ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN-PIERRE FOUQUE

La convergence en loi pour les processus à valeurs dans un espace nucléaire

Annales de l'I. H. P., section B, tome 20, nº 3 (1984), p. 225-245

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1984__20_3_225_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 20, n° 3, 1984, p. 225-245. *Probabilités et Statistiques*

La convergence en loi pour les processus à valeurs dans un espace nucléaire

par

Jean-Pierre FOUQUE
Laboratoire de Probabilités, associé C. N. R. S. n° 224,
Université de Paris VI, 4, place Jussieu, 75005 Paris

RÉSUMÉ. — I. Mitoma [*8*] a récemment obtenu un critère simple de convergence en loi pour une suite de processus continus, ou continus à droite et limités à gauche, à valeurs dans le dual fort d'un espace de Fréchet nucléaire. Nous étendons ce critère au cas du dual fort d'une limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet nucléaires et, dans le cadre général des systèmes projectifs, proposé par A. S. Ustunel [*12*], au cas des processus à valeurs dans un espace de Fréchet nucléaire.

ABSTRACT. — I. Mitoma [*8*] has recently obtained a simple sufficient condition for the convergence in law of a sequence of continuous or right continuous and left limited processes taking their values in the strong dual of a nuclear Fréchet space. We extend this condition to the case of a strong dual of a strict inductive limit of a sequence of nuclear Fréchet spaces and, in the general setting of projective systems, proposed by A. S. Ustunel [*12*], to the case of nuclear Fréchet-valued processes.

INTRODUCTION

Les processus stochastiques en dimension infinie ont déjà fait l'objet de nombreux travaux. A. S. Ustunel [*12*] a montré l'intérêt d'étudier plus

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques - Vol. 20, 0246-0203 84/03/225/21/\$ 4,10/© Gauthier-Villars

particulièrement les processus à valeurs dans les espaces nucléaires ; les bonnes propriétés de ces espaces lui ont permis de développer un calcul stochastique dans le cadre général des systèmes projectifs de processus, qui s'applique aux divers espaces de distributions.

Différents travaux, notamment ceux sur les systèmes infinis de particules, par exemple [*3*] et [*11*], ont montré le besoin d'étudier la convergence en loi pour des suites de processus à valeurs dans ces espaces.

Récemment I. Mitoma [*8*] a démontré le résultat suivant : Soit (X^n) une suite de processus continus (resp. continus à droite et limités à gauche, en abrégé : càd-làg) à valeurs dans le dual fort d'un espace de Fréchet nucléaire E ; si pour tout φ de E, les lois des processus $\langle \varphi, X^n \rangle$ sur l'espace des trajectoires réelles continues (resp. càd-làg) forment une suite tendue et si pour tout $(t_1, \ldots, t_k)$ de $\mathbb{R}_+^k$, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ de E^k, la variable aléatoire k-dimensionnelle $(\langle \varphi_1, X_{t_1}^n \rangle, \ldots, \langle \varphi_k, X_{t_k}^n \rangle)$ converge en loi vers une probabilité sur $\mathbb{R}^k$, alors (X^n) converge en loi vers un processus X continu (resp. càd-làg).

Nous nous proposons d'étendre ce résultat à une plus large classe d'espaces nucléaires, de manière à couvrir à peu près toutes les situations pratiques qui seront rencontrées dans l'étude des systèmes infinis de particules, des équations aux dérivées partielles stochastiques ou des flots stochastiques.

Nous suivrons le plan suivant :

Dans le premier paragraphe nous introduisons les notations utilisées pour les espaces E et E′, les différents espaces de trajectoires et leur topologie, les systèmes projectifs de processus et leur loi, la compacité faible et la convergence en loi.

La difficulté se trouvant dans l'obtention d'un critère simple de compacité, nous consacrons le deuxième paragraphe à ce problème, pour les systèmes projectifs de lois.

Le troisième paragraphe traitera du cas où E′ est un espace de Fréchet nucléaire ; dans ce cas nous aurons l'existence et l'unicité de la limite d'un système projectif de probabilités et le critère de compacité pour une suite sera une conséquence du deuxième paragraphe.

Dans le quatrième paragraphe nous étendrons le résultat de I. Mitoma au cas où E est la limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet nucléaires, après avoir montré que, dans ce cas, il y a existence et unicité de la limite pour tout système projectif de processus.

Le dernier paragraphe est consacré à un exemple : l'étude des fluctuations de $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{X_t^i}$ autour de sa limite, où X_t^i est la position d'une particule i dans l'espace euclidien R^d.

I. NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES

1) L'espace E et son dual E'.

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe, réflexif, complet et nucléaire tel que son dual fort E' soit complet et nucléaire.

$\mathbf{U}(E')$ désignera une base de voisinages (de l'origine) de E' telle que : si $U \in \mathbf{U}(E')$, $E'(U)$, le complété de $E'/P_U^{-1}(0)$ pour la norme p_U, jauge de U, soit un espace de Hilbert séparable ; et il existe $V \in \mathbf{U}(E')$, $V \subset U$, tel que la projection canonique de $E'(V)$ sur $E'(U)$, notée $k(U, V)$, soit nucléaire (cf. [*9*]). Le dual de $E'(U)$ peut être identifié à l'espace de Hilbert séparable $E[U^0]$, sous-espace vectoriel de E, engendré par le polaire de U, muni de la norme p_{U^0} ; on notera $\langle\, ,\rangle_U$ le produit scalaire de cette dualité.

E' est isomorphe à un sous-espace de la limite projective $\{ E'(U), k(U) ; U \in \mathbf{U}(E') \}$ où $k(U)$ est la projection canonique de E' sur $E'(U)$. Nous noterons $i(V^0, U^0)$ (resp. $i(U^0)$) l'injection canonique de $E[U^0]$ dans $E[V^0]$ (resp. dans E).

2) Les systèmes projectifs de processus sur E'.

Dans toute la suite, on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathbf{F}, Q)$. L'ensemble des temps sera $[0, T]$, pour un nombre réel positif T, ou $[0, +\infty)$; si cet ensemble n'est pas précisé, les définitions et résultats sont valables dans tous les cas.

Nous rassemblons en une définition les notions introduites dans [*12*].

DÉFINITION I.1. — *Un ensemble* $X = \{ X^U, U \in \mathbf{U}(E') \}$, *où pour chaque* U *de* $\mathbf{U}(E')$, X^U *est un processus stochastique défini sur* $(\Omega, \mathbf{F}, Q)$, *à valeurs dans* $E'(U)$, *est appelé un système projectif de processus sur* E' *si pour tout* $V \subset U$, $V \in \mathbf{U}(E')$, *les processus* $k(U, V) \circ X^V$ *et* X^U *sont indistinguables.*

Nous dirons que X *admet une limite sur* E' *si il existe une application* X' *de* $[0, T]$ (*resp.* $[0, +\infty)$) $\times\, \Omega$ *dans* E' *telle que pour tout* t *et* $\varphi \in E$, *l'application* $\omega \to \langle \varphi, X_t'(\omega) \rangle$ *soit mesurable et pour tout* $U \in \mathbf{U}(E')$; $k(U) \circ X'$ *est une modification de* X^U.

Un système projectif X *est dit continu* (*resp. càd-làg*) *si pour tout* $U \in \mathbf{U}(E')$, X^U *est continu* (*resp. càd-làg*).

Au paragraphe III, nous verrons des conditions sur E pour que tout système projectif continu (resp. càd-làg) admette une limite continue (resp. càd-làg), unique dans ce cas-là.

3) Les différents espaces de trajectoires et leur topologie.

— Sur $[0, T]$:

$C^T_{\mathbb{R}}$ (resp. $C^T_{E'(U)}$) désignera l'espace des applications continues de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$ (resp. $E'(U)$), muni de la topologie de la convergence uniforme ; ceux sont des espaces de Banach séparables. $D^T_{\mathbb{R}}$ (resp. $D^T_{E'(U)}$) désignera l'espace des applications càd-làg de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$ (resp. $E'(U)$), muni de la topologie de Skorohod (cf. [*2*] et [*5*]) ; ceux sont des espaces métriques complets et séparables.

$C^T_{E'}$ (resp. $D^T_{E'}$) est l'espace des applications continues (resp. càd-làg) de $[0, T]$ dans E', muni de la topologie projective par rapport à la famille $\{ C^T_{E'(U)}, \bar{k}(U) ; \ U \in \mathbf{U}(E') \}$ (resp. $\{ D^T_{E'(U)}, \bar{k}(U) ; \ U \in \mathbf{U}(E') \}$) où $\bar{k}(U)$ désigne l'application de $C^T_{E'}$ (resp. $D^T_{E'}$) dans $C^T_{E'(U)}$ (resp. $D^T_{E'(U)}$) définie par : $\bar{k}(U)(x) = (k(U)(x(t)), t \in [0, T])$ pour tout $x \in C^T_{E'}$ (resp. $D^T_{E'}$). Il est facile de voir que $\bar{k}(U, V)$, définie similairement, est continue.

— Sur $[0, +\infty)$:

Nous munissons $C^\infty_{\mathbb{R}}$ (resp. $C^\infty_{E'(U)}$, $C^\infty_{E'}$) de la topologie projective par rapport à la famille $\{ C^N_{\mathbb{R}}, N \in \mathbb{N} \}$ (resp. $\{ C^N_{E'(U)}, \ N \in \mathbb{N} \}$, $\{ C^N_{E'}, N \in \mathbb{N} \}$).

$D^\infty_{\mathbb{R}}$ et $D^\infty_{E'(U)}$ sont munis de la topologie habituelle de Skohorod (cf. [*5*] et [*8*]).

$D^\infty_{E'}$ est muni de la topologie décrite par [*8*] R.2.2.

Tous les espaces que nous venons de définir seront toujours munis de leur tribu borélienne notée : $\mathbf{B}(.)$.

4) Loi d'un système projectif.

De manière générale si $(A, \mathbf{A})$ et $(B, \mathbf{B})$ sont deux espaces mesurables, h une application mesurable de A vers B, et m une mesure sur $(A, \mathbf{A})$, $h(m)$ désignera la mesure image de m par h, sur $(B, \mathbf{B})$.

DÉFINITION I.2. — *Un ensemble* $\mathbf{P} = \{ P^U, U \in \mathbf{U}(E') \}$, *où pour chaque* U *de* $\mathbf{U}(E')$, P^U *est une probabilité sur* $C_{E'(U)}$ (*resp.* $D_{E'(U)}$), *est appelé un sys-*

tème projectif de probabilités sur $C_{E'}$ *(resp.* $D_{E'}$*) si pour tout* $V \subset U, V \in \mathbf{U}(E')$, $\bar{k}(U, V)(P^V) = P^U$; *soit* $X = \{ X^U, U \in \mathbf{U}(E') \}$ *un système projectif continu (resp. càd-làg) de processus sur* E' ; *si* P^U *est la loi de* X^U *sur* $C_{E'(U)}$ (resp. $D_{E'(U)}$), *le système projectif de probabilités sur* $C_{E'}$ *(resp.* $D_{E'}$*)* $P = \{ P^U, U \in \mathbf{U}(E') \}$ *est appelé la loi de* X.

Nous dirons qu'un système de probabilités P *sur* $C_{E'}$ *(resp.* $D_{E'}$*) admet une limite si il existe une probabilité sur* $C_{E'}$ *(resp.* $D_{E'}$*), encore notée* P, *telle que :* $\bar{k}(U)(P) = P^U$ *pour tout* $U \in \mathbf{U}(E')$.

5) Compacité et convergence en loi.

Les espaces $C_{E'(U)}$ (resp. $D_{E'(U)}$) étant métrisables, séparables et complets, une famille de probabilités $\{ P_i \}_{i \in I}$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence faible (ou étroite), si et seulement si elle est tendue (i. e. elle vérifie la condition de Prohorov : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K$ compact de $C_{E'(U)}$ (resp. $D_{E'(U)}$) tel que $P_i(K) \geqslant 1 - \varepsilon$ pour tout $i \in I$) (cf. [*2*]).

DÉFINITION I.3. — *Nous dirons qu'une famille* $\{ P_i \}_{i \in I}$ *de systèmes projectifs de probabilités sur* $C_{E'}$ *(resp.* $D_{E'}$*) est tendue si pour tout* $U \in \mathbf{U}(E')$, *la famille* $\{ P_i^U \}_{i \in I}$ *de probabilités sur* $C_{E'(U)}$ *(resp.* $D_{E'(U)}$*) est tendue. Nous dirons qu'une suite* (X^n) *de systèmes projectifs continus (resp. càd-làg) de processus sur* E', *converge en loi, si pour tout* $U \in \mathbf{U}(E')$, (P_n^U) *converge étroitement sur* $C_{E'(U)}$ *(resp.* $D_{E'(U)}$*). (Si* P^U *désigne la limite, il est facile de voir que* $\{ P^U, U \in \mathbf{U}(E') \}$ *forme un système projectif de probabilités sur* $C_{E'}$ (resp. $D_{E'}$)).

6) Les différentes projections.

Pour $\varphi \in E$;

$$\pi^{\varphi} : C_{E'} \text{ (resp. } D_{E'}) \to C_{\mathbb{R}} \text{ (resp. } D_{\mathbb{R}}) \qquad x \mapsto \langle \varphi, x(.) \rangle$$

Pour $\varphi \in E$, $U \in \mathbf{U}(E')$ tels que $\varphi \in E[U^0]$;

$$\pi^{U,\varphi} : C_{E'(U)} \text{ (resp. } D_{E'(U)}) \to C_{\mathbb{R}} \text{ (resp. } D_{\mathbb{R}}) \qquad x \mapsto \langle \varphi, x(.) \rangle_U$$

On a : si $\varphi \in E[U^0] \cap E[V^0]$, soit $W \in \mathbf{U}(E')$, $W \subset U \cap V$:

$$\pi^{U,\varphi} \circ \bar{k}(U, W) = \pi^{V,\varphi} \circ \bar{k}(V, W) = \pi^{W,\varphi} \quad \text{sur} \quad C_{E'(W)} \quad (\text{resp. } D_{E'(W)}).$$

En particulier si P est un système projectif de probabilités, $\pi^{U,\varphi}(P^U)$, que nous noterons $P^{U,\varphi}$, ne dépend pas de U, pourvu que $\varphi \in E[U^0]$.

Pour $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \mathrm{E}$ et $t_1, \ldots, t_k$;

$$\pi_{t_1,\ldots,t_k}^{\varphi_1,\ldots,\varphi_k} : \mathrm{C}_{\mathrm{E}'} \,(\text{resp. } \mathrm{D}_{\mathrm{E}'}) \to \mathbb{R}^k$$
$$x \mapsto (\langle \varphi_1, x(t_1) \rangle, \ldots, \langle \varphi_k, x(t_k) \rangle)$$

Pour $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \mathrm{E}$, $\mathrm{U} \in \mathrm{U}(\mathrm{E}')$ tels que $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \mathrm{E}[\mathrm{U}^0]$;

$$\pi_{t_1,\ldots,t_k}^{\mathrm{U},\varphi_1,\ldots\varphi_k} : \mathrm{C}_{\mathrm{E}'(\mathrm{U})} \,(\text{resp. } \mathrm{D}_{\mathrm{E}'(\mathrm{U})}) \to \mathbb{R}^k$$
$$x \mapsto (\langle \varphi_1, x(t_1) \rangle_{\mathrm{U}}, \ldots, \langle \varphi_k, x(t_k) \rangle_{\mathrm{U}})$$

De même que précédemment, $\pi_{t_1,\ldots,t_k}^{\mathrm{U},\varphi_1,\ldots,\varphi_k}$ ne dépend pas de U, pourvu que $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \mathrm{E}[\mathrm{U}^0]$.

Toutes ces projections sont continues.

Le paragraphe suivant est consacré à un critère de compacité pour une suite de systèmes projectifs de probabilités et à la convergence en loi pour une suite de systèmes projectifs de processus.

II. LA COMPACITÉ POUR UNE SUITE DE SYSTÈMES PROJECTIFS DE PROBABILITÉS

Dans [*8*], I. Mitoma a astucieusement adapté une démonstration du type Théorème de Minlos (cf. [*1*] et [*6*]) aux processus à valeurs dans le dual d'un espace de Fréchet nucléaire. Nous utilisons ici, cette démonstration, dans la situation duale, pour les systèmes projectifs de probabilités.

Nous la développerons pour l'intervalle $[0, \mathrm{T}]$ et dans le cas continu, en mentionnant à la fin de ce paragraphe les extensions à $[0, +\infty)$ et au cas càd-làg. En particulier, $\sup_t$, $\mathrm{C}_{\mathbb{R}}$, $\mathrm{C}_{\mathrm{E}'(\mathrm{U})}$, $\mathrm{C}_{\mathrm{E}'}$ signifieront respectivement $\sup_{t \in [0,\mathrm{T}]}$, $\mathrm{C}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{C}_{\mathrm{E}'(\mathrm{U})}^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{C}_{\mathrm{E}'}^{\mathrm{T}}$.

THÉORÈME II.1. — *La suite* (P_n) *de systèmes projectifs sur* $\mathrm{C}_{\mathrm{E}'}$ *est tendue si et seulement si pour tout* $\varphi \in \mathrm{E}$ *et* $\mathrm{U} \in \mathrm{U}(\mathrm{E}')$ *tels que* $\varphi \in \mathrm{E}[\mathrm{U}^0]$, *la suite* $(\mathrm{P}_n^{\mathrm{U},\varphi})$ *de probabilités sur* $\mathrm{C}_{\mathbb{R}}$, *est tendue.*

Démonstration. — $\pi^{\mathrm{U},\varphi}$ étant continue, la condition est manifestement nécessaire.

La réciproque se fera en plusieurs étapes : nous allons tout d'abord montrer que le théorème est vrai en admettant pour un instant la proposition suivante :

PROPOSITION II.1. — *Pour tout* $V \in \mathrm{U}(E')$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $M < +\infty$ *tel que :*

$$P_n^V \{ x \in C_{E'(V)} / \sup_t p_V(x(t)) \leqslant M \} \geqslant 1 - \frac{1}{2}\varepsilon \qquad \text{pour tout } n.$$

Soit $U \in \mathrm{U}(E')$ et $\varepsilon > 0$; choisissons $V \subset U$, $V \in \mathrm{U}(E')$ tel que $k(U, V)$ soit nucléaire ; soit M le nombre réel positif de la proposition. Par hypothèse, (P_n^{V,φ_k}) est tendue sur $C_{\mathbb{R}}$ pour tout φ_k d'une suite dense dans $E[V^0]$. Il existe donc K_k compact de $C_{\mathbb{R}}$ tel que :

$$P_n^{V,\varphi_k}(K_k) = \pi^{V,\varphi_k}(P_n^V)(K_k) = P_n^V((\pi^{V,\varphi_k})^{-1}(K_k)) \geqslant 1 - 2^{-k-1}\varepsilon, \qquad \forall n$$

posons $H_k = (\pi^{V,\varphi_k})^{-1}(K_k)$, $H = \{ x \in C_{E'(V)} / \sup_t p_V(x(t)) \leqslant M \} \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} H_k \right)$ et $K = \bar{k}(U, V)(H)$.

Un calcul simple montre alors que $P_n^U(K) \geqslant P_n^V(H) \geqslant 1 - \varepsilon$ pour tout n. Nous allons montrer que K est relativement compact dans $C_{E'(U)}$.

On a : $K \subset \bar{k}(U, V)(\{ x \in C_{E'(V)} / \sup_t p_V(x(t)) \leqslant M \}) \cap \bar{k}(U, V)\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} H_k \right)$

et donc : $K_1 \overset{\text{def}}{=} \{ x(t) \in E'(U) ; x \in K \text{ et } t \in [0, T] \} \subset k(U, V)(\{ x(t) ; x \in C_{E'(V)}$ et $\sup_t p_V(x(t)) \leqslant M \})$ qui est l'image par l'application nucléaire $k(U, V)$ d'un ensemble borné dans $E'(V)$ et donc relativement compact dans $E'(U)$. K_1 est donc aussi relativement compact dans $E'(U)$, ce qui constitue la première partie du Théorème d'Arzelà-Ascoli appliqué à K sur $C_{E'(U)}$ (cf. [*2*]).

Il nous reste à montrer que $\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in K} W_\delta^U(x) = 0$ où W_δ^U est le module de continuité sur $C_{E'(U)}$ défini pour $0 < \delta < 1$ par :

$$W_\delta^U(x) = \sup_{|t-s|<\delta} P_U(x(t) - x(s)) = \sup_{|t-s|<\delta, \varphi \in U^0} | \langle \varphi, x(t) - x(s) \rangle_U | .$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \sup_{x \in K} W_\delta^U(x) = \sup_{x \in H} W_\delta^U(\bar{k}(U, V)(x)) &= \sup_{x \in H, |t-s|<\delta, \varphi \in U^0} | \langle \varphi, k(U, V)(x(t) - x(s)) \rangle_U | \\ &= \sup_{x \in H, |t-s|<\delta, \varphi \in U^0} | \langle \varphi, x(t) - x(s) \rangle_V | \\ &\leqslant \sup_{x \in H, |t-s|<\delta, \varphi \in V^0} | \langle \varphi, x(t) - x(s) \rangle_V | = \sup_{x \in H} W_\delta^V(x) . \end{aligned}$$

D'autre part pour tout $a > 0$, il existe $\varphi^* \in V^0$ tel que :

$$\sup_{x \in H, |t-s| < \delta} |\langle \varphi^*, x(t) - x(s) \rangle_V| \geqslant \sup_{x \in H} W_\delta^V(x) - \frac{1}{2} a .$$

L'ensemble$\{ x(t) - x(s),\ x \in H,\ |t-s| < \delta \} \subset H_1 - H_1$ est borné donc équicontinu dans E'(V). Il existe donc $\varphi_k \in V^0$ tel que :

$$\sup_{x \in H, |t-s| < \delta} |\langle \varphi_k, x(t) - x(s) \rangle_V| \geqslant \sup_{x \in H, |t-s| < \delta} |\langle \varphi^*, x(t) - x(s) \rangle_V| - \frac{1}{2} a$$

Finalement $H \subset H_k$ implique :

$$\sup_{x \in H_k, |t-s| < \delta} |\langle \varphi_k, x(t) - x(s) \rangle_V| \geqslant \sup_{x \in H} W_\delta^V(x) - a \quad \text{et} \quad H_k = (\pi^{V,\varphi_k})^{-1}(K_k)$$

implique : $$\sup_{f \in K_k, |t-s| < \delta} |f(t) - f(s)| \geqslant \sup_{x \in H} W_\delta^V(x) - a .$$

K_k étant compact dans $C_{\mathbb{R}}$, le Théorème d'Arzelà-Ascoli sur $C_{\mathbb{R}}$ donne :

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in H} W_\delta^V(x) \leqslant a, \qquad \text{et ce pour tout } a > 0 ;$$

soit :

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in K} W_\delta^U(x) \leqslant \lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in H} W_\delta^V(x) = 0 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous démontrons maintenant la proposition II.1 en admettant pour un instant le lemme suivant :

LEMME II.1. — $\forall b > 0$, $\forall V \in U(E')$, $\exists W \subset V$, $W \in U(E')$ *et* $r > 0$ *tels que* $k(U, V)$ *soit nucléaire et :*

$$\int_{C_{E'(V)}} \sup_t |1 - \exp(i \langle \varphi, x(t) \rangle_V)| \, dP_n^V \leqslant b + \frac{2}{r^2} (p_{W^0}(\varphi))^2 ,$$

pour tout n et tout φ *de* $E[V^0]$.

Soient $V \in U(E')$, $\varepsilon > 0$ et (φ_k) une suite dense dans $E[V^0]$.

Rappelons que : $p_V(x(t)) = \sup_{\varphi \in V^0} |\langle \varphi, x(t) \rangle_V| = \sup_{\varphi_k \in V^0} |\langle \varphi_k, x(t) \rangle_V|$.

Soit $\{ e_i^{V^0} \}$ une base orthonormale de $E[V^0]$; on a donc :

$$|\langle \varphi_k, x(t) \rangle_V| \leqslant p_{V^0}(\varphi_k) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j^{V^0}, x(t) \rangle_V^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et pour $\varphi_k \in V^0$, $p_{V^0}(\varphi_k) \leqslant 1$; donc :

$$P_n^V \{ x \in C_{E'(V)}/\sup_t p_V(x(t)) \leqslant M \}$$

$$\geqslant P_n^V \left\{ x \in C_{E'(V)}/\sup_t \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j^{V^0}, x(t) \rangle_V^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant M \right\}$$

$$= P_n^V \left\{ x \in C_{E'(V)}'/\sup_t \sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j^{V^0}, x(t) \rangle_V^2 \leqslant M^2 \right\}.$$

ε étant donné, $b = \dfrac{e^{\frac{1}{2}} - 1}{4e^{\frac{1}{2}}}$ est positif; nous lui associons le W et le r du lemme; $k(V, W)$ étant nucléaire on a :

$$\sum_{j=1}^{\infty} (p_{W^0}(e_j^{V^0}))^2 < +\infty .$$

Pour tout $C > 0$,

$$P_n^V \left\{ x \in C_{E'(V)}/\sup_t \sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j^{V^0}, x(t) \rangle_V^2 > C^2 \right\}$$

$$= \lim_{p \to +\infty} P_n^V \left\{ x \in C_{E'(V)}/\sup_t \sum_{j=1}^{p} \langle e_j^{V^0}, x(t) \rangle_V^2 > C^2 \right\}$$

$$\leqslant \lim_{p \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}} - 1} \int_{C_{E'(V)}} \sup_t \left(1 - \exp\left(- \frac{1}{2C^2} \sum_{j=1}^{p} \langle e_j^{V^0}, x(t) \rangle_V^2 \right) \right) dP_n^V$$

$\exp\left(- \dfrac{1}{2C^2} \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \langle e_j^{V^0}, x(t) \rangle_V^2 \right)$ étant la transformée de Fourier de la probabilité gaussienne sur $\mathbb{R}^p$:

$$\frac{C^p}{(2\pi)^{\frac{1}{2}p}} \exp\left(- \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p} C^2 y_j^2 \right) dy_1 \dots dy_p$$

au point $(\langle e_1^{V^0}, x(t) \rangle_V, \dots, \langle e_p^{V^0}, x(t) \rangle_V)$, la dernière quantité est égale à :

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}} - 1} \int_{C_{E'(V)}} \sup_t \left(1 - \int_{R^p} \exp\left(i \sum_{j=1}^{p} y_j \langle e_j^{V^0}, x(t) \rangle_V \right) \right.$$

$$\left. \frac{C^p}{(2\pi)^{\frac{1}{2}p}} \exp\left(- \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p} C^2 y_j^2 \right) dy_1 \dots dy_p \right) dP_n^V$$

$$\leqslant \lim_{p\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}-1} \int_{C_{E'(V)}} \int_{R^p} \sup_t \left| 1 - \exp\left(i \left\langle \sum_{j=1}^{p} y_j e_j^{V^0}, x(t) \right\rangle_V \right) \right|$$

$$\frac{C^p}{(2\pi)^{\frac{1}{2}p}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p} C^2 y_j^2 \right) dy_1 \ldots dy_p \cdot dP_n^V$$

et grâce au Théorème de Fubini et à la majoration du lemme :

$$\leqslant \lim_{p\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}-1} \int_{R^p} \left(b + \frac{2}{r^2} \left(p_{W^0}\left(\sum_{j=1}^{p} y_j e_j^{V^0} \right) \right)^2 \right) \frac{C^p}{(2\pi)^{\frac{1}{2}p}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p} C^2 y_j^2 \right) \cdot dy_1 \ldots dy_p$$

$$\leqslant \lim_{p\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}-1} \left(b + \frac{2}{r^2} \sum_{j=1}^{p} \left(p_{W^0}(e_j^{V^0}) \right)^2 \int_{R^p} \left(\sum_{j=1}^{p} y_j^2 \right) \frac{C^p}{(2\pi)^{\frac{1}{2}p}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p} C^2 y_j^2 \right) dy_1 \ldots dy_p \right)$$

$$= \lim_{p\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}-1} \left(b + \frac{2}{C^2 r^2} \sum_{j=1}^{p} (p_{W^0}(e_j^{V^0}))^2 \right)$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}-1} \left(b + \frac{2}{C^2 r^2} \sum_{j=1}^{\infty} (p_{W^0}(e_j^{V^0}))^2 \right)$$

Choisissons M tel que : $\frac{2}{M^2 r^2} \sum_{j=1}^{\infty} (p_{W^0}(e_j^{V^0}))^2 < b$; compte tenu de la valeur de b et en passant à la probabilité du complémentaire, il vient :

$P_n^V \{ x \in C_{E'(V)} / \sup_t p_V(x(t)) \leqslant M \} \geqslant 1 - \frac{1}{2}\varepsilon$ pour tout n. C. Q. F. D.

Nous en arrivons finalement à la démonstration du lemme II.1. Soient $b > 0$ et $V \in U(E')$; choisissons $W \in U(E')$, $W \subset V$ tel que $k(V, W)$ soit nucléaire ; pour $\varphi \in E[V^0] \subset E[W^0]$ on a :

$$\int_{C_{E'(V)}} \sup_t |1 - \exp(i \langle \varphi, x(t) \rangle_V)| \, dP_n^V = \int_{C_{E'(W)}} \sup_t |1 - \exp(i \langle \varphi, x(t) \rangle_W)| \, dP_n^W.$$

Suivant toujours [8], définissons, pour $\varphi \in [W_0]$:

$$M(\varphi) = \sup_n \int_{C_{E'(W)}} \frac{\sup_t |\langle \varphi, x(t) \rangle_W|}{1 + \sup_t |\langle \varphi, x(t) \rangle_W|} \, dP_n^W$$

M a les propriétés suivantes :

1) $M(\varphi) \geqslant 0$ et $M(\varphi) = M(-\varphi)$ $\quad \forall \varphi \in E[W^0]$

2) $M(\varphi + \varphi') \leqslant M(\varphi) + M(\varphi')$ $\quad \forall \varphi, \varphi' \in E[W^0]$

3) M est s. c. i. sur $E[W^0]$

4) $\lim_{m \to +\infty} M(\varphi/m) = 0$ $\quad \forall \varphi \in E[W^0]$

En effet, 1) et 2) sont évidentes et :

3) on montre en utilisant le lemme de Fatou que pour toute suite (φ_k) convergente vers φ dans $E[W^0]$, $\liminf_{k \to +\infty} M(\varphi_k) \geqslant M(\varphi)$. M est séquentiellement s. c. i. sur l'espace de Hilbert séparable $E[W^0]$, et donc s. c. i.

4) Posons : $x^*(\varphi) = \sup_t |\langle \varphi, x(t) \rangle_W|$.

Puisque pour $\varphi \in E[W^0]$, $(P_n^{W,\varphi})$ est tendue sur $C_{\mathbb{R}}$, il existe, $\forall \eta > 0$ un réel a_φ tel que $P_n^{W,\varphi}\{ f \in C_{\mathbb{R}} / \sup_t f(t) > a_\varphi \} \leqslant \eta$ pour tout n, donc $P_n^W\{ x \in C_{E'(W)} / x^*(\varphi) > a_\varphi \} \leqslant \eta$ pour tout n; soit m_0 un entier tel que $m_0^{\frac{1}{2}} \geqslant a_\varphi$; alors pour $m > m_0$:

$$M(\varphi/m) = \sup_n \left(\int_{\{x \in C_{E'(W)}, x^*(\varphi) \leqslant m^{\frac{1}{2}}\}} \frac{x^*(\varphi/m)}{1 + x^*(\varphi/m)} dP_n^W + \int_{\{x \in C_{E'(W)}, x^*(\varphi) > m^{\frac{1}{2}}\}} \frac{x^*(\varphi/m)}{1 + x^*(\varphi/m)} dP_n^W \right)$$

$$\leqslant \sup_n \left(\frac{m^{\frac{1}{2}}}{m + m^{\frac{1}{2}}} P_n^W\{ x \in C_{E'(W)} / x^*(\varphi) \leqslant m^{\frac{1}{2}} \} + P_n^W\{ x \in C_{E'(W)} / x^*(\varphi) > m^{\frac{1}{2}} \} \right)$$

$$\leqslant \sup_n \left(\frac{m^{\frac{1}{2}}}{m + m^{\frac{1}{2}}} + \eta \right) \leqslant m^{-\frac{1}{2}} + \eta$$

et donc $\limsup_{m \to +\infty} M(\varphi/m) \leqslant \eta$ pour tout $\eta > 0$, soit : $\lim_{m \to +\infty} M(\varphi/m) = 0$.

Par [*13*], p. 386, M est continue sur $E[W^0]$.

Soit $c_1 > 0$ tel que $|1 - \exp(is)| \leqslant \frac{1}{2} b$ dès que $|s| \leqslant c_1$.

Posons $c_2 = \min \left\{ c_1, \frac{-1 + (1 + b)^{\frac{1}{2}}}{2} \right\}$.

Puisque M est continue en 0 sur $E[W^0]$, il existe $r > 0$ tel que si $\varphi \in E[W^0]$ et $p_{W^0}(\varphi) \leqslant r$ alors $M(\varphi) \leqslant c_2^2$:

$$\sup_n P_n^W\{ x \in C_{E'(W)} / x^*(\varphi) \geqslant c_2 \} = \sup_n P_n^W \left\{ x \in C_{E'(W)} / \frac{x^*(\varphi)}{1 + x^*(\varphi)} \geqslant \frac{c_2}{1 + c_2} \right\}$$

$$\leqslant \sup_n \frac{1 + c_2}{c_2} \int_{C_{E'(W)}} \frac{x^*(\varphi)}{1 + x^*(\varphi)} dP_n^W = \frac{1 + c_2}{c_2} M(\varphi) \leqslant (1 + c_2) c_2 \leqslant \frac{b}{4}.$$

Toujours si $\varphi \in r\mathrm{W}^0$,

$$\sup_n \int_{\mathrm{C}_{\mathrm{E}'(\mathrm{W})}} \sup_t |1 - \exp(i\langle \varphi, x(t)\rangle_{\mathrm{W}})| \, d\mathrm{P}_n^{\mathrm{W}}$$

$$\leqslant \sup_n \left(\frac{b}{2}\mathrm{P}_n^{\mathrm{W}}\{x \in \mathrm{C}_{\mathrm{E}'(\mathrm{W})}/x^*(\varphi) < c_2\}\right) + \sup_n (2\mathrm{P}_n^{\mathrm{W}}\{x \in \mathrm{C}_{\mathrm{E}'(\mathrm{W})}/x^*(\varphi) \geqslant c_2\})$$

$$\leqslant \frac{b}{2} + 2\frac{b}{4} = b\,;$$

d'autre part pour tout φ de $\mathrm{E}[\mathrm{W}^0]$, $\sup_t |1-\exp(i\langle \varphi, x(t)\rangle_{\mathrm{W}})| \leqslant 2$ et puisque si φ n'appartient pas à $r\mathrm{W}^0$, on a $p_{\mathrm{W}^0}(\varphi) > r$, alors :

$$\sup_n \int_{\mathrm{C}_{\mathrm{E}'(\mathrm{W})}} \sup_t |1-\exp(i\langle \varphi, x(t)\rangle_{\mathrm{W}})| \, d\mathrm{P}_n^{\mathrm{W}} \leqslant b + \frac{2}{r^2}(p_{\mathrm{W}^0}(\varphi))^2$$

et donc finalement :

$$\sup_n \int_{\mathrm{C}_{\mathrm{E}'(\mathrm{W})}} \sup_t |1-\exp(i\langle \varphi, x(t)\rangle_{\mathrm{W}})| \, d\mathrm{P}_n^{\mathrm{W}} \leqslant b + \frac{2}{r^2}(p_{\mathrm{W}^0}(\varphi))^2$$

pour tout φ de $\mathrm{E}[\mathrm{W}^0]$.

En particulier pour $\varphi \in \mathrm{E}[\mathrm{V}^0]$ et grâce à l'égalité mentionnée au début :

$$\sup_n \int_{\mathrm{C}_{\mathrm{E}'(\mathrm{V})}} \sup_t |1-\exp(i\langle \varphi, x(t)\rangle_{\mathrm{V}})| \, d\mathrm{P}_n^{\mathrm{V}} \leqslant b + \frac{2}{r^2}(p_{\mathrm{W}^0}(\varphi))^2$$

C. Q. F. D.

L'extension du Théorème II.1 à $\mathrm{C}_{\mathrm{E}'}^{\infty}$ se fait sans difficulté, en projetant sur les $\mathrm{C}_{\mathrm{E}'(\mathrm{U})}^{\mathrm{N}}$, N entier, et en appliquant [*6*] Proposition 3 à la suite $(\mathrm{P}_n^{\mathrm{U}})$.

L'extension à $\mathrm{D}_{\mathrm{E}'}^{\mathrm{T}}$ nécessite de remplacer, dans la première partie de la démonstration, le module de continuité $\mathrm{W}_\delta^{\mathrm{U}}$ par :

$$\mathrm{W}'^{\mathrm{U}}_\delta(x) = \inf_{\{t_i\}} \max_i \sup_{t_i \leqslant s < t < t_{i+1}} p_{\mathrm{U}}(x(t) - x(s)),$$

pour $\{t_i\} = (0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = \mathrm{T})$, telle que $\inf_i |t_{i+1} - t_i| \geqslant \delta$ et $x \in \mathrm{D}_{\mathrm{E}'(\mathrm{U})}^{\mathrm{T}}$ (cf. [*2*], [*5*]).

Le cas $\mathrm{D}_{\mathrm{E}'}^{\infty}$ est encore obtenu par projection sur les $\mathrm{D}_{\mathrm{E}'(\mathrm{U})}^{\mathrm{N}}$, N entier.

COROLLAIRE II.1. — *Soit* (X^n) *une suite de systèmes projectifs continus (resp. càd-làg) de processus sur* E'. *Supposons que pour tout* $\varphi \in \mathrm{E}$ *et* $\mathrm{U} \in \mathbf{U}(\mathrm{E}')$ *tels que* $\varphi \in \mathrm{E}[\mathrm{U}^0]$, *les lois des* $\langle \varphi, \mathrm{X}^{n,\mathrm{U}}\rangle_{\mathrm{U}}$ *forment une suite tendue sur* $\mathrm{C}_{\mathbb{R}}$ *(resp.* $\mathrm{D}_{\mathbb{R}}$*) et que pour tout* $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, $\mathrm{U} \in \mathbf{U}(\mathrm{E}')$ *tels que* $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \mathrm{E}[\mathrm{U}^0]$, $t_1, \ldots, t_k$, *on ait :* $(\langle \varphi_1, \mathrm{X}_{t_1}^{n,\mathrm{U}}\rangle_{\mathrm{U}}, \ldots, \langle \varphi_k, \mathrm{X}_{t_k}^{n,\mathrm{U}}\rangle_{\mathrm{U}})$ *converge en loi sur* $\mathbb{R}^k$ *; alors* (X^n) *converge en loi, au sens de la définition* I.3.

Démonstration. — Grâce au théorème II.1, pour tout $U \in \mathbf{U}(E')$, la suite (P_n^U) est tendue sur $C_{E'(U)}$ (resp. $D_{E'(U)}$). La convergence de $\pi_{t_1,\dots,t_k}^{U,\varphi_1,\dots,\varphi_k}(P_n^U)$ vers une probabilité sur $\mathbb{R}^k$ implique alors la convergence étroite de (P_n^U) vers une limite unique P^U, probabilité sur $C_{E'(U)}$ (resp. $D_{E'(U)}$), $E'(U)$ étant ici un espace de Hilbert séparable.

$\{ P^U, U \in \mathbf{U}(E') \}$ est la limite en loi de la suite (X^n).

III. E′ EST UN ESPACE DE FRÉCHET NUCLÉAIRE

Dans ce cas, $\mathbf{U}(E')$ peut être choisi égal à une suite décroissante de voisinages et par la Proposition 1 de [*6*], tout système projectif $\{ P^U, U \in \mathbf{U}(E') \}$ sur $C_{E'}$ (resp. $D_{E'}$) admet une limite unique P, qui est donc une probabilité sur $C_{E'}$ (resp. $D_{E'}$), vérifiant : $\bar{k}(U)(P) = P^U$ pour tout $U \in \mathbf{U}(E')$.

$C_{E'}$(resp. $D_{E'}$) étant, dans ce cas, métrisable, complet et séparable (E′ est lui-même séparable), il y a équivalence entre le fait qu'une suite de probabilités soit tendue et le fait qu'elle soit relativement compacte pour la topologie étroite.

Par la Proposition 3 de [*6*], une suite de systèmes projectifs $(\{ P_n^U, U \in \mathbf{U}(E') \})_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue (au sens de la définition I.3) si et seulement si la suite des limites (P_n) est tendue sur $C_{E'}$ (resp. $D_{E'}$) au sens usuel.

PROPOSITION III.1. — *Une suite* (P_n) *de probabilités sur* $C_{E'}$ (*resp.* $D_{E'}$) *est tendue si et seulement si pour tout* φ *de* E, *la suite* $(\pi^{\varphi}(P_n) = P_n^{\varphi})$ *est tendue sur* $C_{\mathbb{R}}$ (*resp.* $D_{\mathbb{R}}$) (*On pourrait exprimer la condition par :* « (P_n) *est scalairement tendue* »).

Démonstration. — π^{φ} étant continue pour tout φ, la condition est manifestement nécessaire.

Pour tout $\varphi \in E$ et tout $U \in \mathbf{U}(E')$ tels que $\varphi \in E[U^0]$:

$$(\pi^{U,\varphi} \circ \bar{k}(U))(x) = \langle \varphi, k(U)(x(\cdot)) \rangle_U = \langle i(U^0)(\varphi), x(\cdot) \rangle = \langle \varphi, x(\cdot) \rangle = \pi^{\varphi}(x)$$

pour tout $x \in C_{E'}$ (resp. $D_{E'}$).

Donc $P_n^{U,\varphi} = \pi^{U,\varphi}(P_n^U) = (\pi^{U,\varphi} \circ \bar{k}(U))(P_n) = \pi^{\varphi}(P_n) = P_n^{\varphi}$. Par hypothèse, (P_n^{φ}), et donc $(P_n^{U,\varphi})$, est tendue sur $C_{\mathbb{R}}$ (resp. $D_{\mathbb{R}}$). Le théorème II.1 implique alors que la suite $(\{ P_n^U, U \in \mathbf{U}(E') \})$ est tendue au sens des systèmes projectifs et donc que la suite (P_n) est tendue sur $C_{E'}$ (resp. $D_{E'}$).

En termes de systèmes projectifs, nous obtenons le critère de convergence suivant :

COROLLAIRE III.1. — *Les hypothèses sur la suite* (X^n) *de systèmes projectifs de processus sur* E′ *étant celles du corollaire* II.1, (X^n) *converge en loi vers le processus* X *défini sur la base stochastique* $(C_{E'}, \mathbf{B}(C_{E'}), P)$ (resp. $(D_{E'}, \mathbf{B}(E'), P)$) *par* $X_t(\omega) = \omega(t)$, *où* P *est la limite de la suite*

$$(P_n = \lim_{U} \{ P_n^U, U \in \mathbf{U}(E') \} .$$

IV. E EST LA LIMITE INDUCTIVE STRICTE D'UNE SUITE (E_n) D'ESPACES DE FRÉCHET NUCLÉAIRES

Nous démontrons tout d'abord l'existence d'une limite continue (resp. càd-làg) pour les systèmes projectifs continus (resp. càd-làg) de processus sur E′.

PROPOSITION IV.1. — *Soit* E *un espace de Fréchet nucléaire ou la limite inductive stricte d'une suite* $(E_n^{\bullet})$ *de tels espaces. Tout système projectif continu* (*resp. càd-làg*) $X = \{ X^U, U \in \mathbf{U}(E') \}$ *de processus sur* E′, *admet un processus limite continu* (*resp. càd-làg*) *à valeurs dans* E′, *unique à l'indistinguabilité près, que nous noterons encore* X.

Démonstration. — Dans tous les cas, par [*12*], Lemme I.1, il existe un processus limite X′ (tel que pour tout $U \in \mathbf{U}(E')$, $k(U) \circ X'$ soit une modification de X^U).

Supposons tout d'abord E Fréchet nucléaire : pour tout $t \geqslant 0$ et $\varphi \in E[U^0]$, $\langle \varphi, X'_t \rangle = \langle i(U^0)(\varphi), X'_t \rangle = \langle \varphi, k(U)(X'_t) \rangle_U = \langle \varphi, X_t^U \rangle_U$ Q. p. s.; X^U étant continu (resp. càd-làg), $\langle \varphi, X' \rangle$ admet une modification continue (resp. càd-làg). Par [*7*], Théorème 1 (resp. Théorème 2), X′ admet une modification continue (resp. càd-làg) X.

Supposons maintenant E limite inductive stricte d'une suite (E_n) d'espaces de Fréchet nucléaires : E est isomorphe au quotient de la somme directe ΣE_n par un sous-espace vectoriel fermé H (cf. [*9*] et [*12*]); désignons par k la projection associée et par inj_n, l'injection de E_n dans ΣE_n. E′ est le sous-espace vectoriel H^0 du produit $\Pi E'_n$ et nous noterons proj_n la projection de $\Pi E'_n$ sur E'_n.

Pour chaque $t \geqslant 0$, la restriction de X'_t à E_n engendre une variable aléatoire $X_t'^n$ sur E'_n et $\mathrm{proj}_n X'_t = X_t'^n$ Q. p. s.

Soit $\varphi \in E_n$: $\langle \varphi, X_t'^n \rangle \overset{\text{p.s.}}{=} \langle \varphi, \mathrm{proj}_n X'_t \rangle = \langle \mathrm{inj}_n \varphi, X'_t \rangle = \langle k(\mathrm{inj}_n \varphi), X'_t \rangle$; soit $U \in \mathbf{U}(E')$ tel que $k(\mathrm{inj}_n \varphi) \in E[U^0]$:

$$\langle k(\mathrm{inj}_n \varphi), X'_t \rangle = \langle k(\mathrm{inj}_n \varphi), k(U)(X'_t) \rangle_U \overset{\text{p.s.}}{=} \langle k(\mathrm{inj}_n \varphi), X_t^U \rangle_U$$

X^U étant continu (resp. càd-làg), $\langle \varphi, X^{\cdot n} \rangle$ admet une modification continue (resp. càd-làg) que nous noterons X^n. En dehors d'un ensemble négligeable Ω_1, définissons X_q sur E', pour tout rationnel q, tel que : $X'_q = X_q$ et $\text{proj}_n X_q = X^n_q$ pour tout n. On définit X_t pour tout t par continuité (resp. continuité à droite) sur $\Pi E'_n$ et nous avons : $\text{proj}_n X_t(\omega) = X^n_t(\omega)$ pour tout $t \geqslant 0$ et $\omega \in \Omega \backslash \Omega_1$; X est donc une modification continue (resp. càd-làg) de X'.

Pour tout ω de $\Omega \backslash \Omega_1$, $X_q(\omega) = X'_q(\omega) \in E' = H^0$ pour tout q rationnel ; H^0 étant fermé dans $\Pi E'_n$ et X continu (resp. càd-làg), $X_t(\omega) \in E'$ pour tout $t \geqslant 0$, ce qui prouve que X est bien à valeurs dans E'. C. Q. F. D.

Dans ce paragraphe, les systèmes projectifs continus (resp. càd-làg) de processus sur E' seront donc remplacés par une modification continue (resp. càd-làg) de leur limite.

Le résultat suivant est l'extension du Théorème 3.1 (resp. 4.1) de [*8*], au cas où E est la limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet nucléaires.

THÉORÈME IV.1. — *Soit* (P_n) *une suite de probabilités sur* $C_{E'}$ (*resp.* $D_{E'}$) *telle que pour tout* $\varphi \in E$, *la suite* $(P^\varphi_n = \pi^\varphi(P_n))$ *de probabilités sur* $C_{\mathbb{R}}$ (*resp.* $D_{\mathbb{R}}$) *soit tendue* ; (P_n) *est alors tendue sur* $C_{E'}$ (*resp.* $D_{E'}$).

Démonstration. — Il suffit de réécrire la démonstration de [*8*], en utilisant la base de voisinages **U**(E) (définie comme **U**(E')) à la place d'une suite croissante de semi-normes hilbertiennes, ce que nous ne ferons que partiellement en insistant sur les difficultés supplémentaires. Comme au paragraphe II, nous nous plaçons dans le cas continu et à horizon borné [0, T], sans mentionner T dans les calculs.

On montre tout d'abord que le théorème est vrai, modulo la proposition suivante :

PROPOSITION IV.2. —

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists V \in \mathbf{U}(E)$$

$$\text{et} \quad M < +\infty / P_n\{ x \in C_{E'} / \sup_t p_{V^0}(x(t)) \leqslant M \} \geqslant 1 - \frac{1}{2}\varepsilon \qquad \text{pour tout } n.$$

Soit (φ_k) une suite dense dans E, qui est encore séparable. Pour tout k, $(P^{\varphi_k}_n)$ est tendue sur $C_{\mathbb{R}}$, il existe donc un compact de $C_{\mathbb{R}}$, K_k, tel que $P^{\varphi_k}_n(K_k) \geqslant 1 - 2^{-k-1}\varepsilon$ pour tout n. Posons $B_k = (\pi^{\varphi_k})^{-1}(K_k)$ et :

$$B = \{ x \in C_{E'} / \sup_t p_{V^0}(x(t)) \leqslant M \} \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \right).$$

On a : $P_n(B) \geqslant 1 - \varepsilon$ pour tout n.

Soit $W \in \mathbf{U}(E)$, $W \subset V$ tel que $i(W^0, V^0)$ soit nucléaire.

B est borné dans $C_{E'[V^0]}$ et donc $B_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{ x(t) ; x \in B, t \in [0, T] \}$ est alors borné dans $E'[V^0]$ et donc relativement compact dans $E'[W^0]$. Comme au paragraphe II, $\{ x(t) - x(s), x \in B, | t - s | < \delta \} \subset B_1 - B_1$ est borné dans E' et donc équicontinu, ce qui permet de montrer que $\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in B} W_\delta^{V^0}(x) = 0$, et puisque $V^0 \subset W^0$, $\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in B} W_\delta^{W^0}(x) = 0$. Le Théorème d'Arzelà-Ascoli appliqué à B sur $C_{E'[W^0]}$, montre que B est relativement compact dans $C_{E'[W^0]}$ et par l'injection continue $i(W^0)$, B est relativement compact dans $C_{E'}$.

Remarque. — Cette démonstration montre aussi le fait suivant qui nous sera utile par la suite : si K est un compact de $C_{E'}$, il existe $U \in \mathbf{U}(E)$ tel que K soit compact dans $C_{E'[U^0]}$.

La démonstration de la proposition IV.2 se fait en supposant pour un instant le lemme suivant (extension du lemme 3.3 de [*8*]) :

LEMME IV.1. —

$$\forall b > 0, \quad \exists U \in \mathbf{U}(E) \Big/ \int_{C_{E'}} \sup_t | 1 - \exp(i \langle \varphi, x(t) \rangle) | \, dP_n \leqslant b + 2(p_U(\varphi))^2,$$

pour tout $\varphi \in E$ *et tout* n.

$\varepsilon > 0$ étant donné, on suit la démonstration de [*8*] : on pose $b = \dfrac{e^{\frac{1}{2}} - 1}{8e^{\frac{1}{2}}}$ auquel on associe le voisinage U du lemme ; E étant nucléaire, on peut trouver un voisinage V, $V \subset U$, et une base orthonormale $\{ e_j^V \}$ de E(V) telle que : $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} (p_U(e_j^V))^2 < +\infty$. Chaque φ_k s'écrit alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} a_j^k e_j^V + f_V^k$ avec $p_V(f_V^k) = 0$. Puisque pour $\varphi_k \in V$ on a : $p_V(\varphi_k) \leqslant 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} | \langle \varphi_k, x(t) \rangle | &\leqslant p_V(\varphi_k) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j^V, x(t) \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}} + | \langle f_V^k, x(t) \rangle | \\ &\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j^V, x(t) \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}} + | \langle f_V^k, x(t) \rangle |, \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} &P_n \{ x \in C_{E'} / \sup_t p_{V^0}(x(t)) \leqslant C \} \\ &= P_n \{ x \in C_{E'} / \sup_t \sup_{\varphi \in V} | \langle \varphi, x(t) \rangle | \leqslant C \} \\ &= P_n \{ x \in C_{E'} / \sup_t \sup_{\varphi_k \in V} | \langle \varphi_k, x(t) \rangle | \leqslant C \} \end{aligned}$$

$$\geqslant \mathrm{P}_n\left(\left\{ x \in \mathrm{C}_{\mathrm{E}'}/\sup_t \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j^{\mathrm{V}}, x(t) \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \mathrm{C} \right\} \right.$$
$$\left. \cap \left\{ x \in \mathrm{C}_{\mathrm{E}'}/\sup_t \sup_{\varphi_k \in \mathrm{V}} | \langle f_{\mathrm{V}}^k, x(t) \rangle | = 0 \right\} \right)$$
$$= \mathrm{P}_n\left(\left\{ x \in \mathrm{C}_{\mathrm{E}'}/\sup_t \sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j^{\mathrm{V}}, x(t) \rangle^2 \leqslant \mathrm{C}^2 \right\} \right.$$
$$\left. \cap \left\{ x \in \mathrm{C}_{\mathrm{E}'}/\sup_t \sum_{k=1}^{\infty} \langle f_{\mathrm{V}}^k, x(t) \rangle^2 = 0 \right\} \right).$$

On applique alors la méthode de [*8*], développée au paragraphe II dans la situation duale, pour obtenir, grâce à la majoration du lemme, les estimations suivantes :

$$\mathrm{P}_n \left\{ x \in \mathrm{C}_{\mathrm{E}'}/\sup_t \sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j^{\mathrm{V}}, x(t) \rangle^2 > \mathrm{M}^2 \right\} < \frac{\varepsilon}{4}$$

et

$$\mathrm{P}_n \left\{ x \in \mathrm{C}_{\mathrm{E}'}/\sup_t \sum_{k=1}^{\infty} \langle f_{\mathrm{V}}^k, x(t) \rangle^2 > 0 \right\} < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{pour tout } n,$$

où M aura été choisi tel que : $\frac{2}{\mathrm{M}^2} \sum_{j=1}^{\infty} (p_{\mathrm{U}}(e_j^{\mathrm{V}}))^2 < b.$

En revenant aux complémentaires, on obtient la proposition IV.2.

La démonstration du lemme IV.1 présente une difficulté supplémentaire. Nous noterons (E_m), la suite de sous-espaces de E, telle que chaque E_m soit un espace de Fréchet nucléaire et E soit la limite inductive stricte de (E_m).

On introduit encore la fonctionnelle M, définie sur E par :

$$\mathrm{M}(\varphi) = \sup_n \int_{\mathrm{C}_{\mathrm{E}'}} \frac{\sup_t | \langle \varphi, x(t) \rangle |}{1 + \sup_t | \langle \varphi, x(t) \rangle |} d\mathrm{P}_n$$

M a les propriétés suivantes :

1) $\mathrm{M}(\varphi) \geqslant 0$ et $\mathrm{M}(\varphi) = \mathrm{M}(-\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathrm{E}$
2) $\mathrm{M}(\varphi + \varphi') \leqslant \mathrm{M}(\varphi) + \mathrm{M}(\varphi') \quad \forall \varphi, \varphi' \in \mathrm{E}$
3) La restriction de M à chaque E_m, notée M_m, est s. c. i. sur E_m.
4) $\lim_{p \to +\infty} \mathrm{M}(\varphi/p) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathrm{E}.$

Ces propriétés s'obtiennent comme dans [*8*]; pour 3), sur E, nous n'avons que la semi-continuité inférieure séquentielle et il n'est plus possible d'affirmer que M est continue sur E; toutefois M_m est continue sur E_m pour chaque m.

Soit $c_1 > 0$ tel que $| 1 - \exp(is) | \leqslant \frac{1}{2} b$ dès que $| s | \leqslant c_1$.

Posons $c_2 = \min \left\{ c_1, \frac{-1 + (1+b)^{\frac{1}{2}}}{2} \right\}$.

Puisque M_m est continue en 0, il existe U_m, un voisinage absolument convexe de E_m tel que : $M_m(\varphi) \leqslant 2^{-m} c_2^2$ dès que $\varphi \in U_m$. U^*, l'enveloppe convexe absolue de $\bigcup_{m=1}^{\infty} U_m$ est un voisinage de l'origine de E et : tout φ de U^* s'écrit $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i$, où $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m$ et $\sum_{i=1}^{k} | \lambda_i | \leqslant 1$.

En regroupant correctement les termes, les U_m étant absolument convexes, on peut écrire : $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i = \sum_{j=1}^{l} \varphi'_j$, où les φ'_j appartiennent à des U_{m_j} distincts; on obtient alors :

$$M\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i\right) = M\left(\sum_{j=1}^{l} \varphi'_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{l} M(\varphi'_j) \leqslant c_2^2 \sum_{j=1}^{l} 2^{-m_j} \leqslant c_2^2 \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} = c_2^2 .$$

Donc $M(\varphi) \leqslant c_2^2$ dès que $\varphi \in U^*$; il nous suffit alors de choisir $U \in \mathcal{U}(E)$, tel que $U \subset U^*$ pour obtenir $M(\varphi) \leqslant c_2^2$ dès que $\varphi \in U$. La démonstration se termine comme dans [*8*], ou comme au paragraphe I dans la situation duale, en remplaçant rW^0 par U.

La généralisation du Théorème IV.1 à $C_{E'}^{\infty}$ d'une part et à $D_{E'}^{T}$, $D_{E'}^{\infty}$ d'autre part, se fait sans difficulté par limite projective pour passer de T à $+\infty$ et en utilisant le module de continuité adéquat dans le cas càd-làg.

COROLLAIRE IV.1. — *Soit* (X^n) *une suite de processus continus (resp. càd-làg) à valeurs dans* E'. *Supposons que pour tout* $\varphi \in E$, *les lois* P_n^{φ} *des processus réels* $\langle \varphi, X^n \rangle$ *forment une suite tendue sur* $C_{\mathbb{R}}$ *(resp.* $D_{\mathbb{R}}$*) et que pour tout* $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ *de* E, $t_1, \ldots, t_k$, *on ait :* $(\langle \varphi_1, X_{t_1}^n \rangle, \ldots, \langle \varphi_k, X_{t_k}^n \rangle)$

converge en loi sur $\mathbb{R}^k$; *alors* (X^n) *converge en loi vers un processus continu (resp. càd-làg)* X, *à valeurs dans* E′.

La démonstration de ce corollaire est, comme dans [*8*], une conséquence facile des trois faits suivants :

1) $C_{E'}$ (resp. $D_{E'}$) est complètement régulier.
2) Les compacts de $C_{E'}$ (resp. $D_{E'}$) sont métrisables.
3) $\mathbf{B}(C_{E'})$ (resp. $\mathbf{B}(D_{E'})$) est engendrée par les cylindres de la forme :

$$\{ x \in C_{E'} \text{ (resp. } D_{E'})/(\langle \varphi_1, x(t_1) \rangle, \ldots, \langle \varphi_k, x(t_k) \rangle) \in B, \quad B \in \mathbf{B}(R^k) \}$$

En effet, (P_n) est tendue sur $C_{E'}$ (resp. $D_{E'}$) par le Théorème IV.1.; 1), 2) et le Théorème 5.2 de [*10*] impliquent que chaque sous-suite de (P_n) contient une sous-suite qui converge étroitement ; 3) et le Théorème 2.3 de [*2*] nous permettent de conclure à l'existence d'une limite unique P, probabilité sur $C_{E'}$ (resp. $D_{E'}$). Le processus X est alors défini sur la base stochastique $(C_{E'}, \mathbf{B}(C_{E'}), P)$ (resp. $(D_{E'}, \mathbf{B}(D_{E'}), P)$) par : $X_t(\omega) = \omega(t)$.

V. UNE APPLICATION

Pour illustrer le Théorème que nous venons de généraliser, nous avons choisi de reprendre l'exemple de [*4*]. Il s'agit d'un exemple très simple au niveau des calculs, qui a l'avantage de montrer l'intérêt du résultat de I. Mitoma.

Considérons une infinité de particules browniennes d-dimensionnelles indépendantes, issues de 0 par exemple ; soit B_t^i la position dans $\mathbb{R}^d$, au temps t, de la particule i, à laquelle nous associons la masse de Dirac $\delta_{B_t^i}$.

Par la loi des grands nombres, la suite (X^n) de processus à valeurs mesures définis par $X_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{B_t^i}$, converge en loi vers le processus déterministe $E(\delta_{B_t})$ où (B_t) est un brownien d-dimensionnel, issu de 0, indépendant des (B_t^i).

Pour étudier les fluctuations autour de la limite, on considère la suite (S^n) de processus définis par : $S_t^n = n^{\frac{1}{2}}(X_t^n - E(\delta_{B_t}))$; S^n est égal en loi à : $n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} (\delta_{B_t^i} - E(\delta_{B_t^i}))$.

Pour $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}^d$ à décroissance rapide :

$$\begin{aligned} S_t^n(\varphi) &= n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} (\varphi(B_t^i) - E(\varphi(B_t^i))) \\ &= n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \nabla\varphi(B_s^i) \cdot dB_s^i + \frac{1}{2} \int_0^t S_s^n(\Delta\varphi) ds . \end{aligned}$$

Posons : $M_t^n(\varphi) = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \nabla\varphi(B_s^i) \cdot dB_s^i$.

L'inégalité $E(\mid M_t^n(\varphi) - M_s^n(\varphi) \mid^4) \leqslant$ Const. $(\sup \| \nabla\varphi \|_{\mathbb{R}^d})^4 (t-s)^2$ montre que (M^n) est scalairement tendue.

Le théorème de la limite centrale à plusieurs dimensions montre que $(M_{t_1}^n(\varphi_1), \ldots, M_{t_k}^n(\varphi_k))$ converge en loi sur $\mathbb{R}^k$ vers une distribution gaussienne centrée de covariance :

$$\int_0^{t_i \wedge t_j} E(\nabla\varphi_i(B_s) \cdot \nabla\varphi_j(B_s)) ds$$

où (B_t) est un brownien d-dimensionnel issu de 0.

(M^n) converge donc en loi.

Soient $W^1, \ldots, W^d$, d browniens standards indépendants définis sur $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$; désignons par g_s la densité de la loi de B.

$M_t = \sum_{i=1}^{d} \int_0^t ((\partial_i \sqrt{g_s}) + \sqrt{g_s}\partial_i) dW_s^i$ définit une martingale gaussienne à valeurs dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que :

$$\begin{aligned} E[(M_t(\varphi))^2] &= \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \| (\partial_i \sqrt{g_s}) + \sqrt{g_s}\partial_i)^* \varphi \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 ds \\ &= \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \| - \sqrt{g_s}(\partial_i \varphi) \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 ds = \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} g_s(x)(\partial_i\varphi)^2 dx ds \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} g_s(x)(\nabla\varphi(x))^2 dx ds = \int_0^t E[(\nabla\varphi(B_s))^2] ds \end{aligned}$$

Ce qui montre que M est la limite en loi de (M^n).

D'autre part l'inégalité

$$E(|S_t^n(\varphi)-S_s^n(\varphi)|^4) \leqslant \text{Const.}((\sup\|\nabla\varphi\|_{\mathbb{R}^d})^4 + (\sup|\Delta\varphi|)^4)(t-s)^2$$

montre que (S^n) est scalairement tendue.

Toute sous-suite de (S^n) convergente en loi, converge donc vers la loi P du processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé, solution unique de : $dS_t = dM_t + \frac{1}{2}\Delta S_t dt$, $S_0 = 0$.

(S^n) converge donc en loi vers S qui s'écrit :

$$S_t = \int_0^t e^{\frac{1}{2}(t-s)\Delta} dM_s, \qquad t \geqslant 0.$$

Signalons enfin que cette méthode peut être généralisée au cas d'un système infini de particules avec interactions du type de celui étudié dans [*11*].

RÉFÉRENCES

[*1*] A. Badrikian, Séminaire sur les fonctions aléatoires linéaires et les mesures cylindriques. *Lect. Notes in Math.*, t. **139**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[*2*] P. Billingsley, *Convergence of probability measures.* Wiley, New York, 1968.

[*3*] R. A. Holley, D. W. Stroock, Generalized Ornstein-Uhlenbeck processes and infinite particle branching Brownian motions. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, t. **14**, 1978, p. 741-788.

[*4*] K. Ito, *Stochastic analysis in infinite dimensions. Stochastic Analysis.* Academic Press, New York, 1978, p. 187-197.

[*5*] A. Joffe, M. Metivier, *On tightness in* $D(\mathbb{R}^+ : \mathbb{H})$ *and a few applications to limits of branching processes*, 1982, preprint.

[*6*] P. A. Meyer, *Le théorème de continuité de P. Lévy sur les espaces nucléaires* (d'après X. Fernique). Séminaire Bourbaki, 18e année, n° 311, 1965-1966, p. 1-14.

[*7*] I. Mitoma, On the sample continuity of $\mathscr{S}'$-processes. *J. Math. Soc. Japan*, t. **35**, n° 4, 1983.

[*8*] I. Mitoma, *Tightness of Probabilities on* $C([0, 1]; \mathscr{S}')$ *and* $D([0, 1]; \mathscr{S}')$, 1983, preprint. (*A paraître* aux *Annals of Probability*).

[*9*] H. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces. Graduate Texts in Math.*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[*10*] O. Smolyanov, S. V. Fomin, Measures on linear topological spaces. *Russ. Math. Surveys*, t. **31**, n° 4, 1976, p. 1-53.

[*11*] H. Tanaka, M. Hitsuda, Central limit theorem for a simple diffusion model of interacting particles. *Hiroshima Math. J.*, t. **11**, 1981, p. 415-423.

[*12*] A. S. Ustunel, Stochastic integration on nuclear spaces and its applications. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Sect. B, t. **XVIII**, n° 2, 1982, p. 165-200.

[*13*] D. Xia, *Measure and integration theory on infinite-dimensional spaces.* Academic Press, New York and London, 1972.

(Manuscrit reçu le 30 mai 1983)