout (k, ξ) de $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$, d'après

$$\theta(k, \xi) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial h}{\partial v}\left(k\varepsilon, \xi, \frac{1}{\varepsilon}(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\right) \tag{4.5}$$

et donc grâce à H3) si $\| \dot{\varphi} \|$ désigne la norme uniforme de la dérivée de φ sur $[0, t]$

$$\sup_{\substack{\xi \\ k \leq n-1}} |\theta(k, \xi)| \leq \frac{1}{\varepsilon} h_1(\| \dot{\varphi} \|). \tag{4.6}$$

Pour le calcul de D_2 et D'_2 il faut majorer $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}({}_\varepsilon G(k, \xi, \theta))$ uniformément en (k, ξ) pour $\theta = \theta(k, \xi)$ ou encore, grâce aux calculs de dualité habituels, majorer $\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} h\left(k\varepsilon, \xi, \frac{1}{\varepsilon}(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\right)\right)^{-1}$. H6) fournit le majorant $\varepsilon^2 h_2(\| \dot{\varphi} \|)^{-1}$ et dans ces conditions on a :

$$\begin{aligned} & D_2(0, n, \lambda) \leq D_2\varepsilon^2, \qquad D'_2(0, n, \lambda) \leq D_2 \\ \text{où} \qquad & D_2 = (h_2(\| \dot{\varphi} \|))^{-1}(1 \vee (h_1(\| \dot{\varphi} \|^2)\,. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Pour $k < n$, l'inégalité de Jensen et H2) donnent, si $(1 + \| \dot{\varphi} \|)\varepsilon \leq 1$

$$\varepsilon I_1(k, n-k, \lambda) \leq (1 + B\varepsilon(1 + \| \dot{\varphi} \|))I(k\varepsilon, t, \varphi) + B(1 + \| \dot{\varphi} \|)(M+1)t\varepsilon. \tag{4.8}$$

La minoration de $E^\varepsilon_{0,x_0} Z_n(\gamma) = q(\phi)$ devient, grâce au lemme 2:

$$q(\phi) \geq \left(1 - tD_2\left(\frac{\varepsilon}{u^2} + \frac{1}{\varepsilon v^2}\right)\right)^+ \exp - \frac{1}{\varepsilon} D^\varepsilon(0, t, \varphi, u, v) \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} D^\varepsilon(0, t, \varphi, u, v) = & (1 + Bu)(1 + B\varepsilon(1 + \| \dot{\varphi} \|))I(0, t, \varphi) \\ & + B(M+1)(1 + \| \dot{\varphi} \|)(1 + Bu)t\varepsilon + \varepsilon v + B(M+1)tu. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Il est temps de choisir

$$u = \varepsilon v = 2\sqrt{tD_2\varepsilon} \tag{4.11}$$

ce qui permet d'obtenir

$$1 - tD_2\left(\frac{\varepsilon}{u^2} + \frac{1}{\varepsilon v^2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} D^\varepsilon(0, t, \varphi, u, v) = I(0, t, \varphi)\,. \tag{4.12}$$

D'après le lemme fondamental, il nous reste à minorer $\sum_{k=0}^{n-1}(\eta_k \vee \beta)$.

b) Évaluations relatives au III. Minoration de $\prod_{k=0}^{n-1}(\eta_k \vee \beta)$.

L'hypothèse (∗) correspond à (3.20) et avec les choix précédents, $\Delta(0, 2u)$ tend vers 0 avec ε et de plus on a

$$\begin{aligned} a &= c(1 - 2\mathrm{B}u)^2 = c(1 - 4c\sqrt{\mathrm{D}_2 t\varepsilon}) \\ \varepsilon b &= 2\varepsilon v + 4(\mathrm{M} + 1)tu = 4\sqrt{\mathrm{D}_2 t\varepsilon}(1 + 2(\mathrm{M} + 1)t) \end{aligned} \tag{4.13}$$

ce qui permet de conclure que d_n^n tend vers 0 quand ε tend vers 0.

Ici $\bar{\tau}(\phi) = (0, x_0)$ et si on pose $\Lambda = [x_0 - t\,\|\dot{\varphi}\| - 1, x_0 + t\,\|\dot{\varphi}\| + 1]$ on a $\mathrm{S} \subset \Lambda^n$ et donc $\bar{\tau}(l) \in [0, \ldots, n] \times \Lambda$ si $l \in \tilde{\mathrm{S}}$. Si K désigne le compact $[0, t] \times \Lambda$ on a donc, d'après H5) et H1)

$$\sup_{l \in \tilde{\mathrm{S}}} \beta_{\bar{\tau}(l)} \geq e^{-\mathrm{M}} c_1 \underset{\mathrm{def}}{=} \beta \quad \text{et} \quad \sup_{l \in \tilde{\mathrm{S}}} \mathrm{E}_{\bar{\tau}(l)} \mathrm{N}\,(\mathrm{Log}\,\mathrm{N})^{1+\delta} \leq c_2 .$$

Le lemme nous fournit un couple $s_0, \bar{\rho}$ tel que

$$\int_{s_0}^{1} \frac{\bar{\rho}(s)}{1 - s}\, ds < \infty \quad \text{et} \quad \sup_{l \in \tilde{\mathrm{S}}} \rho_{\bar{\tau}(l)}(s) \leq \bar{\rho}(s) \quad \text{pour} \quad s \in [s_0, 1] .$$

On peut toujours augmenter s_0 pour que $\bar{\rho}(s_0)$ soit inférieur à $\frac{c_1}{2}$. D'après ce qui a été vu plus haut, il existe ε_0 tel que

$$\varepsilon \leq \varepsilon_0 \Rightarrow d_n^n \leq c_1(1 - s_0) .$$

On pose alors

$$j_n = \inf \{ j : 1 \leq j \leq n \text{ et } d_j^n \leq c_1(1 - s_0) \} \tag{4.14}$$

ce qui entraîne pour $0 \leq k \leq n - j_n$

$$\eta_k \geq 1 - \frac{1}{c_1} \bar{\rho}\left(1 - \frac{1}{c_1} d_{n-k}^n\right)$$

et par suite

$$\prod_{k=0}^{n-1} (\eta_k \vee \beta) \geq \beta^{j_n - 1} \prod_{j=j_n}^{n} \left(1 - \frac{1}{c_1} \bar{\rho}\left(1 - \frac{d_j^n}{c_1}\right)\right). \tag{4.15}$$

L'inégalité $\mathrm{Log}(1-x) \geq -2x\,\mathrm{Log}\,2$ valable pour $0 \leq x \leq 1/2$ donne alors

$$\prod_{k=0}^{n-1} (\eta_k \vee \beta) \geq \beta^{j_n - 1} \exp - \left\{ \frac{2\,\mathrm{Log}\,2}{c_1} \sum_{j=j_n}^{n} \bar{\rho}\left(1 - \frac{d_j^n}{c_1}\right) \right\}. \tag{4.16}$$

La définition des d_j^n et la décroissance de $\overline{\rho}$ permet de majorer la dernière somme par $\frac{c_1}{2} + c_1 \int_{s_0}^{1} \frac{\overline{\rho}(s)}{1-s} ds$, constante ne dépendant que de c_1 et c_2. On peut désormais conclure en juxtaposant (4.2), (3.10), (4.9), (4.16) et en remarquant que $j_n - 1$, qui est majoré par $\frac{1}{a}\{ b - \operatorname{Log} c_1(1-s_0) \}$ vérifie $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon(j_n - 1) = 0$, par la formule

$$\underset{u = 2\sqrt{tD_2\varepsilon}}{\underline{\lim_{\varepsilon}}} \ \varepsilon \operatorname{Log} P^{\varepsilon}_{0,x_0}(\zeta_{\left[\frac{t}{\varepsilon}\right]}(\Delta_u(x)) > 0) \geq -\mathrm{I}(0, t, \varphi). \qquad \blacksquare$$

Remarque. — On ne peut pas en général remplacer δ par 0 dans H5) mais si le processus est homogène ($\rho_{t,x} \equiv \rho$ pour tout t, x) on a $\int_0^1 \frac{\rho(s)ds}{1-s} \leq \mathrm{EN}(1 + \operatorname{Log} \mathrm{N})$ et la conclusion reste vraie en remplaçant δ par 0.

4. Probabilité de présence. Minoration définitive.

On voudrait naturellement optimiser en φ le théorème précédent, mais $\sigma = 2\sqrt{tD_2}$ dépend de $\| \dot{\varphi} \|$. Nous allons montrer qu'avec deux hypothèses supplémentaires sur h, $\inf \mathrm{I}(0, t, \varphi)$ est atteint. L'une, H6) (dite condition de croissance) vise, par la compacité des ensembles de niveaux de I à montrer que l'inf est atteint dans la classe des chemins absolument continus ($\mathscr{A}[0, t]$), l'autre, H7) assure la régularité (au moins $\mathscr{C}^1$) des trajectoires optimales.

H6) Il existe $\underline{h}$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\lim_{r \to +\infty} r^{-1}\underline{h}(r) = +\infty \quad \text{et} \quad \forall (t, x, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \quad \underline{h}(|v|) \leq h(t, x, v).$$

Elle est équivalente à

$$\text{H6')} \qquad \forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \sup_{t.x} \mathrm{L}(t, x, \theta) < \infty .$$

On montre facilement que $\underline{h}$ peut être choisir convexe croissante. H6) entraîne H1) donc l'existence de M.

H7) Il existe C, comme dans H2) vérifiant

$$\forall (t, x, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \qquad \left| \frac{\partial h}{\partial v}(t, x, v) \right| \leq \mathrm{C}(t)[\mathrm{M} + 1 + h(t, x, v)].$$

On rappelle que $\mathscr{A}$ est l'ensemble des fonctions absolument continues et I l'intégrale d'action.

PROPOSITION 2. — Sous H0), H2), H6), H7) pour tous $0 < t_0 < t_1$ et x_0, x_1 de $\mathbb{R}$, inf $\mathrm{I}(t_1, t_2, \varphi)$ pris sur les φ de $\mathscr{A}[t_0, t_1]$ telles que $\varphi(t_0) = x_0$, $\varphi(t_1) = x_1$ est atteint pour une φ de classe $\mathscr{C}^1$. ■

Ce problème, bien connu, est traité dans de nombreux ouvrages, mais comme les différentes preuves font appel à des hypothèses différentes qui se recoupent sans se recouvrir, on rappellera ici comment nos hypothèses, qui sont loin d'être minimales, permettent d'aboutir (H6)) à l'existence et (H2) + H7)) à la régularité de chemins optimaux.

Démonstration. — On omettra parfois t_0 et t_1 (fixés) dans $\mathrm{I}(t_0, t_1, \ )$. On peut toujours supposer $h \geq 0$ quitte à remplacer h par $h + \mathrm{M}$. Comme I est positive sur $\mathscr{A}$, l'inf existe. Si φ_n est minimisante, il existe $c > 0$ et n_0 tels que $\mathrm{I}(\varphi_n) \leq c$ pour $n \geq n_0$. D'après H6) ceci entraîne l'équi-intégrabilité de la suite $\dot{\varphi}_n$ et donc sa faible relative compacité dans L^1. On extrait une sous-suite, notée encore $\dot{\varphi}_n$ convergeant faiblement vers u. La fonction φ, définie sur $[t_0, t_1]$ par $\varphi(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds$ est dans $\mathscr{A}(\dot{\varphi} = u)$ et est limite simple de φ_n. D'après un résultat classique ([*14*], p. 243) pour tout (t, x) le convexité de $h(t, x, \cdot)$, jointe à H6) entraîne

$$\int_{t_0}^{t_1} h(t, \varphi(t), u(t))dt \leq \varliminf \mathrm{I}(\varphi_n)$$

et donc φ réalise l'inf.

La régularité se prouve avec les équations d'Euler. Si $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ est l'ensemble des ψ telles que $\dot{\psi} \in \mathrm{L}_\infty$ et $\psi(t_0) = \psi(t_1) = 0$, alors pour $(\varphi, \psi, \lambda) \in \mathscr{A} \times \mathscr{B} \times \mathbb{R}$ on peut écrire

$$\lambda^{-1}\{\mathrm{I}(\varphi + \lambda\psi) - \mathrm{I}(\varphi)\} = \int_{t_0}^{t_1} f(\lambda, t)dt$$

où $\quad f(\lambda, t) = \lambda^{-1}\{h(t, \varphi(t) + \lambda\psi(t), \dot{\varphi}(t) + \lambda\dot{\psi}(t)) - h(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t))$

vérifie

$$\lim_{\lambda \to 0} f(\lambda, t) = \psi(t)\frac{\partial h}{\partial x}(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t)) + \dot{\psi}(t)\frac{\partial h}{\partial v}(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t))$$

et d'après H2) + H7) il existe $\mathrm{B} > 0$ et $r > 0$ tels que sur $[t_0, t_1]$

$$|\lambda| \leq r \Rightarrow f(\lambda, t) \leq \mathrm{B}(|\psi(t)| + |\dot{\psi}(t)|)(1 + h(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t)).$$

Ce majorant étant intégrable (ψ et $\dot{\psi}$ sont bornés), le théorème de Lebesgue permet de dire que si $\varphi \in \mathscr{A}$ réalise l'inf alors pour tout ψ de $\mathscr{B}$ on a :

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \psi(t)\frac{\partial h}{\partial x}(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t)) + \dot{\psi}(t)\frac{\partial h}{\partial v}(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \right\} dt = 0$$

ou encore, en intégrant par parties

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}(t) \left\{ \frac{\partial h}{\partial v}(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t)) - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial h}{\partial x}(\sigma, \varphi(\sigma), \dot{\varphi}(\sigma)) d\sigma \right\} dt = 0 .$$

On en déduit qu'il existe a réel tel que (Euler sous forme intégrale)

$$\frac{\partial h}{\partial v}(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t)) - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial h}{\partial x}(\sigma, \varphi(\sigma), \dot{\varphi}(\sigma)) d\sigma = a \quad \text{p. p. sur } [t_0, t_1]$$

si on pose $\quad p(t) = a + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{\partial h}{\partial x}(\sigma, \varphi(\sigma), \dot{\varphi}(\sigma)) d\sigma \quad$ on a p. p.

$$p(t) = \frac{\partial h}{\partial v}(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t)) .$$

Grâce à la dualité, la formule précédente s'inverse en :

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \theta}(t, \varphi(t), p(t)) \quad \text{p. p.}$$

(si les h n'étaient pas des transformées de Cramer, il faudrait supposer la stricte convexité de h en v).

φ est continue et p aussi par construction donc $\dot{\varphi}$ coïncide p. p. avec une fonction continue. Donc φ est de classe $\mathscr{C}^1$ (et de plus vérifie les équations d'Euler :

$$\dot{p}(t) = \frac{\partial h}{\partial x}(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \qquad p(t) = \frac{\partial h}{\partial v}(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \Big) . \qquad \blacksquare$$

Tout ce qui précède nous a permis en fait de démontrer le théorème suivant. On note $\bar{\mathrm{I}}(t_0, t_1, x_0, x_1) = \inf \mathrm{I}(t_0, t_1, \varphi)$ pris sur l'ensemble des $\varphi \in \mathscr{A}[t_0, t_1]$ tels que $\varphi(t_0) = x_0$, $\varphi(t_1) = x_1$.

THÉORÈME 2. — Si le processus de branchement spatial construit en IV.2 est découplé et vérifie H0) ... H7) alors pour tout (t, x_0, x_1) de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ tel qu'un des chemins de classe $\mathscr{C}^1$ atteignant $\bar{\mathrm{I}}$ vérifie $(*)$, alors il existe $\sigma > 0$ tel que

$$\varliminf_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ u \geq \sigma \sqrt{\varepsilon}}} \varepsilon \operatorname{Log} \mathrm{P}^{\varepsilon}_{0,x_0}(\zeta_{\left[\frac{t}{\varepsilon}\right]}(\Delta^{u}_{x_1}) > 0) \geq - \bar{\mathrm{I}}(0, t, x_0, x_1) . \qquad \blacksquare$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. AZENCOTT, G. RUGET, Mélanges d'équations différentielles et grands écarts à la loi des grands nombres. *Zeits. für Wahr.*, t. **38**, 1977, p. 1-54.

[2] J. D. BIGGINS, Chernoff's theorem in the branching random walk, *Journ. of Appl. Prob.*, t. **14**, 1977, p. 630-636.

[3] J. D. BIGGINS, Growth rates in the branching random walk, *Zeits. für Wahr.*, t. **48**, 1979, p. 17-34.
[4] M. I. FREIDLIN, A. D. VENTSEL, *Random perturbations of dynamical systems*, Springer, Berlin, 1984.
[5] P. JAGERS, *Branching processes with biological applications*. Wiley, London, 1975.
[6] C. LAREDO, A. ROUAULT, Grandes déviations, dynamique de populations et phénomènes malthusiens, *Ann. de l'I. H. P.*, t. **19**, n° 4, 1983, p. 323-350.
[7] J. NEVEU, Arbres et processus de Galton-Watson, *Ann. de l'I. H. P.*, t. **22**, n° 2, 1986.
[8] A. ROUAULT, Comportement asymptotique d'un processus de branchement spatial en zone sous-critique, *Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc.*, n° 299, série I, 1984, p. 887-890.
[9] A. ROUAULT, Probabilités de présence dans un processus de branchement spatial markovien. *Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc.*, n° 301, série I, 1985, p. 711-714.
[10] A. ROUAULT, Espérances et majorations pour un processus de branchement spatial markovien (soumis aux *Ann. I. H. P.*).
[11] G. RUGET, Large deviations and more or less rare events in population dynamics. Colloque Luminy. *Lecture Notes in Biom.*, n° 49, 1981, p. 388-400.
[12] A. D. VENTSEL, Rough limit theorems on large deviations for Markov stochastic processes. *Theor. of Prob. and its Appl.*, t. **21**, n° 2, 1976, p. 227-242 et t. **21**, n° 3, p. 499-512.
[13] R. AZENCOTT, Cours de l'École d'Été de Saint-Flour, *Lecture Notes in Math.*, n° 774, 1978.
[14] I. EKELAND, R. TEMAM, *Convex analysis and variational problems*. North-Holland, Amsterdam, 1976.
[15] K. MATTHES, J. KERSTAN, J. MECKE, *Infinitely divisible point processes*, Wiley, Chichester, 1978.