ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

SOPHIE WEINRYB

Homogénéisation pour des processus associés à des frontières perméables

Annales de l'I. H. P., section B, tome 20, nº 4 (1984), p. 373-407

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1984__20_4_373_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 20, n° 4, 1984, p. 373-407. *Probabilités et Statistiques*

Homogénéisation pour des processus associés à des frontières perméables

par

Sophie WEINRYB
Centre de Mathématiques Appliquées de l'École Polytechnique,
91128 Palaiseau Cedex, France

RÉSUMÉ. — Nous avons essayé d'étendre les résultats sur les équations avec petit paramètre aux processus associés à des frontières perméables. Notre but est de modéliser le comportement d'une particule dans un milieu inhomogène, constitué par exemple de gouttes liquides dans une phase gazeuse.

Nous avons d'abord considéré le point de vue microscopique par un processus associé à des coefficients et des frontières périodiques; ces dernières étant des droites ou des cercles du plan. Par un changement d'échelle, on s'est ramené à une suite de lois pour lesquelles les frontières sont de plus en plus denses. Il semble naturel de considérer la limite faible de cette suite comme une approximation du phénomène physique.

Nous avons montré deux types de résultats qui dépendent du comportement de l'opérateur sur les frontières. Nous avons d'abord supposé que l'effet de surface diminuait et ensuite qu'il était constant. Dans ce dernier cas, la convergence repose sur une hypothèse de centrage.

ABSTRACT. — We have tried to extend the results on equations with a small parameter to processes with penetrable boundaries. The aim of this study is to model the behaviour of a particule in an inhomogeneous medium which can be constitued by some drops of liquid in a gazeous phase.

First, we have considered the microscopic point of view through a process which is associated with periodic coefficients and boundaries; these can be either lines or circles in the plane. Then, by a change of scale, we have studied a sequence of laws corresponding to boundaries becoming everywhere dense. It seems natural to consider the weak limit of this sequence as an approximation of the physical phenomenon.

We have proved two types of results that depend on the behaviour of the operator on the boundaries. First, we have supposed that there was a reduction of the surface effect and, secondly, that this effect was constant. In this last case the weak convergence relies on a centering condition.

INTRODUCTION

Nous nous sommes intéressés à une extension aux processus avec frontières perméables des résultats sur les équations avec petit paramètre obtenus par Papanicolaou, Stroock et Varadhan dans [1].

Le problème étudié ici est suggéré par la modélisation du phénomène physique suivant : on décrit la diffusion d'une particule dans un milieu inhomogène comportant deux phases et constitué par exemple de gouttes d'un liquide au milieu d'une phase gazeuse. Si la géométrie des deux milieux est connue, la loi de la diffusion est la solution d'un problème de martingales faisant intervenir des « temps locaux » associés aux surfaces de séparation des deux milieux (voir [2] pour une description générale).

La complexité de la géométrie de l'ensemble des deux milieux conduit, lorsque la dimension des gouttes est très petite, à considérer le modèle comme un modèle avec un petit paramètre ε (la dimension des « gouttes ») et à chercher sa limite lorsque ε tend vers 0. Le problème est donc celui de la limite faible d'une suite de processus plans indexés par un petit paramètre.

Avant d'aborder le problème où les deux milieux en présence sont séparés par des frontières circulaires, on traite le cas où les frontières de transmission sont des droites parallèles. Nos démonstrations sont inspirées de [1] ainsi que d'un article de M. I. Freidlin [3].

Dans la première partie nous indiquons comment construire un processus de Markov associé à un ensemble dénombrable de frontières, qu'elles soient rectilignes ou circulaires. A partir d'un tel processus, défini à l'aide de coefficients et de frontières périodiques, nous introduisons alors sa projection sur le tore à deux dimensions ; celle-ci constitue « le processus de base » dont nous détaillons la probabilité invariante. Nous décrivons dans la troisième partie les deux suites de lois envisagées : $(\mathrm{P}^n)_n$ pour les frontières rectilignes et $(\mathrm{Q}^n)_n$ pour les frontières circulaires.

Ensuite, nous énonçons et démontrons un théorème de convergence pour ces deux suites lorsque l'opérateur de frontière « converge localement vers 0 ». Enfin, dans la dernière partie, nous démontrons un théorème de convergence pour la suite $(\mathrm{P}^n)_n$ lorsque l'opérateur de frontière ne dépend que de la période et lorsque l'on fait une hypothèse de centrage analogue à celle des équations avec petit paramètre.

I. CONSTRUCTION DE PROCESSUS DE MARKOV ASSOCIÉS A UN ENSEMBLE DÉNOMBRABLE DE FRONTIÈRES

Nous décrivons cette construction dans le cas de frontières rectilignes en notant qu'elle est tout à fait analogue dans le cas des cercles et s'appuie alors sur l'existence d'un processus de Markov associé à une seule frontière circulaire.

Soit $\mathscr{D} = \{ x^n ; n \in \mathbb{Z} \}$ un ensemble dénombrable de réels (éventuellement fini) tel que $\inf_{n\in\mathbb{Z}} | x^n - x^{n+1} | > 0$; notons $\tilde{\mathscr{D}} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{ x = x^n \}$, qui est donc constitué d'un ensemble dénombrable de droites parallèles de $\mathbb{R}^2$. Nous allons construire un processus de Markov associé aux frontières de $\tilde{\mathscr{D}}$. Soient, par ailleurs, $a(x, y)$ et $(\alpha^n(y))_{n\in\mathbb{Z}}$ des fonctions continues à droite, bornées et minorées par des constantes strictement positives ; a sera le coefficient de diffusion du processus et $(\alpha^n)_n$ nous permettra de définir l'opérateur sur la frontière $\tilde{\mathscr{D}}$. Nous notons $\mathrm{R}(a, \alpha, \tilde{\mathscr{D}})$ la loi du processus cherché et nous notons $(\mathrm{P}^{a,\alpha,x_0}_{(x,y)}, (x, y) \in \mathbb{R}^2)$ celle du processus de Markov plan associé à la droite frontière $\{ x = x_0 \}$ (cf. [*4*]).

Rappelons que $\mathrm{P}^{a,\alpha,x_0}_{(x,y)}$ est l'unique solution du problème de martingale :

$$* \quad \mathrm{P}(\mathrm{X}_0 = x, \mathrm{Y}_0 = y) = 1, \int_0^t 1_{\mathrm{X}_s = x_0} ds = 0 \quad \text{P. p. s.}$$

$$* \quad f(\mathrm{X}_t, \mathrm{Y}_t) - f(\mathrm{X}_0, \mathrm{Y}_0) - \frac{1}{2}\int_0^t a(\mathrm{X}_s, \mathrm{Y}_s)\Delta f(\mathrm{X}_s, \mathrm{Y}_s) ds - \frac{1}{2}\int_0^t (f'_x(x_0^+, \mathrm{Y}_s) - \alpha(\mathrm{Y}_s) f'_x(x_0^-, \mathrm{Y}_s)) d\mathrm{L}_s^{x_0}$$

est une P-martingale (où $\mathrm{L}_t^{x_0}$ désigne le temps local en x_0 du processus X.).

Nous allons construire $R(a, \alpha, \tilde{\mathscr{D}})$ sur l'espace canonique des trajectoires continues à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, à l'aide des temps d'atteintes successifs $(T^k)_k$ des droites de $\tilde{\mathscr{D}}$ et des lois $P^{a,\alpha,x_0}_{(x,y)}$.

En effet, notons $T^0 = \inf\{ t \geqslant 0 ; X_t \in \mathscr{D} \}$ ((X_t, Y_t) désigne les coordonnées du processus canonique) et $T^k = \inf\{ t > T^{k-1} ; X_t \in \mathscr{D} \backslash \{ X_{T^{k-1}} \} \}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Construisons $R_{(x,y)}(a, \alpha, \tilde{\mathscr{D}})$ de proche en proche sur chacun des intervalles $[T^k, T^{k+1}]$ (pour (x, y) point de départ)

* Sur $[0, T^0]$, posons $R_{(x,y)}(a, \alpha, \tilde{\mathscr{D}}) \equiv Q^a_{(x,y)}$ où $\left(Q^a_{(x,y)}, (x, y) \in \mathbb{R}^2\right)$ désigne la diffusion plane de générateur $a(x, y)\Delta f(x, y)$.

* Si R^k désigne la probabilité conditionnelle de $R_{(x,y)}(a, \alpha, \tilde{\mathscr{D}})$ par rapport à $\mathscr{F}_{T^k} = \sigma(X_t, Y_t ; t \leqslant T^k)$

posons sur $[T^k, T^{k+1}]$, $R^k \equiv P^{a,\alpha(X_{T^k},.),X_{T^k}}_{(X_{T^k},Y_{T^k})}$ où $\alpha : \mathscr{D} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\alpha(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 1_{x = x^n} \alpha^n(y) .$$

Grâce à la minoration par une constante positive du coefficient a, on montre l'existence d'une constante c (dépendant de la distance minimale qui sépare les droites de $\tilde{\mathscr{D}}$) telle que $\forall k \in \mathbb{N}\ 0 < c \leqslant E[T^{k+1} - T^k]$ où E désigne l'espérance par rapport à la loi construite ci-dessus. Pour cette loi, les variables $(T^{k+1} - T^k)_k$ sont indépendantes, on en déduit par la loi des grands nombres que T^k tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$ presque sûrement ce qui justifie notre construction de la loi $R_{(x,y)}(a, \alpha, \tilde{\mathscr{D}})$ sur l'espace canonique.

D'après le problème de martingale vérifié par $P^{a,\alpha,x_0}_{(x,y)}$, il est clair que la probabilité $R_{(x,y)}(a, \alpha, \tilde{\mathscr{D}})$ ainsi construire est une solution du problème de martingale suivant :

$$* \quad R(X_0 = x ; Y_0 = y) = 1$$

$$* \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \int_0^t 1_{X_s \in \mathscr{D}} ds = 0 \quad \text{R. p. s.}$$

* Pour toute fonction f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \tilde{\mathscr{D}}$ telle que $f'_x(x^\pm, y)$ existent sur $\tilde{\mathscr{D}}$ et que f soit bornée ainsi que ses dérivées,

$$f(X_t, Y_t) - f(X_0, Y_0) - \frac{1}{2} \int_0^t a(X_s, Y_s) \Delta f(X_s, Y_y) ds$$
$$- \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^t (f'_x(x^{n+}, Y_s) - f'_x(x^{n-}, Y_s)\alpha^n(Y_s)) d L_s^{x^n} \blacksquare\blacksquare$$

est une R-martingale (où $L_t^{x^n}(X)$ désigne le temps local en x^n du processus X.).

On montre par ailleurs que ce problème de martingale a pour unique solution la loi $R_{(x,y)}(a, \alpha, \tilde{\mathscr{D}})$ construite ci-dessus ; en effet toute solution $\tilde{R}$ vérifie :

$$\tilde{R} = Q^a_{(x,y)} \quad \text{sur} \quad [0, T^0]$$

et

$$\tilde{R}^k = P^{a,\alpha(X_{T^k},.),X_{T^k}}_{(X_{T^k},Y_{T^k})}$$

(avec les mêmes notations pour la loi conditionnelle de $\tilde{R}$ par rapport à $\mathscr{F}_{T^k}$) ; car sur l'intervalle $[T^k, T^{k+1}]$ seul le processus $L_t^{X_{T^k}}$ peut croître.

Ce qui montre bien l'existence du processus de Markov $R_{(x,y)}(a, \alpha, \tilde{\mathscr{D}})$ associé aux frontières rectilignes de $\tilde{\mathscr{D}}$ et aux coefficients a et α.

II. DESCRIPTION DU PROCESSUS DE BASE ET DE SA PROBABILITÉ INVARIANTE

1) Le cas des droites.

Soit $\mathscr{C}$ le carré défini par $\left\{ -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2} \right\}$ et $\mathscr{T}$ le tore obtenu en identifiant les côtés opposés de $\mathscr{C}$. On notera dans la suite Π la surjection canonique de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathscr{T}$. Soit $a(x, y)$ une fonction continue, sauf peut-être aux points (k, y) $(k \in \mathbb{Z})$, minorée par une constante strictement positive et de période 1 par rapport à x et à y. Soit par ailleurs $\delta(y)$ une fonction continue, de période 1, et minorée par une constante strictement positive.

D'après le paragraphe I, il existe un processus de Markov $(R_{(x,y)}(a, \delta, \mathbb{Z}),$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2)$ associé aux frontières $\{ x = k \}_{k\in\mathbb{Z}}$ et aux fonctions a et δ de la manière décrite au § I (δ est ici indépendante de x). L'image de ce processus par l'application Π, que nous noterons $(\dot{P}^{a,\delta}_{(\dot{x},\dot{y})}, (\dot{x}, \dot{y}) \in \mathscr{T})$ et appellerons processus de base, est solution du problème de martingale suivant : (si $(\dot{X}_t, \dot{Y}_t)$ désigne les coordonnées du processus canonique à valeurs dans $\mathscr{T}$)

$$(*) \qquad \dot{P}^{a,\delta}_{(\dot{x},\dot{y})}(\dot{X}_0 = \dot{x} \, ; \, \dot{Y}_0 = \dot{y}) = 1 \, ; \qquad \int_0^{t_1} 1_{\dot{X}_s = \dot{0}} ds = 0 \quad \dot{P}^{a,\delta}_{(\dot{x},\dot{y})} \text{p.s.}$$

$(**)$ Pour toute fonction f de classe C^2 sur $\mathscr{T}$, sauf peut-être aux points $(\dot{0}, \dot{y})$ où $f'_x(\dot{0}^{\pm}, \dot{y})$ existent, telles que f et ses dérivées soient bornées,

$$f(\dot{X}_t, \dot{Y}_t) - f(\dot{X}_0, \dot{Y}_0) - \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(\dot{X}_s, \dot{Y}_s) a(\dot{X}_s, \dot{Y}_s) ds$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^t (f'_x(\dot{0}^+, \dot{Y}_s) - f'_x(\dot{0}^-, \dot{Y}_s)\delta(\dot{Y}_s)) dL^0_s$$

est une $\dot{\mathrm{P}}^{a,\delta}_{(\dot{x},\dot{y})}$-martingale. Ici L^0_t désigne la projection sur $\mathscr{T}$ des temps locaux $(\mathrm{L}^k_t)_{k\in\mathbb{Z}}$ de la première coordonnée du processus $\mathrm{R}_{(x,y)}(a, \delta, \mathbb{Z})$. On peut aussi définir L^0_t comme la limite presque sûre quand $\dot{\varepsilon}$ tend vers 0 $\left(\dot{\varepsilon} < \frac{1}{4}\right)$ du processus $\frac{1}{\dot{\varepsilon}}\int_0^t 1_{\dot{0}\leqslant \dot{\mathrm{X}}_s \leqslant \dot{\varepsilon}} d\langle \dot{\mathrm{X}} \rangle_s$.

En effet, pour expliciter le problème de martingale sont $\dot{\mathrm{P}}^{a,\delta}_{(\dot{x},\dot{y})}$ est solution, il suffit d'appliquer celui dont $\mathrm{R}_{(x,y)}(a, \delta, \mathbb{Z})$ est solution à des fonctions de période 1 sur $\mathbb{R}^2$. En particulier si f est une telle fonction, la partie « temps locaux » de $f(\mathrm{X}_t, \mathrm{Y}_t)$ sous $\mathrm{R}_{(x,y)}(a, \delta, \mathbb{Z})$ s'écrit :

$$\mathrm{A}^f_t \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^t (f'_x(k^+, \mathrm{Y}_s) - f'_x(k^-, \mathrm{Y}_s)\delta(\mathrm{Y}_s))d\mathrm{L}^k_s(\mathrm{X})$$

et d'après la formule de densité d'occupation, on a l'égalité presque sûre :

$$\begin{aligned}\mathrm{A}^f_t &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \sum_{k\in\mathbb{Z}} (f'_x(k^+, \mathrm{Y}_s) - \delta(\mathrm{Y}_s) f'_x(k^-, \mathrm{Y}_s))1_{k\leqslant \mathrm{X}_s \leqslant k+\varepsilon} a(\mathrm{X}_s, \mathrm{Y}_s)ds \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\dot{\varepsilon}}\int_0^t (f'_x(\dot{0}^+, \dot{\mathrm{Y}}_s) - f'_x(\dot{0}^-, \dot{\mathrm{Y}}_s)\delta(\dot{\mathrm{Y}}_s))1_{\dot{0}\leqslant \dot{\mathrm{X}}_s \leqslant \dot{\varepsilon}} a(\dot{\mathrm{X}}_s, \dot{\mathrm{Y}}_s)ds\end{aligned}$$

(où l'on a noté par les mêmes lettres les fonctions définies sur le tore et leur extension à $\mathbb{R}^2$ par périodicité).

Pour la loi $\dot{\mathrm{P}}^{a,\delta}_{(x,y)}$, A^f_t s'écrit donc $\int_0^t (f'_x(\dot{0}^+, \dot{\mathrm{Y}}_s) - f'_x(\dot{0}^-, \dot{\mathrm{Y}}_s)\delta(\dot{\mathrm{Y}}_s)d\mathrm{L}^0_s$, ainsi qu'il a été indiqué plus haut.

Montrons que ce problème de martingale a une unique solution. Pour ceci, il nous suffit de montrer l'unicité en loi des solutions $(\dot{\mathrm{X}}_t, \dot{\mathrm{Y}}_t)$ à valeurs dans $\mathscr{T}$ du système stochastique suivant :

$$\begin{aligned}\dot{\mathrm{X}}_t &= \dot{x} + \int_0^t \sqrt{a(\dot{\mathrm{X}}_s, \dot{\mathrm{Y}}_s)}d\mathrm{B}_s + \frac{1}{2}\int_0^t (1 - \delta(\dot{\mathrm{Y}}_s)d\mathrm{L}^0_s \\ \dot{\mathrm{Y}}_t &= \dot{y} + \int_0^t \sqrt{a(\dot{\mathrm{X}}_s, \dot{\mathrm{Y}}_s)}d\mathrm{B}'_s\end{aligned}$$

où $(\mathrm{B}_t, \mathrm{B}'_t)$ est un brownien à valeurs dans $\mathscr{T}$. En effectuant le changement de temps inverse de $\int_0^t a(\dot{\mathrm{X}}_s, \dot{\mathrm{Y}}_s)ds$ et en conditionnant par rapport à la

2^e coordonnée (qui suit la loi d'un mouvement brownien à valeurs dans le tore à une dimension), on est ainsi ramené à étudier l'équation

$$\dot{X}_t = \dot{x} + B_t + \int_0^t \alpha(s) d L_s^0 \tag{1}$$

$\left(\text{où } \alpha \text{ est une fonction déterministe majorée par } \frac{1}{2} \text{ et mesurable}\right)$. Soit $\mathscr{C}_1 = \Pi_1(\mathscr{C})$ (où Π_1 est la projection sur l'axe des x de $\mathscr{C}$), nous étudions (1) grâce à un système de cartes de $\mathscr{C}_1$. Si a est un réel strictement inférieur à $\frac{1}{2}$ et strictement positif, $v = \{ \dot{x} \in \mathscr{C}_1 ; - \dot{a} \leqslant \dot{x} \leqslant \dot{a} \}$ est un voisinage de 0, de $\mathscr{C}_1$, homéomorphe à $[- a, a]$ sur $\mathbb{R}$; pour tout ε tel que $\frac{1}{2} - a > \varepsilon > 0$, $\mathscr{C}_1 \backslash v$ contient strictement un voisinage fermé de $\frac{1}{2}$, V_ε, homéomorphe à $\left[-\frac{1}{2} + a + \varepsilon, \frac{1}{2} - a - \varepsilon \right]$ sur $\mathbb{R}$. Soient $T_0 = \inf \{ t \geqslant 0, X_t \in v \}$; $T_1 = \inf \{ t > T_0, \dot{X}_t \in V_\varepsilon \}, \ldots, T_{2p} = \inf \{ t > T_{2p-1}, \dot{X}_t \in v \}$, $T_{2p+1} = \inf \{ t > T_{2p}, X_t \in V_\varepsilon \}$ $(p \geqslant 1)$. Sur $[0, T_0]$, la loi de $X_t = x + B_t$ est connue, de même sur $[T_{2p+1}, T_{2p+2}]$, c'est celle d'un brownien à valeurs dans $\mathscr{C}_1$, issu de $\dot{X}_{T_{2p+1}}$, jusqu'à son entrée dans V. Grâce à l'homéomorphisme entre v et $[- a, a]$, la loi de $\dot{X}_t$ sur $[T_{2p}, T_{2p+1}]$ est la projection sur $\mathscr{C}$ de celle de la solution de l'équation stochastique sur $\mathbb{R}$:

$$X_{t \wedge \tau_\varepsilon} = \pm a + \beta_{t \wedge \tau_\varepsilon} + \int_0^{t \wedge T_\varepsilon} \alpha(s) d L_s^0(X)$$

où $\begin{cases} (\beta_t)_t & \text{est un mouvement brownien réel issu de } 0 \\ L_t^0(X) & \text{est le temps local au sens de Tanaka de X.} \\ \tau_\varepsilon = \inf \{ t \geqslant 0, | X_t | > a + \varepsilon \} . \\ \alpha(t) \leqslant \frac{1}{2} . \end{cases}$

D'après [5], cette équation a une unique solution, ce qui prouve ainsi de proche en proche, l'unicité en loi des solutions de (1) (car la suite des temps (T_{2p}, T_{2p+1}) tend vers $+\infty$ quand p tend vers $+\infty$, d'après les propriétés du brownien).

Le processus $(\dot{P}^{a,\delta}_{(\dot{x},\dot{y})}, (\dot{x}, \dot{y}) \in \mathscr{C})$ est donc un processus de Markov à valeurs dans $\mathscr{C}$.

Par ailleurs, puisque $\mathscr{T}$ est compact et que a est minorée, la loi de $(\dot{X}_t, \dot{Y}_t)$ sous $\dot{P}^{a,\delta}_{(\dot{x},\dot{y})}$ admet une limite quand t tend vers $+\infty$, c'est la probabilité invariante associée à $\dot{P}^{(a,\delta)}$ et que nous noterons $\mu_{a,\delta}(\dot{x}, \dot{y})d\dot{x}d\dot{y} = \nu_{a,\delta}(d\dot{x}, d\dot{y})$.

LEMME II.1. — *La fonction positive $\mu_{a,\delta}(x, y)$ est solution sur le tore du système* (S) *suivant* :

$$
(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} \Delta(a(x, y)\mu(x, y)) = 0 \quad \forall x \neq 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(a(x, y)\mu(x, y))_{x=0^+} = \dfrac{\partial}{\partial x}(a(x, y)\mu(x, y))_{x=0^-} \\ a(0^-, y)\mu(0^- y) = \delta(y)\mu(0^+, y)a(0^+, y). \end{cases}
$$

Preuve du lemme. — Soit $f(\dot{x}, \dot{y})$ une fonction définie sur $\mathscr{C}$ à laquelle on puisse appliquer le problème de martingale dont $\mathrm{P}^{(a,\delta)}_{(\dot{x},\dot{y})}$ est solution, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}_{(x,y}[f(\dot{X}_t, \dot{Y}_t)] - f(x, y) &= \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{E}_{(x,y)}[\Delta f(X_s, Y_s)a(\dot{X}_s\dot{Y}_s)]ds \\
&\quad + \frac{1}{2}\mathrm{E}_{(x,y)}\left[\int_0^t (f'_x(\dot{0}^+, \dot{Y}_s) - \delta(\dot{Y}_s)f'_x(\dot{0}^-, \dot{Y}_s))d\mathrm{L}^0_s\right]
\end{aligned}
$$

Nous intégrons cette égalité par rapport à la mesure $\nu_{a,\delta}(d\dot{x}, d\dot{y})$ en utilisant le fait que :

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}_{(x,y)}\int_0^t (f'_x(0^+, Y_s) - f'_x(0^-, Y_s)\delta(Y_s))d\mathrm{L}^0_s = \\
&\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{E}_{(x,y)}\int_0^t 1_{\dot{0}\leqslant \dot{X}\leqslant\dot{\varepsilon}}[f'_x(0^+, \dot{Y}_s) - f'_x(0^-, \dot{Y}_s)\delta(\dot{Y}_s)]a(X_s, \dot{Y}_s)ds
\end{aligned}
$$

(en projetant sur le tore la formule de densité d'occupation relative à $\mathrm{R}_{(x,y)}(a, \delta, \mathbb{Z})$). Grâce au théorème de convergence dominée (en notant que l'étude de $\mathrm{P}^{(a,\delta)}_{(\dot{x},\dot{y})}$ permet de prouver que :

$$
\sup_{\varepsilon<\frac{1}{2}} \mathrm{E}_{(x,y)}\int_0^t (f'_x(\varepsilon^+, \dot{Y}_s) - \delta(\dot{Y}_s)f'_x(\dot{\varepsilon}^-, \dot{Y}_s))d\mathrm{L}^\varepsilon_s(\mathrm{X}) < +\infty, \qquad (x, y)\in\mathscr{T})
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathscr{T}} \nu_{a,\delta}(dx, dy)\mathrm{E}_{(x,y)}\int_0^t (f'_x(0^+, \dot{Y}_s) - \delta(\dot{Y}_s)f'_x(\dot{0}^-, Y_s))d\mathrm{L}_s \\
&\qquad = t\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathscr{T}} \nu_{a,\delta}(dx, dy)1_{0\leqslant x\leqslant\varepsilon}a(x, y)(f'_x(0^+, y) - \delta(y)f'_x(0^-, y)) \\
&\qquad = t\times\int_{\pi_2(\mathscr{T})} a(0^+, y)\mu_{a,\delta}(0^+, y)[f'_x(\dot{0}^+, \dot{y}) - f'_x(\dot{0}^-, \dot{y})\delta(\dot{y})]dy
\end{aligned}
$$

(où Π_i désigne la projection du tore sur la i^{eme} coordonnée pour $i = 1$ et 2). En reportant dans l'égalité écrite plus haut, on obtient finalement, après division par t :

$$0 = \int_{\mathscr{T}} \mu_{a,\delta}(\dot{x}, \dot{y})d\dot{x}d\dot{y}\Delta f(\dot{x}, \dot{y})a(\dot{x}\dot{y}) \\ + \int_{\pi_2(\mathscr{T})} a(\dot{0}^+, \dot{y})\mu_{a,\delta}(\dot{0}^+, \dot{y})[f'_x(\dot{0}^+, \dot{y}) - f'_x(\dot{0}, \dot{y})\delta(\dot{y})]d\dot{y}$$

Après intégration par parties du Laplacien, on obtient :

$$\int_{\mathscr{T}} f(x, y)\Delta[\mu_{a,\delta}(x, y)a(x, y)]dxdy \\ + \int_{\pi_2(\mathscr{T})} dyf(0, y)\left[\frac{\partial}{\partial x}(a\mu)_{x=0^+} - \frac{\partial}{\partial x}(a\mu)_{x=0^-}\right](y) \\ + \int_{\pi_2(\mathscr{T})} dyf'_x(0^-, y)[(a\mu)_{x=0^-} - \delta(y)(a\mu)_{x=0^+}](y) = 0 .$$

Ceci étant vérifié, quelle que soit la fonction $f(x, y)$, on en déduit le système (S) dont $\mu_{a,\delta}$ est solution en annulant les coefficients de $f(x, y)$, $f(0, y)$ et $f'_x(0^-, y)$ dans l'égalité écrite ci-dessus.

Remarque. — L'existence d'une solution du système (S) peut se traiter par des méthodes d'analyse fonctionnelle, en identifiant la fonction $\mu_{a,\delta}$ par ses coefficients de Fourier.

Nous noterons K la constante $\dfrac{1}{\displaystyle\int_{\mathscr{T}} \frac{dxdy}{a(x, y)}}$, en remarquant que si $\delta = 1$, $\mu_{a,1}(x, y) = \dfrac{K}{a(x, y)}$.

2) Le cas des cercles.

Notons C le cercle inclus dans le tore $\mathscr{T}$ défini par $C = \{ (x, y) \in \mathscr{T}, \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = r \}$ où r est un réel tel que $0 < r < \frac{1}{2}$. Soit $a(x, y)$ une fonction définie sur $\mathscr{T}$, continue sauf peut-être sur C, minorée par une constante strictement positive. Soit par ailleurs $\delta(\theta)$ une fonction continue définie sur $[0, 2\Pi]$ telle que $\delta(\theta) = \delta(2\Pi)$, minorée par une constante strictement positive. On note $(Q^{a,\delta}_{(x,y)}, (x, y) \in \mathscr{T})$ le processus de Markov à valeurs dans $\mathscr{T}$, solution du problème de martingale suivant : (son existence et son unicité se démontrent comme au § II.1 pour $\dot{P}^{a,\delta}_{(x,y)}$

(*) $$Q^{a,\delta}_{(x,y)}(X_0 = x ; Y_0 = y) = 1$$

(**) Pour toute fonction de classe C^2 sur $\mathscr{T}$ sauf peut-être sur C où $\tilde{f}'_\rho(r^\pm, \theta)$

existent (si $\tilde{f}$ désigne l'expression de f en coordonnées polaires pour $\rho \neq 0$) et telles que f et ses dérivées soient bornées,

$$f(X_t, Y_t) - f(X_0, Y_0) - \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(X_s, Y_s)a(X_s, Y_s)ds - \\ - \frac{1}{2}\int_0^t (\tilde{f}'_\rho(r^+, \theta_s) - \tilde{f}'_\rho(r^-, \theta_s)\delta(\theta_s))dL_s^r(\rho.)$$

est une $Q^{a,\delta}_{(x,y)}$-martingale où l'on a noté $\rho_t = \sqrt{X_t^2 + Y_t^2}$ et où $L_t^r(\rho.)$ désigne le temps local en r du processus ρ, c'est-à-dire la limite presque sûre quand ε tend vers 0 de $\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 1_{r \leqslant \rho_s \leqslant r+\varepsilon} d\langle \rho \rangle_s$.

Notons $\tilde{v}_{a,\delta}(dx, dy) = \tilde{\mu}_{a,\delta}(x, y)dxdy$ la mesure invariante du processus $Q^{a,\delta}$. Nous avons montré dans [6], que l'image du processus plan associé aux fonctions $a(\rho, \theta)$, $\delta(\theta)$ et au cercle $\{ \rho = r \}$ par l'application $(\rho, \theta) \to (\mathrm{Log}\, \rho, \theta)$ avait pour loi $P^{\tilde{a},\delta,\mathrm{Log}\,r}$ (avec les notations du I) où $\tilde{a}(x, y) = \frac{a(e^x, y)}{e^{2x}}$. Grâce au système vérifié par la mesure invariante de $P^{\tilde{a},\delta}$ (cf. II.1), on obtient $\tilde{\mu}_{a,\delta}$ comme solution du système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\underline{\mu}(\rho, \theta) + \rho\frac{\partial}{\partial\rho}\underline{\mu}(\rho, \theta) + \rho^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\underline{\mu}(\rho, \theta) = 0 \quad \text{si} \quad \rho \neq r \\ \frac{\partial}{\partial\rho}(\underline{\mu})_{\rho=r^+}(\theta) = \frac{\partial}{\partial\rho}(\underline{\mu})_{\rho=r^-}(\theta) \\ \underline{\mu}(r^-, \theta) = \delta(\theta)\underline{\mu}(r^+, \theta) \end{cases}$$

où l'on a posé $\underline{\mu}(r, \theta) = \tilde{\mu}_{a,\delta}(r, \theta) \times a(r, \theta)$.

On remarque en particulier que $\tilde{\mu}_{a,1}^{(\rho,\theta)} = \frac{K}{a(\rho, \theta)}$ où K désigne la constante $\frac{1}{\int_{\mathscr{C}} a(x, y)dxdy}$.

III. DESCRIPTION DE LA SUITE DES LOIS $(P^n)_n$

1) Le cas des droites.

On note, pour tout n, $Z^n = \left\{ x_n^k = \frac{k}{n}; k \in \mathbb{Z} \right\}$ constituant une subdivision de la droite de pas $\frac{1}{n}$. Soit δ_n une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de période 1, minorée par une constante strictement positive ; on pose :

$$\begin{cases} a^n(x, y) = a(nx, ny) \\ \gamma^n(y) = \delta_n(ny) \end{cases}$$

La loi P^n envisagée est associée aux frontières de $\tilde{Z}^n$ et aux coefficients a^n et γ^n (on remarque que les points de discontinuité de a^n coïncident avec Z^n). Avec les notations du I, on pose $P^n \equiv R_{(0,0)}(a^n, \gamma^n, Z^n)$. Par définition de cette loi, P^n est l'unique solution du problème de martingale (M^n) suivant :

$$(*) \qquad P^n(X_0 = 0, Y_0 = 0) = 1 ; \qquad \int_0^t 1_{X_s \in Z^n} ds = 0 \quad P^n \text{ p. s.}$$

$(**)$ Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$, de classe C^2, sur $R^2 \backslash \tilde{Z}^n$ (où $\tilde{Z}^n = \bigcup_{k \in Z} \left\{ x = \frac{k}{n} \right\}$) telles que $f'_x\left(\frac{k^\pm}{n}, y\right)$ existent et telles que f et ses dérivées soient bornées,

$$f(X_t, Y_t) - f(0, 0) - \frac{1}{2} \int_s^t \Delta f(X_s, Y_s) a^n(X_s, Y_s) ds$$
$$- \frac{1}{2} \sum_{k \in Z} \int_0^t \left(f'_x\left(\frac{k^+}{n}, Y_s\right) - \gamma^n(Y_s) f'_x\left(\frac{k^-}{n}, Y_s\right) \right) d L_s^{\frac{k}{n}}$$

est P^n-martingale (où $L_s^{\frac{k}{n}}(X)$ désigne le temps local en $\frac{k}{n}$ au sens de Tanaka du processus X.).

Nous allons tout d'abord relier P^n au processus de base $P^{a,\delta_n}_{(0,0)}$ étudié au § II.1 et que nous noterons simplement P^{a,δ_n}. Ceci fait l'objet de la proposition suivante :

PROPOSITION III.1. — *Soit Ω l'espace canonique des processus à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et $\Omega_{\mathscr{C}}$ l'espace canonique des processus à valeurs dans $\mathscr{C}$. Notons ϕ_n l'application de Ω dans Ω définie par :*

$$\phi_n [(X_t, Y_t)_{t \geqslant 0}] = (\varphi_n(X_t), \varphi_n(Y_t))_{t \geqslant 0} = (nX_{\frac{t}{n^2}}, nY_{\frac{t}{n^2}})_{t \geqslant 0} .$$

L'image par $\Pi \circ \phi_n$ de la loi P^n, coïncide sur $\Omega_{\mathscr{C}}$ avec la loi P^{a,δ_n} du Markov de base étudié au § II.1.

Preuve. — D'après la construction de P^{a,δ_n} décrite au II.1, il nous suffit de montrer que l'image de P^n par ϕ_n coïncide avec $R_{(0,0)}(a, \delta_n, Z)$ ou qu'elle vérifie le même problème de martingale. Or, d'après la formulation de (M_n), on obtient que pour toute fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{Z}$ telle que $f'_x(k^\pm, y)$ existent pour tout $k \in Z$,

$$f(\phi_n(X_t, Y_t).) - f(0,0) - \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(\phi_n(X_s, Y_s))a(\phi_n(X_s, Y_s))ds$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{k\in Z}\int_0^t (f'_x(k^+, \varphi_n(Y_s)) - \delta_n(\varphi_n(Y_s))f'_x(k^-, \varphi_n(Y_s)))d L_s^k(\varphi_n(X.))$$

est une P^n-martingale (car $n L_t^{\frac{k}{n}}(X.) = L_t^k(nX)$). On retrouve donc ainsi le problème de martingale dont $R_{(0,0)}(a, \delta_n, Z)$ est solution et qui a été étudié au I.

Conséquence de la proposition III.1. — Si l'on note E^n, l'espérance relative à P^n et E^{a,δ_n} l'espérance relative à P^{a,δ_n}, pour toute fonction f de période 1 définie sur $\mathbb{R}^2$, mesurable, bornée, on a : $E^n[f(nX_t, nY_t)] = E^{a,\delta_n}[f(\dot{X}_{tn^2}, \dot{Y}_{tn^2})]$.

Ceci nous permettra de faire intervenir les mesures ν_{a,δ_n}, puisque pour tout $\alpha > 0$, on a d'après [*3*] :

$$\lim_{n\to+\infty} | \operatorname{Sup}_{t\geq\alpha} E^{a,\delta_n}[f(X_{tn^2}, Y_{tn^2})] - \nu_{a,\delta_n}(f) | = 0 .$$

2) **Le cas des cercles.**

On notera encore $a(x, y)$ l'extension de a sur le plan définie par périodicité. Pour tout entier n on définit un réseau du plan de maille $\frac{1}{n}$ par les points $\left\{ M_n^{k,k'} = \left(\frac{k}{n}, \frac{k'}{n}\right), (k, k') \in Z^2 \right\}$. On notera C_n la réunion des cercles de centre $M_n^{k,k'}$ et de rayon $\frac{r}{n}$. De la même manière que pour les droites parallèles au I, on peut construire à l'aide des temps d'atteintes successifs des cercles de C_n et du processus de Markov associé à un seul cercle étudié dans [*6*], un processus de Markov $(Q^n_{(x,y)}; (x, y) \in \mathbb{R}^2)$ associé à la frontière C_n et aux fonctions $a^n(x, y) = a(nx, ny)$ et $\delta^n(\theta)$, où $\delta^n(\theta)$ est une fonction continue, minorée par une constante strictement positive, définie sur $[0, 2\Pi]$ et telle que $\delta^n(\theta) = \delta^n(2\Pi)$.

De manière précise $Q^n_{(x,y)}$ est solution du problème de martingale suivant (où $d_n^{k,k'}(t)$ désigne le processus $\| M_t - M_n^{k,k'} \|$ et $L_t^{\frac{r}{n}}(d_n^{k,k'}) \equiv \mathscr{L}_n^{k,k'}(t)$ est le temps local en $\frac{r}{n}$ du processus $d_n^{k,k'}$)

$$(*) \qquad Q^n_{(x,y)}(X_0 = x, Y_0 = y) = 1 ; \qquad \int_0^t 1_{(X_s,Y_s)\in C_n} ds = 0 \quad Q^n_{(x,y)} \text{ p. s.}$$

(**) Pour toute fonction $f(x, y)$ définie sur $\mathbb{R}^2$, de classe C^2 sauf peut-être sur C_n où $\dfrac{\partial f_n^{k,k'}}{\partial \rho}\left(\dfrac{r}{n}, \theta\right)$ existent (si $f_n^{k,k'}(\rho, \theta)$ désigne l'expression de f en coordonnées polaires par rapport à la nouvelle origine $M_n^{k,k'}$)

$$f(X_t, Y_t) - f(x, y) - \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(X_s, Y_s) a^n(X_s, Y_s) ds$$
$$- \frac{1}{2} \sum_{(k,k') \in Z^2} \int_0^t \left[\frac{\partial f_n^{k,k'}}{\partial \rho}\left(\frac{r^+}{n}, \theta_s\right) - \frac{\partial f_n^{k,k'}}{\partial \rho}\left(\frac{r^-}{n}, \theta_s\right)\delta^n(\theta_s)\right] \times d\mathscr{L}_n^{k,k'}(s)$$

est une $Q^n_{(x,y)}$-martingale.

On établit comme en III.1 la relation entre $Q^n \equiv Q^n_{(0,0)}$ et le processus de base $Q^{a,\delta_n}_{(0,0)}$ défini sur le tore ; c'est l'objet du lemme suivant dont la démonstration est en tout point analogue à celle de la proposition III.1.

LEMME III.2. — *Soit ϕ_n l'application de Ω dans Ω défini par*

$$\phi_n(X., Y.) = (nX_{\frac{t}{n^2}}, nY_{\frac{t}{n^2}})_{t \geq 0}$$

l'image par $\Pi \circ \phi_n$ de Q^n coïncide sur $\Omega_{\mathscr{C}}$ avec la loi $Q^{a,\delta_n}_{(0,0)}$.

IV. THÉORÈME DE CONVERGENCE QUAND L'OPÉRATEUR DE FRONTIÈRE « CONVERGE LOCALEMENT VERS 0 »

THÉORÈME 1. — *Le cas des droites.*

Lorsque la fonction $y \to n(1 - \delta_n(y))$ converge uniformément vers une fonction continue $\alpha(y)$, minorée par une constante strictement positive, sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, quand n tend vers $+\infty$, la suite $(P^n)_n$ converge alors faiblement vers la loi $P_{(0,0)}$ associée au Markov de générateur L défini par :

$$Lf(x, y) = \frac{K}{2}\left[\Delta f(x, y) + \lambda_0 f'_x(x, y)\right]$$

où
$$\lambda_0 = \int_{\pi_2(\mathscr{C})} \alpha(y) dy .$$

THÉORÈME 2. — *Le cas des cercles.*

Si la fonction $n(1 - \delta^n(\theta))$ converge uniformément sur $[0, 2\Pi]$ *vers une fonction continue $\alpha(\theta)$ minorée par une constante strictement positive, la* *suite* $(Q^n)_n$ *converge alors faiblement vers la loi* $\rho_{(0,0)}$ *associée au Markov de générateur* $\mathscr{L}$ *défini par*

$$\mathscr{L}f(x, y) = \frac{K}{2} \Delta f(x, y) + \alpha_0 f'_x(x, y) + \beta_0 f'_y(x, y)$$

où

$$\begin{cases} \alpha_0 = \dfrac{rK}{2} \displaystyle\int_0^{2\pi} \alpha(\theta) \cos \theta d\theta \\ \beta_0 = \dfrac{rK}{2} \displaystyle\int_0^{2\pi} \alpha(\theta) \sin \theta d\theta \end{cases}$$

1) Démonstration du théorème 1.

a) *Étroite relative compacité.*

Nous utilisons les critères d'Aldous-Rebolledo et nous intéressons donc aux décompositions des semimartingales (X_t, Y_t) relativement aux lois P^n.

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} X_t = x + \displaystyle\int_0^t \sqrt{a^n(X_s, Y_s)} dB^n_s + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \int_0^t (1 - \delta_n(nY_s)) dL^{\frac{k}{n}}_s \\ Y_t = y + \displaystyle\int_0^t \sqrt{a^n(X_s, Y_s)} d\tilde{B}^n_s, \end{cases}$$

où $(B^n_t, \tilde{B}^n_t)_t$ est un P^n-brownien bidimensionnel issu de 0. Puisque le crochet $\langle X, Y \rangle_t$ est identiquement nul pour toutes les P^n, il nous suffit d'établir que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0, \quad n_1 \in \mathbb{N}$$

tels que

(*) $\sup\limits_{n \geq n_0} E^n[Y^n_t] \leq c_0(t)$ pour une constante $c_0(t)$ dépendant de t ;

$$(**) \qquad \sup_{n \geq n_1} E^n[\,|\, Y^n_{\tau_n + t} - Y^n_{\tau_n} \,|\,] \leq \varepsilon + c_1 t + c_2 \sqrt{t}$$

où $(\tau^n)_n$ est une suite de $(\mathscr{F}_t)_t$ temps d'arrêt et où (Y^n_t) représente successivement le crochet et la variation totale du processus à variation finie entrant dans la décomposition de X et Y relativement à P^n.

Puisque la fonction périodique $a^n(x, y) = a(nx, ny)$ est uniformément bornée, on prouve facilement que les crochets de X et Y vérifient tous deux les conditions (*) et (**).

Il nous reste à étudier le processus

$$A_t^n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \int_0^t (1 - \delta_n(nY_s)) d L_s^{\frac{k}{n}}.$$

Remarquant que la condition (**) entraîne (*), nous nous intéressons au module de continuité de la variation totale de A_t^n, afin de prouver (**).

Notons

$$T^n = \inf \{ t \geqslant 0, X_t \in \mathscr{D}^n \}$$
$$T_k^n = \inf \{ t > T_{k-1}^n, X_t \in \mathscr{D}^n \backslash \{ X_{T_{k-1}^n} \} \} .$$

La propriété de Markov nous permet d'écrire, en notant $\tilde{A}_t^n$ la variation totale sur $[0, t]$ de A^n :

$$E^n[\tilde{A}_{\tau_n+t}^n - \tilde{A}_{\tau_n}^n] = E^n[E_{X_{\tau_n}}^n(\tilde{A}_t^n)] \leqslant E^n[E_{x_{T_0^n}}^n[\tilde{A}_t^n]]$$

car $\tilde{A}_t^n$ ne croît que sur $\{ t/X_t \in \mathscr{D}^n \}$. Il nous suffit donc de prouver qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\operatorname*{Sup}_{n \geqslant n_0} E_{x^n}^n[\tilde{A}_t^n] \leqslant \varepsilon + c_1 t + c_2 \sqrt{t} \qquad \forall x^n \in \mathscr{D}^n.$$

Grâce à la construction de P^n faite au I, on vérifie aisément que :

(1) $X_{t \wedge T_{k+1}^n} - X_{t \wedge T_k^n}$

$$= \int_{T_k^n \wedge t}^{T_{k+1}^n \wedge t} \sqrt{a^n(X_s, Y_s)} dB_s^n + \frac{1}{2} \int_{T_k^n \wedge t}^{T_{k+1}^n \wedge t} (1 - \delta_n(nY_s)) d L_s^{X_{T_k^n}}$$

puisque $E_{x^n}^n[\tilde{A}_t^n] = \sum_{k \geqslant 0} E_{x^n}^n[\tilde{A}_{t \wedge T_{k+1}^n}^n - \tilde{A}_{t \wedge T_k^n}^n]$, nous allons étudier chacun des termes $E_{x_n}^n[\tilde{A}_{t \wedge T_{k+1}^n}^n - \tilde{A}_{t \wedge T_k^n}^n]$ en conditionnant par rapport à $\mathscr{F}_{T_k^n}$.

En effet, l'équation (1) régit alors un processus évoluant dans un compact de type $\left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right]$ et l'on peut estimer les temps d'atteintes du bord du compact.

On obtient grâce à la propriété de Markov :

$$E_{x^n}^n[A_{t \wedge T_{k+1}^n}^n - A_{t \wedge T_k^n}^n] \leqslant E_{x^n}^n[1_{T_k^n < t} E^{\mathscr{F}_{T_k^n}}(A_{T_{k+1}^n}^n - A_{T_k^n}^n)]$$

(où $E^{\mathscr{F}_{T_k^n}}$ désigne l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathscr{F}_{T_k^n}$). Or

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad 1_{X_{T_k^n} = \frac{j}{n}} E^{\mathscr{F}_{T_k^n}}[A_{T_{k+1}^n}^n - A_{T_k^n}^n] = 1_{X_{T_k^n} = \frac{j}{n}} E[Z_{\tau_{j,n}}^{j,n}]$$

(après avoir conditionné l'équation (1) par rapport à $\mathcal{F}_{T_k^n}$), où

$$\tau_{j,n} = \inf\left\{ t \geqslant 0,\ Z_t^{j,n} \notin \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right] \right\}$$

et où $(Z_t^{j,n}, \tilde{Z}_t^{j,n})$ est solution du système stochastique (2) suivant, dont nous savons qu'il jouit de l'unicité en loi [6].

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} Z_t^{j,n} &= \int_0^t b_j^n(Z_s^{j,n}, \tilde{Z}_s^{j,n}) d\beta_s^n + \frac{1}{2} \int_0^t \varphi_n^j(\tilde{Z}_s^{j,n}) d L_s^0 \\ \tilde{Z}_t^{j,n} &= \int_0^t b_j^n(Z_s^{j,n}, \tilde{Z}_s^{j,n}) d\tilde{\beta}_s^n \end{aligned} \right.$$

où $(\beta_t^n, \tilde{\beta}_t^n)$ désigne un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, $(L_t^0)_t$ est le temps local en 0 de $Z_\cdot^{j,n}$ et où l'on a posé

$$\left\{ \begin{aligned} b_j^n(x, y) &= \sqrt{a^n\left(\frac{j}{n} + x, Y_{T_k^n} + y\right)} \\ \varphi_j^n(y) &= 1 - \delta_n(nY_{T_k^n} + ny). \end{aligned} \right.$$

D'après les hypothèses de convergence de δ^n et a^n et les hypothèses de bornitude de leurs limites, on peut choisir un entier n_1 tel que :

$$\text{si}\quad n \geqslant n_1,\quad \forall y \in \mathbb{R},\quad \forall j \in \mathbb{Z} \left\{ \begin{aligned} & 0 < \varphi_n^j(y) < \frac{b+1}{n} \\ & \frac{1}{2} \leqslant 1 - \frac{1}{2}\varphi_n^j(y) \\ & k_0 \leqslant a^n(x, y) \leqslant K. \end{aligned} \right.$$

Soit $N > 0$, $E[Z_{\tau_j \wedge N}^{j,n}] = E\left[\int_0^{\tau_j \wedge N} \frac{\varphi_n^j}{2}(\tilde{Z}_s^{j,n}) d L_s^0\right]$ et la formule de Tanaka entraîne que :

$$\frac{1}{2} E[L_{\tau_{j,n} \wedge N}^0] \leqslant E\left[\int^{\tau_{j,n} \wedge N} \left(1 - \frac{\varphi_n^j}{2}(\tilde{Z}_s^{j,n}) d L_s^0\right]\right. = E\left[\, | Z_{\tau_{j,n} \wedge N}^j | \,\right] \leqslant \frac{1}{n}$$

(par définition de $\tau_{j,n}$). Donc par le lemme de Fatou :

$$E[Z_{\tau_{j,n}}^{j,n}] \leqslant \frac{\lim}{N \to +\infty} [Z_{\tau_{j,n} \wedge N}^{j,n}] \leqslant \frac{b+1}{n^2}$$

Pour $n \geqslant n_1$, A_t^n est croissant et par conséquent :

$$\sum_{k\geqslant 0} E_{x^n}^n[(\tilde{A}_{t\wedge T_{k+1}^n}^n - \tilde{A}_{t\wedge T_k^n}^n)] = \sum_{k\geqslant 0} E_{x^n}^n[(A_{t\wedge T_{k+1}^n}^n - A_{t\wedge T_k^n}^n) \leqslant \frac{(b+1)}{n^2}(1 + E_{x^n}^n(N_t^n))$$

où $N_t^n = \text{Max}\ \{ k \in \mathbb{N} ; T_{k+1}^n < t \}$.

Par ailleurs l'équation (1) entraîne que si $n \geqslant n_1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} P^n(T_{k+1}^n < t) &\leqslant E^n[1_{T_{k+1}^n < t}(X_{T_{k+1}^n} - X_{T_k^n})^2] \\ &\leqslant KE^n[t \wedge T_{k+1}^n - t \wedge T_k^n] \end{aligned}$$

(Grâce à la majoration du processus croissant de $X_{t\wedge T_{k+1}^n} - X_{t\wedge T_k^n}$ et car $| X_{T_{k+1}^n} - X_{T_k^n} | 1_{T_{k+1}^n < +\infty} = \frac{1}{n} 1_{T_{k+1}^n < +\infty}$).

En sommant sur k l'inégalité précédente, on obtient :

$$E_{x^n}^n[N_t^n] \leqslant Ktn^2$$

d'où

$$\sum_{k\geqslant 0} E_{x^n}^n[(\tilde{A}_{t\wedge T_{k+1}^n}^n - \tilde{A}_{t\wedge T_k^n}^n)] \leqslant (1 + Ktn^2)\frac{b+1}{n^2} \leqslant \varepsilon + \tilde{c}t.$$

(si n est assez grand).

On en déduit qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{n\geqslant n_1} E_{x^n}^n[\tilde{A}_t^n] \leqslant \varepsilon + \tilde{c}t.$$

Ce qui achève la preuve du critère d'Aldous-Rébolledo montrant l'étroite relative compacité de la suite $(P^n)_{n\in N}$.

b) *Identification de la valeur d'adhérence*

Pour identifier les valeurs d'adhérence de la suite P^n, nous allons tout d'abord montrer que le problème de martingale dont P^n est solution, restreint aux fonctions de classe C^2, est voisin, quand n est grand, d'un problème de martingale classique, sans temps locaux.

Explicitant alors ce générateur équivalent, on se ramène ainsi aux diffusions avec petit paramètre étudiées par Papanicolaou, Stroock et Varadhan.

Commençons par éliminer la partie « temps locaux » de la semimartingale $f(X_t, Y_t)$ relativement à P^n, pour toute fonction f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$

bornée ainsi que ses dérivées. Soit $h(x) = x^2 - |x|$ si $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ et définissons sur le tore

$\psi_n(x, y) = \left(\frac{1-\delta_n}{1+\delta_n}\right)(y) \times h(x) = \Gamma_n(y)h(x)$ en notant $\Gamma_n(y) = \left(\frac{1-\delta_n}{1+\delta_n}\right)(y)$.

Grâce à la périodicité de la fonction h, on peut prolonger ψ_n à $\mathbb{R}^2$ par périodicité et nous noterons encore ψ_n ce prolongement. Nous allons appliquer le problème de martingale dont P^n est solution à la fonction $F_n(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{n} f'_x(x, y)\psi_n(nx, ny)$. On peut supposer que les fonctions continues δ_n sont de classe C^2 ; en effet si tel n'était pas le cas, on pourrait les approximer uniformément sur $\Pi_2(\mathscr{T})$ par une suite $(\delta_n^{P_n})_{n\in N}$ de fonctions de classe C^2 ; ceci reviendrait à ajouter à la partie « temps local » de $f(X_t, Y_t)$ le terme :

$$\Delta_n^f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^t f'_x(X_s, Y_s) \frac{(\delta_n^{P_n} - \delta_n)}{2}(nY_s)dL_s^{x_k^n}(X).$$

En reprenant la preuve de l'étroite compacité faite au *a*) on constate qu'il existe deux constantes positives K_1 et K_2 telles que

$E^n\Delta_n^f(t) \leqslant (1 + K_1 tn^2)\frac{K_2}{n} \| \delta_n^{P_n} - \delta_n \|_\infty$. Il suffit de choisir $\| \delta_n^{P_n} - \delta_n \|_\infty = 0\left(\frac{1}{n^2}\right)$

pour que la limite des P^n ne soit pas modifiée lorsqu'on substitue les $\delta_n^{P_n}$ aux δ_n. Nous allons donc supposer que δ_n est de classe C^2.

Un calcul rapide nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_n}{\partial x}\left(\frac{k^+}{n}, y\right) - \frac{\partial F_n}{\partial x}\left(\frac{k^-}{n}, y\right)\delta_n(ny) \\
&= f'_x\left(\frac{k}{n}, y\right)\left[(1 - \delta_n(ny)) - \frac{1-\delta_n}{1+\delta_n}(ny)(1 + \delta_n(ny))\right] \\
&+ \frac{1}{n} f''_{x^2}\left(\frac{k}{n}, y\right)(1 - \delta_n(ny))\psi_n(k, ny) = 0
\end{aligned}$$

(car $\psi_n(k, ny) = \psi_n(0, ny) = 0$).

Par ailleurs, puisque ψ_n est bornée, $\| f - F_n \|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$; on en déduit que pour tout couple (s, t) avec $0 \leqslant s < t$

et pour toute fonction continue positive, ϕ, $\mathscr{F}_s$-mesurable, définie sur l'espace canonique, on a :

$$(*) \quad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}^n\left[\phi(f(\mathrm{M}_t) - f(\mathrm{M}_s) - \int_s^t \frac{1}{2}\Delta \mathrm{F}_n(\mathrm{M}_u)a(n\mathrm{X}_u, n\mathrm{Y}_u)du)\right] = 0$$

Il nous reste à expliciter le générateur L_n, équivalent à celui de P^n pour les fonctions suffisamment régulières et défini par

$$\frac{1}{2}\Delta \mathrm{F}_n(x, y)a(nx, ny) = \mathrm{L}_n f(x, y) + 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'après l'expression de F_n, on trouve :

$$\mathrm{L}_n f(x, y) = \frac{a(nx, ny)}{2}[\Delta f(x, y) + 2f''_{x^2}(x, y)\Gamma_n(ny)h'(nx) + 2f''_{xy}(x, y)\Gamma'_n(ny)h(nx) + nf'_x(x, y)\Delta\psi_n(nx, ny)]$$

(où l'on a encore noté h le prolongement de cette fonction à $\mathbb{R}$ par périodicité).

Grâce à l'hypothèse faite sur $(\delta_n)_n$, tous les coefficients du générateur L_n sont bornés uniformément en n, ce qui nous permettra de conclure en utilisant le lemme suivant :

LEMME IV.1. — *Pour toute fonction f continue et bornée, pour toute suite $(g_n)_{n\in\mathrm{N}}$ de fonctions mesurables, 1-périodiques telles que*

$$\operatorname*{Sup}_n \| g_n \|_\infty = \mathrm{G} < +\infty,$$

on a :

$$(1) \quad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}^n\left[\left|\int_0^t f(\mathrm{M}_s)g_n(n\mathrm{X}_s, n\mathrm{Y}_s)ds - \nu_{a,\delta_n}(g_n)\int_0^t f(\mathrm{M}_s)ds\right|\right] = 0.$$

Preuve du lemme IV.1. — En posant $\overline{g}_n = g_n - \nu_{a,\delta_n}$, on est ramené à montrer (1) pour une suite g_n telle que $\nu_{a,\delta_n}(g_n) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Montrons tout d'abord que pour une telle suite on a :

$$(2) \quad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}^n\left[\left(\int_0^t g_n(n\mathrm{X}_s, n\mathrm{Y}_s)ds\right)^2\right] = 0.$$

D'après [*3*], puisque la fonction a est minorée par une constante strictement positive, il existe deux constantes λ et b telles que, pour toute fonction mesurable g_n définie sur le tore et bornée on a :

$$(3) \quad |\mathrm{E}^{a,\delta_n}_{(\dot{x},\dot{y})}(g_n(\dot{\mathrm{M}}_t))| \leqslant \lambda e^{-bt}\| g_n \|_\infty \quad \text{si} \quad \nu_{a,\delta_n}(g_n) = 0$$

(on peut en effet choisir les constantes λ et b indépendantes de n puisque celles-ci dépendent de la minoration du semi-groupe associé à E^{a,δ_n} et que,

$(\delta_n)_n$ convergeant uniformément vers 1, on peut trouver un minorant ne dépendant que de la fonction a).

Estimons à présent $E^n\left[\left(\int_0^t g_n(nM_s)ds\right)^2\right]$. On obtient, grâce à la proposition III.1 :

$$\begin{aligned}E^n\left[\left(\int_0^t g_n(nM_s)ds\right)^2\right] &= E^n\left[\int_0^t\int_0^t g_n(nM_s)g_n(nM_u)duds\right]\\ &= 2E^n\left[\int_0^t\int_0^s g_n(nM_s)g_n(nM_u)duds\right]\\ &= 2\int_0^t\int_0^s E^{a,\delta_n}[g_n(M_{sn^2})g_n(M_{un^2})]duds\\ &= 2\int_0^t\int_0^s E^{a,\delta_n}[g_n(M_{un^2})E^{a,\delta_n}_{M_{un^2}}(g_n(M_{(s-u)n^2}))]duds\end{aligned}$$

(par la propriété de Markov)

Donc, d'après (3)

$$E^n\left[\left(\int_0^t g_n(nM_s)ds\right)^2\right] \leqslant \left[\lambda'\frac{t}{n^2}+\frac{\lambda''}{n^4}(1-e^{-btn^2})\right]\| g_n\|_\infty^2 .$$

Ce qui montre l'égalité (2). Montrons enfin l'égalité (1) pour des fonctions g_n d'intégrale nulle par rapport à ν_{a,δ_n}.

Soit $\varepsilon > 0$, puisque la suite $(P^n)_n$ est tendue, il existe un compact K_ε de l'espace canonique Ω tel que $P^n(K_\varepsilon^c) \leqslant \varepsilon\ \forall n \in \mathbb{N}$ et d'après l'équicontinuité du théorème d'Ascoli, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f(M_{s'})-f(M_s)| \leqslant \varepsilon \quad \text{si} \quad (M_u)_{u\geqslant 0} \in K_\varepsilon, \qquad (s, s') \in [0, t]^2$$

et

$$|s'-s| \leqslant \frac{1}{k}.$$

Soit $(t_i)_{i\in I}$ une subdivision de $[0, t]$ de pas inférieur à $\frac{1}{k}$ et notons si $\omega \in \Omega$,

$$f^k(s, \omega) = \sum_{i\in I} f(M_{t_i}(\omega))1_{[t_i,t_{i+1}[}(s).$$

Grâce à (2), appliqué successivement sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_0$

$$E^n\left|\int_0^t g_n(nM_s)f^k(s,\omega)ds\right| \leqslant E^n\left(\sum_{i\in I}\left|\int_{t_i\wedge t}^{t_{i+1}\wedge t} g_n(nM_s)ds\right|\right) \times \|f\|_\infty \leqslant \varepsilon .$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}^n\left|\int_0^t g_n(n\mathrm{M}_s)f(\mathrm{M}_s)ds\right| &\leqslant \mathrm{E}^n\left|1_{\mathrm{K}_\varepsilon^c}(\omega)\int_0^t g_n(n\mathrm{M}_s)f(\mathrm{M}_s)ds\right| \\
&+ \mathrm{E}^n\left|1_{\mathrm{K}_\varepsilon}(\omega)\int_0^t g_n(n\mathrm{M}_s)(f(\mathrm{M}_s)-f^k(s,\omega))ds\right| + \mathrm{E}^n\left|\int_0^t g_n(n\mathrm{M}_s)f^k(s,\omega)ds\right| \\
&\leqslant \varepsilon t\,\|f\|_\infty \times \mathrm{G} + \varepsilon t\mathrm{G} + \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du lemme IV.1. Nous allons appliquer le lemme IV.1 aux coefficients du générateur L_n. On remarque tout d'abord que puisque δ_n converge uniformément vers 1, Γ_n converge uniformément vers 0 et on peut supposer qu'il en est de même des dérivées. Combinant le lemme IV.1 et l'égalité (∗) on obtient finalement :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{E}^n\left[\phi\left(f(\mathrm{M}_t)-f(\mathrm{M}_s)-\int_s^t \nu_{a,\delta_n}\left(\frac{a}{2}\right)\Delta f(\mathrm{M}_u) + \nu_{a,\delta_n}\left(n\frac{a}{2}\Delta\psi_n\right)f_x'(\mathrm{M}_u)du\right)\right]=0\,.$$

Pour achever la preuve du théorème, il ne reste qu'à montrer

$$\begin{cases} i) \quad \lim\limits_{n\to+\infty}\nu_{a,\delta_n}(a)=\mathrm{K} \\ ii) \quad \lim\limits_{n\to+\infty}\nu_{a,\delta_n}(na\Delta\psi_n)=\mathrm{K}\lambda_0\,. \end{cases}$$

Or on vérifie aisément sur le problème de martingale dont P^{a,δ_n} est solution que $(\mathrm{P}^{a,\delta_n})_n$ converge faiblement vers $\mathrm{P}^{a,1}$ quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu_{a,\delta_n}(x,y)=\mu_{a,1}(x,y)=\dfrac{\mathrm{K}}{a(x,y)}$; ce qui implique (i).

Pour prouver (ii), on écrit

$$\begin{aligned}
\nu_{a,\delta_n}(na\Delta\psi_n) &= \int_{\mathscr{C}}(a\mu_{a,\delta_n})(x,y)n\Delta\psi_n(x,y)dx \\
&= \int_{\pi^2(\mathscr{C})}(a\mu_{a,\delta_n})(0^+,y)n(1-\delta_n(y))dy
\end{aligned}$$

(on a fait une intégration par parties et on a utilisé le système (S) décrit au lemme II.1 dont μ_{a,δ_n} est solution). Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty}\nu_{a,\delta_n}(na\Delta\psi_n)=\mathrm{K}\int_{\pi^2(\mathscr{C})}\alpha(y)dy=\mathrm{K}\lambda_0\,.$$

Ce qui prouve (ii) et achève la démonstration du théorème 1.

2) **Démonstration du théorème 2.**

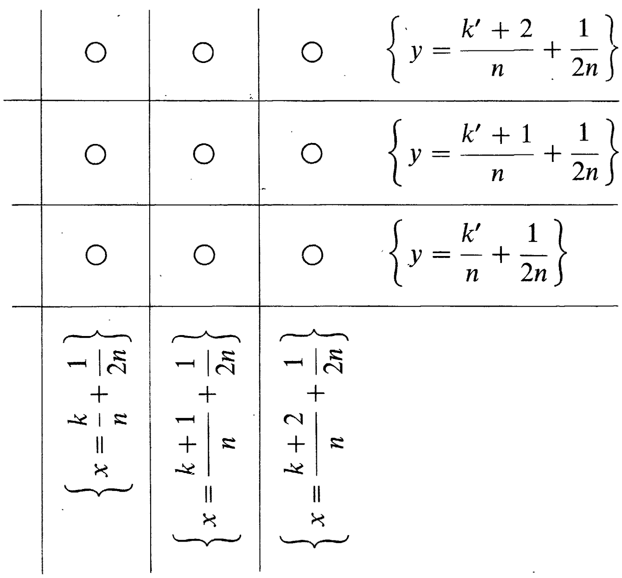
a) *Étroite relative compacité.*

Nous montrons d'abord l'étroite relative compacité, comme au IV-1, à partir des temps d'atteintes successifs des frontières de C_n. Nous allons détailler quelque peu cette étude puisqu'ici les frontières sont constituées par des cercles.

Indiquons par exemple comment on obtient une majoration uniforme pour n assez grand de $E^n[\tilde{A}_t^n]$ où $\tilde{A}_t^n$ désigne la variation totale du processus à variation finie A_t^n de X_t pour Q^n, c'est-à-dire (si $\theta_n^{k,k'}(t)$ désigne l'angle polaire de (X_t, Y_t) dans le repère de centre $M_n^{k,k'}$) :

$$A_t^n = \frac{1}{2} \sum_{(k,k')\in Z^2} \int_0^t \cos \theta_n^{k,k'}(s)(1 - \delta^n(\theta_n^{k,k'}(s)))d\mathscr{L}_n^{k,k'}(s)$$

Notons $(T_k^n)_{k\in N}$ les temps d'atteintes successifs des cercles de C_n et $(S_k^n)_{k\in N}$ les temps d'atteintes successifs des droites d'équation $\left\{ x = \frac{k}{n} + \frac{1}{2n} \right\}$ ou $\left\{ y = \frac{k'}{n} + \frac{1}{2n} \right\}$ $(k,k') \in \mathbb{Z}^2$, qui isolent les cercles de C_n.



De manière précise, on pose

$$\mathrm{T}_0^n = \inf\{ t \geqslant 0,\ (\mathrm{X}_t, \mathrm{Y}_t) \in \mathrm{C}_n \}$$
$$\mathrm{S}_0^n = \inf\{ t > \mathrm{T}^n, (\mathrm{X}_t, \mathrm{Y}_t) \in \mathrm{D}_n \}$$

où
$$\mathrm{D}_n = \bigcup_{(k,k') \in \mathrm{Z}^2} \left(\left\{ x = \frac{k}{n} + \frac{1}{2n} \right\} \cup \left\{ y = \frac{k'}{n} + \frac{1}{2n} \right\} \right)$$
$$\mathrm{T}_k^n = \inf\{ t > \mathrm{S}_{k-1}^n,\ (\mathrm{X}_t, \mathrm{Y}_t) \in \mathrm{C}_n \}$$
$$\mathrm{S}_k^n = \inf\{ t > \mathrm{T}_k^n,\quad (\mathrm{X}_t, \mathrm{Y}_t) \in \mathrm{D}_n \}$$

Il est clair que le processus A_t^n ne croît que lorsque $t \in \bigcup_{k \in \mathrm{N}} [\mathrm{T}_k^n, \mathrm{S}_k^n]$. Et pour tout $(j, j') \in \mathrm{Z}^2$, si $\mathrm{E}^{\mathscr{F}_{\mathrm{T}_k^n}}$ désigne l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathscr{F}_{\mathrm{T}_k^n}$, on obtient

$$(1)\quad \mathrm{E}^{\mathscr{F}_{\mathrm{T}_k^n}}[\mathrm{A}_{\mathrm{S}_k^n}^n - \mathrm{A}_{\mathrm{T}_k^n}^n] 1_{d_n^{j,j'}(\mathrm{T}_k^n) = \frac{r}{n}} = 1_{d_n^{j,j'}(\mathrm{T}_k^n) = \frac{r}{n}} \mathrm{E}\left[\frac{1}{2} \int_0^{\tau_n} \cos\theta_s (1 - \delta^n(\theta_s)) d\mathrm{L}_s^0 \right]$$

où L_t^0 est le temps local en 0 au sens de Tanaka du processus ρ_t^n solution de l'équation (2) suivante (étudiée dans [6])

$$(2)\quad \rho_t^n = \int_0^t \sqrt{\tilde{a}^n(\rho_s^n, \theta_s)}\, d\mathrm{B}_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\tilde{a}^n(\rho_s^n, \theta_s)}{\rho_s^n + \frac{r}{n}} ds + \frac{1}{2} \int_0^t (1 - \delta^n(\theta_s)) d\mathrm{L}_s^0 .$$

Notons que pour écrire l'égalité (1) et l'équation (2) on a utilisé (M_n) et on a écrit l'équation vérifiée par $\mathrm{E}^{\mathscr{F}_{\mathrm{T}_k^n}}\left[d_n^{j,j'}(t + \mathrm{T}_k^n) - \frac{r}{n} \right]$ (dont la loi est celle de ρ_t^n, solution de (2)) quand $\left[d_n^{j,j'}(\mathrm{T}_k^n) = \frac{r}{n} \right]$. Par ailleurs τ_n représente l temps d'atteinte de l'un des bords du carré d'équations $\left\{ x = \pm \frac{1}{2n} \right\}$, $\left\{ y = \pm \frac{1}{2n} \right\}$ par le processus de coordonnées polaires $\left(\rho_t^n + \frac{r}{n}, \theta_t \right)$.

En combinant (2) avec la formule de Tanaka, on obtient

$$(3)\quad \rho_t^{n+} = \int_0^t 1_{\rho_s^n > 0} \sqrt{\tilde{a}^n(\rho_s^n, \theta_s)}\, d\mathrm{B}_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\tilde{a}^n(\rho_s^n, \theta_s)}{\rho_s^n + \frac{r}{n}} 1_{\rho_s^n > 0} ds + \frac{1}{2} \mathrm{L}_t^0 .$$

On obtient donc, par définition de τ_n :

$$\frac{1}{2} \mathrm{E}[\mathrm{L}_{\tau_n \wedge t}^0] \leqslant \mathrm{E}[\rho_{\tau_n \wedge t}^{n+}] \leqslant \frac{1 - \sqrt{2r}}{\sqrt{2n}}$$

$\left(\text{que nous noterons par la suite } \frac{R}{n}\right)$. En utilisant la convergence de $n(1-\delta^n)$ vers α, on peut supposer que A_t^n est croissant pour n assez grand et que l'on a :

$$\sum_{k \geqslant 0} E^n[\tilde{A}^n_{t \wedge S_k^n} - \tilde{A}^n_{t \wedge T_k^n}] \leqslant \frac{RK}{n^2}(1 + E^n(N_t^n))$$

(où K est une constante et $N_t^n = \text{Max}\{ k \in \mathbb{N} ; T_k^n < t \}$). Par ailleurs

$$1_{S_k^n < t}(\rho^{n+}_{S_k^n})^2 \geqslant 1_{S_k^n < t} \frac{(1-2r)^2}{n^2}$$

(nous noterons $R' = (1-2r)^2$), on obtient donc, en déconditionnant l'équation (3) et en utilisant la majoration uniforme de $a^n(x, y)$:

$$\frac{R'}{n^2} P^n(S_k^n < t) \leqslant E^n\left[1_{S_k^n < t} \sum_{(j,j') \in Z^2} \left(d_n^{j,j'}(S_k^n) - \frac{r}{n} \right)^{+2} 1_{d_n^{j,j'}(T_k^n) = \frac{r}{n}} \right]$$
$$\leqslant E^n[[d_n(t \wedge S_k^n) - d_n(t \wedge T_k^n)]^{+2}] \leqslant KE^n[t \wedge S_k^n - t \wedge T_k]$$

(en notant $d_n(t) = \inf_{(j,j') \in Z^2} d_n^{j,j'}(t)$).

En sommant sur k l'inégalité précédente, on obtient : $E^n[N_t^n] \leqslant \frac{K}{R'} n^2 t$. D'où finalement :

$$E^n[\tilde{A}_t^n] \leqslant \sum_{k \geqslant 0} E^n[\tilde{A}^n_{t \wedge S_k^n} - \tilde{A}^n_{t \wedge T_k^n}] \leqslant \left(1 + \frac{Kn^2 t}{R'}\right) \frac{RK}{n^2} \leqslant \varepsilon + \tilde{c}t$$

(si n est assez grand), ce qui est la majoration que nous désirions montrer pour appliquer le critère d'Aldous Rebolledo et prouver ainsi l'étroite relative compacité de la suite $(Q^n)_n$ (l'étude des crochets ne pose ici aucun problème puisque $a^n(x, y) = a(nx, ny)$ est bornée uniformément en n).

b) *Identification de la valeur d'adhérence.*

Identifions les valeurs d'adhérence de la suite $(Q^n)_n$. Comme pour le théorème 1, nous commençons par éliminer la partie « temps locaux » pour les fonctions suffisamment régulières. Pour tout ε tel que

$0 < \varepsilon < \inf\left(r, \frac{1}{2}, -r\right)$, posons

$$\text{si} \quad 0 \in [0, 2\Pi], \quad \begin{cases} h^\varepsilon(\rho) = \frac{1}{2\varepsilon}(|\rho - r| - \varepsilon)^2 1_{|\rho - r| \leqslant \varepsilon} \\ \Gamma^n(\theta) = \frac{1 - \delta^n(\theta)}{1 + \delta^n(\theta)} \end{cases}$$

Notons $D_n^{k,k'}$ le carré défini par

$$D_n^{k,k'} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \left| x - \frac{k}{n} \right| \leqslant \frac{1}{2n} ; \left| y - \frac{k'}{n} \right| \leqslant \frac{1}{2n} \right\}.$$

Pour toute fonction de classe C^3 sur $\mathbb{R}^2$ bornée ainsi que ses dérivées, nous appliquons la formule d'Ito généralisée $\left(\text{puisque } \frac{\partial^2 h^\varepsilon}{\partial \rho^2} \text{ n'est pas continue} \right)$, sous la loi Q^n, à :

$$F_n^\varepsilon(x, y) = f(x, y) + \sum_{(k,k') \in Z^2} \frac{1}{n} \times 1_{(x,y) \in D_n^{k,k'}} \frac{\partial f_n^{k,k'}}{\partial \rho}(\rho, \theta) h^\varepsilon(n\rho) \Gamma^n(\theta).$$

On remarque que, puisque Γ^n et h^ε sont bornées, $F_n^\varepsilon(x, y)$ converge uniformément vers $f(x, y)$ quand n tend vers $+\infty$. Par ailleurs $\frac{\partial h^\varepsilon}{\partial r}(r^+) = -1$ et $\frac{\partial h^\varepsilon}{\partial r}(r^-) = 1$, et la partie « temps local » de $F_n^\varepsilon(X_t, Y_t)$ se résume donc à

$$\frac{1}{2n} \sum_{(k,k') \in Z^2} \int_0^t (1 - \delta^n(\theta_s)) \frac{\partial^2 f_n^{k,k'}}{\partial \rho^2} \left(\frac{r}{n}, \theta_s \right) \Gamma^n(\theta_s) \frac{\varepsilon}{2} \, d\mathscr{L}_n^{k,k'}(s).$$

D'après les calculs faits pour la preuve de l'étroite compacité, cette expression tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'où, pour toute fonction ϕ continue, définie sur l'espace canonique, $\mathscr{F}_s$-mesurable et pour tout couple (s, t) avec $0 \leqslant s < t$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} E^n \left[\phi \left(f(M_t) - f(M_s) - \frac{1}{2} \int_s^t a^n(M_u) \Delta F_n^\varepsilon(M_u) du \right) \right] = 0$$

(si $M_t = (X_t, Y_t)$ sur l'espace canonique).

On obtient ainsi un générateur L_n, équivalent quand n est grand, à celui de Q^n pour les fonctions régulières, avec :

$$L_n f(x, y) = \frac{a(nx, ny)}{2} \left[\Delta f(x, y) + \sum_{(k,k') \in Z^2} \frac{1}{n} 1_{(x,y) \in D_n^{k,k'}} \Delta ([f_x'(x, y) \cos \theta + f_y'(x, y) \sin \theta] \times h^\varepsilon(n\rho) \Gamma^n(\theta)) \right].$$

Comme au § IV.1, nous allons supposer que les Γ^n sont de classe C^2 et que de plus, puisque $\lim_{n \to +\infty} n\Gamma^n(\theta) = \frac{\alpha(\theta)}{2}$, on a aussi $\frac{\partial}{\partial \theta} \Gamma^n(\theta) = 0\left(\frac{1}{n}\right)$, $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \Gamma^n(\theta) = 0\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\Gamma^n(\theta) = 0\left(\frac{1}{n}\right)$ (i).

Examinons l'ordre de grandeur des termes de L_n, en fonction de n et de ε. Des formules

$$\begin{cases} \Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos\dfrac{\partial f}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}, \end{cases}$$

on obtient :

$$\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x}[\cos\theta h^\varepsilon(n\rho)\Gamma^n(\theta)] = \cos^2\theta\Gamma^n(\theta)\frac{\partial h^\varepsilon}{\partial\rho}(n\rho) - \frac{\sin\theta}{n\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}[\Gamma^n(\theta)\cos\theta]h^\varepsilon(n\rho).$$

D'où puisque (ii) $\operatorname*{Sup}_\rho |h^\varepsilon(\rho)| = 0(\varepsilon)$ et $\operatorname*{Sup}_\varepsilon \operatorname*{Sup}_\rho \left|\dfrac{\partial h^\varepsilon(\rho)}{\partial\rho}\right| < +\infty$, on peut écrire $\dfrac{1}{n}\dfrac{\partial}{\partial x}[\cos\theta h^\varepsilon(n\rho)\Gamma^n(\theta)]\Gamma^n(\theta)] = 0(\varepsilon) + 0\left(\dfrac{1}{n}\right)$, soit :

$$L_n f(x, y) = \frac{a(nx, ny)}{2}\Big[\Delta f(x, y) + \sum_{(k,k')\in Z^2} 1_{(x,y)\in D_n^{k,k'}}\Big(f'_x(x, y)\Delta\left(\frac{1}{n}\cos\theta h^\varepsilon(n\rho)\Gamma^n(\theta)\right) + f'_y(x, y)\Delta\left(\frac{\sin\theta}{n}h^\varepsilon(n\rho)\Gamma^n(\theta))\right) + 0(\varepsilon) + 0\left(\frac{1}{n}\right)\Big].$$

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{1}{n}\cos\theta h^\varepsilon(n\rho)\Gamma^n(\theta)\right) &= \Delta g^{n,\varepsilon}(\rho,\theta) = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}g^{n,\varepsilon}(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}g^{n,\varepsilon}(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}g^{n,\varepsilon}(\rho,\theta) \\ &= (1) + (2) + (3)\end{aligned}$$

$*$ $(1) = \dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2}g^{n,\varepsilon}(\rho,\theta) = \dfrac{n}{\varepsilon}\cos\theta\Gamma^n(\theta)1_{|\rho-r|\leqslant\varepsilon}$ donc $|(1)| \leqslant \dfrac{k}{\varepsilon}$

(où k est une constante) (grâce à (i))

$*$ $(2) = \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}g^{n,\varepsilon}(\rho,\theta) = \dfrac{1}{n\rho^2}h^\varepsilon(n\rho)\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\cos\theta\Gamma^n(\theta)) = 0(\varepsilon)$

(grâce à (i) et (ii))

$*$ $(3) = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}g^{n,\varepsilon}(\rho,\theta) = \dfrac{\cos\theta}{\rho}\Gamma^n(\theta)\dfrac{\partial}{\partial\rho}h^\varepsilon(n\rho)$ donc $|(3)| \leqslant k'$

(où k' est une constante) (grâce à (i) et (ii).

D'où finalement

$$\mathrm{L}_n f(x, y) = \frac{a(nx, ny)}{2}\Bigg[\Delta f(x, y) + 0(\varepsilon) + 0\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$+f_x'(x, y) \sum_{(k,k')\in \mathrm{Z}^2} 1_{(x,y)\in \mathrm{D}_n^{k,k'}} n\Gamma^n(\theta) \cos\theta\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{n\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} h^\varepsilon(n\rho)\right)1_{|n\rho - r|\leqslant\varepsilon}$$
$$+f_y'(x, y) \sum_{(k,k')\in \mathrm{Z}^2} 1_{(x,y)\in \mathrm{D}_n^{k,k'}} n\Gamma^n(\theta) \sin\theta\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{n\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} h^\varepsilon(n\rho)\right)1_{|n\rho - r|\leqslant\varepsilon}\Bigg].$$

Pour ε fixé, faisons tendre n vers $+\infty$; grâce aux majorations des coefficients (1) et (3) du générateur L_n, on peut appliquer les résultats de convergence obtenus en remplaçant dans le lemme IV.1 les mesures ν_{a,δ_n} par les mesures $\tilde{\nu}_{a,\delta_n}$. On obtient ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}^n\Bigg[\phi(f(\mathrm{M}_t) - f(\mathrm{M}_s) -$$
$$-\int_0^t \left(\tilde{\nu}_{a,1}\left(\frac{a}{2}\right)\Delta f(\mathrm{M}_u) + \tilde{\nu}_{a,1}(g_\varepsilon^1) f_x'(\mathrm{M}_u) + \tilde{\nu}_{a,1}(g_\varepsilon^2) f_y'(\mathrm{M}_u) + 0(\varepsilon))du\right)\Bigg] = 0$$

avec sur le tore

$$g_\varepsilon^1(\rho, \theta) = \frac{a(\rho, \theta)}{2}\frac{\alpha(\theta)}{2}\cos\theta\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial h^\varepsilon}{\partial\rho}(\rho)\right)1_{|\rho - r|\leqslant\varepsilon}$$
$$g_\varepsilon^2(\rho, \theta) = \frac{a(\rho, \theta)}{2}\frac{\alpha(\theta)}{2}\sin\theta\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial h^\varepsilon}{\partial\rho}(\rho)\right)1_{|\rho - r|\leqslant\varepsilon}$$

(on a utilisé la convergence des mesures $\tilde{\nu}_{a,\delta_n}(dx, dy)$ vers $\tilde{\nu}_{a,1}(dx, dy)$ quand n tend vers $+\infty$).

On a vu au paragraphe II.2 que : $\tilde{\nu}_{a,1}(dx, dy) = \dfrac{\mathrm{K}dxdy}{a(\rho, \theta)}$. Par conséquent,

$$\tilde{\nu}_{a,1}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\mathrm{K}}{2} \quad \text{et} \quad \tilde{\nu}_{a,1}(g_\varepsilon^1) = \int_{\mathscr{C}} \frac{\mathrm{K}}{4}\alpha(\theta)\cos\theta\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial h^\varepsilon}{\partial\rho}\right)1_{|\rho - r|\leqslant\varepsilon}\rho d\rho d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{K}}{4}\alpha(\theta)\cos\theta d\theta \times 2r = \alpha_0$$

de même $\tilde{\nu}_{a,2}(g_\varepsilon^2) = \dfrac{\mathrm{K}}{2} r \displaystyle\int_0^{2\pi} \alpha(\theta)\sin\theta d\theta = \beta_0$.

Faisant tendre enfin ε vers 0, on obtient, pour toute fonction f de classe C^2 (en appliquant ce qui précède à une suite $(f^p)_{p\in\mathrm{N}}$ de fonctions de classe C^3

convergeant vers f uniformément et telles qu'il y ait aussi convergence des dérivées jusqu'à l'ordre 2) :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{E}^n\left[\phi\left(f(\mathrm{M}_t) - f(\mathrm{M}_s) - \int_s^t \mathscr{L}f(\mathrm{M}_u)du\right)\right] = 0 .$$

Ce qui prouve que $(\mathrm{Q}^n)_n$ converge faiblement vers la loi $\rho_{(0,0)}$ associée au Markov plan de générateur $\mathscr{L}$.

Ceci achève la démonstration du théorème 2.

V. HOMOGÉNÉISATION AVEC HYPOTHÈSE DE CENTRAGE POUR DES FRONTIÈRES RECTILIGNES

Nous nous intéressons ici à un théorème de convergence analogue au théorème 1, en supposant, cette fois, que la suite $(\delta_n)_n$ est constante, soit $\delta_n(y) = \delta(y)\ \forall n \in \mathbb{N}$.

La proposition III.1 nous permet alors de relier la suite $(\mathrm{P}^n)_n$ à un unique processus de base $\mathrm{P}^{a,\delta}$ et nous montrerons comment, après avoir éliminé la partie des temps locaux, nous pouvons nous ramener à la situation des équations avec petit paramètre décrite par Papanicolaou, Stroock et Varadhan ; la mesure invariante étant alors $\nu_{a,\delta}$ et l'hypothèse de centrage nécessaire pour établir la convergence porte alors sur la fonction $1 - \delta$ relativement à la mesure $\nu_{a,\delta}$. Nous utiliserons les mêmes méthodes que dans [*1*] et nous supposerons donc que les fonctions a et δ sont C^∞, bornées et minorées par des constantes strictement positives.

THÉORÈME 3. — *On suppose que* $\forall n \in \mathbb{N}.\ \delta_n(y) = \delta(y)$ *où* δ *est une fonction* C^∞, *bornée, 1-périodique, minorée par une constante strictement positive et que a vérifie ces mêmes hypothèses. Notons g la fonction 1-périodique définie par* $g(x, y) = \Pi a(x, y) \sin 2\Pi x$.

Supposons que $\nu_{a,\delta}(g) = 0$, *on peut alors définir la fonction*

$$\psi(x, y) \equiv \int_0^\infty \mathrm{E}^{a,\delta}_{(x,y)}[g(\dot{\mathrm{X}}_t, \dot{\mathrm{Y}}_t)]dt .$$

Sous ces hypothèses, la suite $(\mathrm{P}^n)_{n\in\mathrm{N}}$ *décrite au III.1 converge faiblement vers la loi* $(\mathrm{P}_{0,0})$ *associée au Markov de générateur* :

$$\mathrm{L}f(x, y) = (\mathrm{A}f''_{x^2} + \mathrm{B}f''_{y^2} + \mathrm{C}f''_{x,y})(x, y)$$

où

$$\begin{cases} A = v_{a,\delta}\left[\dfrac{a}{2}\left(1 - 2\cos 2\Pi x + 2\psi'_x + \Delta\left(-\dfrac{1}{2\Pi}.\psi.\operatorname{Sin} 2\Pi x\right)\right)\right] \\ B = v_{a,\delta}\left[\dfrac{a}{2}\right] \\ C = v_{a,\delta}[a \times \psi'_\lambda]. \end{cases}$$

Preuve du théorème 3. — Contrairement à la méthode utilisée précédemment, nous ne pouvons montrer l'étroite relative compacité en utilisant les temps d'atteintes successifs des frontières (car l'argument essentiel était alors l'équivalence pour n grand de $1-\delta_n$ avec $\frac{\alpha}{n}$, ce qui n'est pas le cas ici). C'est pourquoi, nous allons tout d'abord appliquer le problème de martingale dont P^n est solution aux fonctions du type

$$F_{(x,y)} = f(x, y) + \frac{1}{n} f'_x(x, y)\varphi(nx)$$

(où f est de classe C^3, bornée ainsi que ses dérivées et φ est une fonction bornée qui nous permettra d'éliminer la partie des temps locaux de $F(X_t, Y_t)$ relativement à P^n). Ceci nous ramènera à la situation de [*1*] et, utilisant l'hypothèse de centrage, nous substituerons dans F la fonction $f+\frac{1}{n} f'_x(nx, ny)$ à la fonction f, avec ψ convenablement choisie, par une méthode analogue à celle de [*1*]. Nous pourrons alors montrer à la fois l'étroite relative compacité et identifier la valeur d'adhérence des $(P^n)_n$.

Pour éliminer la partie des temps locaux, nous pouvons choisir

$$\varphi(x) = -\frac{\sin 2\pi x}{2\pi},$$

en effet, notons $\phi_n f(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{n} f'_x(x, y)\left(-\frac{1}{2\Pi}\sin 2\Pi nx\right)$ on constate que

$$\frac{\partial\phi_n(f)}{\partial x}\left(\frac{k^+}{n}, y\right) - \frac{\partial\phi_n(f)}{\partial x}\left(\frac{k^-}{n}, y\right)\delta(nY) = 0\,.$$

Notons alors $\mathscr{L}_n f(x, y) = \frac{a(nx, ny)}{2}\Delta\phi_n(f)(x, y)$; on obtient, pour tout couple (s, t) avec $0 \leqslant s < t$ et toute fonction Λ définie sur l'espace canonique, bornée, $\mathscr{F}_s$-mesurable :

$$E^n\left[\Lambda\left(\phi_n(f)(M_t)-\phi_n(f)(M_s)-\int_s^t(\mathscr{L}_nf)(M_u)du\right)\right]=0 \quad (*)$$

(On remarque que $\phi_n f$ converge uniformément vers f quand n tend vers $+\infty$).

Explicitons $\mathscr{L}_n$ sous la forme :

$$\mathscr{L}_nf(x, y)=\frac{a(nx, ny)}{2}\left[\Delta f(x, y)-2f''_{x^2}(x, y)\cos 2\Pi nx\right.$$
$$\left.+\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{2\Pi}\sin 2\Pi nx\right)\Delta f'_x(x, y)+nf'_x(x, y)2\Pi\sin 2\Pi nx\right].$$

On constate donc, en comparant avec la situation de [*1*] que l'hypothèse de centrage doit porter sur la fonction $\Pi\times a(x, y)\sin 2\Pi x=g(x, y)$. Ce qui est bien l'hypothèse faite au théorème 3. Remarquons que l'on peut expliciter cette hypothèse grâce aux seules fonctions a et δ ; en effet :

$$\nu_{a,\delta}(\Pi a(x, y)\times\sin 2\Pi x)=\int_{\mathscr{C}}(\mu_{a,\delta}a)(x, y)\Pi\sin(2\Pi x)dxdy.$$

Par une intégration par parties et compte tenu du système dont $\mu_{a,\delta}$ est solution (cf. lemme II.1), on obtient :

$$\begin{aligned}\nu_{a,\delta}(\Pi\times a(x, y)\sin 2\Pi x)&=\int_{\pi_2(\mathscr{C})}dy\frac{1}{2}\left[(a\mu)(0^+, y)-(au)(0^-, y)\right]\\&=\frac{1}{2}\int_{\pi_2(\mathscr{C})}dy(a\mu)(0^+, y)(1-\delta(y)).\end{aligned}$$

L'hypothèse du théorème s'écrit donc aussi $\int_0^1(a\mu)(0^+, y)(1-\delta(y))dy=0$.

Nous pouvons donc appliquer à g le noyau potentiel récurrent de $P^{a,\delta}$, défini par :

$$Rg(x, y)=\int_0^\infty E^{a,\delta}_{(x,y)}g(M_t)dt$$

(ceci a bien un sens puisque nous avons déjà remarqué au lemme IV.1 qu'il existait deux constantes λ et b telles que (*i*) $|E^{a,\delta}_{(x,y)}g(M_t)|\leqslant\lambda e^{-bt}\|g\|_\infty$ uniformément en (x, y)).

Montrons que $Rg(M_t) - Rg(x, y) + \int_0^t g(M_s)ds$ est une $P^{a,\delta}_{(x,y)}$-martingale. Il nous suffit de calculer

$$E^{a,\delta}_{x,y} \int_0^\infty E^{a,\delta}_{M_t} g(M_s)ds - \int_0^\infty E^{a,\delta}_{(x,y)} g(M_s)ds .$$

Explicitons le deuxième terme de cette différence :

$$\int_0^\infty E^{a,\delta}_{(x,y)} g(M_s)ds = \int_0^t E^{a,\delta}_{(x,y)} g(M_s)ds + \int_0^\infty E^{a,\delta}_{(x,y)} g(M_s)ds .$$

En conditionnant la deuxième intégrale par rapport à $\mathcal{F}_t$ et en utilisant la propriété de Markov, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty E^{a,\delta}_{(x,y)} g(M_s)ds &= \int_0^t E^{a,\delta}_{(x,y)} g(M_s)ds + \int_t^\infty E^{a,\delta}_{(x,y)}(E^{a,\delta}_{M_t} g(M_{s-t}))ds \\ &= \int_0^t E^{a,\delta}_{(x,y)} g(M_s)ds + E^{a,\delta}_{(x,y)} \int_0^\infty E^{a,\delta}_{M_t} g(M_s)ds\end{aligned}$$

(grâce à (i)).
La différence précédente se réduit donc à $-E^{a,\delta}_{(x,y)} \int_0^t g(M_s)ds$ ce qui prouve le résultat annoncé.

Par ailleurs, grâce aux régularités des coefficients de $P^{a,\delta}$, on peut appliquer le problème de martingale vérifié par $P^{a,\delta}_{(x,y)}$ à la fonction Rg (en effet le semi-groupe de $P^{a,\delta}$ a les mêmes régularités que celui du « Skew Brownian Motion », explicité par Walsh dans [7]). On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}Rg(M_t) - Rg(x, y) - \int_0^t \frac{a(M_s)}{2} \Delta Rg(M_s)ds \\ - \frac{1}{2}\int_0^t [R'g_x(0^+, Y_s) - \delta(Y_s)R'g_x(0^-, Y_s)]dL^0_s\end{aligned}$$

est une $P^{a,\delta}_{(x,y)}$-martingale. En comparant avec le calcul précédent et en identifiant les processus à variation finie, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{a(M_s)}{2} \Delta Rg(M_s)ds \\ + \frac{1}{2}\int_0^t [R'g_x(0^+, Y_s) - R'g_x(0^-, Y_s)\delta(Y_s)]dL^0_s = - \int_0^t g(M_s)ds .\end{aligned}$$

Puisque les mesures dt et $d\mathrm{L}_t^0$ ont des supports disjoints, on en déduit :

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{aligned} &\int_0^t \left(\frac{\Delta \mathrm{R}g\,(\mathrm{M}_s)a(\mathrm{M}_s)}{2} + g(\mathrm{M}_s)\right)ds = 0 \\ &\int_0^t [\mathrm{R}'g_x(0^+, \mathrm{Y}_s) - \mathrm{R}'g_x(0^-, \mathrm{Y}_s)\delta(\mathrm{Y}_s)]d\mathrm{L}_s^0 = 0. \end{aligned} \qquad \mathrm{P}_{(x,y)}^{a,\delta} \ \text{p. s.}$$

Utilisons maintenant la proposition III.1 pour nous ramener à la suite P^n ; on déduit tout d'abord de ce qui précède une égalité pour la probabilité $\mathrm{R}(a, \delta, \mathrm{Z})$; elle s'écrit (par définition de $\mathrm{P}^{a,\delta}$ et de $\mathrm{R}(a, \delta, \mathrm{Z})$ au § I) :

$$\begin{matrix} \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ \mathrm{R}(a, \delta, \mathrm{Z}).\text{p. s.} \end{matrix} \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^t \left[\frac{a}{2}(\mathrm{M}'_s)\Delta \mathrm{R}g(\mathrm{M}'_s) + g(\mathrm{M}'_s)\right]ds = 0 \\ &\sum_{k \in \mathrm{Z}} \int_0^t [\mathrm{R}'g_x(k^+, \mathrm{Y}'_s) - \mathrm{R}'g_x(k^-, \mathrm{Y}'_s)\delta(\mathrm{Y}'_s)]d\mathrm{L}_s^k(\mathrm{X}') = 0. \end{aligned} \right.$$

Les intégrales de toute fonction mesurable bornée $(h^n(\mathrm{M}'_s))_{s \geqslant 0}$ par rapport à ces deux processus à variation finie sont donc nulles et l'on obtient au temps tn^2, après multiplication par $\frac{1}{n}$, la relation suivante :

$$\mathrm{R}(a, \delta, \mathrm{Z}).\text{p. s.}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{n}\int_0^{tn^2} \left[\frac{a}{2}(\mathrm{M}'_s)h^n(\mathrm{M}'_s)\Delta \mathrm{R}g\,(\mathrm{M}'_s) \right. \\ &\qquad\qquad \left. + g(\mathrm{M}'_s) \times h^n(\mathrm{M}'_s)\right]ds = 0 \\ &\frac{1}{n}\sum_{k \in \mathrm{Z}} \int_0^{tn^2} h^n(\mathrm{M}'_s)(\mathrm{R}'g_x(k^+, \mathrm{Y}'_s) \\ &\qquad\qquad - \mathrm{R}'g_x(k^-, \mathrm{Y}'_s)\delta(\mathrm{Y}'_s))d\mathrm{L}_s^k(\mathrm{X}.) = 0. \end{aligned} \right.$$

Si h est une fonction mesurable bornée, nous pouvons appliquer ceci à $h^n(x, y) = h\left(\frac{x}{n}, \frac{\mathrm{Y}}{n}\right)$, on obtient alors par la proposition III.1 une égalité presque sûre relativement à P^n ; elle s'écrit (**) :

$$p^n.\text{p. s.} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \left\{ \begin{aligned} &n\int_0^t \left[\frac{a}{2}(n\mathrm{M}_s)\Delta \mathrm{R}g\,(n\mathrm{M}_s)h(\mathrm{M}_s) + g(n\mathrm{M}_s)h(\mathrm{M}_s)\right]ds = 0 \\ &\sum_{k \in \mathrm{Z}} \int_0^t h(\mathrm{M}_s)[\mathrm{R}'g_x(k^+, n\mathrm{Y}_s) \\ &\qquad\qquad - \mathrm{R}'g_x(k^-, n\mathrm{Y}_s)\delta(n\mathrm{Y}_s)]d\mathrm{L}_s^{\frac{k}{n}}(\mathrm{X}.) = 0. \end{aligned} \right.$$

Nous utilisons $(**)$ avec $h(x, y) = f'_x(x, y)$ (où f apparaît dans $(*)$). En effet nous allons réécrire $(*)$ en substituant à f, la fonction

$$G(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{n} f'_x(x, y)\psi(nx, ny) \text{ où } \psi(x, y) = \mathrm{R}g(x, y).$$

Explicitons $\mathscr{L}_n$G grâce à l'expression de $\mathscr{L}_n$ écrite plus haut.

On obtient :

$$\mathscr{L}_n(\mathrm{G})(x, y) = \mathrm{L}_n f(x, y) + n\frac{a}{2}(nx, ny) f'_x(x, y)$$
$$\left(2\Pi \sin 2\Pi nx + \Delta\left(\psi - \frac{\sin 2\Pi x}{2\Pi} \times \psi'_x\right)(nx, ny)\right) + 0\left(\frac{1}{n}\right)$$

où L_n est le générateur à coefficients bornés, défini par :

$$\mathrm{L}_n f(x, y) = \frac{a}{2}(nx, ny)$$
$$[\Delta f(x, y) + f''_{x^2}(x, y)(-2 \cos 2\Pi nx + 2\psi'_x(nx, ny) - 4 \cos 2\Pi nx \psi'_x(nx, ny)$$
$$+ 2\Pi \sin 2\Pi nx \psi(nx, ny) - \frac{\sin}{2\Pi} 2\Pi nx (3\psi''_{x^2} + \psi''_{y^2})(nx, ny))$$
$$+ f'_{x,y}(x, y)\left(2\psi'_y(nx, ny) - \frac{\sin 2\Pi nx}{2\Pi} \times 2\psi''_{x,y}(nx, ny)\right)\Bigg].$$

En rapprochant $(*)$ et $(**)$ (écrit pour $h(x, y) = f'_x(x, y)$), on obtient (en notant que

$$\lim_{n \to +\infty} \phi_n\left(f + \frac{1}{n} f'_x \times \psi(nx, ny)\right) = f\Big)$$

$$(***) \quad \lim_{n \to +\infty} \mathrm{E}^n\Bigg[\Lambda(f(\mathrm{M}_t) - f(\mathrm{M}_s) - \int_s^t \mathrm{L}_n f(\mathrm{M}_u) du$$
$$- \int_s^t n\frac{a}{2}(n\mathrm{M}_u) f'_x(\mathrm{M}_u)\Delta\left(\psi'_x . \frac{-\sin 2\Pi x}{2\Pi}\right)(n\mathrm{M}_u) du\Bigg].$$

Ce qui s'écrit encore avec des notations évidentes :

$$(1) \quad \lim_{n \to +\infty} \mathrm{E}^n\left[\Lambda\left(f(\mathrm{M}_t) - f(\mathrm{M}_s) - \int_s^t \mathrm{L}_n f(\mathrm{M}_u) du - (\mathrm{A}_t^n - \mathrm{A}_s^n)\right)\right] = 0$$

où A_t^n est un processus à variation finie.

Or en appliquant le problème de martingale vérifié par P^n à la fonction $g_n(x, y)$, qui tend uniformément vers 0 et qui est définie par

$$g_n(x, y) = \frac{1}{n} f'_x(x, y)\psi'_x(nx, ny)\left(-\frac{\sin}{2\Pi} 2\Pi nx\right),$$

on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}^n\Big[\Lambda\Big(\int_s^t \frac{a}{2}(n\mathrm{M}_u)\Big[2f''_{x^2}(\mathrm{M}_u)\Big(\psi'_x(n\mathrm{M}_u)(-\cos 2\Pi n\mathrm{X}_u) - \frac{\sin 2\Pi n\mathrm{X}_u}{2\Pi}\psi''_{x^2}(n\mathrm{M}_u)\Big) + 2f''_{x,y}(\mathrm{M}_u)\psi''_{x,y}(n\mathrm{M}_u)\Big(-\frac{1}{2\Pi}\sin 2\Pi n\mathrm{X}_u\Big)\Big]du - (\mathrm{A}^n_t - \mathrm{A}^n_s)\Big)\Big] = 0.$$

(Notons que le terme des temps locaux a disparu grâce à l'égalité (**) vérifiée par ψ). Reportant enfin ceci dans (1), on obtient l'identité (2)

$$(2)\qquad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}^n\Big[\Lambda\Big(f(\mathrm{M}_t)-f(\mathrm{M}_s)-\int_s^t \overline{\mathrm{L}_n}f(\mathrm{M}_u)du\Big)\Big] = 0$$

avec

$$\overline{\mathrm{L}_n}f(x, y) = \frac{a(nx, ny)}{2}[\Delta f(x, y) + f''_{x^2}(x, y)(-2\cos 2\Pi nx + 2\psi'_x(nx, ny) + 2\Pi \sin 2\Pi\, nx\psi(nx, ny) - 2\cos 2\Pi nx\psi'_x(nx, ny) - \frac{\sin 2\Pi nx}{2\Pi}\Delta\psi(nx, ny) + f''_{x,y}(x, y)(2\psi'_y(nx, ny))].$$

Les coefficients de $\overline{\mathrm{L}_n}$ étant bornés, on en déduit de la même manière que dans [*1*] l'étroite relative compacité des $(\mathrm{P}^n)_n$. On peut alors appliquer le lemme IV.1 relatif à la convergence vers les fonctions moyennées relativement ici à la probabilité $\nu_{a,\delta}$ et l'on obtient.

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}^n\Big[\Lambda(f(\mathrm{M}_t) - f(\mathrm{M}_s) - \int_s^t \mathrm{L}f(\mathrm{M}_u)du\Big)\Big] = 0$$

avec $\quad \mathrm{L}f(x, y) = \mathrm{A}f''_{x^2}(x, y) + \mathrm{B}f''_{y^2}(x, y) + \mathrm{C}f''_{x,y}(x, y)$

où

$$\mathrm{A} = \nu_{a,\delta}\Big[\frac{a}{2}\Big(1 - 2\cos 2\Pi x + 2\psi'_x + 2\Pi\sin 2\Pi x\psi - 2\cos 2\Pi x\psi'_x - \frac{\sin 2\Pi x}{2\Pi}\Delta\psi\Big)\Big]$$

$$\mathrm{B} = \nu_{a,\delta}\Big(\frac{a}{2}\Big) \quad \text{et} \quad \mathrm{C} = \nu_{a,\delta}\Big(\frac{a}{2}\times 2\psi'_y(x, y)\Big).$$

Si $\tilde{\mathrm{P}}$ est une valeur d'adhérence de (P^n), $\tilde{\mathrm{P}}$ vérifie donc :

$$\tilde{\mathrm{E}}\Big[\Lambda\Big(f(\mathrm{M}_t) - f(\mathrm{M}_s) - \int_s^t \mathrm{L}f(\mathrm{M}_u)du\Big)\Big] = 0.$$

Ceci prouve en particulier après localisation des fonctions $f(x, y)=x^2$, y^2 et xy que $2t\mathrm{A}=\tilde{\mathrm{E}}(\mathrm{X}_t^2)$; $2t\mathrm{B}=\tilde{\mathrm{E}}(\mathrm{Y}_t^2)$; $t\mathrm{C}=\tilde{\mathrm{E}}(\mathrm{X}_t, \mathrm{Y}_t)$ et la formule de Cauchy-Schwartz prouve alors que L est elliptique et coïncide donc avec le générateur d'une diffusion plane. On en déduit que $\tilde{\mathrm{P}}$ est égale à $\mathrm{P}_{(0,0)}$ associée à L, par unicité des solutions du problème de martingales vérifié par cette dernière. Ceci achève la preuve du théorème 3.

REMERCIEMENTS

Je tiens à souligner que cette étude m'a été suggérée par le Professeur M. Métivier et je voudrais le remercier ici pour ses précieux conseils.

RÉFÉRENCES

[1] G. C. PAPANICOLAOU, D. W. STROOCK, S. R. S. VARADHAN, *Martingale approach to some limit theorems*. Duke Univ. Math. series, t. **3**, Dunham NC, 1977.
[2] B. GRIGELIONIS, R. MIKULEVICIUS, *Stochastic processes with penetrable boundaries*, Liet. Mat. Rinkinys, 1981.
[3] M. I. FREIDLIN, *Dirichlet's problem for an equation with periodic coefficients depending on a small parameter*. Theory Proba. Applications, 1963.
[4] S. WEINRYB, *Limite faible d'un processus de sauts avec frontière de transmission*. Rapport n° 78 du Centre de Mathématiques Appliquées de l'École Polytechnique. Avril 1982.
[5] S. WEINRYB, *Étude d'une équation différentielle stochastique avec temps local*. Séminaire Proba. XVIII.
[6] S. WEINRYB, *Sur des processus de Markov définis dans un domaine comportant des frontières perméables. Thèse de 3e Cycle*, Univ. de Paris VI, 1983.
[7] *Temps locaux*. Astérisque, 52/53, 1978, Société Mathématique de France.

(Manuscrit reçu le 30 avril 1984)