

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

GILLES PISIER

## **Remarques sur les classes de Vapnik-Cervonenkis**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 20, n° 4 (1984), p. 287-298

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1984\\_\\_20\\_4\\_287\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1984__20_4_287_0)

© Gauthier-Villars, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section B* » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Echanges Annales

## Remarques sur les classes de Vapnik-Červonenkis

par

Gilles PISIER

Équipe d'Analyse, Équipe de Recherche associée au C. N. R. S. n° 294,  
Université Paris VI, 4, Place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05,  
Tour 46/0, 4<sup>e</sup> Étage

RÉSUMÉ. — Soit  $M(\Omega, \mathcal{A})$  l'espace de Banach de toutes les mesures bornées, sur un espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Soit  $\mathcal{C}$  une sous-classe de  $\mathcal{A}$ . Nous considérons l'opérateur  $J : M(\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow l^\infty(\mathcal{C})$  défini par  $J(\mu) : (\mu(C))_{C \in \mathcal{C}}$ . Nous montrons que  $J$  est de type 2, si et seulement si, il est de type  $p$  pour un certain  $p > 1$ , et que cela arrive, si et seulement si,  $\mathcal{C}$  est une classe de Vapnik-Červonenkis. Les démonstrations reposent fortement sur des idées de Dudley. Une application aux espaces de Banach est donnée, qui généralise un résultat précédent de Milman.

SUMMARY. — Let  $M(\Omega, \mathcal{A})$  be the Banach space of all bounded signed measures on a measure space  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Let  $\mathcal{C}$  be a subclass of  $\mathcal{A}$ . We consider the operator  $J : M(\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow l^\infty(\mathcal{C})$  defined by  $J(\mu) = (\mu(C))_{C \in \mathcal{C}}$ . We show that  $J$  is of type 2 iff it is of type  $p$  for some  $p > 1$ , and that this happens iff  $\mathcal{C}$  is a Vapnik-Červonenkis class. The proofs rely heavily on some ideas of Dudley. We also give an application to Banach spaces which improves a previous result due to Milman.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE 1  
LABORATOIRE  
DE MATHÉMATIQUES  
INSTITUT FOURIER

### § 1. INTRODUCTION

Dans leur étude de la loi des grands nombres pour les distributions empiriques, Vapnik et Červonenkis [18] ont considéré les classes  $\mathcal{C}$  formées

de parties d'un ensemble  $\Omega$  pour lesquelles il existe un entier  $k$  tel que, pour toute partie à  $k$  éléments  $A \subset \Omega$ , l'ensemble  $\{A \cap C \mid C \in \mathcal{C}\}$  ne contient pas toutes les parties de  $A$ .

Dudley [1] a étudié ces classes de parties sous le nom de classes de Vapnik-Červonenkis (en abrégé classes V. C.); comme lui, nous noterons  $v(\mathcal{C})$  le plus petit entier  $k \geq 1$  possédant la propriété précédente. Dudley et ses collaborateurs ont montré, parmi bien d'autres choses, que l'on a pour ces classes un théorème limite central ([1]), une loi du logarithme itéré ([10]) et un principe d'invariance ([3]) pour les distributions empiriques.

Nous renvoyons à [4] pour plus de détails.

Le but de cette note est de remarquer que le point de départ des travaux de Dudley (précisément le théorème 7.1 de [1]) s'interprète « naturellement » dans la théorie des opérateurs de type 2 (cf. [8]). Pour un autre exemple où une telle interprétation s'est révélée utile et « éclairante », voir [19].

Nous donnons aussi une application aux espaces de Banach qui améliore un résultat de Milman [13].

Soit  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espace mesuré et soit  $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$  une classe d'ensembles. On note  $M(\Omega, \mathcal{A})$  l'espace de Banach des mesures  $\mu$  bornées sur  $\Omega$  munies de la norme  $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$ . D'autre part, on note  $l^\infty(\mathcal{C})$  l'ensemble des familles bornées de scalaires (réels ou complexes)  $x = (x_i)_{i \in \mathcal{C}}$  muni de la norme.

$$\|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathcal{C}} |x_i|.$$

On peut alors considérer l'opérateur  $J : M(\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow l^\infty(\mathcal{C})$  défini par

$$J(\mu) = (\mu(C))_{C \in \mathcal{C}},$$

qui est évidemment de norme  $\|J\| \leq 1$ .

Soit  $(\varepsilon_n)$  une suite de v. a. indépendantes équidistribuées, à valeurs  $\pm 1$ , et telles que  $\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = 1/2$ .

On dit qu'un opérateur  $u : X \rightarrow Y$  (entre espaces de Banach) est de type  $p$  s'il existe une constante  $C$  telle que, pour toute suite finie  $(x_i)$  d'éléments de  $X$  on a :

$$\mathbb{E} \|\sum \varepsilon_i u(x_i)\| \leq C(\sum \|x_i\|^p)^{1/p}.$$

On notera  $T_p(u)$  la plus petite constante  $C$  vérifiant cette propriété. (Signalons que seul le cas  $1 < p \leq 2$  est intéressant).

Nous pouvons alors énoncer (<sup>1</sup>)

THÉORÈME 1. — Avec les notations précédentes, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i)  $\mathcal{C}$  est une classe V. C.
- ii)  $J$  est de type 2.
- iii)  $J$  est de type  $p$  pour un  $p > 1$ .

Supposons que  $\mathcal{C}$  soit dénombrable. Alors ces propriétés sont équivalentes à iv), il existe une suite  $a_n > 0$  tendant vers 0 avec les propriétés suivantes : pour toute probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ , la suite des mesures aléatoires

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\omega_i} - \mathbb{P}$$

est telle que  $\frac{1}{a_n} \sup_{C \in \mathcal{C}} |v_n(C)|$  est « stochastiquement borné » sur  $(\Omega^{\mathbb{N}}, \mathbb{P}^{\mathbb{N}})$ , c'est-à-dire que :  $\forall \varepsilon > 0 \exists R \forall n$

$$\mathbb{P}^{\mathbb{N}}(\{(\omega_i)_i | \sup_{C \in \mathcal{C}} |v_n(C)| > a_n R\}) < \varepsilon.$$

v) Avec les mêmes notations qu'en (iv), il existe une suite  $a_n \downarrow 0$  telle que, pour toute probabilité  $\mathbb{P}$

$$\sup_n \frac{1}{a_n} \sup_{C \in \mathcal{C}} |v_n(C)| < \infty \quad p. s.$$

Remarques. — a) L'équivalence entre (ii) et (iii) est plutôt surprenante. On peut se demander si, dans la situation précédente, l'opérateur  $J$  se factorise par un espace de type 2 (c'est-à-dire par un espace dont l'opérateur identité soit de type 2). En effet, James [9] a précisément montré que c'est le cas si l'on considère  $\Omega = \mathbb{N}$  et  $\mathcal{C}$  formé des intervalles d'entiers ; on en déduit (par exemple par ultraproduct) le même résultat pour  $\Omega = [0, 1]$  et  $\mathcal{C}$  l'ensemble des intervalles. Cela correspond donc exactement à la situation du théorème classique de Glivenko-Cantelli.

b) Au sujet de l'implication (iv)  $\Rightarrow$  (i), signalons qu'un résultat de même nature est démontré dans [5] qui contient en particulier le cas  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

L'équivalence (i)  $\Leftrightarrow$  (v) montre que les classes V. C. sont précisément celles pour lesquelles on a une loi des grands nombres « uniforme » pour

(<sup>1</sup>) Je tiens à remercier Joel Zinn d'avoir attiré mon attention sur les questions considérées ici.

les distributions empiriques (i. e.  $\text{Sup}_{C \in \mathcal{C}} |v_n(C)|$  tend vers 0 p. s. d'une manière uniforme sur  $\mathbb{P}$ ). Notons pour finir que l'équivalence entre (iv) et (v) résulte aussi des résultats généraux de [11], ou bien aussi de [17].

c) Par des méthodes de [8], on déduit aisément du fait que J est de type 2 que l'on a, dans la situation du théorème 1 (iii)

$$\text{Sup}_n \sqrt{n} \mathbb{E} \text{Sup}_{C \in \mathcal{C}} |v_n(C)| < \infty$$

et

$$\text{Sup}_n \sqrt{\frac{n}{2 \log \log n}} \text{Sup}_{C \in \mathcal{C}} |v_n(C)| < \infty \quad \text{p. s.}$$

C'est-à-dire que l'on a la « version bornée » du théorème limite central et de la loi du logarithme itéré. Aux prix de quelques complications, on pourrait aussi dériver la version « compacte » de ces théorèmes (obtenue dans [1] et [10]) d'une propriété de l'opérateur J, nous ne le ferons pas.

d) Bien entendu, on peut remplacer l'hypothèse «  $\mathcal{C}$  dénombrable » par une hypothèse convenable de séparabilité du processus  $(v_n(C))_{C \in \mathcal{C}}$ .

## § 2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Soit  $\mathbb{P}$  une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Suivant Dudley, on associe à  $\mathbb{P}$  une distance (ou plutôt un écart  $d_{\mathbb{P}}$  sur  $\mathcal{A}$ , de la manière suivante. On pose

$$\forall t, s \in \mathcal{A} \quad d_{\mathbb{P}}(t, s) = \mathbb{P}(t \Delta s)^{1/2} = \|1_t - 1_s\|_{L^2(d\mathbb{P})}$$

Soit T un ensemble muni d'un écart  $d$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on notera  $N(T, d; \varepsilon)$  le plus petit nombre de  $d$ -boules ouvertes de rayon  $\varepsilon$  qui forment un recouvrement de T.

L'entropie métrique (i. e.  $\text{Log } N(T, d; \varepsilon)$ ) a été introduite dans l'étude des processus gaussiens dans [2]; plus récemment, Dudley s'en est servi dans son travail [1] visant à généraliser le théorème de Kolmogorov-Smirnov (i. e. le théorème limite central pour les distributions empiriques) à des classes d'ensembles plus générales que les intervalles. Nous reprenons ci-dessous l'idée essentielle du théorème 7.1 de Dudley [1]. Le théorème suivant n'en est qu'une reformulation plus précise.

THÉORÈME 2. — Soit P une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Posons  $N_{\mathbb{P}}(\varepsilon) = N(\mathcal{C}, d_{\mathbb{P}}; \varepsilon)$ . On a alors

$$(1) \quad v(\mathcal{C}) \geq \alpha \text{Sup}_{0 < \varepsilon \leq 1} \frac{\text{Log } N_{\mathbb{P}}(\varepsilon)}{\max \left\{ 1; \text{Log } \frac{1}{\varepsilon} \right\}},$$

où  $\alpha > 0$  est une constante numérique.

La démonstration du théorème 2 utilise plusieurs lemmes. Le premier est dû indépendamment à Sauer [15], Vapnik-Červonenkis [17] et Shelah. Il joue un rôle fondamental dans l'étude des classes V. C.

LEMME 3. — *Pour toute partie finie  $A \subset \Omega$  ayant exactement  $n$  éléments ( $n \geq 1$ ), on a :*

$$|\mathcal{C} \cap A| \leq \sum_{j < v} \binom{n}{j} = \varphi(v, n)$$

où l'on a posé simplement  $v = v(\mathcal{C})$ .

Notons tout de suite que pour  $n \geq 2$ , on a

$$\varphi(v, n) \leq \sum_{j < v} \frac{n^j}{j!} \leq \sum_{j < v} \left(\frac{n}{v}\right)^j \frac{v^j}{j!}$$

d'où

$$(2) \quad \varphi(v, n) \leq \left(\frac{n}{v}\right)^v e^v \quad \text{pour} \quad n \geq v.$$

Nous aurons aussi besoin du lemme suivant qui est le point crucial de la démonstration du théorème 7.1 de [1].

LEMME 4. — *Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $(A_i)_{i \leq N}$  une famille de parties de  $\Omega$  telles que  $\mathbb{P}(A_i \Delta A_j) \geq \varepsilon^2$  pour tout  $i \neq j$ . Soit  $K$  un entier tel que*

$$(3) \quad N^2(1 - \varepsilon^2)^K < 1.$$

Alors il existe des points  $\omega_1, \dots, \omega_K$  dans  $\Omega$  tels que

$$\forall i \neq j \quad (A_i \Delta A_j) \cap \{\omega_1, \dots, \omega_K\} \neq \emptyset.$$

*Démonstration.* — (On suit fidèlement Dudley [1], p. 922).

Soient  $T_1, \dots, T_K$  une suite de v. a. indépendantes équidistribuées à valeurs dans  $\Omega$  et de loi  $\mathbb{P}$ .

Alors, pour  $i \neq j$  et  $m \leq K$  fixés, la probabilité que  $T_m$  ne soit pas dans  $A_i \Delta A_j$  vaut  $1 - \mathbb{P}(A_i \Delta A_j) \leq 1 - \varepsilon^2$ . Donc

$$\text{Proba} \{ (A_i \Delta A_j) \cap \{T_1, \dots, T_K\} = \emptyset \} \leq (1 - \varepsilon^2)^K.$$

Par conséquent la probabilité qu'il existe  $i, j \leq N$  pour lesquels ce dernier événement se produit est majorée par  $N^2(1 - \varepsilon^2)^K$ . La conclusion du lemme est donc claire.

*Démonstration du théorème 2.* — Soit  $(A_i)_{i \leq N}$  une famille maximale d'éléments de  $\mathcal{C}$  tels que  $d_P(A_i, A_j) \geq \varepsilon$  pour tout  $i \neq j$ . On a nécessaire-

ment  $N \geq N_p(\varepsilon)$  par la maximalité de  $N$ . Soit alors  $K$  comme au lemme 4. D'après les lemmes 3 et 4 on a nécessairement (d'après (2))

$$(4) \quad N \leq \varphi(v, K) \leq \left(\frac{eK}{v}\right)^v \quad \text{si} \quad K \geq v.$$

Pour que l'on ait (3), il suffit que  $2 \operatorname{Log} N + K \log(1 - \varepsilon^2) < 0$ , on peut donc prendre  $K = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon^2} \operatorname{Log} N \right\rceil + 1$ . Supposons que  $\frac{2}{\varepsilon^2} \operatorname{Log} N \geq v \geq 1$ , de sorte que  $K \geq v$  et  $K \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \log N$ . On tire de (4)

$$\frac{\operatorname{Log} N}{v} \leq \operatorname{Log} \left(\frac{4e}{\varepsilon^2}\right) + \operatorname{Log} \left(\frac{\operatorname{Log} N}{v}\right).$$

Comme  $\operatorname{Log} x \leq \frac{x}{e}$  pour  $x > 0$ , on obtient

$$(5) \quad \left(1 - \frac{1}{e}\right) \frac{\operatorname{Log} N}{v} \leq \operatorname{Log} \frac{4e}{\varepsilon^2}$$

d'où on tire l'estimation (1). [On notera que si  $\frac{2}{\varepsilon^2} \operatorname{Log} N < v$ , alors (5) est encore vérifiée car  $\varepsilon \leq 1$ .]

Pour démontrer le théorème 1, nous utiliserons une majoration (maintenant bien connue) pour les processus gaussiens ou sous-gaussiens, qui est due à Dudley. Pour la démonstration, cf. par exemple [12], p. 25.

LEMME 5. — Soit  $x_1, \dots, x_n$  des fonctions bornées sur un ensemble  $T$ . On pose  $d(s, t) = (\sum |x_i(t) - x_i(s)|^2)^{1/2}$  pour tous  $s, t$  dans  $T$ .

$$(6) \quad \mathbb{E} \|\sum \varepsilon_i x_i\|_{l^\infty(T)} \leq D \left\{ \sup_{t \in T} (\sum |x_i(t)|^2)^{1/2} + \int_0^\infty (\operatorname{Log} N(T, d; \varepsilon))^{1/2} d\varepsilon \right\},$$

où  $D$  est une constante numérique.

Démonstration du théorème 1. — Montrons tout d'abord (i)  $\Rightarrow$  (ii).

Soit  $\mu_1, \dots, \mu_n$  dans  $M(\Omega, \mathcal{A})$ . Soit  $P = \frac{1}{\sum |\mu_i|(\Omega)^2} \sum_1^n |\mu_i|(\Omega) |\mu_i|$ .

Alors  $\mathbb{P}$  est une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  et on a

$$\sum_1^n |\mu_i(t) - \mu_i(s)|^2 \leq \sum |\mu_i| (t \Delta s)^2 \leq \sum \|\mu_i\|^2 \mathbb{P}(t \Delta s).$$

On déduit donc de (6)

$$\mathbb{E} \|\sum \varepsilon_i J(\mu_i)\|_{l^\infty(\mathcal{C})} \leq D \{ (\sum \|\mu_i\|^2)^{1/2} \} \left( 1 + \int_0^\infty (\text{Log } N_p(\varepsilon))^{1/2} d\varepsilon \right).$$

D'après (1), on conclut que  $J$  est de type 2 et

$$(7) \quad T_2(J) \leq D(1 + \alpha' \sqrt{v(\mathcal{C})})$$

où  $D$  et  $\alpha'$  sont des constantes numériques.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) est trivial.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) est standard, cf. e. g. [8]. En effet, par des arguments de symétrisation classiques, on montre que l'on a (en supposant  $(\varepsilon_i)$  indépendant de  $(\omega_i)$ )

$$(8) \quad \begin{cases} \mathbb{E} \|\sum_1^n J(\delta_{\omega_i} - \mathbb{P})\| \leq \mathbb{E} \|\sum_1^n J(\delta_{\omega_i} - \delta_{\omega_{i+n}})\| \\ = \mathbb{E} \|\sum_1^n \varepsilon_i J(\delta_{\omega_i} - \delta_{\omega_{i+n}})\| \leq 2 \mathbb{E} \|\sum_1^n \varepsilon_i J(\delta_{\omega_i})\|. \end{cases}$$

[La première inégalité s'obtient en intégrant par rapport aux  $\omega_{i+n}$  à l'intérieur de la norme et la dernière résulte de l'inégalité triangulaire ; l'égalité résulte de la symétrie de  $\delta_{\omega_i} - \delta_{\omega_{n+i}}$ .]

On en déduit donc

$$\mathbb{E} \|\sum_1^n J(\delta_{\omega_i} - \mathbb{P})\| \leq 2T_p(J)n^{1/p}$$

d'où  $\mathbb{E} \text{Sup}_{\mathcal{C} \in \mathcal{C}} |v_n(\mathcal{C})| \leq 2T_p(J)n^{-1/p'}$ , avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , ce qui entraîne évidemment (iv) avec  $a_n \approx n^{-1/p'}$ .

Suivant les mêmes idées, on montre aisément que (iii)  $\Rightarrow$  (v). En effet (iii) entraîne que la série  $\sum_1^\infty n^{-\alpha} J(\delta_{\omega_n} - \mathbb{P})$  est convergente, si  $\alpha > 1/p$ , p. s. et dans  $L^1(\mathbb{P}^{\mathbb{N}}; l^\infty(\mathcal{C}))$ ; d'où (d'après le lemme de Kronecker) la convergence

p. s. vers 0 de  $\left\| n^{-\alpha} \sum_{i=1}^n J(\delta_{\omega_i} - \mathbb{P}) \right\|$ , ce qui donne (v) avec  $a_n = n^{\alpha-1}$  et

$1/p < \alpha < 1$ . On a évidemment (v)  $\Rightarrow$  (iv). Il ne nous reste donc plus qu'à montrer que (iv)  $\Rightarrow$  (i).

Supposons donc (iv). Il résulte alors des inégalités d'Hoffmann-Jørgensen (cf. [7], p. 163-165) que

$$\text{Sup}_n \frac{1}{a_n} \mathbb{E} \text{Sup}_{\mathcal{C} \in \mathcal{C}} |v_n(\mathcal{C})| < \infty$$

pour toute probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ .



Soit  $(\varepsilon_i)$  une suite de v. a. de Bernoulli indépendante de la suite  $(X_i)$ .

On peut évidemment supposer que  $\sup_n \frac{1}{na_n\sqrt{n}} \leq \beta < \infty$ .

Posons  $\Phi(\mathbb{P}) = \sup_n \frac{1}{na_n} \mathbb{E} \sup_{C \in \mathcal{C}} | \langle \sum_1^n \varepsilon_i \delta_{\omega_i}, C \rangle |$  (où l'espérance porte sur tous les  $(\varepsilon_i)$  et  $(\omega_i)$ ).

On a alors  $\Phi(\mathbb{P}) < \infty$  pour toute probabilité  $\mathbb{P}$ .

En effet, on a (d'après (8))

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbb{P}) &\leq \beta + \sup_n \left( \frac{1}{na_n} \right) \mathbb{E} \sup_{C \in \mathcal{C}} | \langle \sum_1^n \varepsilon_i (\delta_{\omega_i} - \mathbb{P}), C \rangle | \\ &\leq \beta + 2 \sup_n \frac{1}{a_n} \mathbb{E} \sup_{\mathcal{C}} | v_n(C) |. \end{aligned}$$

Donc  $\Phi(\mathbb{P}) < \infty$ .

Nous allons maintenant montrer qu'il existe une constante  $C$  telle que

$$(9) \quad \Phi(\mathbb{P}) \leq C \quad \text{pour toute probabilité } \mathbb{P}.$$

Pour cela, montrons tout d'abord que si  $Q_0, Q_1$  sont deux probabilités sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ , si  $0 \leq \alpha \leq 1$  et si  $\mathbb{P} = \alpha Q_0 + (1 - \alpha) Q_1$ , on a

$$\Phi(\mathbb{P}) \geq \alpha \Phi(Q_0).$$

En effet, on peut trouver sur un même espace de probabilité,  $(\Omega', \mathcal{P}')$  des v. a.  $Y^0$  et  $Y^1$  à valeurs dans  $(\Omega, \mathcal{A})$  et de lois respectives  $Q_0$  et  $Q_1$ ; soit alors  $X_n$  la v. a. définie sur  $\Omega'' = (\{0, 1\} \times \Omega')^{\mathbb{N}}$  de la manière suivante

$$X_n((t_k, \omega'_k)) = Y^{t_n}(\omega'_n).$$

On munit  $\Omega''$  de la probabilité produit infini de  $(\alpha \delta_0 + (1 - \alpha) \delta_1) \times \mathbb{P}'$ , de sorte que les v. a.  $(X_n)$  sont indépendantes équidistribuées et de loi  $\mathbb{P}$ . Posons  $|\mu|_{\mathcal{C}} = \sup \{ |\mu(C)|, C \in \mathcal{C} \}$  pour tout  $\mu$  dans  $M(\Omega, \mathcal{A})$ . On peut écrire, pour  $(t_k, \omega'_k)_k$  fixé dans  $\Omega''$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varepsilon | \sum_1^n \varepsilon_i \delta_{X_i} |_{\mathcal{C}} &\geq \mathbb{E}_\varepsilon | \sum_1^n \varepsilon_i 1_{\{t_i=0\}} \delta_{X_i} |_{\mathcal{C}} \\ &\geq \mathbb{E}_\varepsilon | \sum_1^n \varepsilon_i 1_{\{t_i=0\}} \delta_{Y^0(\omega'_i)} |_{\mathcal{C}}. \end{aligned}$$

D'où en intégrant en  $(t_i, \omega'_i)$

$$\begin{aligned} (na_n)\Phi(\mathbb{P}) &\geq \mathbb{E}_{(t_i)} \mathbb{E}_{(\omega'_i)} \mathbb{E}_\varepsilon | \sum_1^n \varepsilon_i 1_{\{t_i=0\}} \delta_{Y^0(\omega'_i)} |_{\mathcal{C}} \\ &\geq \mathbb{E}_{(\omega'_i)} \mathbb{E}_\varepsilon | \sum_1^n \varepsilon_i \alpha \delta_{Y^0(\omega'_i)} |_{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

(On a utilisé l'inégalité de Jensen par rapport aux variables  $(t_i)$ ). On a donc finalement l'inégalité annoncée  $\Phi(\mathbb{P}) \geq \alpha \Phi(Q_0)$ .

L'inégalité (9) en résulte, car sinon il existerait une suite de probabilités  $P_k$  sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  telle que  $\Phi(P_k) \geq 4^k$  pour tout  $k$ ; on aurait alors, pour  $P = \sum_1^\infty 2^{-k} P_k$   $\Phi(P) \geq 2^{-k} \Phi(P_k) = 2^k$ , ce qui contredirait le fait que  $\Phi(P) < \infty$ .

Enfin, pour conclure, montrons que (9) entraîne (i). Supposons que  $\mathcal{C}$  n'est pas une classe V. C. Alors pour tout  $k$ , il existe une partie  $A = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$  de  $\Omega$  telle que toute partie de  $A$  soit de la forme  $C \cap A$  pour un  $C$  dans  $\mathcal{C}$ .

Notons que l'on a alors trivialement :

$$(10) \quad \left| \sum_1^k \alpha_i \delta_{\omega_i} \right|_{\mathcal{C}} \geq \frac{1}{2} \sum |\alpha_i| \quad \forall (\alpha_i) \in \mathbb{R}^k.$$

On va aboutir à une contradiction.

En effet, soit  $(Z_n)$  une suite de v. a. indépendantes à valeurs dans  $\Omega$ , de loi  $Q = \frac{1}{k} \sum_1^k \delta_{\omega_i}$ . On a  $\Phi(Q) \leq C$ , donc, pour tout  $n$ ,

$$\mathbb{E} \left| \sum_1^n \varepsilon_i \delta_{Z_i} \right|_{\mathcal{C}} \leq C n a_n.$$

Soit  $\Omega_0 = \{Z_i \neq Z_j, \forall i \neq j \leq n\}$ .

Supposons  $n^2 < k/2$  de sorte que  $\text{Proba}(\Omega_0) > 1 - \frac{n^2}{k} \geq \frac{1}{2}$ . On peut écrire

$$\mathbb{E} 1_{\Omega_0} \left| \sum_1^n \varepsilon_i \delta_{Z_i} \right|_{\mathcal{C}} \leq C n a_n$$

d'où d'après (10) 
$$\frac{n}{4} \leq C n a_n,$$

ce qui contredit l'hypothèse  $a_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . C. Q. F. D.

REMARQUE 6. — On déduit de (7) que l'on a :

$$(10) \quad T_2(J) \leq C' \sqrt{v(\mathcal{C})}$$

pour une constante numérique  $C'$ .

On peut remarquer que l'inégalité inverse est aussi vraie :

$$(11) \quad T_2(J) \geq C'' \sqrt{v(\mathcal{C})}$$

pour une constante numérique  $C'' > 0$ .

En effet, soit  $v = v(\mathcal{C})$ , soit  $A \subset \Omega$  avec  $|A| = v - 1$  ( $v \geq 1$ ) et tel que toute partie de  $A$  soit de la forme  $A \cap C$  pour un  $C$  dans  $\mathcal{C}$ . Alors, on a, si  $A = \{\omega_1, \dots, \omega_{v-1}\}$

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{i \leq v-1} \varepsilon_i J(\delta_{\omega_i}) \right\|_{l^\infty(\mathcal{C})} \leq T_2(J) \sqrt{v-1}.$$

D'où d'après (10) :  $\frac{1}{2}(v - 1) \leq T_2(J)\sqrt{v - 1}$ .

Soit  $T_2(J) \geq \frac{1}{2}\sqrt{v - 1}$ , ce qui donne (11). On montrerait de même que  $T_p(J)$  est équivalent à  $v(\mathcal{C})^{1/p'}$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

*Remarque.* — Soit  $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$  une classe (supposée dénombrable) d'ensembles mesurables. Supposons que pour toute suite de v. a. indépendantes  $(Y_n)$  [non nécessairement équidistribuées] à valeurs dans  $(\Omega, \mathcal{A})$  on a :

$$(12) \quad \sup_{C \in \mathcal{C}} \left| \frac{1}{n} \sum_1^n (\delta_{Y_i}(C) - \mathbb{P} \{ Y_i \in C \}) \right| \rightarrow 0$$

en probabilité quand  $n \rightarrow \infty$ .

Alors  $\mathcal{C}$  est nécessairement une classe V. C. Il suffit pour le voir de reprendre la démonstration précédente.

En effet posons

$$\lambda_n = \sup \mathbb{E} \left\| \frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_i \delta_{X_i}(C) \right\|_{l^\infty(\mathcal{C})}$$

où le sup porte sur toutes les suites de v. a. indépendantes *équidistribuées*  $(X_i)$ , à valeurs dans  $(\Omega, \mathcal{A})$ . On voit aisément que si  $\lambda_n \not\rightarrow 0$  alors on peut construire une suite  $(Y_n)$  comme ci-dessus qui ne vérifie pas (12).

Donc (12) entraîne que  $\lambda_n \rightarrow 0$ , c'est-à-dire qu'il existe une suite  $a_n \rightarrow 0$  pour laquelle on a (9); or on vient de voir que (9) a lieu ssi  $\mathcal{C}$  est une classe de V. C.

### § 3. APPLICATIONS AUX ESPACES DE BANACH

Le théorème 2 nous permet d'améliorer un résultat de Milman (cf. [13]). lui-même inspiré d'un résultat de [15] (§ 7).

**THÉORÈME 7.** — Soit  $x_1, \dots, x_n$  des fonctions à valeurs dans  $\{-1, +1\}$  sur un ensemble T.

Posons  $M = \mathbb{E} \sup_{t \in T} |\sum_1^n \varepsilon_i x_i(t)|$ .

Alors, pour tout  $k$  tel que  $k \leq \gamma \frac{M^2}{n}$  (où  $\gamma$  est une constante numérique), il existe une suite extraite  $m_1 < m_2 < \dots < m_k$  telle que l'ensemble des valeurs  $\{x_{m_1}(t), \dots, x_{m_k}(t)\}$  soit égal à  $\{-1, +1\}^k$ . La suite extraite engendre donc dans  $l^\infty(T)$  un sous-espace isométrique à  $l_k^1$ .

*Démonstration.* — Posons  $M' = \mathbb{E} \sup_t \left| \sum_1^n \varepsilon_1 \left( \frac{1 + x_i(t)}{2} \right) \right|$ .

Soit  $\mathcal{C}$  la classe de parties de  $\{1, 2, \dots, n\}$  de la forme

$$A_r = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid x_i(t) = 1\}.$$

En appliquant le théorème 1 à cette classe, on trouve  $M' \leq T_2(J)\sqrt{n}$  d'où d'après (10)

$$v \geq \frac{1}{C'^2} \frac{M'^2}{n}.$$

Par conséquent, pour tout  $k < C'^{-2}M'^2/n$  on a bien la conclusion du théorème 7. On obtient le résultat annoncé en observant que

$$\frac{1}{2}(M - \sqrt{n}) \leq M' \leq \frac{1}{2}(M + \sqrt{n}) \quad \text{et} \quad M \geq \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

*Remarques.* — i) Le cas de fonctions arbitraires  $x_i$  à valeurs dans l'intervalle  $[-1, 1]$  est étudié dans [6], pour  $M$  de l'ordre de  $n$ .

ii) On sait (cf. e. g. [13]) que l'estimation du théorème 7 est la meilleure possible.

iii) Le lecteur trouvera dans [14] une généralisation à des fonctions  $(x_i)$  prenant un nombre fini fixé de valeurs.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. DUDLEY, Central limit theorem for empirical measures. *Ann. Probability*, t. 6, 1978, p. 899-929.
- [2] R. DUDLEY, The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes. *J. Funct. Anal.*, t. 1, 1967, p. 290-330.
- [3] R. DUDLEY, W. PHILIPP, *Invariance principles for sums of Banach space valued random elements and empirical processes*. A paraître.
- [4] R. DUDLEY, A course on empirical processes. École d'Été de St Flour, 1982. *Springer Lecture Notes*, à paraître.
- [5] M. DURST, R. DUDLEY, Empirical processes, Vapnik-Červonenkis classes and Poisson processes. *Probability and Math. Statistics (Wrocław)*, t. 1, 1980, p. 109-115.
- [6] J. ELTON, Sign embeddings of  $l_1^n$ . *Trans. A. M. S.*, t. 279, 1983, p. 113-124.
- [7] J. HOFFMANN-JØRGENSEN, Sums of independent Banach space valued random variables. *Studia Math.*, t. 52, 1974, p. 159-186.
- [8] J. HOFFMANN-JØRGENSEN et G. PISIER, The law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces. *Annals of Probab.*, t. 4, 1976, p. 587-599.
- [9] R. C. JAMES, Non reflexive spaces of type 2. *Israël J. Math.*, t. 30, 1978, p. 1-13.
- [10] J. KUELBS, R. DUDLEY, Log Log Laws for empirical measures. *Ann. Probability*, t. 8, 1980, p. 405-418.
- [11] J. KUELBS, J. ZINN, Some stability results for vector valued random variables. *Annals of Probability*, t. 7, 1979, p. 75-84.

- [12] M. B. MARCUS, G. PISIER, Random Fourier series with applications to Harmonic Analysis. *Annals of Math. Studies*, n° 101, 1981. Princeton Univ. Press.
- [13] V. MILMAN, Some remarks about embedding of  $l_n^1$  in finite dimensional spaces. *Israël J. Math.*, t. **43**, 1982, p. 129-138.
- [14] A. PAJOR, Thèse de 3<sup>e</sup> cycle en préparation et Plongement de  $l_n^1$  dans les espaces de Banach complexes. *C. R. Acad. Sci.*, t. **296**, 1983, p. 741-743.
- [15] G. PISIER, De nouvelles caractérisations des ensembles de Sidon. *Advances in Math. Supplementary Studies*. t. **7 B**, 1981, p. 685-726.
- [16] N. SAUER, On the density of families of sets. *J. Combinatorial theory*, t. **A 13**, 1972, p. 145-147.
- [17] M. STEELE, Empirical discrepancies and subadditive processes. *Annals of Probability*, t. **6**, 1978, p. 118.
- [18] VAPNIK-ČERVONENKIS, On the uniform convergence of relative frequencies of events to their probabilities. *Theor. Prob. Appl.*, t. **16**, 1971, p. 264-280.
- [19] J. ZINN, A note on the central limit theorem in Banach spaces. *Annals of Proba.*, t. **5**, 1977, p. 283-286.

(Manuscrit reçu le 16 janvier 1984)