ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

E. ANDJEL
C. COCOZZA-THIVENT
M. ROUSSIGNOL

Quelques compléments sur le processus des misanthropes et le processus « zéro-range »

Annales de l'I. H. P., section B, tome 21, n° 4 (1985), p. 363-382
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1985__21_4_363_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 21, n° 4, 1985, p. 363-382. *Probabilités et Statistiques*

Quelques compléments sur le processus des misanthropes et le processus « zéro-range »

par

E. ANDJEL (*), C. COCOZZA-THIVENT (**)

and

M. ROUSSIGNOL (**)

RÉSUMÉ. — Nous étudions un processus à une infinité de particules en interaction sur Z appelé le processus des misanthropes qui généralise le processus de « zero range » sur Z. Nous montrons d'abord que si la loi initiale est invariante par translation, ergodique et d'espérance finie, le processus des misanthropes à plus proches voisins converge faiblement vers la mesure invariante de même espérance. Nous montrons ensuite que si la loi de saut est de moyenne nulle, toutes les mesures invariantes pour le processus des misanthropes sont invariantes par translation.

ABSTRACT. — We study an infinite particle system on Z called the misanthrope process which generalizes the zero range process on Z. We prove that if the initial law is translation invariant, ergodic and has a finite density

Classification A. M. S. : 60 K. 35, 60 J. 25, 60 J. 75.

Key-words: Infinite particle system; invariant measure; coupling; jump process; markov process.

(*) Universidade de São-Paulo. Instituto de Matematica e estatistica, Caixa Postal 20570, CEP 05508, São-Paulo, Brasil.
(**) Laboratoire de Probabilités. Université Paris VI, Tour 56, 4, Place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

then the nearest neighbour misanthrope process weakly converges to the ergodic invariant measure with same density. We also prove that if the jump law has zero mean then all invariant measures of the misanthrope process are translation invariant.

I. INTRODUCTION

Dans [3] C. Cocozza a étudié le processus des misanthropes. Il s'agit de l'évolution d'un système infini de particules sur $\mathbb{Z}^d$, chaque point de $\mathbb{Z}^d$ pouvant être occupé par plusieurs particules. A chaque instant, l'état du système est un élément de $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}^d}$. Si η appartient à $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}^d}$, si x appartient à $\mathbb{Z}^d$, $\eta(x)$ est égal au nombre de particules situées en x. L'évolution du système est caractérisée par une loi de probabilité $p(.)$ sur $\mathbb{Z}^d - \{0\}$ $\left(p(x) \geq 0, \sum_{x \in \mathbb{Z}^d - \{0\}} p(x) = 1\right)$ et par une fonction $b(.,.)$ de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{R}_+$ croissante en la première coordonnée, décroissante en la deuxième coordonnée et vérifiant $b(0, k) = 0$ pour tout k dans $\mathbb{N}$. Lorsque le système est dans l'état η à l'instant t, la probabilité pour que le site x éjecte une particule vers le site y pendant l'intervalle de temps $(t, t + \Delta t)$ est $p(y - x)b(\eta(x), \eta(y))\Delta t + o(\Delta t)$. Une particule a d'autant plus de chances d'être éjectée qu'il y a plus de monde dans le site où elle se trouve et moins de monde dans le site où elle atterrit.

Les hypothèses faites dans [3] sont :

a) pour tous x et y dans $\mathbb{Z}^d$, il existe $z_1, \ldots, z_p$ appartenant à $\mathbb{Z}^d$ tels que :

$$p(z_1 - x)p(z_2 - z_1) \ldots p(z_p - z_{p-1})p(y - z_p) > 0$$

et il existe u différent de zéro et de $z_i - x$ $(1 \leq i \leq p)$ tel que $p(u) > 0$.

b) il existe un nombre B tel que :

$$\forall (l, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \qquad \mathrm{B} \geq b(l, k) > 0$$

c) $\forall i \geq 1, \forall j \geq 0$

$$\frac{b(i, j)}{b(j + 1, i - 1)} = \frac{b(i, 0)b(1, j)}{b(j + 1, 0)b(1, i - 1)}$$

d) soit $\forall y \in \mathbb{Z}^d - \{0\}$ $p(y) = p(-y)$

soit $\forall i \geq 0$ $\forall j \geq 0$

$$b(i, j) - b(j, i) = b(i, 0) - b(j, 0).$$

Ce processus est une généralisation du processus « zéro-range » étudié dans [1] par E. Andjel. Dans ce cas $b(.,.)$ ne dépend que de la première coordonnée. Les hypothèses c) et d) sont automatiquement vérifiées. E. Andjel construit et étudie le processus sous une hypothèse plus générale que b). Il suppose qu'il existe un nombre B tel que $\forall l \in \mathbb{N}^*$ $Bl \geq b(l) > 0$.

On peut également remplacer l'hypothèse b) par : il existe un nombre B et un entier a tel que si $a \geq l > 0$, $a \geq k \geq 0$, $B \geq b(l, k) > 0$, si $k > a$ $b(l, k) = 0$. Les résultats de [3] sont valables dans ce cas en se restreignant aux configurations de $[0, a]^{\mathbb{Z}^d}$. On retrouve alors avec $a = 1$ le processus d'exclusion simple étudié par T. Liggett (cf. [4] et [5]) et E. Andjel ([2]).

Les résultats démontrés dans [3] pour le processus du misanthrope sont les suivants.

Il existe une famille continue $\{ \mu_\rho, \rho \in \mathbb{R}_+ \}$ de probabilités sur $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}^d}$, invariantes par translation et invariantes par le processus. Ces probabilités sont indexées par leur espérance $\left(\rho = \int \mu_\rho(d\eta)\eta(x)\right)$. Ce sont des probabilités produits de la forme $\underset{\mathbb{Z}^d}{\otimes} \mu$ avec $\dfrac{\mu(i+1)}{\mu(i)} = \dfrac{\mu(1)}{\mu(0)} \dfrac{b(1, i)}{b(i+1, 0)}$.

Les probabilités invariantes pour le processus, invariantes par translation et d'espérance finie sont les mélanges des probabilités μ_ρ. Si la loi du système à l'instant initial est invariante par translation et d'espérance finie, alors lorsque le temps t tend vers l'infini, la loi du système à l'instant t tend vers un mélange de probabilités μ_ρ.

Ces résultats sont également valables pour le processus du « zéro-range » avec coefficient non borné; ils sont alors essentiellement démontrés dans [1]; le résultat de limite lorsque le temps tend vers l'infini s'adapte sans problème à partir de [3].

Dans ce travail nous donnons quelques résultats complémentaires à [3] et à [1]. Nous nous plaçons en dimension 1, c'est-à-dire sur $\mathbb{Z}$. Dans le paragraphe III nous supposons que les sauts se font uniquement sur les plus proches voisins. Nous démontrons alors que si la loi du système à l'instant initial est invariante par translation, ergodique et d'espérance finie ρ, alors quand le temps t tend vers l'infini la limite faible de la loi du système à l'instant t est μ_ρ. Nous montrons également que si la loi initiale est invariante par translation, ergodique et d'espérance infinie, alors quand le temps tend vers l'infini, la suite des lois du système ne peut pas converger faiblement.

Dans le paragraphe IV, nous supposons que la moyenne de $p(.)$ est nulle $\left(\sum_{x\in\mathbb{Z}} |x|p(x) < +\infty, \sum_{x\in\mathbb{Z}} xp(x) = 0\right)$. Nous montrons que si μ est une mesure invariante pour le processus, μ est un mélange des μ_ρ. Autrement dit il n'existe pas de mesures invariantes pour le processus, non invariantes par translation. En particulier toute mesure invariante pour le processus et invariante par translation (d'espérance finie *ou non*) est un mélange des mesures μ_ρ.

II. NOTATIONS

Nous notons $\mathscr{D}_b$ l'ensemble des applications de $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{R}$ qui ne dépendent que d'un nombre fini de coordonnées et qui sont bornées.

Étant donnés $p(.)$ et $b(.,.)$ vérifiant les hypothèses du paragraphe précédent, nous considérons l'opérateur L défini sur $\mathscr{D}_b$ par :

$$\mathrm{L}f(\eta) = \sum_{x,y\in\mathbb{Z}} p(y-x)b(\eta(x),\eta(y))[f(\eta^{xy}) - f(\eta)]$$

où pour η dans $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$:

$$\begin{aligned} \eta^{xy}(z) &= \eta(z) \quad \text{si} \quad z \notin \{x, y\} \\ \eta^{xy}(x) &= \eta(x) - 1 \\ \eta^{xy}(y) &= \eta(y) + 1 . \end{aligned}$$

Nous notons Ω l'espace des fonctions continues à droite et limitées à gauche de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$. Pour tous t dans $\mathbb{R}_+$ et ω dans Ω, nous posons $\eta_t(\omega) = \omega(t)$ et $\mathscr{F}$ désigne la tribu engendrée par le processus $s \to \eta_s(\omega)$ pour tous s dans $\mathbb{R}_+$.

Dans [*3*] est construite une famille de probabilités P_η sur $(\Omega, \mathscr{F})$ telle que pour tout état η de $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ $\mathrm{P}_\eta[\eta_0 = \eta] = 1$ et pour toute fonction f de $\mathscr{D}_b$ et tout temps t :

$$\mathrm{E}_\eta f(\eta_t) - \mathrm{E}_\eta f(\eta_0) = \int_0^t ds \mathrm{E}_\eta \mathrm{L} f(\eta_s) .$$

Le processus $s \to \eta_s(\omega)$ ainsi construit est un processus markovien qui est le processus des misanthropes.

Nous notons $\mathrm{S}(s)$ le semi-groupe associé : $\mathrm{S}(s)f(\eta) = \mathrm{E}_\eta f(\eta_s)$. Si μ est une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$, nous notons P_μ la probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$ définie par $\int \mu(d\eta)\mathrm{P}_\eta$ et nous posons $\mu\mathrm{S}(s)f = \int \mu(d\eta)\mathrm{E}_\eta f(\eta_s)$.

Dans la suite nous utiliserons essentiellement des techniques de couplage, qui nécessitent la définition d'une évolution sur l'espace produit. Soit $\overline{\Omega} = \Omega \times \Omega$ et pour $\overline{\omega}$ dans $\overline{\Omega}$, $\overline{\omega}(t) = (\eta_t(\overline{\omega}), \xi_t(\overline{\omega}))$. Nous notons $\overline{\mathscr{F}} = \mathscr{F} \otimes \mathscr{F}$ et nous appelons $\overline{\mathscr{D}}_b$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{R}$, bornées, qui ne dépendent que d'un nombre fini de coordonnées.

Nous considérons l'opérateur $\overline{\mathrm{L}}$ défini sur $\overline{\mathscr{D}}_b$ par :

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{L}}f(\eta, \xi) = \sum_{x,y\in\mathbb{Z}} p(y-x)\{ &[b(\eta(x), \eta(y)) \wedge b(\xi(x), \xi(y))][f(\eta^{xy}, \xi^{xy}) - f(\eta, \xi)] \\ &+ [b(\eta(x), \eta(y)) - [b(\eta(x), \eta(y)) \wedge b(\xi(x), \xi(y))]][f(\eta^{xy}, \xi) - f(\eta, \xi)] \\ &+ [b(\xi(x), \xi(y)) - [b(\eta(x), \eta(y)) \wedge b(\xi(x), \xi(y))]][f(\eta, \xi^{xy}) - f(\eta, \xi)]\}.\end{aligned}$$

Étant donnée une configuration (η, ξ) sur $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$, on construit dans [3] une probabilité $\overline{\mathrm{P}}_{(\eta,\xi)}$ sur $(\overline{\Omega}, \overline{\mathscr{F}})$ telle que $\overline{\mathrm{P}}_{(\eta,\xi)}((\eta_0, \xi_0) = (\eta, \xi)) = 1$ et pour toute fonction f de $\overline{\mathscr{D}}_b$ et tout temps t :

$$\overline{\mathrm{E}}_{(\eta,\xi)}f(\eta_t, \xi_t) - f(\eta, \xi) = \int_0^t ds \overline{\mathrm{E}}_{(\eta,\xi)} \overline{\mathrm{L}} f(\eta_s, \xi_s).$$

Le processus $s \to (\eta_s(\overline{\omega}), \xi_s(\overline{\omega}))$ est un processus markovien dont nous notons $\overline{\mathrm{S}}(s)$ le semi-groupe associé $(\overline{\mathrm{S}}(s)f(\eta, \xi) = \overline{\mathrm{E}}_{(\eta,\xi)}f(\eta_s, \xi_s))$.

Alors chaque processus marginal est un processus des misanthropes.

Si ν est une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$, nous notons $\overline{\mathrm{P}}_\nu$ la probabilité $\int \nu(d\eta, d\xi)\overline{\mathrm{P}}_{(\eta,\xi)}$ et nous posons $\nu\overline{\mathrm{S}}(s)f = \int \nu(d\eta, d\xi)\overline{\mathrm{E}}_{(\eta,\xi)}f(\eta_s, \xi_s)$. Étant donnée une fonction g de $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$, nous posons $\overline{\mathscr{D}}_g$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{R}$ ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées et telles que :

$$\sup_{x,y\in\mathbb{Z}} \{ |f(\eta^{xy}, \xi^{xy}) - f(\eta, \xi)|, |f(\eta^{xy}, \xi) - f(\eta, \xi)|, |f(\eta, \xi^{xy}) - f(\eta, \xi)| \} \leq g(\eta, \xi).$$

Si on suppose g ν-intégrable et si f appartient à $\overline{\mathscr{D}}_g$ et est ν-intégrable, il est facile de montrer :

$$\overline{\mathrm{E}}_\nu f(\eta_t, \xi_t) - \overline{\mathrm{E}}_\nu f(\eta_0, \xi_0) = \int_0^t ds \overline{\mathrm{E}}_\nu \overline{\mathrm{L}} f(\eta_s, \xi_s). \tag{2.1}$$

En particulier si ν est une mesure invariante du processus, nous avons $\nu\overline{\mathrm{L}}f = 0$ lorsque f appartient à $\overline{\mathscr{D}}_g$.

III. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE AVEC UNE LOI INITIALE ERGODIQUE

Dans ce paragraphe, nous supposons que $p(1) + p(-1) = 1$ et nous posons $p(1) = p$, $p(-1) = q$. Nous notons $f_{k,l}$ la fonction définie sur $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ par :

$$f_{k,l}(\eta, \xi) = (\eta(0) - \xi(0))^{+} 1_{\left\{ \sup\limits_{-l \leq r_1 \leq 0 \leq r_2 \leq l} \sum\limits_{x=r_1}^{r_2} (\eta(x) - \xi(x)) \geq k \right\}},$$

cette fonction appartient à $\overline{\mathscr{D}}_g$ avec $g(\eta, \xi) = \eta(0) + 1$.

PROPOSITION 3.1. — Soit ν une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ invariante par translation, ergodique, de moyenne finie égale à ρ_1 sur la première coordonnée et à ρ_2 sur la deuxième coordonnée avec $\rho_2 > \rho_1$, alors :

$$\overline{\lim_{l \to \infty}} \nu \overline{\mathrm{L}} f_{k,l} \leq 0 .$$

Démonstration. — Puisque l'interaction est à plus proches voisins nous avons :

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{L}} f_{k,l}(\eta, \xi) = \sum_{x=-l-1}^{l} \{ & p(b(\eta(x), \eta(x+1)) - b(\eta(x), \eta(x+1)) \wedge b(\xi(x), \xi(x+1))) \\ & (f_{k,l}(\eta^{x,x+1}, \xi) - f_{k,l}(\eta, \xi)) \\ & + q(b(\eta(x+1), \eta(x)) - b(\eta(x+1), \eta(x)) \wedge b(\xi(x+1), \xi(x))) \\ & (f_{k,l}(\eta^{x+1,x}, \xi) - f_{k,l}(\eta,\xi)) \\ & + p(b(\xi(x), \xi(x+1) - b(\xi(x), \xi(x+1)) \wedge b(\eta(x), \eta(x+1))) \\ & (f_{k,l}(\eta, \xi^{x,x+1}) - f_{k,l}(n, \xi)) \\ & + q(b(\xi(x+1), \xi(x)) - b(\xi(x+1), \xi(x)) \wedge b(\eta(x+1), \eta(x))) \\ & (f_{k,l}(\eta, \xi^{x+1,x}) - f_{k,l}(\eta, \xi)) \} . \end{aligned}$$

Nous allons chercher les termes positifs de cette somme.

Première étape : étudions les termes pour lesquels x appartient à $]-l-1, -1[$ ou à $]0, l[$.

Dans ces cas, les transitions n'affectent pas $(\eta(0) - \xi(0))^{+}$, seule la fonction indicatrice peut changer et le terme correspondant dans $\overline{\mathrm{L}} f_{k,l}$ sera positif si cette fonction indicatrice passe de 0 à 1.

Si x appartient à $]-l-1, -1[$, cela ne sera possible que s'il existe y

dans $[0, l]$ tel que : $k-1 = \sup_{-l \leq r_1 \leq 0 \leq r_2 \leq l} \sum_{p=r_1}^{r_2} (\eta(p) - \xi(p)) = \sum_{p=x+1}^{y} (\eta(p) - \xi(p))$
et dans cette situation, on a nécessairement $\eta(x+1) \geq \xi(x+1)$ et $\eta(x) \leq \xi(x)$. Or la fonction indicatrice passera de 0 à 1 avec un saut seul de η de x à $x+1$ ou un saut seul de ξ de $x+1$ à x, ce qui est impossible sous les conditions ci-dessus étant donné les propriétés de monotonie de b. Tous ces termes ne donnent aucun terme positif, et il en est de même pour x dans $]0, l[$.

Deuxième étape : considérons les termes pour lesquels $x = -l-1$ ou $x = l$. Là encore les transitions n'affectent pas $(\eta(0) - \xi(0))^+$. Si $x = -l-1$, il peut apparaître un terme positif s'il existe y dans $[0, l]$ tel que :

$$k - 1 = \sup_{-l \leq r_1 \leq 0 \leq r_2 \leq l} \sum_{p=r_1}^{r_2} (\eta(p) - \xi(p)) = \sum_{p=-l}^{y} (\eta(p) - \xi(p))$$

et s'il se produit un saut de η seul, de $-l-1$ à $-l$ ou un saut de ξ seul de $-l$ à $-l-1$.

Dans ce cas on a encore $\eta(-l) \geq \xi(-l)$ mais pas forcément $\eta(-l-1) \leq \xi(-l-1)$ et il peut donc apparaître un terme positif égal à

$$(\eta(0) - \xi(0))^+ 1_{\left\{ \exists y \in [0, l] \text{ tel que } k-1 = \sup_{-l \leq r_1 \leq 0 \leq r_2 \leq l} \sum_{p=r_1}^{r_2} (\eta(p) - \xi(p)) = \sum_{p=-l}^{y} (\eta(p) - \xi(p)) \right\}}$$
$$\{ p(b(\eta(-l-1), \eta(-l)) - b(\eta(-l-1), \eta(-l)) \wedge b(\xi(-l-1), \xi(-l)))$$
$$+ q(b(\xi(-l), \xi(-l-1)) - b(\xi(-l), \xi(-l-1)) \wedge b(\eta(-l), \eta(-l-1))) \}.$$

Pour que ce terme ne soit pas nul, il faut avoir $\eta(-l-1) > \xi(-l-1)$ et par suite $\sum_{p=-l-1}^{y} (\eta(p) - \xi(p)) \geq k$.

Posons $r_1^* = \sup \left\{ n \leq 0, \sum_{p=n}^{0} (\eta(p) - \xi(p)) = \sup_{k \leqq 0} \sum_{p=k}^{0} (\eta(p) - \xi(p)) \right\}$ (avec la convention $\sup \varnothing = +\infty$). Or, lorsque n tend vers l'infini, l'expression $\sum_{p=n}^{0} (\eta(p) - \xi(p))$ converge ν p. s. vers $-\infty$ car $\frac{1}{|n|+1} \sum_{p=n}^{0} (\eta(p) - \xi(p))$ converge ν p. s. vers $\rho_1 - \rho_2$ et par conséquent r_1^* est fini ν p. s. On peut donc majorer le terme positif trouvé par $B\int \eta(0)1_{(r_1^* < -l)}\nu(d\eta, d\xi)$. De la même manière, en définissant r_2^* par

$$r_2^* = \inf\left\{ n \geq 0\,;\ \sum_{p=0}^{n} (\eta(p) - \xi(p)) = \sup_{k \geq 0} \sum_{p=0}^{k} (\eta(p) - \xi(p)) \right\},$$

on majore le terme positif apparaissant lorsque $x = l$ par

$$B\int \eta(0)1_{(r_2^* > l)}\nu(d\eta, d\xi).$$

Troisième étape : considérons les termes correspondants à $x = 0$ et $x = -1$. Dans ce cas les transitions affectent $(\eta(0) - \xi(0))^+$ et on obtient une somme de quatre termes positifs :

$$\begin{aligned} &1_{\left\{\eta(0) \geq \xi(0)\,;\ \sup_{-l \leq r_1 \leq 0 \leq r_2 \leq l} \sum_{p=r_1}^{r_2} (\eta(p) - \xi(p)) \geq k\right\}} \\ &\qquad \times \{ p(b(\eta(-1), \eta(0)) - b(\eta(-1), \eta(0)) \wedge b(\xi(-1), \xi(0))) \\ &\qquad + q(b(\xi(0), \xi(-1)) - b(\xi(0), \xi(-1)) \wedge b(\eta(0), \eta(-1))) \\ &\qquad + p(b(\xi(0), \xi(1)) - b(\xi(0), \xi(1)) \wedge b(\eta(0), \eta(1))) \\ &\qquad + q(b(\eta(1), \eta(0)) - b(\eta(1), \eta(0)) \wedge b(\xi(1), \xi(0))) \}. \end{aligned}$$

Pour que les deux premiers termes ne soient pas nuls, il faut avoir $\eta(-1) > \xi(-1)$, pour que les deux derniers ne soient pas nuls, il faut avoir $\eta(1) > \xi(1)$. A la fonction $2B(P(r_2^* \geq l) + P(r_1^* \leq -l))$ près, on peut donc écrire cette somme de termes sous la forme $A(\eta, \xi) + B(\eta, \xi)$ avec

$$\begin{aligned} A(\eta, \xi) = {} & 1_{\left\{\eta(0) \geq \xi(0),\, \eta(-1) > \xi(-1),\, -l < r_1^* \leq r_2^* < l,\, \sum_{p=r_1^*}^{r_2^*} (\eta(p) - \xi(p)) \geq k\right\}} \\ &\qquad \times \{ p(b(\eta(-1), \eta(0)) - b(\eta(-1), \eta(0)) \wedge b(\xi(-1), \xi(0))) \\ &\qquad + q(b(\xi(0), \xi(-1)) - b(\xi(0), \xi(-1)) \wedge b(\eta(0), \eta(-1))) \} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B(\eta, \xi) = {} & 1_{\left\{\eta(0) \geq \xi(0),\, \eta(1) > \xi(1)\,;\ -l \leq r_1^* \leq r_2^* \leq l,\, \sum_{p=r_1^*}^{r_2^*} (\eta(p) - \xi(p)) \geq k\right\}} \\ &\qquad \times \{ p(b(\xi(0), \xi(1)) - b(\xi(0), \xi(1)) \wedge b(\eta(0), \eta(1))) \\ &\qquad + q(b(\eta(1), \eta(0)) - b(\eta(1), \eta(0)) \wedge b(\xi(1), \xi(0))) \}. \end{aligned}$$

Il s'agit de montrer que les termes $\nu(A)$ et $\nu(B)$ sont compensés par des termes négatifs de même valeur. Le terme $\nu(A)$ peut être compensé par le terme $\nu(C)$ avec

$$\begin{aligned} C(\eta, \xi) = \{ & p(b(\eta(0), \eta(1)) - b(\eta(0), \eta(1)) \wedge b(\xi(0), \xi(1)))(f_{k,l}(\eta^{0,1}, \xi) - f_{k,l}(\eta, \xi)) \\ & + q(b(\xi(1), \xi(0)) - b(\xi(1), \xi(0)) \wedge b(\eta(1), \eta(0)))(f_{k,l}(\eta, \xi^{1,0}) - f_{k,l}(\eta, \xi)) \} \\ & \times 1_{\left\{ \eta(1) \geq \xi(1), \eta(0) > \xi(0), \, -l+1 < r_1^* \leq r_2^* < l+1, \, \sum_{p=r_1^*}^{r_2^*} (\eta(p) - \xi(p)) \geq k \right\}} \\ = - \{ & p(b(\eta(0), \eta(1)) - b(\eta(0), \eta(1)) \wedge b(\xi(0), \xi(1))) \\ & + q(b(\xi(1), \xi(0)) - b(\xi(1), \xi(0)) \wedge b(\eta(1), \eta(0))) \} \\ & \times 1_{\left\{ \eta(1) \geq \xi(1), \eta(0) > \xi(0), \, -l+1 < r_1^* \leq r_2^* < l+1, \, \sum_{p=r_1^*}^{r_2^*} (\eta(p) - \xi(p)) \geq k \right\}} . \end{aligned}$$

En effet sur l'ensemble $\{ \eta(1) \geq \xi(1), \eta(0) > \xi(0)$, nous avons

$$r_1^* = \sup \left\{ n \leq 1 \, ; \sum_{p=n}^{1} (\eta(p) - \xi(p)) = \sup_{k \leqq 1} \sum_{p=k}^{1} (\eta(p) - \xi(p)) \right\}$$

et une expression analogue pour r_2^* ; la mesure ν étant invariante par translation, nous en déduisons $\nu(C) = -\nu(A)$.

De la même manière le terme $\nu(B)$ peut être compensé par le terme négatif $\nu(D)$ avec

$$\begin{aligned} D(\eta, \xi) = - \{ & p(b(\eta(0), \eta(-1)) - b(\eta(0), \eta(-1)) \wedge b(\xi(0), \xi(-1))) \\ & + q(b(\xi(-1), \xi(0)) - b(\xi(-1), \xi(0)) \wedge b(\eta(-1), \eta(0))) \} \\ & \times 1_{\left\{ \eta(-1) \geq \xi(-1), \eta(0) > \xi(0), \, -l-1 < r_1^* \leq r_2^* < l-1, \, \sum_{p=r_1^*}^{r_2^*} (\eta(p) - \xi(p)) \geq k \right\}} . \end{aligned}$$

Quatrième étape : les calculs précédents montrent que

$$\nu \bar{L} f_{k,l} \leq B \int (\eta(0) + 2)(1_{(r_1^* \leq -l)} + 1_{(r_2^* \geq l)}) \nu(d\eta, d\xi)$$

et le membre de droite tend vers 0 lorsque l tend vers l'infini par le théorème de convergence dominée car r_1^* et r_2^* sont finis ν p. s. ∎

Soit maintenant μ une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$, invariante par translation, ergodique, de densité ρ_0 et t_n une suite de points de $\mathbb{R}_+$ tendant vers l'infini pour laquelle la suite de probabilités $\mu S(t_n)$ converge faiblement vers une probabilité $\bar{\mu}$.

Pour toute configuration η dans $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$, posons

$$T(\eta) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{x=0}^{n} \eta(x)$$

lorsque cette limite existe. Puisque la probabilité $\bar{\mu}$ est invariante par translation, T existe $\bar{\mu}$ p. s. et est égale $\bar{\mu}$ p. s. à $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{x=-n}^{0} \eta(x)$. D'après [3], la probabilité $\bar{\mu}$ est un mélange des probabilités μ_ρ, la loi du mélange étant celle de T sous $\bar{\mu}$.

PROPOSITION 3.2. — Dans les conditions ci-dessus, $T = \rho_0$ $\bar{\mu}$ p. s.

Démonstration. — Étant donnée la probabilité μ_ρ qui est, rappelons-le, invariante pour le processus des misanthropes, invariante par translation, ergodique, de densité ρ, considérons la probabilité ν_ρ sur $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ définie par $\nu_\rho = \mu_\rho \otimes \mu$ et supposons $\rho < \rho_0$.

Quitte à extraire une sous-suite de t_n, on peut supposer que la suite de probabilités $\nu_\rho \bar{S}(t_n)$ converge faiblement vers une probabilité $\bar{\nu}_\rho$; les marginales de $\bar{\nu}_\rho$ sont alors respectivement μ_ρ et $\bar{\mu}$. Soit

$$f_k(\eta, \xi) = \lim_{l\to\infty} \uparrow f_{k,l}(\eta, \xi) = (\eta(0) - \xi(0))^+ 1_{\left\{ \sup_{r_1 \le 0 \le r_2} \sum_{x=r_1}^{r_2} (\eta(x) - \xi(x)) \ge k \right\}}.$$

La relation (2.1) s'écrit

$$(3.3) \quad \bar{E}_{\nu_\rho}[f_{k,l}(\eta_t, \xi_t)] = \bar{E}_{\nu_\rho}[f_{k,l}(\eta_0, \xi_0)] + \int_0^t ds \bar{E}_{\nu_\rho}[\bar{L} f_{k,l}(\eta_s, \xi_s)].$$

D'après le théorème I-4.15 de [5] qui se transpose sans problème dans notre cadre, pour chaque s, la loi $\nu_\rho \bar{S}(s)$ de (η_s, ξ_s) est ergodique et de moyenne (ρ, ρ_0).

On peut appliquer la proposition 3.1 avec la mesure $\nu_\rho \bar{S}(s)$ et on obtient, en faisant tendre l vers l'infini dans la relation (3.3)

$$\bar{E}_{\nu_\rho}[f_k(\eta_t, \xi_t)] \le \bar{E}_{\nu_\rho}[f_k(\eta_0, \xi_0)] = \nu_\rho(f_k).$$

D'autre part ν_ρ p. s., $\lim_{k\to\infty} f_k = [(\eta(0) - \xi(0))^+ 1_{\left\{ \sup_{r_1 \le 0 \le r_2} \sum_{x=r_1}^{r_2} (\eta(x) - \xi(x)) = +\infty \right\}}]$.

Or ν_ρ p. s. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{x=0}^{n} (\eta(x) - \xi(x)) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{x=-n}^{0} (\eta(x) - \xi(x)) = \rho - \rho_0 < 0$

et par conséquent $\nu_\rho\left(\sup_{r_1 \le 0 \le r_2} \sum_{x=r_1}^{r_2} (\eta(x) - \xi(x)) = +\infty \right) = 0.$

On en déduit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe K tel que

$$\bar{E}_{\nu_\rho}[f_{k,l}(\eta_{t_n}, \xi_{t_n})] \le \bar{E}_{\nu_\rho}[f_k(\eta_{t_n}, \xi_{t_n})] \le \nu_\rho(f_k) \le \varepsilon \qquad \text{pour} \quad k \ge K.$$

En faisant tendre t_n vers l'infini, on obtient

$$\overline{v}_\rho(f_{k,l}) \leq \varepsilon \qquad \text{si} \quad k \geq K$$

et par suite $\overline{v}_\rho\big((\eta(0) - \xi(0))^+ 1_{\left\{\sup\limits_{r_1 \leq 0 \leq r_2} \sum\limits_{x=r_1}^{r_2} (\eta(x) - \xi(x)) = +\infty\right\}}\big) = 0$ (en faisant tendre l puis k vers l'infini et enfin ε vers 0).

Comme l'ensemble $\{ T(\xi) < \rho \}$ est inclu $\overline{v}_\rho$ p. s. dans l'ensemble $\left\{ \sup\limits_{r_1 \leq 0 \leq r_2} \sum\limits_{x=r_1}^{r_2} (\eta(x) - \xi(x)) = +\infty \right\}$, nous avons prouvé que

$$\overline{v}_\rho((\eta(0) - \xi(0))^+ 1_{\{T(\xi) < \rho\}}) = 0 .$$

La probabilité $\overline{v}_\rho$ et la variable aléatoire $(\eta, \xi) \to T(\xi)$ étant invariantes par translation, on obtient

$$0 = \overline{v}_\rho\left(1_{(T(\xi) < \rho)} \frac{1}{n} \sum_{x=0}^{n} (\eta(x) - \xi(x))^+ \right)$$

et donc
$$\overline{v}_\rho(1_{(T(\xi) < \rho)}(\rho - T(\xi))) = 0$$

car d'une part $\overline{v}_\rho$ ne charge que l'ensemble $\{ (\eta, \xi) ; \eta \leq \xi \text{ ou } \eta \geq \xi \}$ (proposition 2.10 de [*3*]) et d'autre part, sous $\overline{v}_\rho$ les variables aléatoires $(\eta(x), x \in \mathbb{N})$ sont indépendantes, de même loi d'espérance ρ. Cette dernière relation s'écrit

$$\overline{\mu}(1_{(T(\xi) < \rho)}(\rho - T(\xi))) = 0$$

ce qui entraîne que T est supérieur ou égal à ρ, et ceci pour tout $\rho < \rho_0$, donc T est supérieure ou égale à ρ_0, $\overline{\mu}$ p. s.

D'autre part on sait que $\mu S(t)[\xi(0) \wedge k]$ converge vers $\overline{\mu}[\xi(0) \wedge k]$ lorsque t tend vers l'infini. Comme $\mu S(t)[\xi(0)] = \rho_0$ pour tout t ceci implique que $\overline{\mu}(\xi(0)) \leqslant \rho_0$ et donc $\overline{\mu}(T) \leqslant \rho_0$. On a alors nécessairement $T = \rho_0$ $\overline{\mu}$ p. s. ■

On a donc démontré le théorème :

THÉORÈME 3.3. — Pour le processus des misanthropes en dimension 1 avec des sauts uniquement sur les plus proches voisins, si μ est une loi initiale invariante par translation, ergodique de densité ρ_0, alors $\mu S(t)$ converge faiblement vers μ_{ρ_0} la mesure produit invariante de densité ρ_0.

Remarque. — Ce théorème est également valable pour le processus du zéro-range. Le seul problème est que ce processus est défini *a priori* pour des coefficients $b(i)$ non bornés tels que $b(i) \leq Ki$. Il est facile de faire les modifications *ad-hoc* dans la proposition 3.1 en supposant en plus que la première coordonnée de ν est une mesure produit μ_{ρ_1}. Ainsi dans la deuxième étape de la démonstration, on peut majorer le terme positif qui apparaît par $pK\bar{\nu}\{\eta(0)\eta(-l-1)1_{(r_1^* < -l)}\}$; ce terme tend vers 0 quand l tend vers l'infini grâce à l'inégalité de Schwarz et au fait que μ_{ρ_1} a un deuxième moment fini. Les termes qui apparaissent dans la troisième étape se traitent de la même manière. La proposition 3.2 est alors identique.

Il est naturel de se demander si on a un résultat lorsque la densité de la loi initiale est infinie.

COROLLAIRE 3.4. — Si μ est une loi sur $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ invariante par translation, ergodique et telle que $\int \eta(x)\mu(d\eta) = \infty$ alors $\lim_{t \uparrow \infty} \mu S(t)[\eta(x) \leq k] = 0 \ \forall k$. Par conséquent aucune sous-suite de $\mu S(t)$ a une limite faible.

Démonstration. — Considérons un entier positif l, la fonction A_l de $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ définie par $(A_l(\eta))(x) = \eta(x) \wedge l$ et la loi de probabilité sur $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ μ_l image de μ par la fonction A_l. La mesure μ_l est aussi invariante et ergodique, et de plus sa moyenne est finie. Nous pouvons appliquer le théorème 3.3 donc $\lim_t \mu_l S(t) = \mu_{\rho(l)}$ où $\rho(l)$ est un paramètre qui tend vers l'infini avec l.

Donc pour tout l, $\lim_{t \uparrow \infty} \mu_l S(t)\{\eta(x) \leq k\} = \mu_{\rho(l)}\{\eta(x) \leq k\}$. D'autre part $\mu S(t) \geq \mu_l S(t)$ et par conséquent

$$\mu S(t)\{\eta(x) \leq k\} \leq \mu_l S(t)\{\eta(x) \leq k\}$$

d'où

$$\overline{\lim_{t \uparrow \infty}} \mu S(t)\{\eta(x) \leq k\} \leq \mu_{\rho(l)}\{\eta(x) \leq k\}.$$

Or

$$\lim_{l \uparrow \infty} \mu_{\rho(l)}[\eta(x) \leq k] = 0$$

donc

$$\lim_{t \uparrow \infty} \mu S(t)\{\eta(x) \leq k\} = 0. \qquad \blacksquare$$

Une conséquence curieuse de ce théorème est la non conservation de la compressibilité statique.

DEFINITION 3.5. — On appelle compressibilité statique d'une loi μ sur $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ invariante par translation et ergodique la quantité (si elle existe) :

$$\chi_\mu = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \left\{ \int \mu(d\eta)\eta(x)\eta(0) - \int \mu(d\eta)\eta(0) \int \mu(d\eta)\eta(x) \right\}.$$

Il est assez facile de montrer que cette quantité est constante dans le temps pour le processus des misanthropes.

LEMME 3.6. — Soit μ une loi sur $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ invariante par translation telle que $\int \eta^2(0)$ soit fini ; si μ_t est la loi du processus des misanthropes à l'instant t ayant μ comme loi initiale, on a :

$$\sum_{|u| \leq n} \mu_t(\eta(0)\eta(u)) - \sum_{|u| \leq n} \mu(\eta(0)\eta(u))$$
$$= 2\int_0^t ds\mu_s[pb(\eta(0), \eta(1))[\eta(n+1) - \eta(-n)] + qb(\eta(0), \eta(-1))[\eta(-n-1) - \eta(n)]].$$

Démonstration. — Posons $f_u(\eta) = \eta(0)\eta(u)$.
Les hypothèses de (2.1) étant vérifiées avec $g(\eta, \xi) = \eta(0) + \eta(u)$ on a :

$$\mu_t(f_u) - \mu(f_u) = \int_0^t ds\mu_s(\mathrm{L}f_u).$$

Or μ_s étant invariante par translation, nous avons :

$$\mu_s \mathrm{L} f_u = \mu_s[pb(\eta(0), \eta(1))\mathrm{A}_1(u) + qb(\eta(0), \eta(-1))\mathrm{A}_2(u)]$$

avec

$$\begin{array}{lll}
\cdot \text{ pour } & |u| \geq 2 & \mathrm{A}_1(u) = \eta(1-u) - \eta(u) + \eta(u+1) - \eta(-u) \\
& & \mathrm{A}_2(u) = \eta(u-1) - \eta(u) + \eta(-u-1) - \eta(-u) \\
\cdot \text{ pour } & |u| = 1 & \mathrm{A}_1(u) = \eta(2) + \eta(0) - \eta(1) - \eta(-1) - 1 \\
& & \mathrm{A}_2(u) = \eta(-2) + \eta(0) - \eta(-1) - \eta(1) - 1 \\
\cdot \text{ pour } & u = 0 & \mathrm{A}_1(0) = 2(\eta(1) - \eta(0) + 1) \\
& & \mathrm{A}_2(0) = 2(\eta(-1) - \eta(0) + 1).
\end{array}$$

Nous en déduisons que :

$$\sum_{|u| \leq n} \mu_s(\mathrm{L}f_u) = \mu_s[pb(\eta(0), \eta(1))(-\eta(-n) + \eta(n+1)) + qb(\eta(0), \eta(-1))(-\eta(n) + \eta(-n-1))] \times 2$$

ce qui termine la démonstration. ■

PROPOSITION 3.7. — Soit μ une loi sur $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ invariante par translation, ergodique, telle que $\int \eta^2(0)\mu(d\eta)$ soit fini et que χ_μ existe ; si μ_t est la loi du processus des misanthropes à l'instant t ayant μ comme loi initiale on a :

$$\chi_\mu = \chi_{\mu_t}.$$

Démonstration. — D'après le lemme 3.6, comme $\mu_t(\eta(0))$ ne dépend pas de t (cf. (3)) on a :

$$\sum_{|u|\leq n} \mathrm{cov}_{\mu_t}(\eta(0), \eta(u)) - \sum_{|u|\leq n} \mathrm{cov}_\mu(\eta(0), \eta(u))$$
$$= 2\int_0^t ds\,[p\,\mathrm{cov}_{\mu_s}(b(\eta(0), \eta(1)), -\eta(-n) + \eta(n+1))$$
$$+ q\,\mathrm{cov}_{\mu_s}(b(\eta(0), \eta(-1)), -\eta(n) + \eta(-n-1))].$$

Or d'après le théorème (I.4.6) de [5] qui se transpose sans problème dans notre cadre (dans [5] les processus sont construits sur un espace compact) pour tout s, $\lim_{n\to\pm\infty} \mathrm{cov}_{\mu_s}[b(\eta(0), \eta(1)), \eta(n)] = 0$. Donc en appliquant le théorème de Lebesgue puisque $b(\eta(0), \eta(1))$ est borné et que $\eta(n)$ est d'intégrale constante, on obtient le résultat. ■

On constate que χ_{μ_t} est constante dans le temps, mais la compressibilité de la limite faible, c'est-à-dire de μ_{ρ_0} (avec $\rho_0 = \mu(\eta(0))$ est différente en général.

IV. MESURES INVARIANTES LORSQUE p EST DE MOYENNE NULLE

Dans cette partie on étudie le processus des misanthropes en dimension 1, mais pas forcément à plus proches voisins. Il s'agit de montrer que si $\sum_{u\in\mathbb{Z}} up(u) = 0$ alors toute mesure invariante est nécessairement invariante par translation. Pour cela on utilise une technique de couplage semblable à celle utilisée dans [4] pour le processus d'exclusion simple avec changement de vitesse.

Pour un meilleur emploi de cette technique, il convient d'élargir l'espace dans lequel évolue le processus à $\overline{\mathbb{N}}^{\mathbb{Z}}$ où $\overline{\mathbb{N}} = \mathrm{N} \cup \{\infty\}$ est la compactification de $\mathbb{N}$. Dans la suite, on adoptera les conventions suivantes : $\infty + 1 = \infty - 1 = \infty$, $(l - \infty)^+ = 0$ pour tout l appartenant à $\mathbb{N}$. On définit également $b(\infty, k)$ et $b(k, \infty)$ comme les limites quand l tend vers l'infini de $b(l, k)$ et $b(k, l)$ respectivement. Finalement $b(\infty, \infty)$ sera égal à B. Le générateur du nouveau processus aura toujours la même expression :

$$\mathrm{L}f(\eta) = \sum_{x,y\in\mathbb{Z}} p(y-x)b(\eta(x),\eta(y))(f(\eta^{xy}) - f(\eta))$$

pour toute fonction f continue sur $\overline{\mathbb{N}}^{\mathbb{Z}}$ et qui ne dépend que d'un nombre fini de coordonnées. Pour démontrer l'existence de ce processus, il suffit d'utiliser les résultats de [5] (I.3) en posant (suivant les notations de [5]).

- $C_T \equiv 0$ si $|T| \neq 2$
- si $\eta(x) = \eta(y) = \infty$ et $x \neq y$

$$C_{\{x,y\}}(\eta, \{\xi\}) = \begin{cases} (p(y-x) + p(x-y))\mathrm{B} & \text{si} \quad \xi(x) = \xi(y) = \infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- si $\eta(x) \neq \infty$ ou $\eta(y) \neq \infty$ et $x \neq y$

$$C_{\{x,y\}}(\eta, \{\xi\}) = \begin{cases} p(y-x)b(\eta(x),\eta(y)) & \text{si} \quad \xi(x)=\eta(x)-1 \quad \text{et} \quad \xi(y)=\eta(y)+1 \\ p(x-y)b(\eta(y),\eta(x)) & \text{si} \quad \xi(x)=\eta(x)+1 \quad \text{et} \quad \xi(y)=\eta(y)-1 \\ p(y-x)(\mathrm{B}-b(\eta(x),\eta(y)))+p(x-y)(\mathrm{B}-b(\eta(y),\eta(x))) & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{si} \quad \xi(x)=\eta(x) \quad \text{et} \quad \xi(y)=\eta(y) & \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette définition un peu artificielle des coefficients dans le cas où la restriction de η à $\{x, y\}$ est égale à ξ a été choisie pour que la fonction $\eta \to C_{\{x,y\}}(\eta, d\xi)$ soit continue. Il est clair que ces coefficients ne joueront aucun rôle dans le processus.

Le processus couplé peut être construit de façon analogue. Toujours selon les résultats de [5], si une mesure ν sur $\overline{\mathbb{N}}^{\mathbb{Z}} \times \overline{\mathbb{N}}^{\mathbb{Z}}$ est invariante $\int \overline{\mathrm{L}} f d\nu = 0$ pour toute fonction continue, qui ne dépend que d'un nombre fini de coordonnées. Dans la suite, il sera utile de savoir qu'il en est de même pour une classe plus grande de fonctions.

LEMME 4.1. — Soit ν une mesure invariante pour le processus couplé qui ne charge que $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}} \times \overline{\mathbb{N}}^{\mathbb{Z}}$ et f une fonction continue sur $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}} \times \overline{\mathbb{N}}^{\mathbb{Z}}$ qui ne dépend que d'un nombre fini de coordonnées et pour laquelle il existe une constante K vérifiant :

$|f(\eta^x, \xi) - f(\eta, \xi)| \leq \mathrm{K}$ pour tout (η, ξ) dans $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ et tout x dans $\mathbb{Z}$,

où
$$\eta^x(y) = \begin{cases} n(y) & \text{si} \quad y \neq x \\ \eta(x) + 1 & \text{si} \quad y = x . \end{cases}$$

Alors
$$\int \bar{L} f \, dv = 0 .$$

Démonstration. — Pour tout k dans $\mathbb{N}$, on pose $f_k(\eta, \xi) = f(\eta_k, \xi)$ où $\eta_k(x) = \eta(x) \wedge k$. Cette fonction f_k est continue sur $\bar{\mathbb{N}}^{\mathbb{Z}} \times \bar{\mathbb{N}}^{\mathbb{Z}}$ et ne dépend que d'un nombre fini de coordonnées, donc $\int \bar{L} f_k dv = 0$. Un simple calcul montre que $\bar{L} f_k$ est une fonction bornée qui tend v p. s. vers $\bar{L} f$ quand k tend vers l'infini. Le lemme se déduit maintenant du théorème de convergence dominée. ■

Les propositions suivantes peuvent être démontrées en utilisant la même méthode qu'en [*3*] (paragraphe 2).

PROPOSITION 4.2. — Si v est une mesure qui ne charge que $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}} \times \bar{\mathbb{N}}^{\mathbb{Z}}$ et qui est invariante par translation et invariante pour le processus couplé de générateur $\bar{L}$, alors :

$$v(\{ \eta \geq \xi \} \cup \{ \eta \leq \xi \}) = 1 .$$

PROPOSITION 4.3. — Les mesures invariantes par translation sur $\bar{\mathbb{N}}^{\mathbb{Z}}$ et invariantes pour le processus des misanthropes sur $\bar{\mathbb{N}}^{\mathbb{Z}}$ sont des mélanges de probabilités μ_ρ ($\rho \in \mathbb{R}_+$) et de μ_∞; cette dernière probabilité étant la mesure de Dirac sur la configuration $\eta \equiv \infty$.

LEMME 4.4. — Si v est une mesure invariante pour le processus couplé, telle que $v(\mathbb{N}^{\mathbb{Z}} \times \bar{\mathbb{N}}^{\mathbb{Z}}) = 1$, alors :

$$\begin{aligned} &\sum_{|x| \leq n} \sum_{y} v\,[1_{(\eta(x) > \xi(x), \eta(y) < \xi(y))} [p(y-x)\,[b(\eta(x), \eta(y)) - b(\xi(x), \xi(y))] \\ &\qquad\qquad + p(x-y)\,[b(\xi(y), \xi(x)) - b(\eta(y), \eta(x))]]] \\ &= \sum_{|x| \leq n} \sum_{|y| > n} v\,[1_{(\eta(x) \geq \xi(x), \eta(y) \geq \xi(y))} [p(y-x)\,[b(\xi(x), \xi(y)) - b(\eta(x), \eta(y))] \\ &\qquad\qquad + p(x-y)\,[b(\eta(y), \eta(x)) - b(\xi(y), \xi(x))]]] . \end{aligned}$$

Démonstration. — D'après le lemme 4, nous avons $v\bar{L}g = 0$ pour la fonction $g(\eta, \xi) = (\eta(x) - \xi(x))^+$. Or, pour η dans $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\bar{L}g(\eta, \xi) = & -\sum_y p(y-x)[b(\eta(x), \eta(y)) - (b(\eta(x), \eta(y)) \wedge b(\xi(x), \xi(y)))]1_{(\eta(x) > \xi(x))} \\ & + \sum_z p(x-z)[b(\eta(z), \eta(x)) - (b(\eta(z), \eta(x)) \wedge b(\xi(z), \xi(x)))]1_{(\eta(x) \geq \xi(x))} \\ & + \sum_y p(y-x)[b(\xi(x), \xi(y)) - (b(\eta(x), \eta(y)) \wedge b(\xi(x), \xi(y)))]1_{(\eta(x) \geq \xi(x))} \\ & - \sum_z p(x-z)[b(\xi(z), \xi(x)) - (b(\eta(z), \xi(x)) \wedge b(\xi(z), \xi(x)))]1_{(\eta(x) > \xi(x))}.\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de croissance et de décroissance de $b(.,.)$ on trouve en définitive :

$$\begin{aligned}\bar{L}g(\eta, \xi) = & -\sum_y 1_{(\eta(x) > \xi(x), \eta(y) < \xi(y))}[p(y-x)[b(\eta(x), \eta(y)) - b(\xi(x), \xi(y))] \\ & \qquad + p(x-y)[b(\xi(y), \xi(x)) - b(\eta(y), \eta(x))]] \\ & + \sum_y 1_{(\eta(x) \geq \xi(x), \eta(y) \geq \xi(y))}[p(y-x)[b(\xi(x), \xi(y)) - b(\eta(x), \eta(y))] \\ & \qquad p(x-y)[b(\eta(y), \eta(x)) - b(\xi(y), \xi(x))]].\end{aligned}$$

En intégrant par rapport à ν et en sommant sur tous les x de module inférieur ou égal à n on trouve l'expression du lemme en remarquant que :

$$\begin{aligned}\sum_{|x| \leq n} \sum_{|y| \leq n} \nu\{ & 1_{(\eta(x) \geq \xi(x), \eta(y) \geq \xi(y))}[p(y-x)[b(\xi(x), \xi(y)) - b(\eta(x), \eta(y))] \\ & + p(x-y)[b(\eta(y), \eta(x)) - b(\xi(y), \xi(x))]]\} = 0. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

PROPOSITION 4.5. — Soit ν une probabilité sur $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}} \times \overline{\mathbb{N}}^{\mathbb{Z}}$ invariante pour le processus couplé et de première marginale μ_ρ ($\rho \in \mathbb{R}_+$).

Supposons que $\sum_{u \in \mathbb{Z}} |u| p(u) < +\infty$ et $\sum_{u \in \mathbb{Z}} u p(u) = 0$ alors :

$$\begin{aligned}\nu\{ & 1_{\eta(x) > \xi(x), \eta(y) < \xi(y))}[p(y-x)[b(\eta(x), \eta(y)) - b(\xi(x), \xi(y))] \\ & + p(x-y)[b(\xi(y), \xi(x)) - b(\eta(y), \eta(x))]]\} = 0.\end{aligned}$$

Démonstration. — L'égalité du lemme 4.4 peut s'écrire :

$$\sum_{|x|\leq n}\sum_{y} \nu\,[1_{(\eta(x)>\xi(x),\eta(y)<\xi(y))}\,[p(y-x)\,[b(\eta(x),\eta(y))-b(\xi(x),\xi(y))] + p(x-y)\,[b(\xi(y),\xi(x))-b(\eta(y),\eta(x))]]]$$
$$= \sum_{\substack{x\leq n\\ y>n}}\nu(\mathrm{A}) + \sum_{\substack{x\geq -n\\ y<-n}}\nu(\mathrm{A}) - \sum_{\substack{x<-n\\ y>n}}\nu(\mathrm{A}) - \sum_{\substack{x>n\\ y<-n}}\nu(\mathrm{A})$$

où

$$\mathrm{A} = 1_{(\eta(x)\geq\xi(x),\eta(y)\geq\xi(y))}\,[p(y-x)\,[b(\xi(x),\xi(y))-b(\eta(x),\eta(y))] + p(x-y)\,[b(\eta(y),\eta(x))-b(\xi(y),\xi(x))]].$$

Or
$$\Big|\sum_{\substack{x<-n\\ y>n}}\nu(\mathrm{A}) + \sum_{\substack{x>n\\ y<-n}}\nu(\mathrm{A})\Big| \leq 2\mathrm{B}\sum_{|u|>n}|u|\,p(u)$$

et
$$\sum_{\substack{x\leq n\\ y>n}}\nu(\mathrm{A}) + \sum_{\substack{x\geq -n\\ y<-n}}\nu(\mathrm{A}) = \sum_{\substack{x\leq 0\\ y>0}}\nu^{(n)}(\mathrm{A}) + \sum_{\substack{x\geq 0\\ y<0}}\nu^{(-n)}(\mathrm{A})$$

où $\nu^{(n)}$ est la translatée de ν par n. Il existe une suite croissante d'entiers $(\mathrm{N}_i, i\in\mathbb{N})$ telle que les limites $\lim\limits_{i}\dfrac{1}{\mathrm{N}_i+1}\sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}_i}\nu^{(n)}$ et $\lim\limits_{i}\dfrac{1}{\mathrm{N}_i+1}\sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}_i}\nu^{(-n)}$ existent. Nous noterons $\bar{\nu}$ et $\bar{\bar{\nu}}$ respectivement, ces limites.

Les mesures $\bar{\nu}$ et $\bar{\bar{\nu}}$ sont invariantes pour l'évolution de générateur $\overline{\mathrm{L}}$, invariantes par translation et de premières marginales μ_ρ ; elles ne chargent donc que $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}\times\overline{\mathbb{N}}^{\mathbb{Z}}$.

On obtient alors :

$$\lim_{i\uparrow\infty}\frac{1}{\mathrm{N}_i}\sum_{n=0}^{\mathrm{N}_i}\sum_{|x|\leq n}\sum_{y}\nu\,[1_{(\eta(x)>\xi(x),\eta(y)<\xi(y))}\,[p(y-x)\,[b(\eta(x),\eta(y))-b(\xi(x),\xi(y))] + p(x-y)\,[b(\xi(y),\xi(x))-b(\eta(y),\eta(x))]]]$$
$$= \sum_{\substack{x\leq 0\\ y>0}}\bar{\nu}(\mathrm{A}) + \sum_{\substack{x\geq 0\\ y<0}}\bar{\bar{\nu}}(\mathrm{A}).$$

D'après la proposition 4.2, les mesures $\bar{\nu}$ et $\bar{\bar{\nu}}$ ne chargent que l'ensemble $\{(\eta\leq\xi)\cup(\eta\geq\xi)\}$.

On peut les décomposer chacune en une combinaison convexe de deux mesures invariantes et invariantes par translation chargeant respectivement $\eta \leq \xi$ et $\eta \geq \xi$. Alors

$$\sum_{\substack{x\leqslant 0\\ y>0}} \bar{v}(A) = \sum_{\substack{x\leq 0\\ y>0}} \alpha_1 \{ p(y-x)\bar{v}_1(b(\xi(x),\xi(y))) - p(x-y)\bar{v}_1(b(\xi(y),\xi(x))) + p(x-y)\bar{v}_1(b(\eta(y),\eta(x))) - p(y-x)\bar{v}_1(b(\eta(x),\eta(y))) \}.$$

On obtient une expression semblable pour $\sum_{\substack{x\geq 0\\ y<0}} \bar{\bar{v}}(A)$. Or chaque composante de $\bar{v}_1$ est une mesure invariante pour le processus des misanthropes, invariante par translation; d'après la proposition 4.3, elles s'écrivent comme un mélange des mesures produits μ_ρ $(0 \leq \rho \leq \infty)$; par suite :

$$\bar{v}_1(b(\xi(x),\xi(y))) = \bar{v}_1(b(\xi(y),\xi(x))) = \bar{v}_1(b(\xi(0),\xi(1)))$$

et
$$\bar{v}_1(b(\eta(y),\eta(x))) = \bar{v}_1(b(\eta(x),\eta(y))) = \bar{v}_1(b(\eta(0),\eta(1))).$$

Comme la moyenne de p est nulle il est alors clair que $\sum_{\substack{x\leq 0\\ y>0}} \bar{v}(A) = 0.$

De la même manière $\sum_{\substack{x\geq 0\\ y<0}} \bar{\bar{v}}(A) = 0$, d'où le résultat puisque pour x et y fixés, l'expression

$$v(1_{(\eta(x)>\xi(x),\eta(y)<\xi(y))}[p(y-x)(b(\eta(x),\eta(y)) - b(\xi(x),\xi(y))) + p(x-y)(b(\xi(y),\xi(x)) - b(\eta(y),\eta(x)))]$$

est positive. ∎

La suite est alors semblable au travail effectué dans [*3*]. La proposition 4.5 montre que si $p(y-x)$ est différent de 0 alors $v(\eta(x) > \xi(x) = 0, \eta(y) < \xi(y)) = 0$. Pour montrer que pour tous x et y $v(\eta(x) > \xi(x), \eta(y) < \xi(y)) = 0$ on peut refaire exactement la même démonstration que dans le théorème 2.10 de [*3*] qui n'utilise pas l'invariance par translation. On obtient alors la proposition :

PROPOSITION 4.6. — Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition 4.5, v ne charge que $\{ (\eta, \xi)/\eta \leqslant \xi \text{ ou } \eta \geqslant \xi \}$.

Une fois la proposition 4.6 obtenue les techniques sont standard. En faisant la même démonstration que celle du corollaire 4.2.11 p. 244 de [*4*] on obtient le théorème :

THÉORÈME 4.7. — Si μ est une mesure invariante pour le processus des misanthropes sur $\overline{\mathbb{N}}^{\mathbb{Z}}$ (resp. $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$) et si $\sum_{u \in \mathbb{Z}} | u | p(u) < \infty$, $\sum_{u \in \mathbb{Z}} up(u) = 0$ alors μ est un mélange de lois μ_ρ $0 \leq \rho \leq \infty$ (respectivement $0 \leq \rho < +\infty$).

Ceci montre qu'alors μ est nécessairement invariante par translation.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. ANDJEL, Invariant measures for the zero range process. *Annals of Proba.*, t. **10**, 1982, p. 525-547.

[2] E. ANDJEL, The asymetric simple exclusion process on $\mathbb{Z}^d$. *Z. W.*, t. **58**, 1981, p. 423-432.

[3] Ch. COCOZZA-THIVENT, Le processus des misanthropes (à paraître dans *Z.f.w.*, 1985).

[4] T. M. LIGGETT, *The stochastic evolution of infinite systems for interacting particles. Lecture notes in Math.*, n° 598 (École d'Été de probabilités de Saint-Four VI, 1976).

[5] T. M. LIGGETT, *Interacting particle systems.* Springer, 1985.

(Manuscrit reçu le 13 juillet 1984)