ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

M. LEDOUX

Théorème limite central dans les espaces $l_p(B)(1 \leq p < \infty)$

Annales de l'I. H. P., section B, tome 19, nº 4 (1983), p. 393-411
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1983__19_4_393_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XIX, n° 4-1983, p. 393-411. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Théorème limite central dans les espaces $l_p(\mathrm{B})$ $(1 \leqslant p < \infty)$

par

M. LEDOUX
Département de Mathématique, Université Louis-Pasteur,
7, rue René-Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex

SUMMARY. — The relationships between the central limit theorem (CLT) in Banach spaces and the cotype and type properties are well known: in the Banach spaces of cotype 2, and only in them, a random variable satisfies the CLT if and only if it is pregaussian and in Banach spaces of type 2, and only in them, a square integrable random variable satisfies the CLT. This paper studies the CLT in the spaces $l_p(\mathrm{B})$ in the various cases $1 \leqslant p \leqslant 2$ or $2 \leqslant p < \infty$ and B is of cotype 2 or type 2. As a result, a random variable X taking values in $l_p(\mathrm{B})$ with $2 \leqslant p < \infty$ and B of cotype 2 verifies the CLT if and only if it is pregaussian and $\lim_{t \to \infty} t^2 \mathrm{P}\{ \|\mathrm{X}\| > t \} = 0$; at the contrary, these two conditions are not sufficient for the CLT when $1 \leqslant p \leqslant 2$ and B is not of cotype 2. The main argument used in proofs is an inequality by J. Hoffmann-Jørgensen which allows also to study the law of the iterated logarithm for pregaussian random variables taking values in the spaces $l_p(\mathrm{B})$ $(1 \leqslant p < \infty)$.

Les liens entre le théorème limite central (TLC) et les propriétés de cotype 2 et de type 2 d'espaces de Banach sont bien connus : dans les espaces de Banach de cotype 2, et seulement dans ces espaces, une variable aléatoire vérifie le TLC si, et seulement si, elle est prégaussienne, alors que dans les espaces de type 2, et seulement dans ces espaces, une variable aléatoire de carré sommable satisfait au TLC. Par exemple, dans les espaces l_p $(1 \leq p < \infty)$ qui sont de cotype max $(2, p)$ et de type min $(2, p)$, la carac-

Annales de l'Institut Henri Poincaré-Section B-Vol. XIX, 0020-2347/1983/393/$ 5.00

térisation des vecteurs aléatoires prégaussiens de N. V. Vakhania fournit pour $1 \leq p \leq 2$ une condition nécessaire et suffisante pour le TLC. Pour $2 \leq p < \infty$, le résultat des espaces de type 2 se précise puisque G. Pisier et J. Zinn ont montré qu'une variable aléatoire X à valeurs dans l_p vérifie le TLC si, et seulement si, elle est prégaussienne et $\lim_{t \to \infty} t^2 P\{ \| X \|_p > t \} = 0$. Cette équivalence s'étend aux treillis de Banach p-convexes, $p > 2$, et q-concaves, $q < \infty$, mais ne se généralise pas à tous les espaces de type 2 comme le montre l'exemple de $l_2(l_p)$, $2 < p < \infty$, mis en évidence par J. Zinn.

Ces diverses observations suggèrent une étude de la propriété de limite centrale dans les espaces de Banach $l_p(B)$ $(1 \leq p < \infty)$ suivant que $1 \leq p \leq 2$ ou $2 \leq p < \infty$ et suivant que B est de cotype 2 ou de type 2. Nous démontrons en particulier que si B est de cotype 2, une variable aléatoire X à valeurs dans $l_p(B)$ vérifie le TLC si, et seulement si, elle est prégaussienne et $\lim_{t \to \infty} t^2 P\{ \| X \|_p > t \} = 0$. Ceci prouve par la même occasion que l'équivalence précédente ne peut en général impliquer aucune autre propriété de cotype et de type que la première super-propriété non triviale, à savoir la non-finie représentabilité de c_0, puisqu'il est bien connu en effet que dans tout espace dans lequel c_0 est finiment représentable il existe une variable aléatoire prégaussienne bornée ne vérifiant pas le TLC. En outre, cette équivalence a lieu dans des treillis de type 2 qui ne sont pas nécessairement p-convexes pour un $p > 2$.

Nous examinons parallèlement la loi du logarithme itéré (LLI) pour les variables aléatoires prégaussiennes dans les espaces $l_p(B)$. Lorsque B est de cotype 2, pour qu'une variable prégaussienne X à valeurs dans $l_p(B)$ vérifie la LLI, il faut et il suffit que $E\{ \| X \|_p^2 / L_2 \| X \|_p \} < \infty$, cette équivalence généralisant la relation entre le TLC et la LLI.

Cette étude est menée dans le cadre des espaces $l_p(B)$ mais les différents résultats s'étendent aisément au cas des espaces $L_p(S, \Sigma, \mu; B)$, où (S, Σ, μ) est un espace mesuré σ-fini, avec les modifications évidentes à apporter dans certaines notations et démonstrations.

1. NOTATION, DÉFINITIONS, PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Un espace de Banach $(E, \| . \|)$ est de cotype $q \in [2, \infty]$ s'il existe une constante positive finie C telle que, pour toute suite finie $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de E, on ait :

$$E\left\{ \left\| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j \right\| \right\} \geq C \left(\sum_{j=1}^{n} \| x_j \|^q \right)^{1/q} \quad (\geq C \max_{1 \leq j \leq n} \| x_j \| \quad \text{si} \quad q = \infty)$$

où $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de variables de Rademacher indépendantes. E est de type $p \in [1, 2]$ s'il existe une constante positive finie C telle que, pour toute suite finie $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de E, on ait :

$$\mathrm{E}\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j\right\|\right\} \leq \mathrm{C}\left(\sum_{j=1}^{n} \| x_j \|^p\right)^{1/p}.$$

Tout espace de Banach est de cotype infini et de type un.

Tout au long de ce travail, B désignera un espace de Banach réel séparable muni de sa norme $\| \,.\, \|$. Pour tout réel p de $[1, \infty)$, nous noterons $l_p(\mathrm{B})$ l'espace de Banach (séparable) des suites $x = (x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de B telles que $\sum_{k\in\mathbb{N}} \| x^k \|^p < \infty$; sa norme est $\| x \|_p = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \| x^k \|^p\right)^{1/p}$ et si $a = (a^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de scalaires, on notera de la même façon:

$$\| a \|_p = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} | a^k |^p\right)^{1/p} \qquad \text{et} \qquad l_p = l_p(\mathbb{R}).$$

Les propriétés de cotype et de type sont stables par formation de l_p-somme au sens suivant [*19*] : $l_p(\mathrm{B})$ est de cotype q pour $p \leq q$ si, et seulement si, B est de cotype q et $l_q(\mathrm{B})$ est de type p pour $q \geq p$ si, et seulement si, B est de type p.

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans un espace de Banach réel séparable $(\mathrm{E}, \| \,.\, \|)$, nous désignerons par $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs) une suite de copies indépendantes de X et par $\mathrm{S}_n(\mathrm{X})$ la somme partielle $\mathrm{X}_1 + \ldots + \mathrm{X}_n$. On dit alors que X vérifie le théorème limite central (TLC) si la suite $(\mathrm{S}_n(\mathrm{X})/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi dans E. On dit que X vérifie la loi du logarithme itéré (LLI) si la suite $(\mathrm{S}_n(\mathrm{X})/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque sûrement (p. s.) relativement compacte dans E où $a_n = \sqrt{2n\mathrm{L}_2 n}$ $(n \in \mathbb{N})$ et $\mathrm{L}_2 t = \mathrm{Log}\,(\max\,(e, \mathrm{Log}\, t))$ $(t \geq 0)$.

Une variable aléatoire X à valeurs dans E, faiblement centrée et faiblement de carré intégrable (i. e. pour tout élément f du dual E' de E, $\mathrm{E}\{ f(\mathrm{X}) \} = 0$ et $\mathrm{E}\{ f^2(\mathrm{X}) \} < \infty$), est dite prégaussienne s'il existe dans E une variable aléatoire gaussienne G(X) de même structure de covariance. Une variable vérifiant le TLC est évidemment prégaussienne ; le caractère prégaussien n'est par contre pas nécessaire en général pour la LLI. Rappelons par ailleurs que si G est un vecteur gaussien dans E tous ses moments sont équivalents et en particulier il existe pour tout $r > 0$ des constantes c_r et C_r ne dépendant que de r telles que :

$$c_r(E\{\|G\|^r\})^{1/r} \le \Lambda(G) \le C_r(E\{\|G\|^r\})^{1/r}$$

où $\Lambda(G) = (\sup_{t>0} t^2 P\{\|G\| > t\})^{1/2}$. Ces équivalences s'obtiennent par exemple à partir de l'inégalité de X. Fernique ([*6*], 1.3).

La proposition suivante regroupe quelques arguments généraux sur le TLC dans les espaces de Banach [*1*] [*12*] [*20*] [*21*]. Comme précédemment, si X est à valeurs dans $(E, \|.\|)$, $\Lambda(X) = (\sup_{t>0} t^2 P\{\|X\| > t\})^{1/2}$.

PROPOSITION 1.1. — *Soit* X *une variable aléatoire à valeurs dans un espace de Banach réel séparable* $(E, \|.\|)$.

i) *Si* X *vérifie le* TLC, *on a :*

$$\lim_{t\to\infty} t^2 P\{\|X\| > t\} = 0.$$

ii) *Pour que* X *vérifie le* TLC, *il faut et il suffit qu'il existe, pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *une variable aléatoire* Y (*que l'on peut choisir étagée*) *satisfaisant au* TLC, *telle que :*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \Lambda\left(\frac{S_n(X-Y)}{\sqrt{n}}\right) < \varepsilon.$$

En résumé donc, si X vérifie le TLC nécessairement X est prégaussienne et $\lim_{t\to\infty} t^2 P\{\|X\| > t\} = 0$. Dans ce travail, nous nous intéresserons essentiellement aux espaces dans lesquels ces deux conditions sont également suffisantes pour assurer la validité de la propriété de limite centrale. La proposition suivante les caractérise et prouve que l'implication considérée est une super-propriété au sens de [*13*].

PROPOSITION 1.2. — *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace de Banach réel séparable ; pour que dans* E *toute variable aléatoire prégaussienne* X *telle que* $\lim_{t\to\infty} t^2 P\{\|X\| > t\} = 0$ *vérifie le* TLC, *il faut et il suffit qu'il existe deux constantes positives finies* c *et* C *telles que, pour toute variable aléatoire étagée centrée* Y *à valeurs dans* E *de gaussienne de même covariance* G(Y), *on ait :*

$$c(\Lambda(Y) + \Lambda(G(Y))) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \Lambda\left(\frac{S_n(Y)}{\sqrt{n}}\right) \le C(\Lambda(Y) + \Lambda(G(Y))).$$

Démonstration de la proposition 1.2. — L'inégalité de gauche est satisfaite dans tout espace de Banach et par toute variable aléatoire vérifiant le TLC (et même par toute variable aléatoire si E ne contient pas de copie isomorphe de c_0 [*21*]). En ce qui concerne l'inégalité de droite, en vertu de la proposition 1.1 et d'un argument de graphe fermé, il suffit de se convaincre que pour toute variable prégaussienne X de gaussienne associée G(X) telle que $\lim_{t\to\infty} t^2 P\{\|X\| > t\} = 0$, il existe une variable aléatoire étagée Y rendant petites les quantités $\Lambda(X - Y)$ et $\Lambda(G(X - Y))$. A cet effet, on peut par exemple se ramener d'abord à une variable bornée compte tenu du fait que :

$$\lim_{t\to\infty} (\Lambda(XI_{\{\|X\|>t\}}) + \Lambda(G(XI_{\{\|X\|>t\}}))) = 0 .$$

Ensuite, on construit une martingale $(X(N))_{N\in\mathbb{N}}$ formée de variables étagées qui converge p. s. vers X de sorte que $\lim_{N\to\infty} \Lambda(X - X(N)) = 0$. En notant $Y(N) = X(N + 1) - X(N)$, on vérifie sur la covariance que (avec les notations correspondantes) $\sum_{N\in\mathbb{N}} G(Y(N))$ a même loi que G(X) et l'intégrabilité gaussienne implique alors :

$$\lim_{N\to\infty} \Lambda(G(X - X(N))) = \lim_{N\to\infty} \Lambda\Big(\sum_{K\geq N} G(Y(K))\Big) = 0 ,$$

d'où le résultat.

Les propriétés de cotype 2 et de type 2 peuvent s'interpréter de façon simple en terme d'intégrabilité de variables prégaussiennes et de gaussiennes associées (voir par exemple [*3*], 3.8, exercice 8). Ces caractérisations s'étendent aux espaces $l_p(B)$ $(1 \leq p < \infty)$ en englobant le théorème de N. V. Vakhania sur les covariances gaussiennes dans les l_p [*22*].

Si $X = (X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une variable aléatoire à valeurs dans $l_p(B)$ à composantes de carré sommable, $(E\{\|X\|^2\})^{1/2}$ désignera la suite réelle $((E\{\|X^k\|^2\})^{1/2})_{k\in\mathbb{N}}$. p est un réel fixé de $[1, \infty)$.

PROPOSITION 1.3. — *Pour que* B *soit de cotype* 2 (*resp. de type* 2), *il faut et il suffit qu'il existe une constante positive finie* C_p *telle que, pour toute variable prégaussienne* X *à valeurs dans* $l_p(B)$ *de gaussienne associée* G(X), *on ait :*

$$\|(E\{\|X\|^2\})^{1/2}\|_p \leq (\textit{resp.} \geq) C_p E\{\|G(X)\|_p\}.$$

Comme corollaire immédiat de cet énoncé, notons que si B est un espace de Hilbert, une variable aléatoire centrée X à valeurs dans $l_p(B)$ est prégaussienne si, et seulement si, $\|(E\{\|X\|^2\})^{1/2}\|_p < \infty$ ce qui est précisément le résultat de N. V. Vakhania si B est la droite. A titre de comparaison on peut également observer que :

$$\| (\mathrm{E}\{ \| \mathrm{X} \|^2 \})^{1/2} \|_p \geq (\text{resp.} \leq) \; (\mathrm{E}\{ \| \mathrm{X} \|_p^2 \})^{1/2}$$

si $1 \leq p \leq 2$ (resp. $2 \leq p < \infty$).

Signalons en outre que cette proposition se généralise sans peine au cas des espaces $l_{p_1}(l_{p_2}(\ldots (l_{p_i}(\mathrm{B})) \ldots))$, $1 \leq p_1, p_2, \ldots, p_i < \infty$; avec les notations correspondantes, la quantité qui intervient alors est :

$$\| \; \| \ldots \| (\mathrm{E}\{ \| \mathrm{X} \|^2 \})^{1/2} \|_{p_i} \ldots \|_{p_2} \|_{p_1} .$$

Démonstration de la proposition 1.3. — Nous établissons l'assertion concernant le cotype, celle relative au type se démontrant de façon analogue. L'existence d'une constante C telle que pour toute variable aléatoire prégaussienne Y à valeurs dans B de gaussienne de même covariance G(Y) :

$$(\mathrm{E}\{ \| \mathrm{Y} \|^2 \})^{1/2} \leq \mathrm{C}(\mathrm{E}\{ \| \mathrm{G}(\mathrm{Y}) \|^2 \})^{1/2}$$

est une condition nécessaire et suffisante pour que B soit de cotype 2 [*3*]. Supposons alors B de cotype 2 et considérons une variable aléatoire prégaussienne $\mathrm{X} = (\mathrm{X}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $l_p(\mathrm{B})$; sa gaussienne associée G(X) est de la forme $(\mathrm{G}(\mathrm{X}^k))_{k \in \mathbb{N}}$ où, pour tout entier k, $\mathrm{G}(\mathrm{X}^k)$ est gaussienne dans B de même covariance que X^k. Par suite :

$$\begin{aligned} \| (\mathrm{E}\{ \| \mathrm{X} \|^2 \})^{1/2} \|_p &= \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} (\mathrm{E}\{ \| \mathrm{X}^k \|^2 \})^{p/2} \right)^{1/p} \\ &\leq \mathrm{C} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} (\mathrm{E}\{ \| \mathrm{G}(\mathrm{X}^k) \|^2 \})^{p/2} \right)^{1/p} . \end{aligned}$$

Tous les moments d'une gaussienne étant équivalents, l'inégalité de la proposition s'ensuit. La réciproque est immédiate compte tenu de l'inclusion $\mathrm{B} \subset l_p(\mathrm{B})$ et du résultat rappelé ci-dessus.

2. LE TLC DANS $l_p(\mathrm{B})$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$

Dans tout ce paragraphe $1 \leq p \leq 2$. Les deux théorèmes suivant étendent aux espaces $l_p(\mathrm{B})$ le TLC dans les espaces de cotype 2 [*4*] [*12*] [*20*] et de type 2 [*11*] et complètent l'étude entreprise dans [*15*]. Le caractère prégaussien s'évalue à partir de la proposition 1.3.

THÉORÈME 2.1. — *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) B *est de cotype* 2 ;

ii) toute variable aléatoire prégaussienne à valeurs dans $l_p(\mathrm{B})$ *vérifie le* TLC ;

iii) toute variable aléatoire prégaussienne X *à valeurs dans* $l_p(\mathrm{B})$ *telle que* $\lim_{t \to \infty} t^2 \mathrm{P}\{\, \|\mathrm{X}\|_p > t \,\} = 0$ *vérifie le* TLC.

THÉORÈME 2.2. — B *est de type* 2 *si, et seulement si, toute variable aléatoire centrée* X *à valeurs dans* $l_p(\mathrm{B})$ *telle que* $\|(\mathrm{E}\{\, \|\mathrm{X}\|^2 \,\})^{1/2}\|_p < \infty$ *vérifie le* TLC.

Démonstration du théorème 2.1. — L'équivalence entre (*i*) et (*ii*) découle du fait que $l_p(\mathrm{B})$ est de cotype 2 si B l'est et de l'inclusion $\mathrm{B} \subset l_p(\mathrm{B})$ [*4*] [*12*] [*20*]. Pour (*iii*), il suffit de prouver que si B n'est pas de cotype 2, il existe dans $l_p(\mathrm{B})$ une variable aléatoire prégaussienne X telle que:

$$\lim_{t \to \infty} t^2 \mathrm{P}\{\, \|\mathrm{X}\|_p > t \,\} = 0$$

ne vérifiant pas le TLC. Nous montrons à cet effet que l'exemple construit par E. Giné et J. Zinn [*7*] (voir aussi [*23*]) dans $l_2(\mathrm{B})$ se modifie de façon élémentaire quand $1 \leq p \leq 2$ pour fournir la variable cherchée; nous incluons quelques détails pour la commodité du lecteur et en vue de développements ultérieurs.

Comme dans [*7*], si B n'est pas de cotype 2, il existe une suite $(\mathrm{Y}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes prégaussiennes symétriques de gaussiennes associées $(\mathrm{G}(\mathrm{Y}_k))_{k \in \mathbb{N}}$ (que l'on peut choisir indépendantes) telles que :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{E}\{\, \|\mathrm{G}(\mathrm{Y}_k)\| \,\} < \infty \qquad \text{et} \qquad \|\mathrm{Y}_k\| = 1 \text{ p. s.} \qquad \text{pour tout } k\,.$$

Soit à présent une variable aléatoire à valeurs entières N indépendante de tout le reste définie par :

$$\mathrm{P}\{\, \mathrm{N} = k \,\} = \frac{d}{k^{1+2/p} \mathrm{L}_2 k} \; (d > 0)\,;$$

nous notons pour ce qui suit : $\alpha_k = \mathrm{P}\{\, \mathrm{N}^2 \leq k < \mathrm{N}^2 + \mathrm{N} \,\}$. Définissons alors une variable $\mathrm{X} = (\mathrm{X}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $l_p(\mathrm{B})$ en posant, pour tout k : $\mathrm{X}^k = \mathrm{Y}_k \mathrm{I}_{\{\mathrm{N}^2 \leq k < \mathrm{N}^2 + \mathrm{N}\}}$. Clairement $\|\mathrm{X}\|_p^p = \mathrm{N}$ et donc, par définition de N, $\lim_{t \to \infty} t^2 \mathrm{P}\{\, \|\mathrm{X}\|_p > t \,\} = 0$; X est également prégaussienne de gaussienne de même covariance $G(X) = (\sqrt{\alpha_k} G(Y_k))_{k\in\mathbb{N}}$. Pour montrer que X ne vérifie pas le TLC, il suffit de prouver que :

$$E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n}\frac{X_j}{\sqrt{n}} I_{\{\|X_j\|_p \le \sqrt{n}\}}\right\|_p^p\right\} \to \infty \qquad \text{quand} \qquad n \to \infty$$

comme on peut le constater par exemple à partir de l'inégalité de J. Hoffmann-Jørgensen (lemme 3.3 ci-dessous). Or, si $(N_j)_{j\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de copies indépendantes de N, en vertu de l'inégalité de Lévy, pour tout entier n :

$$\begin{aligned} E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} X_j I_{\{\|X_j\|_p \le \sqrt{n}\}}\right\|_p^p\right\} &= \sum_{k\in\mathbb{N}} E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} X_j^k I_{\{N_j \le n^{p/2}\}}\right\|^p\right\} \\ &\ge \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}} E\left\{\max_{1\le j\le n} I_{\{N_j^2 \le k < N_j^2 + N_j, N_j \le n^{p/2}\}}\right\} \\ &\ge \frac{1}{2}\sum_{k \le n^{p/2}} kE\left\{\max_{1\le j\le n} I_{\{N_j = k\}}\right\}. \end{aligned}$$

Si $P\left\{\bigcup_{1\le j\le n}(N_j = k)\right\} \le nP\{N = k\} \le \frac{1}{2}$, les inégalités de Borel-Cantelli montrent que, k étant fixé :

$$E\left\{\max_{1\le j\le n} I_{\{N_j = k\}}\right\} = P\left\{\bigcup_{1\le j\le n}(N_j = k)\right\} \ge \frac{1}{2\,\mathrm{Log}\,2} nP\{N = k\}.$$

Il s'ensuit que :

$$E\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n}\frac{X_j}{\sqrt{n}} I_{\{\|X_j\|_p \le \sqrt{n}\}}\right\|_p^p\right\} \ge \frac{1}{4\,\mathrm{Log}\,2} n^{1-p/2} \sum_{k\in I(n)} kP\{N = k\}$$

où $I(n) = \left\{k \in \mathbb{N} : d'\left(\frac{n}{L_2 n}\right)^{p/2+p} \le k \le n^{p/2}\right\}$ $(d' > 0)$; il ne reste plus qu'à vérifier que le membre de droite tend vers l'infini lorsque $1 \le p \le 2$.

REMARQUE 2.3. — Quand $1 \le p < 2$, et cette dernière restriction sur p ne peut être levée, la variable N de la construction précédente peut être définie par :

$$P\{N = k\} = \frac{1}{k^{1+2/p}(\mathrm{Log}\,k)^{1+\varepsilon}} \,(d, \varepsilon > 0)\,;$$

la variable X est alors prégaussienne de carré intégrable en norme et ne vérifie pas le TLC. Il est aisé de constater, en outre, que la suite $(S_n(X)/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée en probabilité de sorte que X ne vérifie pas non plus la LLI.

Démonstration du théorème 2.2. — Soit $X = (X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une variable aléatoire centrée dans $l_p(B)$ telle que $\| (E\{ \| X \|^2 \})^{1/2} \|_p < \infty$ et supposons B de type 2 ; alors, pour tout entier n :

$$\left(E\left\{\left(\frac{\| S_n(X) \|_p}{\sqrt{n}}\right)^2\right\}\right)^{1/2} = \left(E\left\{\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\frac{\| S_n(X^k) \|}{\sqrt{n}}\right)^p\right)^{2/p}\right\}\right)^{1/2}$$
$$\leq \left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(E\left\{\left(\frac{\| S_n(X^k) \|}{\sqrt{n}}\right)^2\right\}\right)^{p/2}\right)^{1/p}$$
$$\leq C\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}(E\{ \|X^k\|^2 \})^{p/2}\right)^{1/p} = C\|(E\{\|X\|^2\})^{1/2}\|_p.$$

Choisissant alors, pour tout $\varepsilon > 0$, un entier k_0 tel que $\sum_{k>k_0}(E\{\|X^k\|^2\})^{p/2} < \varepsilon^p$

puis des variables aléatoires étagées Y^k, $k \leq k_0$, telles que :

$$\sum_{k\leq k_0}(E\{ \| X^k - Y^k \|^2 \})^{p/2} < \varepsilon^p,$$

en notant $Y' = \sum_{k\leq k_0} X^k e_k$ et $Y = \sum_{k\leq k_0} Y^k e_k$ ($(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ base canonique de l_p) l'inégalité précédente appliquée à $X - Y$ fournit :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \Lambda\left(\frac{S_n(X - Y)}{\sqrt{n}}\right) \leq C\|(E\{X-Y\|^2\})^{1/2}\|_p$$
$$\leq C(\|(E\{\|X-Y'\|^2\})^{1/2}\|_p + \|(E\{\|Y'-Y\|^2\})^{1/2}\|_p)$$
$$< 2\varepsilon C,$$

d'où la conclusion en vertu de la proposition 1.1. Réciproquement, comme $B \subset l_p(B)$, si toute variable centrée et de carré sommable dans B vérifie le TLC, nécessairement B est de type 2 [*11*].

3. LE TLC DANS $l_p(B)$ $(2 \leqslant p < \infty)$

Les théorèmes suivants correspondent aux deux énoncés du paragraphe précédent. Ils généralisent plus particulièrement la forme que prend le

TLC dans les espaces l_p $(2 \leq p < \infty)$ [*21*]. Dans cette section donc, $2 \leq p < \infty$.

THÉORÈME 3.1. — *Si* B *est de cotype* 2, *toute variable aléatoire prégaussienne* X *à valeurs dans* $l_p(\mathrm{B})$ *telle que* $\lim_{t\to\infty} t^2 \mathrm{P}\{ \|\mathrm{X}\|_p > t \} = 0$ *vérifie le* TLC.

THÉORÈME 3.2. — B *est de type* 2 *si, et seulement si, toute variable aléatoire centrée* X *à valeurs dans* $l_p(\mathrm{B})$ *telle que* $\|(\mathrm{E}\{\|\mathrm{X}\|^2\})^{1/2}\|_p < \infty$ *et* $\lim_{t\to\infty} t^2\mathrm{P}\{\|\mathrm{X}\|_p > t\} = 0$ *vérifie le* TLC.

Démonstration du théorème 3.1. — L'outil essentiel de cette preuve est une inégalité due à J. Hoffmann-Jørgensen [*10*] que nous rappelons pour la commodité du lecteur.

LEMME 3.3. — *Soit* $(\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n)$ *une famille finie de variables aléatoires indépendantes symétriques à valeurs dans un espace de Banach* $(\mathrm{E}, \|\,.\,\|)$ *et soit* $(b_1, \ldots, b_n)$ *une suite décroissante de réels positifs ; alors, pour tout réel* $r > 0$ *tel que* $\mathrm{E}\{\|\mathrm{Y}_j\|^r\} < \infty$, $j = 1, \ldots, n$:

$$\mathrm{E}\left\{ \max_{1\leq j\leq n} \left(b_j \left\| \sum_{i=1}^{j} \mathrm{Y}_i \right\| \right)^r \right\} \leq 2.3^r \mathrm{E}\{ \max_{1\leq j\leq n} (b_j \|\mathrm{Y}_j\|)^r \} + 8(3u_0)^r$$

où $$u_0 = \inf\left\{ u > 0 : \mathrm{P}\left\{ \max_{1\leq j\leq n} b_j \left\| \sum_{i=1}^{j} \mathrm{Y}_i \right\| > u \right\} \leq (8.3^r)^{-1} \right\}.$$

Ce lemme est généralement énoncé lorsque les b_j sont identiquement égaux à 1. On l'obtient sous cette forme suivant les lignes de [*10*] en se plaçant sur $l^n_\infty(\mathrm{E})$ et en appliquant le résultat habituel aux variables à valeurs dans $l^n_\infty(\mathrm{E})$: $\tilde{\mathrm{Y}}_j = (0, \ldots, 0, b_j\mathrm{Y}_j, b_{j+1}\mathrm{Y}_j, \ldots, b_n\mathrm{Y}_j)$, $j = 1, \ldots, n$.

Nous démontrons maintenant le théorème 3.1 à l'aide de ce lemme. Considérons une variable aléatoire prégaussienne X à valeurs dans $l_p(\mathrm{B})$ telle que $\lim_{t\to\infty} t^2\mathrm{P}\{\|\mathrm{X}\|_p > t\} = 0$; quitte à remplacer X par X − X′ où X′ désigne une copie indépendante de X, nous pouvons supposer sans perte de la généralité X symétrique. Par ailleurs, p peut être choisi > 2, si $p = 2$ nous sommes ramenés au théorème 2.1. La gaussienne G(X) associée à $\mathrm{X} = (\mathrm{X}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de la forme $(\mathrm{G}(\mathrm{X}^k))_{k\in\mathbb{N}}$ où, pour tout entier k, $\mathrm{G}(\mathrm{X}^k)$ est gaussien dans B de même structure de covariance que X^k. Comme

B est de cotype 2, il existe une constante positive finie C telle que, pour tout k :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}\left\{\left(\frac{\| \mathrm{S}_n(\mathrm{X}^k) \|}{\sqrt{n}}\right)^2\right\} \leq \mathrm{CE}\{ \| \mathrm{G}(\mathrm{X}^k) \|^2 \}$$

puisque $\mathrm{S}_n(\mathrm{X}^k)/\sqrt{n}$ et X^k ont même covariance. Pour tout réel $t > 0$, tout entier n et tout $j \leq n$, notons alors :

$$u_{j,n} = u_{j,n}(t) = \frac{\mathrm{X}_j}{\sqrt{n}} \mathrm{I}_{\{\| \mathrm{X}_j \|_p \leq t\sqrt{n}\}},$$

et $(u_{j,n}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ses composantes dans $l_p(\mathrm{B})$. Pour k, $n \in \mathbb{N}$ nous évaluons $\mathrm{E}\left\{\left\| \sum_{j=1}^n u_{j,n}^k \right\|^p\right\}$ à l'aide de l'inégalité précédente et du lemme 3.3. Le principe de contraction dans un espace auxiliaire de variables de Rademacher $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ montre que, par symétrie :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left\{\left\| \sum_{j=1}^n u_{j,n}^k \right\|^2\right\} &= \mathrm{E}\left\{\left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \frac{\mathrm{X}_j^k}{\sqrt{n}} \mathrm{I}_{\{\| \mathrm{X}_j \|_p \leq t\sqrt{n}\}} \right\|^2\right\} \\
&\leq \mathrm{E}\left\{\left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \frac{\mathrm{X}_j^k}{\sqrt{n}} \right\|^2\right\} = \mathrm{E}\left\{\left(\frac{\| \mathrm{S}_n(\mathrm{X}^k) \|}{\sqrt{n}}\right)^2\right\}.
\end{aligned}$$

Par suite, pour tout réel $u > 0$:

$$\mathrm{P}\left\{ \max_{1\leq j\leq n} \left\| \sum_{i=1}^j u_{i,n}^k \right\| > u \right\} \leq 2\mathrm{C}u^{-2}\mathrm{E}\{ \| \mathrm{G}(\mathrm{X}^k) \|^2 \}.$$

Dans le lemme 3.3, $u_0 = u_0(k)$ peut alors être majoré par :

$$4(\mathrm{C}.3^p\mathrm{E}\{ \| \mathrm{G}(\mathrm{X}^k) \|^2 \})^{1/2}$$

de sorte que, pour une certaine constante positive finie C_p ne dépendant que de p :

$$\mathrm{E}\left\{\left\| \sum_{j=1}^n u_{j,n}^k \right\|^p\right\} \leq \mathrm{C}_p\left(\sum_{j=1}^n \mathrm{E}\{ \| u_{j,n}^k \|^p \} + \mathrm{E}\{ \| \mathrm{G}(\mathrm{X}^k) \|^p \}\right).$$

Par suite, pour tout entier n :

$$\mathrm{E}\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} u_{j.n}\right\|_p^p\right\} \leq \mathrm{C}_p\left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\{\|u_{j,n}\|_p^p\} + \mathrm{E}\{\|\mathrm{G}(\mathrm{X})\|_p^p\}\right).$$

Or par un calcul direct, on voit que :

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\{\|u_{j,n}\|_p^p\} \leq n\int_0^t \mathrm{P}\{\|\mathrm{X}\|_p > u\sqrt{n}\}\,du^p \leq \frac{p}{p-2}t^{p-2}\Lambda^2(\mathrm{X}).$$

En regroupant nos estimations nous obtenons, pour tout réel $t \geq \Lambda(\mathrm{G}(\mathrm{X}))$ et tout entier n :

$$\begin{aligned} t^2\mathrm{P}\{\|\mathrm{S}_n(\mathrm{X})\|_p > t\sqrt{n}\} & \\ &\leq t^2\mathrm{P}\{\max_{1\leq j\leq n}\|\mathrm{X}_j\|_p > t\sqrt{n}\} + t^2\mathrm{P}\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n} u_{j,n}\right\|_p > t\right\} \\ &\leq \Lambda^2(\mathrm{X}) + \mathrm{C}'_p(\Lambda^2(\mathrm{X}) + t^{2-p}\Lambda^p(\mathrm{G}(\mathrm{X}))) \\ &\leq \Lambda^2(\mathrm{X}) + \mathrm{C}'_p(\Lambda^2(\mathrm{X}) + \Lambda^2(\mathrm{G}(\mathrm{X}))) \end{aligned}$$

où C'_p est une autre constante. Finalement :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \Lambda\left(\frac{\mathrm{S}_n(\mathrm{X})}{\sqrt{n}}\right) \leq \mathrm{C}''_p(\Lambda(\mathrm{X}) + \Lambda(\mathrm{G}(\mathrm{X})))$$

d'où l'on conclut à la propriété de limite centrale par la proposition 1.2.

Démonstration du théorème 3.2. — Elle reproduit la démonstration précédente, nous ne faisons donc que l'esquisser. La partie nécessaire du théorème découle d'une application du lemme 3.3 en utilisant cette fois l'inégalité de type 2, pour tout k :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}\left\{\left(\frac{\|\mathrm{S}_n(\mathrm{X}^k)\|}{\sqrt{n}}\right)^2\right\} \leq \mathrm{CE}\{\|\mathrm{X}^k\|^2\}.$$

Des calculs analogues à ceux de la preuve du théorème 3.1 fournissent alors :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \Lambda\left(\frac{\mathrm{S}_n(\mathrm{X})}{\sqrt{n}}\right) \leq \mathrm{C}_p(\Lambda(\mathrm{X}) + \|(\mathrm{E}\{\|\mathrm{X}\|^2\})^{1/2}\|_p)$$

et la conclusion s'ensuit par approximation par des variables étagées. Réciproquement B est de type 2 dès que toute variable de carré sommable satisfait au TLC.

4. LA LLI DANS $l_p(B)$ $(1 \leqslant p < \infty)$

Nous étudions dans ce paragraphe la LLI pour les variables prégaussiennes dans les espaces $l_p(B)$ dans le but d'un renforcement du théorème général de liaison entre le TLC et la LLI. Nous rappelons pour commencer une proposition bien connue [*14*] [*20*] qui est l'analogue pour la LLI de la proposition 1.1. Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $(E, \|\,.\,\|)$, $\lambda(X)$ désignera la limite supérieure (p. s.) non aléatoire $\limsup_{n\to\infty} (\|S_n(X)\|/a_n)$.

PROPOSITION 4.1. — *Soit* X *une variable aléatoire à valeurs dans un espace de Banach réel séparable* $(E, \|\,.\,\|)$.

i) Si X *vérifie la* LLI, *on a :*

$$E\left\{\frac{\|X\|^2}{L_2\|X\|}\right\} < \infty \quad et \quad E\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|S_n(X)\|}{a_n}\right\} < \infty .$$

ii) Pour que X *vérifie la* LLI, *il faut et il suffit qu'il existe, pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *une variable aléatoire* Y (*que l'on peut choisir étagée*) *satisfaisant à la* LLI, *telle que :*

$$\lambda(X - Y) < \varepsilon .$$

Nous rappelons à présent la relation entre le TLC et la LLI due à V. Goodman, J. Kuelbs et J. Zinn [*8*] et B. Heinkel [*9*] à la suite de travaux de G. Pisier [*20*].

THÉORÈME 4.2. — *Soit* X *une variable aléatoire à valeurs dans un espace de Banach réel séparable* $(E, \|\,.\,\|)$ *satisfaisant au* TLC ; X *vérifie la* LLI *si, et seulement si,* $E\{\|X\|^2/L_2\|X\|\} < \infty$.

Dans les espaces l_p, $1 \leq p < \infty$, l'étude des théorèmes limites a prouvé que ce résultat pouvait être amélioré en substituant à l'hypothèse de TLC celle plus faible de variable prégaussienne. Pour $1 \leq p \leq 2$, ceci découle du fait que l_p est de cotype 2 et qu'une variable aléatoire prégaussienne dans un espace de cotype 2 vérifie le TLC et est de carré intégrable en norme [*4*] [*12*] [*20*]. Pour $2 \leq p < \infty$, c'est une conséquence du théorème suivant [*2*] [*17*].

THÉORÈME 4.3. — *Soit* X *une variable aléatoire à valeurs dans* $E = l_p$ $(2 \leq p < \infty)$; X *vérifie la* LLI *si, et seulement si, elle est centrée,* $E\{\|X\|_p^2/L_2\|X\|_p\} < \infty$ *et la famille de variables aléatoires* $\{f^2(X), \|f\|_{E'} \leq 1\}$ *est uniformément intégrable.*

Ces divers résultats ainsi que ceux des sections précédentes invitent à une étude de la LLI dans les espaces $l_p(B)$ $(1 \leq p < \infty)$ pour des variables soit prégaussiennes (B de cotype 2), soit telles que $\| (E\{ \| X \|^2 \})^{1/2} \|_p < \infty$ (B de type 2). Dans cette direction seul vraiment intéressant est le cas $2 \leq p < \infty$ puisque si $1 \leq p \leq 2$ les théorèmes 2.1 et 2.2 fournissent des conditions suffisantes pour la LLI à partir du TLC par l'intermédiaire du théorème de liaison 4.2. Nous supposons donc dans toute la suite $2 \leq p < \infty$.

THÉORÈME 4.4. — *Si* B *est de cotype* 2, *toute variable aléatoire prégaussienne* X *à valeurs dans* $l_p(B)$ *telle que* $E\{ \| X \|_p^2 / L_2 \| X \|_p \} < \infty$ *vérifie la* LLI.

THÉORÈME 4.5. — *Si* B *est de type* 2, *toute variable aléatoire centrée* X *à valeurs dans* $l_p(B)$ *telle que* $\| (E\{ \|X\|^2 \})^{1/2} \|_p < \infty$ *et* $E\{ \|X\|_p^2 / L_2 \|X\|_p \} < \infty$ *vérifie la* LLI.

Nous nous limitons à la démonstration du théorème 4.4 qui suit celle du théorème 3.1.

Démonstration du théorème 4.4. — Soit X une variable prégaussienne à valeurs dans $l_p(B)$, B de cotype 2, telle que $E\{ \| X \|_p^2 / L_2 \| X \|_p \} < \infty$; nous supposons, sans perte de la généralité, X symétrique et $p > 2$. Dans un espace de cotype 2 une variable aléatoire prégaussienne vérifie la LLI. Il existe donc, en vertu du théorème du graphe fermé, une constante C telle que, pour toute variable prégaussienne Y à valeurs dans B de gaussienne associée G(Y) :

$$E\left\{ \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\| S_n(Y) \|}{a_n} \right\} \leq CE\{ \| G(Y) \| \} ;$$

en particulier cette inégalité est satisfaite pour les composantes $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ de X. Pour tout entier n notons :

$$v_n = X_n I_{\{\|X_n\|_p \leq a_n\}}, \qquad V_n = \sum_{j=1}^{n} v_j,$$

et $(v_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(V_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ leurs composantes respectives dans $l_p(B)$. Pour tout réel $u > 0$ et tout entier k, un argument de symétrie identique à celui utilisé dans la preuve du théorème 3.1 (mais dans l'espace $l_\infty(B)$!) et l'inégalité précédente fournissent :

$$P\left\{ \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\| V_n^k \|}{a_n} > u \right\} \leq u^{-1} \quad E\left\{ \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\| S_n(X^k) \|}{a_n} \right\} \leq Cu^{-1}E \{ \| G(X^k) \| \}$$

de sorte que dans le lemme 3.3 avec $r = p$, $u_0 = u_0(k)$ peut être majoré par $8\,\mathrm{C}.3^p\,\mathrm{E}\{\,\|\,\mathrm{G}(\mathrm{X}^k)\,\|\,\}$. Ainsi, pour tout k et une certaine constante C_p :

$$\mathrm{E}\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{\|\,\mathrm{V}_n^k\,\|}{a_n}\right)^p\right\} \leq \mathrm{C}_p\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{E}\left\{\left(\frac{\|\,v_n^k\,\|}{a_n}\right)^p\right\} + \mathrm{E}\{\,\|\,\mathrm{G}(\mathrm{X}^k)\,\|^p\,\}\right).$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{\|\,\mathrm{V}_n\,\|_p}{a_n}\right)^p\right\} &= \mathrm{E}\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\frac{\|\,\mathrm{V}_n^k\,\|}{a_n}\right)^p\right)\right\} \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}}\mathrm{E}\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{\|\,\mathrm{V}_n^k\,\|}{a_n}\right)^p\right\} \\ &\leq \mathrm{C}_p\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{E}\left\{\left(\frac{\|\,v_n\,\|_p}{a_n}\right)^p\right\} + \mathrm{E}\{\,\|\,\mathrm{G}(\mathrm{X})\,\|_p^p\,\}\right).\end{aligned}$$

Un calcul direct montre que :

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{E}\left\{\left(\frac{\|\,v_n\,\|_p}{a_n}\right)^p\right\} &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{a_n^p}\mathrm{E}\{\,\|\,\mathrm{X}\,\|_p^p\mathrm{I}_{\{\|\mathrm{X}\|_p \leq a_n\}}\,\} \\ &\leq \mathrm{E}\left\{\|\,\mathrm{X}\,\|_p^p\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{a_n^p}\mathrm{I}_{\{n\geq\|\mathrm{X}\|_p^2/2\mathrm{L}_2\|\mathrm{X}\|_p^2\}}\right\} \\ &\leq \mathrm{C}'_p\mathrm{E}\left\{\frac{\|\,\mathrm{X}\,\|_p^2}{\mathrm{L}_2\,\|\,\mathrm{X}\,\|_p}\right\}.\end{aligned}$$

En conclusion, par une application du lemme de Borel-Cantelli et d'après les estimations ci-dessus :

$$\lambda^p(\mathrm{X}) = \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{\|\,\mathrm{V}_n\,\|_p}{a_n}\right)^p \leq \mathrm{C}''_p\left(\mathrm{E}\left\{\frac{\|\,\mathrm{X}\,\|_p^2}{\mathrm{L}_2\,\|\,\mathrm{X}\,\|_p}\right\} + \mathrm{E}\{\,\|\,\mathrm{G}(\mathrm{X})\,\|_p^p\,\}\right).$$

Une approximation par des variables étagées et la proposition 4.1 terminent cette démonstration.

5. QUELQUES COROLLAIRES

Nous énonçons à présent en les commentant quelques corollaires immédiats des théorèmes précédents. Le premier contient une caractérisation des espaces de Hilbert qui découle aisément du théorème de S. Kwapien [*16*] déterminant ces espaces par la double propriété de cotype 2 et de type 2.

COROLLAIRE 5.1. — B *est isomorphe à un espace de Hilbert si, et seulement si, pour tout* $p \in [1, \infty)$ *et toute variable aléatoire centrée* X *à valeurs dans* $l_p(\mathrm{B})$, *il y a équivalence entre les assertions suivantes :*

i) X *vérifie le* TLC ;

ii) X *est prégaussienne et* $\lim_{t\to\infty} t^2\mathrm{P}\{\, \|\mathrm{X}\|_p > t \,\} = 0$;

iii) $\|(\mathrm{E}\{\, \|\mathrm{X}\|^2 \,\})^{1/2}\|_p < \infty$ *et* $\lim_{t\to\infty} t^2\mathrm{P}\{\, \|\mathrm{X}\|_p > t \,\} = 0$.

Pour énoncer le prochain corollaire nous dirons qu'un espace de Banach est strictement de cotype q (resp. strictement de type p) s'il est de cotype q sans être de cotype $q' < q$ (resp. de type p sans être de type $p' > p$).

COROLLAIRE 5.2. — *Pour tout* $q \in [2, \infty)$ *et tout* $p \in [1, 2]$, *il existe un espace de Banach* $(\mathrm{E}, \|\,.\,\|)$ *strictement de cotype q et strictement de type p tel que toute variable aléatoire* X *à valeurs dans* E *vérifie le* TLC *si, et seulement si, elle est prégaussienne et* $\lim_{t\to\infty} t^2\mathrm{P}\{\, \|\mathrm{X}\| > t \,\} = 0$. *Il en existe un autre possédant les mêmes propriétés de cotype (avec toutefois* $q > 2$*) et de type dans lequel une telle équivalence est en défaut.*

Il suffit en effet de prendre successivement $l_q(l_p)$ et $l_p(l_q)$ et d'appliquer respectivement les théorèmes 3.1 et 2.1. Dans sa première partie le cotype infini est exclu du corollaire 5.2 puisque dans tout espace strictement de cotype infini, c'est-à-dire dans lequel c_0 est finiment représentable [*19*], il existe une variable aléatoire prégaussienne bornée ne vérifiant pas le TLC [*5*]. Ainsi donc, pour un espace de Banach $(\mathrm{E}, \|\,.\,\|)$ la propriété d'équivalence entre le TLC et les conditions X prégaussienne et $\lim_{t\to\infty} t^2\mathrm{P}\{\, \|\mathrm{X}\| > t \,\} = 0$ n'implique en général rien de plus que la première super-propriété : c_0 n'est pas finiment représentable dans E. En renforçant la condition $\lim_{t\to\infty} t^2\mathrm{P}\{\, \|\mathrm{X}\| > t \,\} = 0$ par X de carré sommable en norme, la remarque 2.3 met de plus en évidence des espaces de Banach où c_0 n'est pas finiment représentable et dans lesquels on peut trouver une variable prégaussienne de carré intégrable ne vérifiant pas le TLC. On peut se demander si un tel choix reste possible lorsque l'on impose à la variable d'être bornée.

Des remarques analogues peuvent être faites en ce qui concerne la LLI pour les variables prégaussiennes : la condition $\mathrm{E}\{\, \|\mathrm{X}\|^2/\mathrm{L}_2\|\mathrm{X}\| \,\} < \infty$ est nécessaire et suffisante pour qu'une variable aléatoire prégaussienne X à valeurs dans $l_q(l_p)$ ($q \in [2, \infty)$, $p \in [1, 2]$) vérifie la LLI mais n'est plus suffisante dans $l_p(l_q)$ ($q \in (2, \infty)$, $p \in [1, 2)$). Le théorème de liaison entre TLC et LLI peut donc à l'occasion se préciser même dans des espaces possédant peu de propriétés de cotype et de type, ce renforcement étant toutefois limité.

Parmi les résultats des paragraphes précédents, le théorème 3.1 pour le TLC et les théorèmes 4.4 et 4.5 pour la LLI ne comportent pas de réciproques caractérisant la propriété géométrique de B, le cotype 2 ou le type 2, à partir de la loi limite. En fait, de telles réciproques n'ont pas lieu en général comme le montre l'étude du TLC et de la LLI respectivement dans les treillis de Banach et les espaces lisses.

Le TLC dans les treillis de Banach a été étudié successivement par G. Pisier et J. Zinn [*21*] et E. Giné et J. Zinn [*7*]. Rappelons (voir [*18*] pour une référence générale) qu'un treillis de Banach E est p-convexe, $1 \leq p \leq \infty$, s'il existe une constante positive finie M telle que l'on ait, pour toute suite finie $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de E :

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p} \right\| \leq \mathrm{M} \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p \right)^{1/p} \qquad \text{si} \qquad 1 \leq p < \infty ,$$

$$\left\| \bigvee_{j=1}^{n} |x_j| \right\| \leq \mathrm{M} \max_{1 \leq j \leq n} \|x_j\| \qquad \text{si} \qquad p = \infty ,$$

et p-concave si les inégalités inverses sont satisfaites. Par exemple, les espaces $l_{p_1}(l_{p_2}(\ldots(l_{p_i})\ldots))$ sont min $(p_1, p_2, \ldots, p_i)$-convexes et max $(p_1, p_2, \ldots, p_i)$-concaves. Notons que si E est p-convexe (resp. p-concave) il est p'-convexe pour tout $p' \leq p$ (resp. p'-concave pour tout $p' \geq p$) et qu'un treillis de Banach est de type 2 si, et seulement si, il est p-convexe pour un $p \geq 2$ et q-concave pour un $q < \infty$.

Le résultat de [*21*] et [*7*] (démontré directement dans [*21*] et à l'aide de la loi faible des grands nombres dans l'espace des carrés dans [*7*]) s'énonce alors comme suit.

THÉORÈME 5.3. — *Soit* $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ *un treillis de Banach p-convexe*, $p > 2$, *et q-concave*, $q < \infty$; *toute variable aléatoire prégaussienne* X *à valeurs dans* E *telle que* $\lim_{t \to \infty} t^2 \mathrm{P}\{\|\mathrm{X}\| > t\} = 0$ *vérifie le* TLC.

En choisissant par conséquent $l_p(l_q)$ avec p et q tels que $2 < p, q < \infty$ nous voyons que le cotype 2 de B n'est pas nécessaire dans le théorème 3.1. Mais concernant les treillis de Banach, le théorème 3.1 (ou le corollaire 5.1) nous renseigne de façon différente. Il est demandé dans [*7*] quels sont, parmi les treillis de type 2, ceux dans lesquels une implication comme celle du théorème ci-dessus est satisfaite. Le choix de $l_p(l_2)$, $2 < p < \infty$, qui est 2-convexe et p-concave montre que la convexité ne peut suffire à une telle caractérisation.

Un espace de Banach E est 2-uniformément lisse s'il peut être muni d'une norme équivalente $\| \, . \, \|$ pour laquelle son module de lissité :

$$\rho_{\mathrm{E}}(t) = \sup \left\{ \frac{1}{2}(\| x + y \| + \| x - y \|) - 1, \| x \| = 1, \| y \| = t \right\}$$

vérifie $\rho_{\mathrm{E}}(t) \leq \mathrm{C}t^2$ $(t > 0)$ pour une certaine constante C. Les espaces l_p $(2 \leq p < \infty)$ sont 2-lisses et le résultat principal de [*17*] assure que le théorème 4.3 est encore satisfait dans les espaces 2-uniformément lisses. Pour contredire une éventuelle réciproque au théorème 4.4 il suffit alors de constater par exemple que tout treillis de Banach de type 2 est 2-uniformément lisse [*18*]. En ce qui concerne le théorème 4.5, G. Pisier [*20*] a montré qu'il existe des espaces qui ne sont pas de type 2 (mais nécessairement de type p pour tout $p < 2$) dans lesquels la condition de carré sommable est suffisante pour la LLI.

REMARQUE 5.4. — L'étude de la propriété de limite centrale dans $l_p(\mathrm{B})$ $(1 \leq p < \infty)$ peut être complétée par celle de la bornitude en probabilité de la suite $(\mathrm{S}_n(\mathrm{X})/\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ associée de façon naturelle aux conditions $\Lambda(\mathrm{X}) < \infty$ et $\Lambda(\mathrm{G}(\mathrm{X})) < \infty$. Divers énoncés des paragraphes précédents se transcrivent dans ce cadre.

REMARQUE 5.5. — Dans les espaces $l_2(l_p)$ $(2 < p < \infty)$ où les conditions nécessaires classiques pour le TLC ne sont plus suffisantes, E. Giné et J. Zinn [*7*] ont donné des conditions nécessaires et suffisantes faisant intervenir les coordonnées des variables étudiées.

RÉFÉRENCES

[*1*] A. DE ACOSTA, A. ARAUJO, E. GINÉ, On Poisson measures, Gaussian measures and the central limit theorem in Banach spaces. Dekker, New York, *Adv. in Probability*, t. **4**, 1978, p. 1-68.

[*2*] A. DE ACOSTA, J. KUELBS, Some results on the cluster set $\mathrm{C}(\{\mathrm{S}_n/a_n\})$ and the LLI. *Ann. Probability*, t. **11**, 1983, p. 102-122.

[*3*] A. ARAUJO, E. GINÉ, *The central limit theorem for real and Banach valued random variables*. Wiley, New York, 1980.

[*4*] S. A. CHOBANYAN, V. I. TARIELADZE, Gaussian characterization of certain Banach spaces. *J. Multivariate Anal.*, t. **7**, 1977, p. 183-203.

[5] S. A. CHOBANYAN, V. I. TARIELADZE, A counterexample concerning CLT in Banach spaces. Probability theory on vector spaces, Poland, 1977. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, *Lecture Notes in Math.*, t. **656**, 1978, p. 25-30.

[6] X. FERNIQUE, Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes. École d'été de Probabilités de St-Flour, 1974. Springer, Berlin-Heidelberg-New York. *Lecture Notes in Math.*, t. **480**, 1975, p. 1-96.

[7] E. GINÉ, J. ZINN, Central limit theorems and weak laws of large numbers in certain Banach spaces. *Zeitschrift für Wahr*, t. **62**, 1983, p. 323-354.

[8] V. GOODMAN, J. KUELBS, J. ZINN, Some results on the law of the iterated logarithm with applications to weighted empirical processes. *Ann. Probability*, t. **9**, 1981, p. 713-752.

[9] B. HEINKEL, Relation entre théorème central-limite et loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach. *Zeitschrift für Wahr.*, t. **49**, 1979, p. 211-220.

[10] J. HOFFMANN-JØRGENSEN, Sums of independent Banach space valued random variables. *Studia Math.*, t. **52**, 1974, p. 159-186.

[11] J. HOFFMANN-JØRGENSEN, G. PISIER, The law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces. *Ann. Probability*, t. **4**, 1976, p. 587-599.

[12] N. C. JAIN, Central limit theorem and related questions in Banach spaces. *Proc. Symp. in Pure Math.*, t. **XXXI**, 1977, p. 55-65, *Amer. Math. Soc.*, Providence R. I.

[13] R. C. JAMES, Some self dual properties of normed linear spaces. *Ann. Math. Studies*, t. **69**, 1972, p. 159-176.

[14] J. KUELBS, Kolmogorov's law of the iterated logarithm for Banach space valued random variables. *Illinois J. Math.*, t. **21**, 1977, p. 784-800.

[15] V. V. KVARATSKHELIYA, NGUYEN XUY TIEN, The central limit theorem and the strong law of large numbers in the spaces $l_p(X)$, $1 \leqslant p < \infty$. *Theor. Probability Appl.*, t. **21**, 1976, p. 780-790.

[16] S. KWAPIEN, Isomorphic characterization of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients. *Studia Math.*, t. **44**, 1972, p. 583-595.

[17] M. LEDOUX, *Sur les théorèmes limites dans certains espaces de Banach lisses. Probability in Banach spaces IV*, Oberwolfach, 1982. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, *Lecture Notes in Math.*, t. **990**, 1983, p. 150-169.

[18] J. LINDENSTRAUSS, L. TZAFRIRI, *Classical Banach spaces II*. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.

[19] B. MAUREY, G. PISIER, Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach. *Studia Math.*, t. **58**, 1976, p. 45-90.

[20] G. PISIER, *Le théorème de la limite centrale et la loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach*. Séminaire Maurey-Schwartz, 1975-1976, exposés 3, 4 et appendice, École Polytechnique, Paris, 1976.

[21] G. PISIER, J. ZINN, On the limit theorems for random variables with values in the spaces L_p $(2 \leqslant p < \infty)$. *Zeitschrift für Wahr.*, t. **41**, 1977, p. 289-304.

[22] N. V. VAKHANIA, Sur une propriété des répartitions normales de probabilités dans les espaces l_p $(1 \leqslant p < \infty)$ et *H. C. R. Acad. Sci. Paris, Série A*, t. **260**, 1965, p. 1334-1336.

[23] J. ZINN, Inequalities in Banach spaces with applications to probabilistic limit theorems: a survey. Probability in Banach spaces III, Medford, 1980. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, *Lecture Notes in Math.*, t. **860**, 1981, p. 324-329.

(Manuscrit reçu le 31 mai 1983)