ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

S. FERENCZI

Systèmes localement de rang un

Annales de l'I. H. P., section B, tome 20, nº 1 (1984), p. 35-51

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1984__20_1_35_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 20, n° 1, 1984, p. 35-51. *Probabilités et Statistiques*

Systèmes localement de rang un

par

S. FERENCZI

Laboratoire de Probabilités, Université Paris-VI,
Tour 56, 4, Place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — Théorie ergodique : un système dynamique est dit localement de rang un s'il peut être approché arbitrairement bien par des tours de Rokhlin de mesure fixée. On montre que cette propriété implique la propriété de Loosely Bernoulli, mais qu'il existe des systèmes Loosely Bernoulli qui ne sont pas localement de rang un. Enfin, on construit un système localement de rang un qui n'est pas de rang fini.

ABSTRACT. — Ergodic theory : we say that a dynamical system is of local rank one if it can be approximated arbitrarily well by Rokhlin towers of fixed measure. We show that this property forces Loosely Bernoulli, but of course there are Loosely Bernoulli systems which are not of local rank one. Furthermore, we show that local rank one is strictly weaker than finite rank.

Dans tout cet article, on considérera des systèmes dynamiques $(X, \mathscr{A}, T, \mu)$, où (X, μ) est un espace de Lebesgue : les partitions de X sont prises finies et $\mathscr{A}$-mesurables.

$(X, \mathscr{A}, T, \mu)$ est dit localement de rang un s'il existe un nombre a strictement positif tel que, pour toute partition P et tout réel ε strictement positif, il existe un ensemble F, un entier h et une partition Q de $A = \bigcup_{i=0}^{h-1} T^iF$ vérifiant

(1) F, TF, ..., $T^{h-1}F$ sont des ensembles disjoints,

(2) $$\mu(A) \geq a,$$

(3) Q est moins fine que la partition $(F, TF, \ldots, T^{h-1}F)$,

(4) $$|Q - P_{|A}| < \varepsilon ;$$

cette définition est due à J. P. Thouvenot. Nous allons montrer qu'un tel système, s'il est ergodique, est d'entropie nulle et Loosely Bernoulli (on se reportera à [1] pour les définitions précises), c'est-à-dire induit une rotation sur un ensemble de mesure positive (un résultat proche a été obtenu indépendamment par Katok et Sataev [2] en 1976). Nous montrerons ensuite qu'il existe des systèmes Loosely Bernoulli d'entropie nulle qui ne sont pas localement de rang un, en utilisant pour cela la propriété de Vershik définie dans [3] ; enfin, nous construirons un système localement de rang un qui n'est pas de rang fini (définition dans [1]).

Je remercie Benjamin Weiss pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée.

I. RANG UN ET PROPRIÉTÉ DE LOOSELY BERNOULLI

PROPOSITION 1. — Si $(X, \mathscr{A}, T, \mu)$ est un système ergodique localement de rang un et P une partition de X, le processus (P, T) est Loosely Bernoulli d'entropie nulle.

Démonstration. — Soit α un nombre positif ou nul.

Hypothèse H_α = pour tout δ strictement positif, il existe un entier $N(\delta)$ tel que, pour tout n supérieur à $N(\delta)$, il existe un ensemble $W_n(\delta)$, de mesure supérieure à $1 - \delta$, qui est une union d'atomes de $\bigvee_0^{n-1} T^iP$, et tel que, si W et W′ sont deux atomes de $\bigvee_0^{n-1} T^iP$ contenus dans $W_n(\delta)$,

(5) $$\bar{f}_n(W, W') \leq 1 - \alpha .$$

L'hypothèse H_0 est vérifiée. Supposons H_α vérifiée.

Soit $\delta > 0$ donné.

Soient $\bar{\delta} > 0$ et $0 < c < 1$, qu'on précisera. On applique H_α pour $\bar{\delta}$; on fixe un n_0 supérieur à $N(\bar{\delta})$, et soit $W = W_{n_0}(\bar{\delta})$.

On peut trouver F, h et Q vérifient (1) à (4) pour P et $\bar{\delta}$. On prolonge Q en posant Q = P sur A^c, et on a

(6) $$|Q - P| < \bar{\delta} .$$

On peut supposer en outre,

$$h > \frac{n_0}{\bar{\delta}} ; \tag{7}$$

en effet, en appliquant la définition du rang un local à $\bigvee_{-n}^{n} \mathrm{T}^i\mathrm{P}$ et 2^{-n}, on obtient des partitions Q_n vérifiant, en particulier, (4) avec P et 2^{-n}, et des nombres h_n qui doivent tendre vers l'infini car l'espace est non atomique. On aura donc simultanément (1), (2), (3), (6), et (7) pour un n assez grand.

h est pris assez grand pour que ch puisse être considéré comme entier sans changement notable; il en sera de même pour les quantités cn, acn, ... qui interviendront plus tard.

Soit $\mathrm{A}' = \bigcup_{i=0}^{ch-1} \mathrm{T}^i\mathrm{F}$. A' est de mesure supérieure à ac. On choisit n_1 assez grand pour que

$$\frac{1}{n_1} \sum_{i=0}^{n_1-1} 1_{\mathrm{A}'}(\mathrm{T}^i x) > \frac{ac}{2} \tag{8}$$

pour tout x situé dans un ensemble V de mesure supérieure à $1 - \bar{\delta}$; on choisit n_2 tel que

$$n_2 > \frac{n_1}{\bar{\delta}} \vee \frac{h}{\bar{\delta}} \tag{9}$$

(10) pour tout n supérieur à n_2, il existe un ensemble W'_n de mesure supérieure à $1 - \delta$ tel que, pour tout x de W'_n

(10 *a*) $\mathrm{T}^j x$ est dans W pour au moins $(1 - 2\bar{\delta})n$ de j des $[0, n-1]$,
(10 *b*) $\mathrm{T}^j x$ est dans V pour au moins $(1 - 2\bar{\delta})n$ des j de $[0, n-1]$,
(10 *c*) $\mathrm{T}^j x$ est dans A pour au moins $(a - \bar{\delta})n$ des j de $[0, n-1]$,
(10 *d*) $\mathrm{T}^j x$ est dans $\bigcup_k \mathrm{P}_k \Delta \mathrm{Q}_k$ pour au plus $2\bar{\delta}n$ des j de $[0, n-1]$.

Tout cela est possible par le théorème ergodique ponctuel, on peut aussi assurer que W'_n est une union d'atomes de $\bigvee_{0}^{n-1} \mathrm{T}^j\mathrm{P}$.

Soient x et y deux éléments de W'_n, $\bar{x}$ et $\bar{y}$ leurs P-n-noms, $\hat{x}$ et $\hat{y}$ leurs Q-n-noms; soit B le Q-h-nom d'un point de F (n'importe lequel par (1) et (3)). D'après (10 *d*), $\bar{x}$ diffère de $\hat{x}$, et $\bar{y}$ de $\hat{y}$, en au plus $2\bar{\delta}n$ endroits.

D'après (10 *c*), $\hat{x}$ contient des blocs B, pour une longueur totale d'au moins $(a - \bar{\delta})n$. Soient $i_1 \ldots i_l$ les abscisses des débuts de ceux-ci dans $\hat{x}$.

D'après (10 b) on peut supposer, au prix d'une modification de $\hat{x}$ d'au plus $2\bar{\delta}$ en f que $T^{i_1}y, \ldots, T^{i_l}y$ sont dans V.

Dans le tableau $(T^{i_\alpha+\beta}y, 1 \leq \alpha \leq l, 0 \leq \beta \leq n_1 - 1)$, un point est dit bon s'il est dans A'. D'après (8), il y en a au moins $\frac{can_1}{2}$ dans chaque colonne, donc (argument « de Fubini »), il existe une ligne où il y en a au moins $\frac{cal}{2}$. Soit j cette ligne, et y' le Q-n-nom de T^jy. On a

$$\bar{f}(\hat{y}, y') < \frac{n_1}{n_2} < \bar{\delta}. \tag{11}$$

On peut désormais coupler x' (la modification en $\bar{f}$ de $\hat{x}$) avec y', de la manière suivante :

pour au moins $\frac{cal}{2}$ des indices α, en dessous du bloc B de x' commençant en i_α, il y a un bloc B de y' commençant entre $i_\alpha - ch$ et i_α (puisque $T^{i_\alpha+j}y$ est bon). Pour un sur trois de ces indices α, on couple les deux blocs B correspondants au prix d'un décalage inférieur à ch. On a ainsi couplé au moins $\frac{1}{3} \cdot \frac{ca}{2} \cdot (a - \bar{\delta})n$ des coordonnées, et les parties non couplées sont de longueur supérieure à h. On découpe x' en segments de longueur n_0, en reportant le découpage sur y', de sorte qu'une proportion d'au moins $(1 - 4\bar{\delta})$ de ces segments commence dans W, en haut et en bas (grâce à (10 a), il y a une manière de le faire, en perdant un segment de taille inférieure à n_0). Sur les parties non déjà couplées on peut donc coupler à α en $\bar{f}$ les bons segments de longueur n_0 qu'elles contiennent, en perdant au plus une proportion $\frac{n_0}{h}$ des coordonnées. Donc

$$1 - \bar{f}(x', y') \geq \frac{ca^2}{6} - \bar{\delta} + \alpha\left(1 - \frac{ca^2}{6} - c\frac{ca^2}{6}\right) - 5\bar{\delta};$$

$$\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) \leq 1 - \left[\alpha + \frac{ca^2}{6}(1 - \alpha) - \frac{c^2a^2}{6}\alpha\right] + 13\bar{\delta}. \tag{12}$$

En prenant $c = \frac{1}{10}$ dans tous les cas, et $c = \frac{1 - \alpha}{2\alpha}$ si $\alpha \geq \frac{1}{3}$, et $\bar{\delta}$ assez petit, on en tire que si H_α est vérifiée, $H_{\alpha'}$ l'est aussi, avec

$$\alpha' = \alpha + \frac{a^2}{100}\left(1 - \frac{11}{10}\alpha\right) \quad \text{dans tous les cas, et} \tag{13}$$

$$\alpha' = \alpha + \frac{a^2}{100}\frac{(1 - \alpha)^2}{\alpha}, \quad \text{si } \alpha \geq \frac{1}{3}. \tag{14}$$

On en conclut que H_α est vérifiée pour tout α strictement inférieur à 1, et donc (cf. [*1*]) que (P, T) est Loosely Bernoulli.

COROLLAIRE 1. — Tout système de rang fini ergodique, et donc tout échange d'intervalles ergodique est Loosely Bernoulli.

(On retrouve ainsi un résultat de Weiss [*1*], et de Katok et Sataev [*2*]).

Démonstration. — Un système de rang r est localement de rang un avec un $a \geq \frac{1}{r} - \varepsilon$, pour tout ε strictement positif.

II. RANG UN LOCAL ET PROPRIÉTÉ DE VERSHIK

On se reportera à Rothstein [*3*] pour la présentation de la propriété de Vershik. On conserve ses notations, en particulier, pour une partition P,

$$V^n(T, P) = \bar{d}(m_n, m'_n)$$

où m_n et m'_n sont deux mesures sur $\bigvee_{i=1}^{n} T^{-i}P \times \bigvee_{i=1}^{n} T^{i}P$,

$$m_n(A \times B) = \mu(A)\mu(B)\,,$$
$$m'_n(A \times B) = \mu(A \cap B)\,.$$

DÉFINITION. — Un processus (P, T) a la propriété de Vershik si $V^n(P, T)$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$.

D'après [*3*], la propriété de Vershik est plus forte que le mélange, et strictement plus faible que la propriété Very Weak Bernoulli. D'autre part, en entropie nulle, il existe des processus de Vershik qui sont Loosely Bernoulli (et d'autres qui ne le sont pas).

Nous montrons ici que la propriété de Vershik empêche la propriété de rang un local : si un processus (P, T) est de Vershik et localement de rang un, on peut à partir du P-nom de la tour locale, de masse a, et de la propriété de Vershik, fabriquer un nombre arbitrairement grand de P-noms de masse a^2. Or ces noms correspondant à des ensembles disjoints (s'ils se recoupent, cela introduit dans le P-nom de la tour locale des périodes et contredit le mélange), ce qui est impossible.

Proposition 2. — Si (P, T) est un processus de Vershik, le système $(X, (P)_T, T, \mu)$ n'est pas localement de rang un.

Démonstration. — Supposons que $(X, (P)_T, T, \mu)$ est localement de rang un, pour une constante a.

On fixe un entier m, et un réel positif δ, dont on précisera l'ordre de grandeur.

Soit Q_0 une partition de X, mesurable par rapport à $(P)_T$, et dont tous les atomes ont une masse comprise entre $\frac{a}{20m^2}$ et $\frac{a}{10m^2}$. Une telle partition existe si m est assez grand.

Soient Q, F, h vérifiant (1) à (4) pour Q_0 et δ.

Comme dans I, on prolonge Q à X, et on peut prendre h assez grand, pour que, par la propriété de Vershik, passant au facteur, et par le mélange qui en découle (cf. [*3*]),

(15) $V^{\frac{h}{n}}(T, Q_0) < \delta^2$ pour tout entier n compris entre 2 et m,

(16) $\mu(q \cap T^l q) \leq \frac{a}{9m^2}\mu(q)$ pour tout atome q de Q_0 et tout entier l supérieur à $\frac{\delta h}{m}$.

Soit n un entier compris entre 2 et m. Soit K un entier assez grand pour que, pour au moins un point y,

(17) $T^j y$ soit dans $\left(\bigcup_v Q_v \cap (Q_0)_v\right)$ pour au plus $2\delta^{10}\frac{Kh}{n}$ des j de $\left[0, \frac{Kh}{n} - 1\right]$,

(18) Pour tout atome $\bar{q}$ de $\bigvee_0^{\frac{h}{n}-1} T^i Q$, $T^{j\frac{h}{n}} y$ soit dans $\bar{q}$ pour au moins $(1 - \delta^{10})K\mu(\bar{q})$ et au plus $(1 + \delta^{10})K\mu(\bar{q})$ des j de $[0, K - 1]$,

(19) (18) reste vrai en remplaçant Q par Q_0.

C'est possible par le théorème ergodique local appliqué à T ou a $T^{\frac{h}{n}}$, qui est ergodique. Soit Y (resp. Y_0) le Q (resp. Q_0) $- K\frac{h}{n}$-nom de y. On a

(20) $$\bar{d}(Y, Y_0) < 2\delta^{10}.$$

Soit B le Q-h-nom d'un point de F ; $B = (b_0 \ldots b_{h-1})$.

Soient $U_n = \bigvee_{i=1}^{\frac{h}{n}} T^i Q$, $V_n = \bigvee_{i=1}^{\frac{h}{n}} T^i Q_0$.

Soit A_n l'ensemble des atomes de U_n dont le nom est du type $b_i b_{i+1} \ldots b_{i+\frac{h}{n}-1}$, pour un i compris entre 0 et $h - \frac{h}{n}$. Par (2) et (3),

$$\mu(A_n) \geq a\left(1 - \frac{1}{n}\right) \geq \frac{a}{2} + 3\delta, \tag{21}$$

si δ est assez petit.

On découpe Y en segments $\left[\frac{ih}{n}, (i+1)\frac{h}{n} - 1\right]$, i variant de 0 à $K - 1$.

Par (18) et (21), au moins $K\left(\frac{a}{2} + 2\delta\right)$ segments sont des noms d'atomes de A_n. Par (20), au moins $K(1 - \delta^5)$ segments sont $2\delta^5$-$\bar{d}$-proches des segments correspondants de Y_0. Donc, par (19), si B_n est l'ensemble des atomes de V_n dont le nom est $2\delta^5$-$\bar{d}$-proche d'un nom d'atome de A_n, on a

$$\mu(B_n) \geq \frac{a}{2}. \tag{22}$$

Soit $W_n = \bigvee_{i=1}^{\frac{h}{n}} T^{-i}Q_0 \times \bigvee_{i=1}^{\frac{h}{n}} T^{i}Q_0$, muni des mesures $m'_n = \mu$, $m_n = \mu \times \mu$.

Par un raisonnement semblable à celui du paragraphe précédent et par définition de m_n, on peut trouver un ensemble C_n d'atomes de W_n vérifiant :

$$m_n(C_n) \geq \frac{a^2}{4} - 3\delta\frac{a}{2} \geq \frac{a^2}{5} + \delta, \qquad (\delta \text{ assez petit}), \tag{23}$$

(24) les couples de Q_0-h-noms des atomes de C_n sont, à $2\delta^5$ près en $\bar{d}$, du type $(b_i \ldots b_{i+\frac{h}{n}-1})(b_j \ldots b_{j+\frac{h}{n}-1})$,

avec

$$\left| i + \frac{h}{n} - 1 - j \right| > \frac{\delta h}{n}. \tag{25}$$

On utilise (15), et soit m une mesure sur $W_n \times W_n$ réalisant $\bar{d}(m_n, m'_n)$, (on utilise la définition de $\bar{d}$ de Weiss [*1*]).

Il existe un sous-ensemble M_n de $W_n \times W_n$ vérifiant

$$m(M_n) > 1 - \delta, \tag{26}$$

$$\bar{d}(x, x') < \delta \qquad \text{si } (x, x') \text{ est un élément de } M_n. \tag{27}$$

Soit D_n la projection sur la deuxième coordonnée de $(C_n \times W_n) \cap M_n$.

On a

(28) $$m_n(\mathrm{D}_n) > \frac{a^2}{5},$$

(29) tout élément de D_n est δ-$\bar{d}$-proche d'un élément de C_n.

Quitte à grossir D_n, sans changer ses propriétés on peut supposer que c'est une union d'atomes de W_n, m_n) qu'on peut assimiler à $\left(\bigvee_0^{2\frac{h}{n}-1} \mathrm{T}^i\mathrm{Q}_0, \mu\right)$, par translation. (24) et (29) se traduisent par

(30) les $\mathrm{Q}_0 - \frac{2h}{n}$-noms des atomes de D_n sont, à 2δ près en $\bar{d}$, du type $b_i \dots b_{i+\frac{h}{n}-1} b_j \dots b_{j+\frac{h}{n}-1}$, où i et j vérifient (25).

On construit ainsi $(m-1)$ ensembles D_n. Si, pour $n' > n$ D_n et $\mathrm{D}_{n'}$ ont une intersection de mesure positive, ils ont en commun un atome de $\bigvee_0^{2\frac{h}{n}-1} \mathrm{T}^i\mathrm{Q}_0$, de nom $a_0 \dots a_{2\frac{h}{n}-1}$. On déduit de (30) que

(31) $a_0 \dots a_{\frac{2h}{n}-1} = b_i \dots b_{i+\frac{h}{n}-1} b_j \dots b_{j+\frac{h}{n}-1}$ à 2δ près en $\bar{d}$, i et j vérifiant (25).

(32) $a_0 \dots a_{\frac{2h}{n'}-1} = b_{i'} \dots b_{i'+\frac{h}{n'}-1} b_{j'} \dots b_{j'+\frac{h}{n'}-1}$ à $2\delta \frac{n'}{n}$ près en $\bar{d}$, i' et j' vérifiant (25) (pour n').

On déduit de (31) et (32) l'existence de i_1, i_2, i_3, i_4 vérifiant :

(33) $$i_2 - i_1 = i_4 - i_3 \geq \left(\frac{h}{n} - \frac{h}{n'}\right) \wedge \frac{h}{n'} \geq \frac{h}{m^2},$$

(34) $$|\, i_3 - i_1 \,| \geq \frac{\delta h}{m},$$

(35) $b_{i_1} \dots b_{i_2} = b_{i_3} \dots b_{i_4}$ à $8\delta \frac{n'}{n} \frac{nn'}{n'-n} \leq 8m^2\delta$ près en $\bar{d}$,

$\Big($suivant les cas : $i_1 = i$, $i_2 = i + \frac{h}{n'} - 1$, $i_3 = i'$, ou bien $i_1 = i + \frac{h}{n'}$, $i_2 = i + \frac{h}{n} - 1$, $i_3 = j'$, ou bien $i_1 = i + \frac{h}{n'}$, $i_2 = i + \frac{2h}{n'} - 1$, $i_3 = j'$, et (34) vient de (25) pour i' et $j'$$\Big)$.

D'après (33), au moins un atome q' de Q coupe $\bigcup_{i=i_1}^{i_2} T^i F$ sur un ensemble de mesure supérieure à $\frac{a}{m^2}\,\mu(q')$. On déduit de (35) et de la définition de B que

$$\mu(q' \cap T^{i_3 - i_1} q') > \left(\frac{a}{m^2} - 8m^2\delta\right)\mu(q')\,. \tag{36}$$

Si δ est assez petit, (34), (36) et (4) contredisent (16). Ce qui prouve que

$$\mu(D_n \cap D'_n) = 0, \quad \text{si} \quad 2 \leq n < n' \leq m\,. \tag{37}$$

On déduit de (37) et (28) que

$$(m-1)\frac{a^2}{5} \leq 1\,, \tag{38}$$

pour tout m assez grand.

a étant une constante, cela impose $a = 0$, et le système n'est pas localement de rang un.

Corollaire 2. — Il existe un système ergodique qui est Loosely Bernoulli d'entropie nulle mais pas localement de rang un.

Démonstration. — Rothstein [*3*] a construit un système Loosely Bernoulli d'entropie nulle qui possède la propriété de Vershik.

Remarque. — A. Katok sait démontrer, par des considérations géométriques, que le flot horocyclique (qu'on sait être Loosely Bernoulli d'entropie nulle) n'est pas localement de rang un.

Corollaire 3. — Un système de rang fini ne peut avoir la propriété de Vershik.

III. RANG UN LOCAL ET RANG FINI

On se reportera à [*1*] pour la définition d'un système de rang fini. Nous allons construire un système localement de rang un qui ne soit pas de rang fini ; on définira, à l'aide d'une structure de blocs, un processus (P, T). Une description formelle de ce type de construction se trouve dans Rothstein [*3*], et une description géométrique dans [*1*]. Un bloc est une suite de symboles d'un alphabet fini, et un gadget une collection finie de blocs, munie d'une distribution de probabilité. Moyennant des conditions de cohérence qui seront vérifiées ici, une suite croissante de gadgets G_n définit un processus (P, T) (cf. [*3*]). (La suite G_n est dite croissante si les blocs de G_{n+1} sont des enchaînements de blocs de G_n).

LEMME 1. — Soit G_n une suite croissante de gadgets définissant un processus (P, T) ergodique. Supposons que G_n soit composé de N_n blocs notés B_n^i, $1 \leq i \leq N_n$, de longueur minimale l_n. Supposons que

(39) $$N_n \to +\infty,$$

et qu'il existe des constantes k, α, β strictement positives, et des suites a_n, b_n, c_n tendant vers $+\infty$ telles que

(40) si $i \neq i'$ et si B et B′ sont des segments de même longueur supérieure à $\frac{l_n}{a_n}$, contenus respectivement dans B_n^i et $B_n^{i'}$, $\bar{d}(B, B') > \alpha$,

(41) si $i \neq i'$ et si B et B′ sont des segments de même longueur supérieure à l_{n-1} contenus respectivement dans B_n^i et $B_n^{i'}$, ils vérifient

(41 *a*) $\bar{d}(B, B') > \beta$, ou bien

(41 *b*) l'ensemble des $(n-1)$-blocs contenus dans B ou B′ comprend au plus $\frac{N_{n-1}}{b_{n-1}}$ types différents de blocs,

(42) pour tout i et j, l'ensemble des blocs du type B_n^i contenus dans B_{n+1}^j représente une longueur totale égale à $m(B_n^i)l(B_{n+1}^j)$ [m désignant la mesure et l la longueur],

(43) pour tout i et j, l'ensemble des blocs du type $B_n^{i'}$, pour tous les i' différents de i, contenus dans B_{n+1}^j et contigus à un bloc du type B_n^i représente une longueur totale inférieure à $\frac{l(B_{n+1}^j)}{c_n}$,

(44) tout bloc de G_n a une mesure supérieure à $\frac{k}{N_n}$,

alors le système $(X, (P)_T, T, \mu)$ n'est pas de rang fini.

(Remarque de vocabulaire : deux blocs B_n^i apparaissant dans B_{n+1}^j à deux endroits différents sont appelés des n-blocs différents mais de même type).

Démonstration. — Supposons le système (X, T) de rang r, exactement. Pour tout ε, on peut trouver une partition $P'(\varepsilon)$ vérifiant

(45) $$|P - P'(\varepsilon)| < \varepsilon$$

et r tours, de bases $F_1(\varepsilon) \ldots F_r(\varepsilon)$, de hauteurs $h_1(\varepsilon) \ldots h_r(\varepsilon)$ telles que P′ soit mesurable par rapport à la partition de X en étages. De plus, les $h_i(\varepsilon)$ peuvent être prises arbitrairement grandes ; la masse totale des tours peut être prise supérieure à $1 - \varepsilon^{100}$; la masse $\lambda_i(\varepsilon)$ de la i-ème tour $\bigcup_{j=0}^{h_i(\varepsilon)-1} T^j F_i(\varepsilon)$ peut être prise ε^{10}-proche d'une limite fixe λ_i (quitte à prendre une sous-suite), et

(46) $$\operatorname*{Inf}_i \lambda_i = \lambda > 0 ,$$

sinon T serait de rang $r - 1$.

On fixe désormais ε (dont on précisera l'ordre de grandeur plus tard) et on l'omet dans les notations.

Soit τ_i le P'-h-nom d'un point de F_i.

On prend M assez grand pour que, pour au moins un x,

(47) $T^j x$ soit dans F_i pour au moins $\dfrac{\lambda_i - 2\varepsilon^{10}}{h_i}$ des j de $[0, M - 1]$, pour tout i situé entre 1 et r,

(48) $T^j x$ soit dans $\bigcup_k P_k \Delta P'_k$ pour au plus 2ε des j de $[0, M - 1]$.

En comparant le P-M-nom et le P'-M-nom de x, en tenant compte du fait que le P'-M-nom est composé, à $2\varepsilon^{10}$ près, de blocs τ_i, on déduit, pour tout i situé entre 1 et r, qu'il existe un bloc σ_i, de longueur h_i, vérifiant

(49) $$\bar{d}(\sigma_i, \tau_i) < \frac{3\varepsilon}{\lambda},$$

(50) σ_i est un P-nom réalisé par le processus (P, T). (Plusieurs blocs σ_i peuvent avoir ces propriétés ; on en fixe un, pour chaque i).

Supposons par exemple $h_1 \geq h_2 \geq \ldots h_r$. Il existe un n unique tel que $l_n \leq h_1 < l_{n+1}$. D'après la définition de (P, T), il existe j' et j'' tels que σ_1 soit contenu dans $B_{n+1}^{j'} \cdot B_{n+1}^{j''}$ (la multiplication marque la juxtaposition). On écrit

(51) $$\sigma_1 = \sigma'_1 \sigma''_1 .$$

avec σ'_1 contenu dans $B_{n+1}^{j'}$, σ''_1 dans $B_{n+1}^{j''}$ (une telle décomposition n'est pas unique, on en fixe une).

Dans la suite, on appelle $\bar{x}$ le P-M-nom de x, $\tilde{x}$ son P'-M-nom et $\hat{x}$ le nom obtenu à partir de $\tilde{x}$ en remplaçant chaque τ_i par σ_i. On écrit $\hat{x}$ sous $\bar{x}$, et on a

(52) $$\bar{d}(\hat{x}, \bar{x}) < \frac{5\varepsilon}{\lambda}.$$

Supposons que la longueur $l(\sigma'_1)$ dépasse l_n. Alors :

CAS 1.

σ'_1 contient plus de $\frac{N_n}{b_n}$ types différents de n-blocs. Alors en vertu de (41), et compte tenu du fait que $\bar{x}$ est un P-nom, donc composé de $n+1$-blocs (on prend M grand devant l_{n+1}), on ne peut voir σ'_1 dans $\hat{x}$ que

. sous un $n+1$-bloc de $\bar{x}$ d'*un* type $B^{i_0}_{n+1}$,

. sous un $n+1$-bloc de $\bar{x}$ contigu à un $n+1$-bloc du type $B^{i_0}_{n+1}$,

. sous d'autres blocs de $\bar{x}$, mais la longueur totale de ces apparitions est limitée à $\frac{5\varepsilon}{\beta\lambda}M$, par (41 *a*) et (52).

CAS 2.

σ'_1 ne contient pas $\frac{N_n}{b_n}$ types différents de n-blocs. Alors, en comptant les extrémités, σ'_1 peut apparaître sous des n-blocs de type $B^{i_1}_n, \ldots, B^{i_v}_n$, $v \leq \frac{N_n}{b_n} + 2$. Sous les autres n-blocs, en vertu de (40), σ'_1 ne peut apparaître que sur une longueur inférieure à $\frac{l_n}{a_n}$, ou en induisant un pourcentage α d'erreurs. La longueur totale de ces apparitions est donc limitée à $M\left(\frac{1}{a_n} + \frac{5\varepsilon}{\alpha\lambda}\right)$.

Si $l(\sigma'_1)$ ne dépasse pas l_n, on applique le raisonnement à σ_1 : si σ'_1 et σ''_1 sont dans le cas 2, σ_1 l'est encore, avec $\frac{2N_n}{b_n}$ au lieu de $\frac{N_n}{b_n}$. Si σ''_1 est dans le cas 1 et $l(\sigma'_1)$ est inférieure à l_n, σ'_1 est négligeable dans σ_1 dès que $\frac{N_n}{b_n} \to \infty$ avec n, ce qu'on peut supposer quitte à affaiblir (41); on prend alors n assez grand pour négliger σ'_1. On fait le même raisonnement pour les autres σ_i. (C'est-à-dire, suivant le cas, pour σ'_i et σ''_i ou pour σ_i). On renumérote ces blocs, en les notant $\overline{\sigma_j}$, $1 \leq j \leq s \leq 2r$. Pour tout j, il existe un nombre n_j, et un ensemble de blocs $B^{k_1}_{n_j}, \ldots, B^{k_{v_j}}_{n_j}$, $1 \leq v_j \leq \frac{2N_{n_j}}{b_{n_j}}$, dits autorisés pour $\overline{\sigma_j}$ tels que $\overline{\sigma_j}$ ne puisse apparaître que sous un n_j-bloc d'un type $B^{k_i}_{n_j}$, ou sous un n_j-bloc contigu à un n_j-bloc d'un type $B^{k_i}_{n_j}$, ses autres apparitions dans $\hat{x}$ ayant une longueur totale d'au plus $M\left[\frac{1}{a_n} + \frac{5\varepsilon}{\alpha\lambda} + \frac{5\varepsilon}{\beta\lambda}\right]$. Un type de m-bloc est dit autorisé s'il est autorisé pour au moins un des $\overline{\sigma_j}$ tels que $n_j = m$. Il y en a (53) au plus $\frac{4r}{b_m}N_m$.

La renumérotation a été faite pour que $n_1 \geq \dots n_s$.

On considère, dans $\bar{x}$, l'ensemble $\mathscr{A}$ des n_s-blocs qui sont

. d'un type non autorisé, et

. non contigus à des n_s-blocs d'un type autorisé, et

. contenus, pour tout i compris entre 1 et $s - 1$, dans des n_i-blocs d'un type non autorisé et non contigus à des n_i-blocs d'un type autorisé.

En vertu de (53), (42), (43) et (44), $\mathscr{A}$ recouvre une longueur de $\bar{x}$ supérieure à

(54) $$\mathrm{M}\prod_{i=1}^{s}\left[\frac{1}{k} - \frac{4r}{kb_{n_i}} - \frac{1}{c_{n_i}}\right].$$

Or $\mathscr{A}$ ne peut être recouvert par des $\overline{\sigma_j}$ que pour une longueur inférieure à $\mathrm{M}\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{1}{a_{n_i}} + \frac{5\varepsilon}{\alpha\lambda} + \frac{5\varepsilon}{\beta\lambda}\right]$, alors qu'il devrait l'être sur toute sa longueur à l'exception d'au plus $2\mathrm{M}\varepsilon^{100}$ coordonnées.

r, α, β, k étant fixés, s inférieur ou égal à $2r$, si on prend ε assez petit et n_i assez grands (indépendamment, comme dit au début), on aboutit à une contradiction. C.Q.F.D.

PROPOSITION 3. — Il existe un système ergodique localement de rang un qui n'est pas de rang fini.

Démonstration. — Nous allons construire un processus (P, T) vérifiant les conditions du lemme 1, et localement de rang un, avec de plus une constante a dépassant 9/10. Il s'inspire de l'exemple de Feldman d'un système non Loosely Bernoulli décrit dans [*1*].

Construction.

On fixe une suite N_n d'entiers, vérifiant

(55) $$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{N}_n} < 10^{-6}.$$

On suppose qu'au stade n, on a $\mathrm{N}_n + 1$ blocs notés A_n, $\mathrm{B}_n^1 \dots \mathrm{B}_n^{\mathrm{N}_n}$, de mesures et longueurs vérifiant

(56) $$m(\mathrm{A}_n) = \frac{9}{10}\frac{l(\mathrm{A}_n)}{l_n} \geq \frac{9}{10}$$

(57) $$l(\mathrm{B}_n^1) = \dots l(\mathrm{B}_n^{\mathrm{N}_n}) = l_n,$$

(58) $$m(\mathrm{B}_n^1) = \dots m(\mathrm{B}_n^{\mathrm{N}_n}) = \frac{1 - m(\mathrm{A}_n)}{\mathrm{N}_n}.$$

On choisit un nombre λ_{n+1}, assez grand, tel que

(59) λ_{n+1} soit un multiple de $N_{n+1} \cdot N_n^{4N_{n+1}}$,

(60) λ_{n+1} soit un multiple de $N_{n+1}^{4N_{n+2}+2}$.

On pose

(61) pour $1 \leq j \leq N_{n+1}$, $B_{n+1}^j = \left[\prod_{i=1}^{N_n} ((B_n^i)^{N_n^{2j}}(A_n)^{9N_n^{2j}})\right]^{\frac{\lambda_{n+1}}{N_n^{2j}}}$ (la multiplication représente toujours la juxtaposition) :

$$A_{n+1} = C_{n+1} \cdot \prod_{k=N_{n+1}+1}^{2N_{n+1}} B_{n+1}^{\prime k} \tag{62}$$

où, pour k variant de $N_{n+1} + 1$ à $2N_{n+1}$,

$$B_{n+1}^{\prime k} = \left[\prod_{i=1}^{N_n} ((B_n^i)^{N_n^{2k}}(A_n)^{9N_n^{2k}})\right]^{\frac{\lambda_{n+1}}{N_{n+1} \cdot N_n^{2k}}},$$

$$C_{n+1} = \left[\prod_{i=1}^{N_n} B_n^i(A_n)^9\right]^{\mu_{n+1}},$$

pour un entier μ_{n+1} vérifiant

$$\frac{\mu_{n+1}}{\lambda_{n+1}} = \sum_{j=1}^{2N_{n+1}} \frac{1}{N_{n+1}^{2j+2}}. \tag{63}$$

Les longueurs étant données par (61) et (62), on donne aux $n + 1$-blocs la distribution (unique) réalisant (56) et (58) au stade $n + 1$.

Première étape.

Au stade 0, il n'y a que des B_0^i, $1 \leq i \leq N_0$, chacun constitué du symbole b_0^i (N_0 symboles différents) et de mesure $\frac{1}{N_0}$. Pour passer au stade 1, on applique les formules ci-dessus avec A_0 = le vide.

On construit ainsi les B_i^1 et A_1, et on continue comme indiqué.

Le processus (X, T).

On vérifie facilement (cf [*3*] et [*1*]) qu'on définit un processus ergodique. On déduit de (56) que (X, $(P)_T$, T, m) est localement de rang un, pour un a supérieur ou égal à $\frac{9}{10}$.

On remarque que $\frac{l(A_n)}{l_n} \to 1$, ce qui, joint avec (56) donne (44), avec $k \geq \frac{1}{20}$, par exemple.

(39) et (42) sont vérifiés par construction, ainsi que (43) avec $c_n \geq \frac{1}{2} N_n^2$ (les blocs se présentent en paquets d'au moins N_n^2 blocs de même type). Nous allons montrer (40).

Démonstration de (40). — Hypothèse de récurrence : il existe $\beta_n > 0$ tel que, si B et $\overline{B}$ sont deux suites d'au moins $\frac{l_n}{N_n}$ symboles consécutifs, tirées respectivement

(64) de B_n^i et B_n^j, $i \neq j$, ou

(65) de B_n^i et A_n, ou

(66) de A_n et A_n, mais débutant en deux endroits séparés d'au moins $\frac{l_n}{N_n}$ symboles, alors $\bar{d}(B, \overline{B}) \geq \beta_n$ (B et $\overline{B}$ étant de même longueur).

Soient alors B et $\overline{B}$ deux segments de même longueur, supérieure à $\frac{l_{n+1}}{N_{n+1}^2}$, tirés respectivement de B_{n+1}^j et $B_{n+1}^{j'}$, $j > j'$. Mises à part des extrémités de taille relative inférieure à $\frac{1}{N_{n+1}^2}$, B est composé de paquets du type $(B_n^i)^{N_n^{2j}}$ ou $(A_n)^{9N_n^{2j}}$. On raisonne comme dans [*1*] : on compare B et B′. Quand on voit B_n^j sous B_n^i, ou A_n sous B_n^i ($i \neq j$), les parties correspondantes sont β_n-$\bar{d}$-loin, par (64) et (65), sauf s'il s'agit de morceaux de taille inférieure à $\frac{1}{N_n} l_n$, qui représentent au plus $\frac{1}{N_n}$ de la longueur ; les apparitions de B_n^i sous B_n^i, $1 \leq i \leq N_n$ représentent par construction au plus $\frac{1}{N_n}$ de la longueur, parce que N_n^{2j} est grand devant $N_n^{2j'}$. Il reste les apparitions de A_n sous A_n.

Dans ce cas là, on a en haut $9N_n^{2j}$ blocs A_n, et en bas des groupes de $9N_n^{2j'}$ blocs A_n, (B étant écrit au-dessus de B′). Quand un A_n de B_n commençant à l'abscisse i recouvre partiellement un A_n de B′ commençant à l'abscisse i', on note $d = \frac{i - i'}{l_n}$ (modulo 1). (66) assure que si d n'est pas entre $-\frac{1}{N_n}$

et $\frac{1}{N_n}$, les parties correspondantes des blocs A_n sont β_n-$\bar{d}$-loin. Or ce décalage d prend toutes les valeurs

$$d_0 + N_n^{2j'} \frac{\mu_n}{\lambda_n} c \qquad \text{(modulo 1)}$$

pour c entier variant de 1 à $\frac{9}{10} N_n^{2j-2j'}$, chacune étant prise $N_n^{2j'}$ fois (à partir d'un décalage initial d_0). Comme, par (63), $N_n^{2j'} \frac{\mu_n}{\lambda_n}$ est, à un entier près, situé entre $\frac{1}{N_n^2}$ et $\frac{2}{N_n^2}$, et comme c varie au moins entre 0 et $\frac{9}{10} N_n^2$ ($j' \geq j + 1$), on en déduit que d visite l'intervalle $\left[-\frac{1}{N_n} \cdot \frac{1}{N_n} \right]$ (mod 1) au plus pour $\frac{3}{N_n}$ des apparitions communes de A_n.

On déduit que $\bar{d}(B, \bar{B}) \geq \beta_n - \frac{5}{N_n}$.

On a ainsi montré directement (64) au stade $n + 1$; on déduit (65) et (66) du fait que les morceaux de A_{n+1} (les B'_{n+1}) ont la même structure que des B^i_{n+1}, et que $\frac{l_{n+1}}{N^2_{n+1}}$ est petit devant $\frac{l_{n+1}}{N_{n+1}}$.

On en tire $\beta_{n+1} \geq \beta_n - \frac{6}{N_n}$, d'où (40), avec $a_n = N_n$, $\alpha = \lim_n \beta_n$.

Démonstration de (41). — Soit B un segment de B^j_{n+1} contenant au moins *cinq* types différents de blocs B^i_n. Soit B′ un segment de même longueur, contenu dans $B^{j'}_{n+1}$, avec $j' \neq j$. Comme B contient au moins trois paquets complets de blocs, si on écrit B′ sous B, on constate que

$$\text{si} \quad j' < j, \qquad \bar{d}(B, B') \geq \frac{3\alpha}{5} - \frac{6}{N_n},$$

$$\text{si} \quad j' > j, \qquad \bar{d}(B, B') \geq \frac{\alpha}{10}.$$

Ce résultat vaut aussi pour A_{n+1} noté B^0_{n+1}.

On en déduit (41) avec $b_n = \frac{N_n}{5}$ et $\beta = \frac{\alpha}{10}$. Il est à noter que (41) ne se déduit pas de (40) : on utilise aussi la structure particulière du système.

Les conditions du lemme 1 étant réunies, le système n'est pas de rang un. C.Q.F.D.

Remarque. — On pourrait construire un tel exemple avec un a arbitrairement proche de 1.

La question suivante m'a été suggérée par le referee : existe-t-il un système localement de rang un dont le spectre n'est pas de multiplicité finie?

RÉFÉRENCES

[1] D. ORNSTEIN, D. RUDOLPH et B. WEISS, Equivalence of measure preserving transformations, *Memoirs of the American Mathematical Society*, t. **262**, 1982.

[2] A. B. KATOK et E. A. SATAEV, Standardness of automorphisms of transposition of intervals and fluxes on surfaces, *Matematicheskie Zametki*, t. **20**, n° 4, octobre 1976, p. 479-488, traduit dans *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1977, p. 826-831.

[3] Arthur ROTHSTEIN, Vershik processes: First steps, *Israel Journal of Mathematics*, t. **36**, n° 3-4, 1980, p. 205-223.

(Manuscrit reçu le 7 janvier 1983)

(Modifié le 20 septembre 1983)