ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

HENRI HEINICH

Mesures vectorielles dans les espaces réticulés

Annales de l'I. H. P., section B, tome 19, nº 2 (1983), p. 153-174
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1983__19_2_153_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XIX, n° 2, 1983, p. 153-174. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Mesures vectorielles dans les espaces réticulés

par

Henri HEINICH
Laboratoire de Probabilités, Tour 56, Université Pierre et Marie Curie,
4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — Notre but est de montrer que, pour une classe suffisamment vaste d'espaces vectoriels réticulés non topologiques, les propriétés d'ordre sur les mesures réelles se retrouvent pour les mesures vectorielles signées. Pour cela nous introduisons la notion d'espace localement séquentiellement continu pour l'ordre — espace $l - s$ — où les formes linéaires positives vérifient une condition locale d'homomorphisme et de continuité séquentielle pour l'ordre. Après avoir classifié certains ensembles de mesures nous étendons aux espaces $l - s$ les inégalités de Chacon, la convergence des processus sous-additifs ainsi que celle des martingales simples. Un second procédé de localisation, par la notion de point d'ordre, nous permet de ramener la plupart des espaces classiques (Banach lattices) au cas précédent. Enfin nous donnons une version des propriétés ci-dessus pour les variables aléatoires. L'intérêt de notre méthode est de privilégier les notions de mesures et d'ordre par rapport à celles de v. a. et de topologies.

SUMMARY. — The purpose of this article is to show that for a sufficiently large class of non topological vector lattices, the order properties on real measures hold also for vector-valued signed measures. For this we introduce the notion of $l - s$ space whose positive linear forms verify a local condition of homomorphism and of sequential continuity with respect to order. After having classifical certain sets of measures we establish for $l - s$ spaces the inequalities of Chacon and the convergence of sub-

additive processes as well as those of simple martingales. A second localization procedure — using the notion of « order point » — allows us to reduce most classical spaces (lattices) to the former case. Finely we give a version of the above properties for vector-valued random variables.

0. INTRODUCTION

Notre étude part d'abord de la remarque suivante : lorsque μ est une fonction additive d'ensemble positive à valeurs dans un Banach lattice $\mathbb{E}$; le caractère mesure topologique de μ : si $A_n \searrow \emptyset$ alors $\|\mu(A_n)\| \searrow 0$ implique que $\bigwedge_n \mu(A_n) = 0$ d'où une notion de mesure pour l'ordre qui, parfois, « dépasse » le cadre topologique.

De plus, l'outil principal pour l'étude des mesures vectorielles est l'utilisation des formes linéaires (continues dans le cadre topologique). L'introduction des formes positives, sous réserve d'existence et de séparation, donne des résultats complémentaires non nécessairement liés à la topologie.

On envisage, ainsi, le cadre des mesures à valeurs dans un espace vectoriel réticulé, non topologique, comme point de départ à l'étude des suites de mesures adaptées. L'hypothèse topologique, ne venant qu'après, conduit alors à une bifurcation : le cas non localement convexe, par exemple les C-espaces [*8*] et le cas localement convexe représenté principalement par les Banach à norme continue pour l'ordre [*2*] [*10*] [*13*].

L'autre remarque initiale est que, pour l'utilisation d'une forme linéaire positive, u, il n'est pas utile, à priori, que u possède des propriétés fortes — comme d'être continue pour l'ordre — sur tout l'espace et qu'il suffit d'un caractère local pour en déduire des propriétés sur les mesures.

En définitive, nous avons essayé de réléguer les notions topologiques afin de montrer que de nombreux prolongements du cas réel sont essentiellement dus à des propriétés d'ordre.

Le principe sous-jacent étant de « remonter » les propriétés d'ordre des mesures réelles.

1. PROCÉDÉS DE LOCALISATIONS

Dans toute la suite nous désignerons par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers, par $\mathbb{E}$ un espace vectoriel réticulé et par $\mathbb{E}_+^*$ l'ensemble des formes linéaires positives sur $\mathbb{E}$. Les notations usuelles sont celles de [*13*]. Par exemple, si $(x_n, n \in \mathbb{N}) \subset \mathbb{E}$, $\overline{\lim}\, x_n$ est par définition $\bigwedge_p \left(\bigvee_{n \geqslant p} x_n \right)$ lorsque ces différentes expressions ont un sens dans $\mathbb{E}$. Néanmoins, il est possible de donner une notion plus faible de la limite supérieure, même si sup x_n n'est pas défini. Ainsi, pour $\mathbb{E}$ à unité faible — e — il se peut que les expressions $\overline{\lim}\,(x_n \wedge ke) = x^k$ aient un sens pour tout k et que $x^k \nearrow \bar{\bar{x}}$ dans $\mathbb{E}$ nous poserons alors $\overline{\overline{\lim}}\, x_n = \bar{\bar{x}}$. Il est évident que si $\overline{\lim}$ existe on a : $\overline{\lim} = \overline{\overline{\lim}}$. L'exemple suivant : $(X_n) \subset \mathbb{L}^1$ et $X_n \to 0$ p. s. montre que $\overline{\overline{\lim}}\, X_n = 0$, sans que nécessairement sup $X_n \in \mathbb{L}^1$. Nous utiliserons cette notion plus loin.

1.1. DÉFINITION. — $\mathbb{E}$ est un espace localement séquentiellement continu pour l'ordre — $\mathbb{E}$ est $l - s$ — si pour toute famille $(e_n^m, (n, m) \in \mathbb{N}^2) \subset \mathbb{E}$ telle que $\bigvee_n e_n^m$ ait un sens dans $\mathbb{E}$, pour tout m, il existe $U \subset \mathbb{E}_+^*$ avec :

i) Pour tout $u \in U$ et tout $m \in \mathbb{N}$ $\bigvee_n u(e_n^m) = u\left(\bigvee_n e_n^m \right)$.

ii) U sépare $\mathbb{E}$ au sens suivant : si $x \in \mathbb{E}_+$ et $u(x) \leq 0$ pour tout $u \in U$ alors $x = 0$.

Remarquons que si $\mathbb{E}$ est $l - s$, $\mathbb{E}_+^*$ sépare $\mathbb{E}$ et que $\mathbb{E}$ est « quasiment du type A. M. » [*13*].

Une seconde localisation se fait par l'intermédiaire de la notion suivante :

1.2. DÉFINITION. — Un point $e \in \mathbb{E}_+$ est dit point d'ordre si l'idéal principal engendré par e, soit $\mathbb{E}_e$, est un espace $l - s$.

L'ensemble des points d'ordre est héréditaire : si $0 \leq e \leq e_0$ avec e_0 point d'ordre, alors e est un point d'ordre car $\mathbb{E}_e \subseteq \mathbb{E}_{e_0}$ et tout sous-espace réticulé d'un espace $l - s$ est aussi $l - s$.

1.3. EXEMPLES. — Afin d'illustrer les notions précédentes montrons comment les espaces les plus classiques s'insèrent dans ce cadre.

a) L'espace $c_0(\Gamma)$, des familles de nombres réels indéxés par l'ensemble filtrant croissant Γ et convergeant vers 0 est $l - s$: il suffit de prendre pour U les projections sur les coordonnées.

b) Soit $(\Omega, \mathbf{F})$ un espace probabilisable, alors $\mathscr{L}^\infty$ espace des applications sur Ω, réelles, mesurables et bornées est un espace $l - s$. Considérer les applications $\delta_x : f \to f(x)$ pour $x \in \Omega$ et $f \in \mathscr{L}^\infty$.

c) P étant une probabilité sur $(\Omega, \mathbf{F})$ l'espace des classes d'équivalence $\mathbb{L}^\infty$ est $l - s$. En effet soit $(e_n^m) \subset \mathbb{L}^\infty$, $\bigvee_n e_n^m \in \mathbb{L}^\infty$, tout m. Notons ρ un relèvement de $\mathbb{L}^\infty$ dans $\mathscr{L}^\infty$ on a : $\bigvee_n \rho(e_n^m) = \rho\left(\bigvee_n e_n^m\right)$ P-p. s. pour tout m. Donc si $x \notin \mathrm{N}_m$ négligeable, $\bigvee_n \{ \rho(e_n^m)(x) \} = \left\{ \rho\left(\bigvee_n e_n^m\right) \right\}(x)$. Ainsi, l'ensemble $\mathrm{U} = \left\{ \delta_x \circ \rho \text{ où } x \notin \mathrm{N} = \bigcup_m \mathrm{N}_m \right\}$ satisfait aux conditions *i*) et *ii*) précédentes et montre que $\mathbb{L}^\infty$ est $l - s$.

d) L'espace des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$: $\mathrm{C}([0, 1])$ est un espace $l - s$. Si $(e_n^m) \subset \mathrm{C}([0, 1])$ avec les conditions habituelles, on a : $\left(\bigvee_n e_n^m\right)(x) = \bigvee_n (e_n^m(x))$ pour tout x n'appartenant pas à un ensemble maigre de $[0, 1]$. En remarquant que la réunion dénombrable d'ensembles maigres est encore maigre et, lorsque x varie dans le complémentaire d'un maigre, les applications δ_x séparent $\mathrm{C}([0, 1])$, la preuve est immédiate. Cette démonstration s'adapte évidemment à $\mathrm{C}(\mathbb{R})$ ou plus généralement, à l'espace des fonctions continues sur un espace de Baire.

e) Tout point — non nul — du cône positif de $\mathbb{L}^p$ $0 \leq p \leq +\infty$ est un point d'ordre car $\mathbb{L}_e^p$ est isomorphe à un espace $\mathbb{L}^\infty$.

(*f*) De même si $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}_+)$ — mesures réelles positives — alors μ est un point d'ordre, car $\mathscr{M}_\mu$ est aussi isomorphe à un espace $\mathbb{L}^\infty$.

(*g*) Si e est une unité faible d'un Banach à norme continue pour l'ordre, en utilisant 1-6-14 de [*10*], on voit que e est un point d'ordre.

2. CLASSIFICATION DES MESURES VECTORIELLES

A.2.1. Définitions. — $\mathbf{F}$ étant une tribu, nous désignerons par $\mathscr{M}_0(\mathbf{F}, \mathbb{E}_+)$ ou s'il n'y a pas de confusion, $\mathscr{M}_0(\mathbb{E}_+)$, l'ensemble des mesures positives à valeurs dans $\mathbb{E}$. C'est-à-dire des applications additives, μ, de $\mathbf{F}$ dans $\mathbb{E}_+$ telles que si $(\mathrm{A}_n) \subset \mathbf{F}$ et $\mathrm{A}_n \searrow \varnothing$ alors $\mu(\mathrm{A}_n) \searrow 0$ $\left(\bigwedge_n \mu(\mathrm{A}_n) = 0\right)$.

On voit aisément que $\mu \in \mathcal{M}_0(\mathbb{E}_+)$ si et seulement si, μ est additive positive et si $(A_n) \subset \mathbf{F}$, disjoints deux à deux, alors :

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim \nearrow \Sigma_1^m \mu(A_n) = \bigvee_m \Sigma_1^m \mu(A_n) = \text{déf. } \Sigma_1^\infty \mu(A_n)$$

Nous noterons $\mathcal{M}_0(\mathbb{E}) = \mathcal{M}_0(\mathbb{E}_+) - \mathcal{M}_0(\mathbb{E}_+)$ l'ensemble des mesures signées.

Enfin si μ est une application additive de $\mathbf{F}$ dans $\mathbb{E}$, on pose

$$\mu^+(A) = \bigvee_{B \in \mathbf{F}} \mu(AB)$$

lorsque cette expression a un sens et ainsi nous parlerons, sous réserve d'existence, de $\mu \vee \nu$, $\mu \wedge \nu$...

Rappelons aussi que si $\mathbb{E}$ est complètement réticulé — c. r. — $\mathcal{M}_0(\mathbb{E})$ est dénombrablement réticulé — d. r. — voir [*8*].

Citons encore deux propriétés élémentaires :

2.2. PROPOSITION :

a) *Soit* $\mu \in \mathcal{M}_0(\mathbb{E})$ *et soit* $(A_n) \subset \mathbf{F}$ *telle que* A_n *converge vers* A — $\overline{\lim}\, A_n \triangle A = \emptyset$ —, *alors* $\mu(A_n)$ *converge, pour l'ordre, vers* $\mu(A)$.

b) *Soit* $(\mu_n) \subset \mathcal{M}_0(\mathbb{E}_+)$ *telle que, pour tout* $A \in \mathbf{F}$ $\mu_n(A) \nearrow \mu(A)$ *alors* $\mu \in \mathcal{M}_0(\mathbb{E}_+)$.

2.3. PROPOSITION : THÉORÈME DE PETTIS. — $\mathbb{E}$ *étant un espace* $c - r$, *séparé par l'ensemble* $\mathbb{E}_{0+}^*$ *des formes linéaires positives séquentiellement continues pour l'ordre, on a l'équivalence entre* « $\mu \in \mathcal{M}_0(\mathbb{E}_+)$ » *et* « μ *est additive à valeurs dans* $\mathbb{E}_+$ *et* $u \circ \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$ *pour tout* $u \in \mathbb{E}_0^*$ ».

B. Alors que la notion de tribu et celle, conséquente, de mesure ne font intervenir que des expressions au plus dénombrables ; on voit que la définition de la partie positive d'une mesure dépasse, *a priori*, ce caractère. C'est pourquoi nous envisagerons la classe suivante :

2.4. DÉFINITION. — $D(\mathbf{F}, \mathbb{E})$ ou plus rapidement, $D(\mathbb{E})$, est l'ensemble des applications, ν, additives de $\mathbf{F}$ dans $\mathbb{E}$ telles que, pour tout $A \in \mathbf{F}$, $\nu^+(A)$ existe dans $\mathbb{E}$ et que $\nu^+(\Omega)$ soit atteint par une suite : il existe $(A_n, n \in \mathbb{N}) \subset \mathbf{F}$ — dépendant de ν — avec $\nu^+(\Omega) = \bigvee_n \nu(A_n)$.

Lorsque $\mathbb{E}$ est séparable pour l'ordre, par exemple $\mathbb{L}^\infty$, cette seconde condition est automatiquement vérifiée.

La proposition suivante donne un critère simple pour reconnaître l'appartenance à la classe $D(\mathbb{E})$. Notons μ_A la restriction de μ à A : $\mu_A(B) = \mu(AB)$.

2.5. PROPOSITION. — *Si* **F** *est engendrée par une algèbre,* $\mathscr{A}$, *dénombrable, et si la mesure* $\mu \in \mathscr{M}_0(\mathbb{E})$ *est absolument continue par rapport à une probabilité* P *sur* **F** — $P(B) = 0$ *implique* $\mu(B) = 0$ — *la condition* μ^+ *existe dans* $\mathbb{E}$, *implique alors que pour tout* $A \in \mathbf{F}$ $\mu_A \in D(\mathbb{E})$.

Preuve. — Posons $\overline{\mathscr{A}} = \mathscr{A} \triangle \mathscr{N}$ où $\mathscr{N}$ est l'ensemble des négligeables. Alors pour tout $C \in \mathbf{F}$ il existe une suite $(\overline{B}_n) \subset \overline{\mathscr{A}}$: $\overline{B}_n = B_n \triangle N_n$ avec $\overline{B}_n \to C$. Ainsi $\mu(\overline{B}_n A)$ converge pour l'ordre vers $\mu(CA)$ — proposition 2.2 — C'est-à-dire qu'il existe une suite $e_n \searrow 0$ avec $\mu(AC) \leq e_n + \mu(\overline{B}_n A)$. Si, maintenant $\mu(AB) \leq x$ pour tout $B \in \mathbf{F}$ on aura $\mu(AC) \leq e_n + x$ et, en faisant varier C, on arrive à $\mu^+(A) \leq x$: c'est bien que

$$\mu^+(A) = \bigvee_{B \in \mathscr{A}} \mu(AB).$$

Le passage aux suites de mesures se fait de la manière suivante :

2.6. DÉFINITION. — Une suite (μ_n) est dite D-latticielle si $(\mu_n) \subset D(\mathbb{E})$ et si pour tout triplet d'entiers (n, p, q) avec $p \leq q \leq n$ *on a* :

$$\left(\mu_n - \bigvee_p^q \mu_k\right) \in D(\mathbb{E}).$$

En particulier, pour une telle suite $\bigvee_p^q \mu_k$ est bien définie et est dans $\mathscr{M}_0(\mathbb{E})$ dès que $(\mu_n) \subset \mathscr{M}_0(\mathbb{E})$.

C. L'existence éventuelle de formes linéaires positives sur $\mathbb{E}$, permet d'envisager des mesures scalaires à valeurs dans $\mathbb{E}$.

2.7. DÉFINITION. — $\mathscr{M}_s(\mathbf{F}, \mathbb{E})$ — ou encore $\mathscr{M}_s(\mathbb{E}_+)$ — est l'ensemble des applications, μ, additives de **F** dans $\mathbb{E}_+$ telles que, pour tout $u \in \mathbb{E}_+^*$, $u \circ \mu \in \mathscr{M}_0(\mathbb{R}_+)$. On pose $\mathscr{M}_s(\mathbb{E}) = \mathscr{M}_s(\mathbb{E}_+) - \mathscr{M}_s(\mathbb{E}_+)$.

Remarques. — Lorsque $\mathbb{E}_+^* = \{0\}$, par exemple pour les $\mathbb{L}^p$ $0 \leq p < 1$; $\mathscr{M}_s(\mathbb{E})$ se réduit aux fonctions additives signées.

— *A contrario*, si $\mathbb{E}$ est séparé par $\mathbb{E}_+^*$, alors $\mathscr{M}_s(\mathbb{E}) \subset \mathscr{M}_0(\mathbb{E})$ l'inclusion pouvant être stricte comme le montre l'exemple suivant :

Prenons $\mathbb{E} = l^\infty(\mathbb{N})$ et $\mu = (\mu_n = 1_{[n,n+1]}dx)$ alors $\mu \in \mathcal{M}_0(\mathcal{B}(\mathbb{R}_+), l^\infty(\mathbb{N}))$ et si L est une limite de Banach sur l^∞ il suffit de considérer $A_i = 1_{[i,+\infty[}$ pour voir que $A_i \searrow \emptyset$ et $L \circ \mu(A_i) \equiv 1$ donc $\mu \notin \mathcal{M}_s(l^\infty)$.

D. Lorsque P est une probabilité sur **F** on peut, enfin, considérer la classe des mesures vectorielles absolument continues pour l'ordre par rapport à P [*2*] [*8*].

Soit donc $e \in \mathbb{E}_+$ et soit μ additive de **F** dans $\mathbb{E}_+$, si $\mu \wedge ne\mathrm{P} = \mu_n$ a un sens, c'est un élément de $\mathcal{M}_0(\mathbb{E}_+)$ et si, en outre, $\mu_n \nearrow \nu$ on a vu, proposition 2.2, que $\nu \in \mathcal{M}_0(\mathbb{E}_+)$. D'où la définition :

2.8. DÉFINITION. — $\mathcal{M}_{e,\mathrm{P}}(\mathbf{F}, \mathbb{E}_+)$ sera l'ensemble des mesures $\mu \in \mathcal{M}_0(\mathbb{E}_+)$ telles que $\mu = \vee \mu_n$ où $\mu_n = \mu \wedge ne\mathrm{P}$. On pose $\mathcal{M}_{e,\mathrm{P}}(\mathbb{E}) = \mathcal{M}_{e,\mathrm{P}}(\mathbb{E}_+) - \mathcal{M}_{e,\mathrm{P}}(\mathbb{E}_+)$. D'une autre manière, lorsque $\mathbb{E}$ est c. r., on voit que $\mathcal{M}_{e,\mathrm{P}}$ est la bande engendrée dans $\mathcal{M}_0(\mathbb{E})$ par la mesure $e\mathrm{P}$ et qu'ainsi toute mesure positive admet l'unique décomposition $\mu = \mu^1 + \mu^2$ où $\mu^1 \in \mathcal{M}_{e,\mathrm{P}}$ et μ^2 est étrangère à $e\mathrm{P}$ ($\mu^2 \wedge e\mathrm{P} = 0$).

Énonçons la proposition suivante pour $\mathbb{E}$ c. r. ce qui simplifie considérablement les hypothèses

2.9. PROPOSITION. — *$\mathbb{E}$ étant $l - s$, alors :*

a) *On a l'équivalence entre $\mu \in \mathcal{M}_{e,\mathrm{P}}(\mathbb{E})$ et $|\mu| \in \mathcal{M}_{e,\mathrm{P}}(\mathbb{E}_+)$*

b) *$\mathcal{M}_{e,\mathrm{P}}$ est un idéal de $\mathcal{M}_0(\mathbb{E})$; de plus si $\mu = \vee \mu_n$ avec $\mu_n \in \mathcal{M}_{e,\mathrm{P}}$ alors $\mu \in \mathcal{M}_{e,\mathrm{P}}$: $\mathcal{M}_{e,\mathrm{P}}$ est une bande σ-bande.*

3. PROPRIÉTÉS DES MESURES

Le résultat principal, permettant de remonter les propriétés réelles, est :

3.1 THÉORÈME. — *Soit (μ_n) une suite* D-*latticielle de $\mathcal{M}_0(\mathbb{E})$ où $\mathbb{E}$ est $l - s$. Il existe une partie séparante $\mathrm{U} \subset \mathbb{E}_+^*$ telle que, pour tout $u \in \mathrm{U}$ et tout couple (p, q) d'entiers $p \leq q$, on ait :* $\bigvee_p^q u \circ \mu_n = u\left(\bigvee_p^q \mu_n\right)$.

Preuve. — L'existence de $\bigvee_p^q \mu_n$ résulte des considérations précédentes.

En outre il existe une suite $(\mathrm{A}_n) \subset \mathbf{F}$ telle que, en posant

$$e_n^{p,q+1} = \left(\mu_{q+1} - \bigvee_p^q \mu_k\right)(\mathrm{A}_n)$$

on a :

$$\left(\mu_{q+1} - \bigvee_p^q \mu_k\right)^+(\Omega) = \bigvee_n e_n^{p,q+1}$$

Par bijection $\mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}$, on se ramène à une suite e_n^m et ainsi on détermine une partie U séparante avec, pour $u \in \mathrm{U}$,

$$u\left[\left(u_{q+1} - \bigvee_p^q \mu_k\right)^+(\Omega)\right] = u\left(\bigvee_n e_n^{p,q+1}\right) = \bigvee_n u\left(\mu_{q+1} - \bigvee_p^q \mu_k\right)(\mathrm{A}_n)$$

Cette dernière expression est inférieure à :

$$\left(u \circ \mu_{q+1} - u \circ \bigvee_p^q \mu_k\right)^+(\Omega).$$

Comme, de manière générale, on a $u \circ \rho^+ \geq (u \circ \rho)^+$, lorsque ces expressions ont un sens, on obtient l'égalité :

$$u\left(\mu_{q+1} - \bigvee_p^q \mu_k\right)^+ = \left(u \circ \mu_{q+1} - u \circ \bigvee_p^q \mu_k\right)^+$$

et par récurrence $u \circ \bigvee_p^q \mu_k = \bigvee_p^q u \circ \mu_k$ pour tout couple $(p \leq q)$, ce qui achève notre preuve.

Supposons maintenant que

$$\bigvee_p^q \mu_k \nearrow \bigvee_p^\infty \mu_k \qquad \text{et que } \lim_p \searrow \bigvee_p^\infty \mu_k = \overline{\lim}\, \mu_k$$

existent et soient à valeurs dans $\mathbb{E}$. On peut rajouter à la famille précédente, $(e_n^{p,q})$, les deux suites : $({}_pe_n) = \left(\bigvee_p^n \mu_k\right)(\Omega)$ qui croît, en n, vers

$$\left(\bigvee_{k \geq p} \mu_k\right)(\Omega) = -\,{}_pe$$

et $({}_pe)$ qui croît vers $-(\overline{\lim}\ \mu_n)(\Omega)$. On a, pour la partie U associée à ces familles $u\ \overline{\lim}\ \mu_n = \overline{\lim}\ u \circ \mu_n$, ce qui s'énonce :

3.2. Corollaire. — *$\mathbb{E}$ étant un espace $l - s$, si les expressions définissant $\overline{\lim}\ \mu_n$ où (μ_n) est une suite* D*-latticielle de $\mathscr{M}_0(\mathbb{E})$ ont un sens. Il existe une partie* $\mathrm{U} \subset \mathbb{E}_+^*$, *séparante telle que, pour* $u \in \mathrm{U}$, $u \circ \overline{\lim}\ \mu_n = \overline{\lim}\ u \circ \mu_n$.

Donnons une première utilisation de ces propriétés :

si $\mu \in \mathscr{M}_{e,\mathrm{P}}(\mathbb{E})$ alors μ est absolument continue par rapport à P ; la réciproque étant fausse en général [*2*] [*8*]. Néanmoins

3.3. Proposition. — *Soit $\mathbb{E}$ un espace $l - s$, c. r. et soit $\mu \in \mathscr{M}_s(\mathbf{F}, \mathbb{E}_+)$ absolument continue par rapport à une probabilité* P *définie sur la tribu* **F** *séparable* P*-p. s.*

Alors $\mu \in \mathscr{M}_{\mu(\Omega),\mathrm{P}}(\mathbb{E}_+)$.

Preuve. — Notons $e = \mu(\Omega)$ et $\mu_n = \mu \wedge ne\mathrm{P}$. La proposition 2.4 ainsi que les hypothèses sur $\mathbb{E}$ justifient l'utilisation de la procédure du théorème ci-dessus. On détermine une partie $\mathrm{U} \in \mathbb{E}_+^*$ séparante telle que pour tout $u \in \mathrm{U}$ $u\left(\bigvee_n \mu_n\right) = \bigvee_n u(\mu_n) = \bigvee_n u\mu \wedge n\,u(e)\mathrm{P}$.

Si $u(e) = 0$, alors $u\left(\bigvee_n \mu_n\right) = 0 = u \circ \mu$; si $u(e) \neq 0$, par hypothèse $u \circ \mu = \bigvee_n u \circ \mu \wedge n\,u(e)\mathrm{P}$, donc on a toujours $u\left(\bigvee_n \mu_n\right) = u\mu$. En utilisant la séparation on conclut $\mu = \vee\ \mu_n$ i. e. $\mu \in \mathscr{M}_{e,\mathrm{P}}$.

3.4. Remarque. — Si $\mu \in \mathscr{M}_{e,\mathrm{P}}(\mathbb{E}_+)$, $\mathbb{E}_+$ vérifiant les conditions de la proposition précédente. Il existe une partie séparante $\mathrm{U} \subset \mathbb{E}_+^*$ avec, pour $u \in \mathrm{U}$, $u\mu = \bigvee_n u(\mu \wedge ne\mathrm{P})$ donc $u \circ \mu$ est une mesure réelle absolument continue par rapport à P. Ce qui fournit une réciproque partielle à la proposition 3.3.

4. SUITES DE MESURES ADAPTÉES

On se donne maintenant une filtration $(\mathbf{F}_n, n \in \mathbb{N})$ de sous-tribus de **F**. Nous noterons par T l'ensemble des temps d'arrêts bornés liés à cette filtration.

4.1. Définitions. — Une suite (μ_n) est dite adaptée à $(\mathbf{F}_n)$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\mu_n \in \mathscr{M}_0(\mathbf{F}_n, \mathbb{E})$.

Soit P une probabilité sur $\mathbf{F}$ on dira que (μ_n) est $(\mathbf{F}_n, \mathrm{P})$ adaptée si (μ_n) est adaptée à $(\mathbf{F}_n)$ et pour tout n, μ_n est absolument continue par rapport à $\mathrm{P}\,|_{\mathbf{F}_n}$.

Avant de poursuivre il nous faut dire un mot sur les propriétés de prolongement d'une mesure vectorielle.

Soit $\mu \in \mathscr{M}_0(\mathbf{F}, \mathbb{E}_+)$, si l'espace $\mathbb{E}$ est $d - r$, on peut prolonger μ en un opérateur de $\mathscr{L}^\infty(\mathbf{F}, \mathbb{R}_+)$ dans $\mathbb{E}_+$ de sorte que si $(f_n, n \in \mathbb{N}) \subset \mathscr{L}^\infty$ vérifie $f_n \searrow 0$ simplement — donc pour l'ordre — alors $\mu(f_n) \searrow 0$ dans $\mathbb{E}_+$. Ainsi, sans difficulté, on passe au cas $\mu \in \mathscr{M}_0(\mathbf{F}, \mathbb{E})$ qui devient un opérateur séquentiellement continu pour l'ordre de $\mathscr{L}^\infty(\mathbf{F}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{E}$.

On en déduit qu'une mesure $\mu \in \mathscr{M}_0(\mathbf{G}, \mathbb{E})$ où $\mathbf{G}$ est une sous-tribu de $\mathbf{F}$ et $\mathbb{E}$ $d - r$, peut être prolongé à la tribu $\mathbf{F}$ si elle est absolument continue par rapport à P. En effet, il suffit de composer les applications séquentiellement continues suivantes :

$$\mathrm{E}(\,.\mid \mathbf{G})\,;\ \mathbb{L}_p^\infty(\mathbf{F}) \to \mathbb{L}_p^\infty(\mathbf{G}) \qquad \text{et} \qquad \mu \text{ de } \mathbb{L}_p^\infty(\mathbf{G}) \text{ dans } \mathbb{E}.$$

Le prolongement, noté encore μ, vérifie $\mu(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{E}(1_\mathrm{A} \mid \mathbf{G}))$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathbf{F}$:

4.2. PROPOSITION. — *Si $\mathbb{E}$ est $d - r$. Une suite (μ_n) adaptée par rapport à la filtration croissante $(\mathbf{F}_n)$ est $(\mathbf{F}_n, \mathrm{P})$ adaptée si et seulement si il existe une suite (ν_n) qui est $(\mathbf{F}_n, \mathrm{P})$ adaptée et telle que $\nu_n(\mathrm{A}) = \mu_n(\mathrm{E}(1_\mathrm{A} \mid \mathbf{F}_n))$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathbf{F}$ et tout $n \in \mathbb{N}$.*

On peut ainsi examiner le caractère D-latticiel d'une telle suite $(\mathbf{F}_n, \mathrm{P})$ adaptée en convenant de ne considérer que le prolongement canonique défini précédemment.

Nous sommes maintenant en mesure de généraliser, à titre d'exemples, certains théorèmes classiques du cas réel. Pour le théorème 4.3 ci-dessous rappelons l'extension purement banachique de [*4*]. Notre preuve, ainsi que celles des parties 5, sur l'enveloppe de Snell et les amarts ; 6, pour les processus sous-additifs au sens des mesures et, enfin, pour la convergence pour l'ordre des martingales simples de la partie 7, consistent essentiellement à remonter les propriétés d'ordre du cas réel.

4.3. THÉORÈME : INÉGALITÉ DE CHACON. — *Soit $\mathbb{E}$ un espace $l - s$, $c - r$, et soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n \in \mathscr{M}_{e,\mathrm{P}}(\mathbf{F}_n, \mathbb{E}_+)$ où $\mathbf{F}_n$ est séparable P p. s. Supposons en outre qu'il existe $e \in \mathbb{E}_+$ avec*

$$\mu_\tau(\Omega) - \mu_\sigma(\Omega) \leq e \text{ pour tout } (\tau, \sigma) \in \mathrm{T}^2$$

et que les expressions définissant les limites sup et inf de la suite (μ_n) — prolongée — existent alors :

$$(\overline{\lim}\ \mu_n - \underline{\lim}\ \mu_n)(\Omega) \leq e.$$

Preuve. — Il résulte des considérations précédentes que μ_n est $(\mathbf{F}_n, \mathrm{P})$ adaptée et que nous pouvons parler de prolongement ainsi que du sup et l'inf des μ_n.

Fixons provisoirement n, comme $\mu_n = \bigvee_k \mu_n \wedge ke\mathrm{P}$. Il existe partie $\mathrm{U}_n \subset \mathbb{E}_+^*$ séparante et telle que $u \circ \mu_n = \bigvee_k u(\mu_n \wedge ke\mathrm{P})$. Donc $u \circ \mu_n$ est une mesure réelle, pour tout $u \in \mathrm{U}_n$. En faisant maintenant varier l'indice n, nous ne sortons pas du caractère dénombrable et on détermine alors une partie $\mathrm{U} \subset \mathbb{E}_+^*$ séparante telle que $u \circ \mu_\tau \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ pour tout couple $(u, \tau) \in \mathrm{U} \times \mathrm{T}$ et de même, $u(\overline{\lim}\ \mu_n) = \overline{\lim}\ (u\, \mu_n)$; $u(\overline{\lim}\ \mu_n) = \underline{\lim}\ (u\, \mu_n)$.

Remarquons, en outre, qu'il existe des mesures réelles m_u et M_u à densités par rapport à P, avec $m_u \leq u \circ \mu_n \leq \mathrm{M}_n$ pour tout n et tout $u \in \mathrm{U}$. L'inégalité de Chacon réelle, exprimée en termes de mesures [3] donne

$$(\overline{\lim}\ u \circ \mu_n - \underline{\lim}\ u \circ \mu_n)(\Omega) \leq u(e)$$

Ce qui en remontant, avec la séparation, donne le résultat.

4.4. Remarque. — Lorsque nous supposons seulement le caractère $d - r$ sur $\mathbb{E}$ et que la filtration $(\mathbf{F}_n)$ non nécessairement séparable, l'hypothèse supplémentaire : (μ_n) et $(-\mu_n)$ sont D-latticielles permet d'obtenir la même conclusion.

Signalons encore le cas $\mathbf{F}_n \equiv \mathbf{F}$ où il est immédiat de voir, pour des mesures réelles, que $\left(\bigvee_n \mu_n\right)(\Omega) = \bigvee_{\mathrm{T}} (\mu_\tau(\Omega))$, ainsi :

4.5. Corollaire. — *$\mathbb{E}$ étant un espace $l - s$ et (μ_n) une suite de $\mathscr{M}_{e,\mathrm{P}}(\mathbb{E})$ D-latticielle, telle que $\mu_\tau(\Omega) \leq e$ pour tout $\tau \in \mathrm{T}$ alors $\left(\bigvee_{n \leq p} \mu_n\right)(\Omega) \leq e$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.*

La preuve est analogue à la précédente. De plus si $\bigvee_n \mu_n$ à un sens alors $\left(\bigvee_n \mu_n\right)(\Omega) = \bigvee_{\mathrm{T}} (\mu_\tau(\Omega))$.

5. CONTRÔLE AU SENS DE SNELL

Le but de cette partie est d'obtenir un encadrement à l'aide de sous et de surmartingales mesures pour une suite adaptée [12].

Ainsi nous dirons que la suite (μ_n), (F_n)-adaptée est contrôlable au sens de Snell s'il existe une sous martingale (s_n) et une surmartingale (S_n) telles que

$$s_n \leq \mu_n \leq S_n \quad \text{et} \quad s_n(\Omega) = \bigwedge_{\tau \geq n} \mu_\tau(\Omega), \quad S_n(\Omega) = \bigvee_{\tau \geq n} \mu_\tau(\Omega)$$

Signalons la difficulté suivante : lorsque (μ_n) est (F_n)-adaptée, μ_n n'est pas définie, *a priori*, sur $\mathbf{F}_{n+1}$.

5.1 THÉORÈME : CONTRÔLE DE SNELL. — *Soit* (μ_n) *une suite telle que* $\mu_n \in \mathscr{M}_s(\mathbf{F}_n, \mathbb{E})$ *où* $\mathbb{E}$ *est un espace* $l-s$, *séparable pour l'ordre. Supposons que les expressions* $s_n = \bigwedge_{\tau \geq n} \mu_\tau|_{\mathbf{F}_n}$ *et* $S_n = \bigvee_{\tau \geq n} \mu_\tau|_{\mathbf{F}_n}$ *aient un sens — à valeurs dans* $\mathbb{E}$ *— alors* (s_n) *et* (S_n) *sont, respectivement, la sous et la surmartingale contrôlant la suite* (μ_n) *au sens de Snell.*

Preuve. — Soit U une partie séparante telle que $u(s_n) = \bigwedge_{\tau \geq n} u(\mu_\tau|_{\mathbf{F}_n})$.

L'existence de U s'établit comme précédemment en remarquant que l'inf précédent est atteint pour une suite $\{ c_k \} \subset T$. Pour tout $u \in U$, $u(s_n)$ est une sous martingale réelle et $(us_n)(\Omega) = \bigvee_{\tau \geq n} u \circ \mu_\tau(\Omega)$ donc $u \circ s_\tau(\Omega) \leqslant u \circ s_\sigma(\Omega)$ pour $\tau \leq \sigma$ ce qui exprime que (s_n) est une martingale. En utilisant la relation

$$u(s_n(\Omega)) = \bigwedge_{\tau \geq n} u \circ \mu_\tau(\Omega) = u\Big(\bigwedge_{\tau \geq n} \mu_\tau(\Omega)\Big)$$

on voit que : $s_n(\Omega) = \bigwedge_{\tau \geq n} \mu_\tau(\Omega)$. La procédure est similaire pour S_n.

5.2. REMARQUES :

a) La démonstration de la procédure de Snell, dans le cas réel, est basée sur la décomposition de Jordan-Hahn, qui est utilisée pour affirmer que l'ensemble $\{ \mu_\tau|_{\mathbf{F}_n}, \tau \geq n \}$ est filtrant croissant en μ. D'où la « nécessité » d'imposer que $u \circ \mu$ est une mesure.

b) Néanmoins, il est possible de contourner la condition $\mathscr{M}_s$ en procédant de manière locale comme dans la preuve du théorème 4.3. Si nous supposons $\mathbb{E}$ $c-r$ et les $\mathbf{F}_n$ séparables ainsi que $\mu_n \in \mathcal{M}_{e,\mathrm{P}}(\mathbf{F}_n, \mathbb{E})$, on détermine encore une partie $\mathrm{U} \subset \mathbb{E}_+^*$ séparante avec $u \circ \mu_\tau \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ et

$$u\left(\bigwedge_{\tau \geq n} \mu_\tau |_{\mathbf{F}_n}\right) = \bigwedge_{\tau \geq n} u \circ \mu_\tau |_{\mathbf{F}_n}.$$

Nous obtenons facilement le même encadrement avec des hypothèses beaucoup plus aisées à vérifier — par exemple dès que les mesures sont à densités vectorielles [*2*] —.

Nous allons, en suivant cette fois la partie *b*) de la remarque, compléter le théorème précédent.

5.3. Théorème. — *Soient* $\mathbb{E}$ *un espace* $l-s$, $c-r$ *et* $(\mathbf{F}_n)$ *une filtration croissante de sous-tribus séparables* P-*p. s. Pour que la suite* (μ_n), $\mu_n \in \mathcal{M}_{e,\mathrm{P}}(\mathbf{F}_n, \mathbb{E}_+)$, *soit contrôlable au sens de Snell, il faut et il suffit que* $\bigvee_{\mathrm{T}} \mu_\tau(\Omega) \in \mathbb{E}$.

Preuve. — Supposons $0 \leq \mu_\tau(\Omega) \leq x$ et posons $\mathrm{S}_n^m = \bigvee_{m \geq \tau \geq n} \mu_\tau |_{\mathbf{F}_n}$. Conjointement avec la remarque 5.2.*b*, notons encore U une partie séparante de $\mathbb{E}_+^*$ telle que pour tout couple (n, m) et tout $u \in \mathrm{U}$:

$$u\mathrm{S}_n^m = \bigvee_{m \geq \tau \geq n} u \circ \mu_\tau |_{\mathbf{F}_n} \leq \bigvee_{\tau \geq n} u \circ \mu_\tau |_{\mathbf{F}_n}$$

et $(u \circ \mu_\tau)$ est une suite de mesures réelles contrôlables au sens de Snell [*12*] car $\bigvee_\tau u \circ \mu_\tau(\Omega) \leq u(x)$. Par conséquent $\bigvee_n u \circ \mu_\tau |_{\mathbf{F}_n}$ est la surmartingale réelle associée à $(u \circ \mu_\tau)$ et il s'en suit que :

$$u(\mathrm{S}_n^m(\Omega)) \leq u(x) \text{ d'où } \mathrm{S}_n^m(\Omega) \leq x \text{ pour tout } m.$$

On en déduit, avec le caractère $c-r$ de l'espace, que la suite croissante de mesures $\left(\bigvee_{m \geq \tau \geq n} \mu_\tau |_{\mathbf{F}_n}, m \in \mathbb{N}\right)$ est convergente et ainsi $\mathrm{S}_n = \bigvee_{\tau \geq n} \mu_\tau |_{\mathbf{F}_n}$ est bien définie.

La réciproque est triviale.

Comme dans le cas réel, [*7*], nous en déduisons une caractérisation des amarts pour l'ordre [*2*] [*8*]. Rappelons auparavant les définitions suivantes :

5.4. DÉFINITIONS :

Une suite (μ_n) adaptée à $(\mathbf{F}_n)$ est un 0-amart si $(\mu_\tau(\Omega), \tau \in \mathrm{T})$ converge pour l'ordre.

— $\mathscr{A}^0$ est l'ensemble des 0-amarts (μ_n) tels que $\left(\bigvee_{\mathrm{T}} |\mu_\tau|(\Omega)\right)$ existe dans $\mathbb{E}$.

5.5. — COROLLAIRE. — *La suite* (μ_n) *vérifiant les conditions du théorème 5.1 ou 5.3 est un* 0-*amart si et seulement si :*

$$(\mathrm{S}_n - s_n)(\Omega) \searrow 0.$$

Avant d'énoncer une propriété de convergence des 0-amarts, rappelons la situation du cas réel :

Lorsque (μ_n) est un amart réel tel que $|\mu_n| \leq m$, m mesure réelle ; alors μ_n converge pour l'ordre vers une mesure μ. En particulier pour une martingale (X_n) telle que $\bigvee_n |\mathrm{X}_n| \in \mathbb{L}^1$, on obtient le théorème des martingales : convergence p. s. et dans $\mathbb{L}^1$.

L'adaptation au cas vectoriel, pour un espace $\mathbb{E}$ c. r., ce qui simplifie les énoncés et, de plus, assure que $\mathscr{A}^0$ est réticulé, donne :

5.6. — THÉORÈME. — *Soient* $\mathbb{E}$ *un espace* $c - r$, $l - s$, $(\mathbf{F}_n)$ *une filtration croissante de tribus dénombrablement engendrées* P-*p. s. Tout* 0-*amart* (μ_n), $(\mathbf{F}_n, \mathrm{P})$ *adapté tel que* $|\mu_n| \leq m$, $m \in \mathscr{M}_0(\mathbb{E}_+)$ *et absolument continu par rapport à* P, *converge au sens de l'ordre.*

Preuve. — Les hypothèses du théorème justifient la procédure standard, assurant l'existence d'une partie U, séparante avec :

$$u\,(\lim_\tau \mu_\tau(\Omega)) = \lim u \circ \mu_\tau - (\Omega) - (u \circ \mu_n) \text{ est un amart réel,}$$

et $u\,(\overline{\lim}\,\mu_n) = \overline{\lim}\,(u \circ \mu_n)$, ainsi que $|u \circ \mu_n| \leq u \circ m$ où $u \circ m$ est additive à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Le théorème réel montre que $u \circ \mu_n$ converge pour l'ordre donc, en remontant, $\overline{\lim}\,\mu_n = \underline{\lim}\,\mu_n$.

6. UNE PROPRIÉTÉ DE CONVERGENCE POUR LES PROCESSUS SOUS-ADDITIFS

L'exposé fondamental de Kingman [9] nous servira de référence.

6.1. DÉFINITION. — Une suite $(\mu_n) \subset \mathscr{M}_0(\mathbf{F}, \mathbb{E}_+)$ est un processus sous-additif (positif) si $\mu_{n+k} \leq \mu_n + \mu_k \circ \theta^n$ où θ est une transformation préservant l'espace de probabilité $(\Omega, \mathbf{F}, \mathrm{P})$.

Nous en déduisons la notion de suite sous-additive : $(x_n) \subset \mathbb{E}_+$ est dite sous-additive si $x_{n+k} \leq x_n + x_k$, tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^2$.

6.2. LEMME. — *Si* (x_n) *est une suite sous-additive d'un espace* $\mathbb{E}$ $d - r$ *alors* $\frac{x}{n}$ *converge pour l'ordre vers* $\bigwedge_n \frac{x_n}{n}$.

La preuve est analogue à celle du cas réel, donnée dans l'article précité, en remarquant que $\bigvee_n \frac{x_n}{n}$ existe.

Rappelons, selon la partie 1, qu'une suite (v_n) de mesures réelles absolument continues par rapport à P est $\bar{\bar{0}}$-convergente vers v si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_n \wedge k\mathrm{P}$ converge pour l'ordre vers $v \wedge k\mathrm{P}$.

Enfin, comme conséquence du théorème de convergence p. s. et dans $\mathbb{L}^1$ des processus sous-additifs (variables aléatoires) réels, avec le facteur $\frac{1}{n}$, il est clair que si (μ_n) est un processus sous-additif et si $(u \circ \mu_n)$ est une suite de mesures réelles, pour un $u \in \mathbb{E}_+^*$, c'est aussi un processus sous-additif et ainsi $\frac{1}{n} u\mu_n$ est à $\bar{\bar{0}}$-convergente vers $\bigwedge_n \frac{1}{n} u\mu_n |_{\mathbf{I}}$ où $\mathbf{I}$ désigne la tribu des événements invariants par rapport à θ.

Alors pour tout $\mathrm{I} \in \mathbf{I}$ la suite $x_n = \mu_n(\mathrm{I})$ est sous-additive. Par conséquent $\frac{1}{n} \mu_n |_{\mathbf{I}}(.)$ converge en tout point de $\mathbf{I}$ au sens de l'ordre vers $\bigwedge_n \frac{1}{\mathrm{n}} \mu_n |_{\mathbf{I}}(.)$ qui est une mesure de $\mathscr{M}_0(\mathbf{I}, \mathbb{E}_+)$ dès que $\mathbb{E}$ est $d - r$. Afin de simplifier les énoncés nous supposerons dans la suite que $\mathbb{E}$ est $c - r$ et que la tribu $\mathbf{F}$ est séparable P-p. s.

6.3. THÉORÈME : CONVERGENCE DES PROCESSUS SOUS-ADDITIFS. — *Soit* (μ_n) *un processus sous-additif tel que* $(\mu_n) \subset \mathscr{M}_{e,\mathrm{P}}(\mathbb{E}_+)$ *où* $\mathbb{E}$ *est un espace* $l - s$. *Alors*

1) *Il existe une mesure, m, invariante par* θ *et telle que* $\left| \frac{1}{n} \mu_n - m \right| (\Omega)$ *converge vers* 0 *pour l'ordre dans* $\mathbb{E}$.

2) $\frac{1}{n} \mu_n$ *est* $\bar{\bar{0}}$-*convergente vers m.*

3) *m est le prolongement canonique à* $\mathbf{F}$ *de la mesure définie sur* $\mathbf{I}$ *par* $\bigwedge_n \left[\frac{1}{n} \mu_n |_{\mathbf{I}}(.) \right]$.

Preuve. — Fixons $A \in \mathbf{F}$ et $I \in \mathbf{I}$ les suites $\left(x_n = \frac{1}{n}\mu_n(A)\right)$ et $\left(y_n = \frac{1}{n}\mu_n(I)\right)$ sont majorées dans $\mathbb{E}$. En procédant de manière analogue à la preuve du théorème 4.3, on trouve une partie séparante $U \subset \mathbb{E}_+^*$ telle que, pour tout $u \in U$, on ait :

— $u\,(\overline{\lim}\, x_n) = \overline{\lim}\,(u(x_n))$ et $u\,(\underline{\lim}\, x_n) = \underline{\lim}\,(u(x_n))$
— $u\,(\overline{\lim}\, y_n) = \overline{\lim}\,(u(y_n))$ et $u\,(\underline{\lim}\, y_n) = \underline{\lim}\,(u(y_n))$
— Pour tout couple (n, k), $u\left(\bigvee_n \frac{1}{n}\mu_n \wedge keP\right) = \bigvee_n u\left(\frac{1}{n}\mu_n \wedge keP\right)$

— Pour tout n, $u\mu_n = \bigvee_k u(\mu_n \wedge keP)$.

Donc $(u \circ \mu_n)$ est un processus (mesures) sous-additif réel et en appliquant le théorème de convergence de ces processus on voit que :

— $u(x_n)$ respectivement $u(y_n)$ convergent donc

$$u\,(\overline{\lim}\, x_n) = u\,(\underline{\lim}\, x_n) \qquad \text{et} \qquad u\,(\overline{\lim}\, y_n) = u\,(\underline{\lim}\,(y_n))$$

— $\left(\frac{1}{n}u \circ \mu_n\right)$ est $\overline{\overline{0}}$ convergente vers $\bigwedge_n \left[\frac{1}{n}u \circ \mu_n|_{\mathbf{I}}(.)\right]$

— La suite $\left(\frac{1}{n}u \circ \mu_n\right)$ est convergente dans l'espace de Banach des mesures réelles avec la norme $\|v\| = \|v(\Omega)\|$

En repassant dans l'espace $\mathbb{E}$, grâce à la séparation, on en déduit :

— $\frac{1}{n}\mu_n(A)$ — respectivement $\frac{1}{n}\mu_n(I)$ — converge pour l'ordre vers $m(A)$ — respectivement vers $\bigwedge_n \frac{1}{n}\mu_n(I)$ —

— L'application définie sur $\mathbf{I}$ par $\bigwedge_n \left[\frac{1}{n}\mu_n|_{\mathbf{I}}(.)\right]$ est une mesure qui n'est autre que la restriction de m à $\mathbf{I}$.

Et que $\left(\frac{1}{n}\mu_n\right)$ est $\overline{\overline{0}}$-convergente vers le prolongement canonique de cette mesure.

En considérant maintenant pour A et $\theta^{-1}(A)$, les suites $\frac{1}{n}\mu_n(A)$

et $\frac{1}{n}\mu_n(\theta^{-1}(A))$, il existe encore une partie séparante notée toujours U, telle que

$$u\left(\overline{\lim}\,\frac{1}{n}\mu_n(A)\right) = \overline{\lim}\left[u\left(\frac{1}{n}\mu_n(A)\right)\right];$$

$$u\left(\overline{\lim}\,\frac{1}{n}(\theta^{-1}(A))\right) = \overline{\lim}\left[u\left(\frac{1}{n}\mu_n\theta^{-1}(A)\right)\right]$$

et les expressions analogues avec $\underline{\lim}$; et $(u \circ \mu_n)$ est un processus sous-additif. Comme précédemment on en déduit que m est invariante par θ. Il est clair que m est une mesure et il ne reste plus qu'à établir que la seconde partie de la première assertion.

Pour cela on remarque qu'il existe une partie $U \subset \mathbb{E}_+^*$ séparante telle que $u\left(\left|\frac{1}{n}\mu_n - m\right|\right) = \left|u\left(\frac{1}{n}\mu_n - m\right)\right|$, $(u \circ \mu_n)$ est un processus sous-additif et $u\left[\overline{\lim}\left(\left|\frac{1}{n}\mu_n - m\right|(\Omega)\right)\right] = \overline{\lim}\left(u\left[\left|\frac{1}{n}\mu_n - m\right|(\Omega)\right]\right)$ ceci pour tout $u \in U$. Alors le cas réel montre que $\left|u\left(\frac{1}{n}\mu_n - m\right)\right|(\Omega) \to 0$ ce qui achève notre preuve.

6.4. Remarques :

— La convergence de $|\nu_n|(\Omega)$ vers 0 dans $\mathbb{E}$ est une version pour l'ordre — non topologique — de la convergence en norme des mesures réelles. En adoptant la terminologie de [*1*] on dit qu'une telle suite de mesures converge en moyenne au sens de l'ordre.

— Pour l'égalité entre les prolongements canoniques $u \circ \tilde{\mu}$ et $\widetilde{u \circ \mu}$ on pourra se référer à la proposition 7.1 ci-après.

— De manière évidente un processus sous-additif est dominé par un processus additif, pour lequel les propriétés sont parfois plus aisées à obtenir, voir par exemple 8.4.

Nous allons renforcer le théorème précédent lorsque (μ_n) est dominée par une suite adéquate. Auparavant rappelons le principe des sous-suites : soit Q une propriété sur les suites ; une suite vérifie $*$-Q si, on peut extraire de toute sous-suite, de la suite initiale, une nouvelle sous-suite vérifiant Q, voir aussi [*2*]. Ce principe est particulièrement efficace pour les Banach à norme continue pour l'ordre où (x_n) converge en norme si et seulement si, (x_n) est $*$ convergente pour l'ordre — on dit 0-convergente —. Un autre exemple est la convergence en probabilité qui équivaut à la $*$-convergence p. s.

Ainsi avec les conventions du théorème 6.3 : $\mathbb{E}\ l - s, c - r$; **I** et **F** séparables P-p. s. on obtient :

6.5. THÉORÈME. — *Soit (μ_n) un processus sous-additif tel que*

1) $(\mu_n) \subset \mathcal{M}_{e,\mathrm{P}}(\mathbf{F}, \mathbb{E}_+)$

2) *Il existe une suite $(m_n) \subset \mathcal{M}_{e,\mathrm{P}}(\mathbf{F}, \mathbb{E}_+)$ $*$-0-convergente avec $\frac{1}{n}\mu_n \leq m_n$*

Alors $\left(\frac{1}{n}\mu_n\right)$ est $*$-0-convergente.

Preuve. — Par extraction de sous-suites, il suffit de prouver le théorème lorsque (m_n) est 0-convergente (dans l'espace des mesures). Comme $0 \leq \frac{1}{n}\mu_n \leq \vee\, m_n$, les expressions $\overline{\lim}\,\frac{1}{n}\mu_n$ et $\underline{\lim}\,\frac{1}{n}\mu_n$ existent. En raisonnant comme dans le théorème précédent, il existe une partie séparante $\mathrm{U} \subset \mathrm{E}_+^*$ avec, pour tout $u \in \mathrm{U}$:

— $(u \circ \mu_n)$ est un processus sous-additif réel, mesures

— $\overline{\lim}\left(u\frac{1}{n}\mu_n\right) = u\left(\overline{\lim}\,\frac{1}{n}\mu_n\right)$ et $\underline{\lim}\left(u\frac{1}{n}\mu_n\right) = u\left(\underline{\lim}\,\frac{1}{n}\mu_n\right)$

— $(u \circ \mu_n)$ est une suite de mesures et $0 \leq \frac{1}{n}u \circ \mu_n \leq u(\vee\, m_n)$

Par conséquent la suite $\left(\frac{1}{n}u \circ \mu_n\right)$ est 0-convergente, car $\left({}^u\mathrm{X}_n = \frac{du\mu_n}{d\mathrm{P}}\right)$ est un processus sous-additif dont le sup est dans $\mathbb{L}^1$. En remontant dans $\mathbb{E}$ il vient $\overline{\lim}\,\frac{1}{n}\mu_n = \underline{\lim}\,\frac{1}{n}\mu_n$.

7. CONVERGENCE DES MARTINGALES

Nous allons donner dans cette partie un cadre afin d'obtenir une convergence par l'ordre vers 0 de $|\,\tilde{\mu}_n - \mu\,|(\Omega)$ où $\tilde{\mu}_n$ est le prolongement canonique à la tribu **F** de $\mu_n = \mu\,|_{\mathbf{F}_n}$, $\mu \in \mathcal{M}_0(\mathbf{F}, \mathbb{E})$.

Soit **G** une sous-tribu de **F**, nous avons vu — proposition 4.2 — que si $\mu \in \mathcal{M}_0(\mathbf{G}, \mathbb{E})$ et est absolument continue par rapport à une probabilité P définie sur **F**, alors μ admet un prolongement canonique $\tilde{\mu}$ avec $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}_0(\mathbf{F}, \mathbb{E})$ et $\tilde{\mu}(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{E}(1_\mathrm{A}\,|\,\mathbf{G}))$, pourvu que $\mathbb{E}$ soit au moins $d - r$.

La proposition ci-dessous dont la démonstration est omise, on pourra éventuellement se référer à [1], montre la stabilité de la classe $\mathcal{M}_{e,p}$ pour les prolongements et les restrictions, l'espace $\mathbb{E}$ est supposé $d - r$.

7.1. PROPOSITION.

Si $\mu \in \mathcal{M}_{e,p}(\mathbf{G}, \mathbb{E}_+)$ *alors* $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}_{e,\mathrm{P}}(\mathbf{F}, \mathbb{E}_+)$.

Si $\mu \in \mathcal{M}_{e,p}(\mathbf{F}, \mathbb{E}_+)$ *alors* $\mu|_{\mathrm{G}} \in \mathcal{M}_{e,\mathrm{P}}(\mathbf{G}, \mathbb{E}_+)$.

De même, la preuve de la proposition suivante se fait de manière similaire à la procédure générale.

7.2. PROPOSITION. — *Soit* **G** *une sous-tribu de* **F**, **G** *et* **F** *séparable* P-*p. s.* *Si* $\mu \in \mathcal{M}_{e,\mathrm{P}}(\mathbf{G}, \mathbb{E}_+)$, $\mathbb{E}$ $l - s$, $c - r$; *alors il existe une partie séparante* $\mathrm{U} \subset E_+^*$ *telle que* $u \circ \mu \in \mathbb{L}_p^1(\mathbf{G}, \mathbb{R}_+)$ *et* $u \circ \tilde{\mu} = \widetilde{u \circ \mu}$.

Dans l'énoncé du théorème suivant nous supposerons que la filtration croissante $(\mathbf{F}_n)$ est, ainsi que $\mathbf{F} = \bigvee_n \mathbf{F}_n$, séparable P-p. s. et que l'espace $\mathbb{E}$ est $c - r$. Ce sont les hypothèses simplificatrices habituelles.

7.3 THÉORÈME : CONVERGENCE DES MARTINGALES SIMPLES. — *Si* $\mu \in \mathcal{M}_{e,\mathrm{P}}(\mathbf{F}, \mathbb{E})$ *où* $\mathbb{E}$ *est un espace* $l - s$, *alors* $|\tilde{\mu}_n - \mu|(\Omega)$ *converge vers* 0, *pour l'ordre, dans* $\mathbb{E}$.

Preuve. — Supposons, pour simplifier, que μ soit positive il est clair que la suite $(|\tilde{\mu}_n - \mu|(\Omega))$ est majorée dans $\mathbb{E}$ car $\tilde{\mu}_n(\mathrm{A}) \leq \mu(\Omega)$.

Reprenons la procédure standard — preuve du théorème 6.3. — et en utilisant la proposition 7.1 on en déduit :

il existe une partie séparante $\mathrm{U} \subset \mathbb{E}_+^*$ telle que pour tout $u \in \mathrm{U}$:

— $u \circ \mu$ est une mesure réelle ; — $u \circ \mu_n = \widetilde{u \circ \mu}|_{\mathbf{F}_n}$;

— $u(|\tilde{\mu}_n - \mu|) = |u(\tilde{\mu}_n - \mu)|$ et enfin que

$$u(\overline{\lim}\,|\tilde{\mu}_n - \mu|(\Omega)) = \overline{\lim}\,(u(|\tilde{\mu}_n - \mu|(\Omega)))$$

et les mêmes expressions avec $\underline{\lim}$. Par conséquent $(u \circ \tilde{\mu}_n)$ est une martingale simple réelle donc $|u \circ \tilde{\mu}_n - u \circ \mu|(\Omega) \to 0$. Il ne reste plus qu'à revenir dans l'espace $\mathbb{E}$, avec la séparation, pour établir notre assertion.

8. CAS DES POINTS D'ORDRE ET VARIABLES ALÉATOIRES

Commençons par une remarque, d'ailleurs évidente, qui permet la jonction de ce nouveau cadre (point d'ordre) avec le précédent et, constitue ainsi un excellent outil.

8.1. REMARQUE. — Pour une suite $(\mu_n) \subset \mathcal{M}_0(\mathbb{E}_+)$ telle que $\mu_n(\Omega) \leq e$,

e point d'ordre, il est clair que les propriétés d'inégalités ou de convergences au sens de l'ordre, déduites sur la suite considérée à valeurs dans l'espace $l - s\mathbb{E}_e$, restent valables dans l'espace initial.

Pour ne pas reprendre l'adaptation des résultats précédents, nous limiterons notre étude au cas $\mathbb{E}\ c - r$ et les tribus considérées dénombrablement engendrées P-p. s.

Avant d'aborder le cas des variables aléatoires, donnons encore une propriété de convergence, pour les 0-amarts. La conjonction des expressions « $(\mu_n) \subset \mathscr{M}_{e,p}(\mathbf{F}, \mathbb{E}_+)$ » et « (μ_n) est un 0-amart relativement à la filtration croissante $(\mathbf{F}_n)$ » implique que (μ_n) est $(\mathbf{F}_n, \mathrm{P})$ adaptée. Si nous supposons que le point e de la première expression est un point d'ordre, alors le théorème 5.6 montre que $(\mu_n \wedge ke\mathrm{P}, n \in \mathbb{N})$ converge pour l'ordre vers une mesure m^k — cf. remarque 8.1 —. Comme, en outre, $m^k(\Omega) \leq \lim_\tau \mu_\tau(\Omega)$, la suite croissante (m^k) converge pour l'ordre dans $\mathscr{M}_0(\mathbf{F}, \mathbb{E}_+)$. Énonçons :

8.2. Proposition. — *Tout 0-amart contenu dans $\mathscr{M}_{e,p}(\mathbf{F}, \mathbb{E}_+)$ où e est un point d'ordre est $\overline{\overline{0}}$-convergeant.*

Cas des variables aléatoires.

Cette étude est, nous l'avons vu, essentiellement liée à l'ordre. Pour conserver ce caractère lors de l'étude des variables aléatoires — v. a. — il conviendrait de se référer à l'élégante théorie de [*1*] pour les notions de v. a. pour l'ordre et leur espérance. Nous nous contenterons des espaces de Banach qui sont, suivant la tradition, à norme continue pour l'ordre.

Tout d'abord comme conséquence de la proposition 8.2 établissons une généralisation d'un théorème de [*5*] sur la convergence pour l'ordre des 0-amarts.

Soit (X_n) un 0-amart (v. a.) à valeurs dans $\mathbb{E}$; nous pouvons, sans restreindre la généralité, supposer que $\mathbb{E}$ est à unité faible, e, qui est donc un point d'ordre. De plus, en considérant les parties positives et négatives, on se ramène au cas $(\mathrm{X}_n) \subset \mathbb{P}_0(\mathbb{E}_+)$ et $\mathrm{E}(\mathrm{X}_\tau)$ converge. Alors $(\mathrm{X}_n \wedge ke, n \in \mathbb{N})$ est un 0-amart pour tout k et converge donc p. s. pour l'ordre et la norme vers une v. a. X^k. La suite (X^k) est croissante, si maintenant $\bigvee_n \mathrm{X}_n \in \mathbb{E}_+$ p.s., $\mathrm{X}^k \nearrow \mathrm{X}$, qui est aussi Pettis-intégrable. Comme $\overline{\overline{\lim}}\ \mu_n = \underline{\underline{\lim}}\ \mu_n = \mathrm{XP}$ où $\mu_n = \mathrm{X}_n\mathrm{P}$, il est clair que X_n est 0-convergente vers X d'où :

8.3. Proposition. — *Soit (X_n) une suite de v. a. Pettis-intégrables, telle* *que* $\vee X_n$ *et* $\wedge X_n \in \mathbb{E}$ P-*p. s. et* $E(X_\tau)$ *converge dans* $\mathbb{E}$ *; alors* (X_n) *est* 0-*convergente p. s. vers une variable Pettis-intégrable.*

La seconde application que nous donnerons est la convergence des processus sous-additifs, voir aussi [*6*] [*9*]. Rappelons pour cela que $\mathbb{L}^1(\mathbb{E})$ désigne l'espace de Banach des v. a. Bochner intégrables à valeurs dans $\mathbb{E}$. Si $X \in \mathbb{L}^1(\mathbb{E})$ alors le théorème de Mourier [*11*] assure que la suite $M_n = \frac{1}{n} \Sigma_1^n X \circ \theta^i$ converge dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{E})$. Ce qui s'exprime aussi en disant que la suite de mesures $(m_n = M_n P)$ est $*$-0-convergente dans l'espace des mesures à densité Bochner intégrable. Cet espace est d'ailleurs un Banach à norme continue pour l'ordre, la norme étant la variation totale. Par suite si (μ_n) est un processus sous-additif, de la forme $\mu_n = S_n P$, avec $\frac{1}{n} S_n \leq M_n$, nous en déduisons, avec le théorème 6.5 et la remarque 8.1 que $\frac{1}{n} \mu_n$ est aussi $*$-0-convergente dans l'espace des mesures à variations bornées donc,

aussi $*$-0-convergente dans l'espace des mesures à variations bornées donc,
avec l'unicité de la limite, il vient :

8.4. PROPOSITION. — *Pour tout processus sous-additif* $(S_n) \subset \mathbb{L}^1(\mathbb{E}_+)$ *la suite* $\left(\frac{1}{n} S_n\right)$ *converge p. s. et dans* $\mathbb{L}^1(\mathbb{E}_+)$.

RÉFÉRENCES

[*1*] B. BRU, *Variables et espérances pour l'ordre*, C. R. Acad. *Sci.*, Paris, t. 290, 1980, p. 111-114.

[*2*] B. BRU and H. HEINICH, Sur l'espérance des variables aléatoires vectorielles à valeurs dans les espaces de Banach réticulés, *Annal. Int. H. Poincaré*, t. **16**, n° 3, 1980, p. 177-210.

[*3*] R. C. CHACON, A stopped proof of convergence, *Advances in Math.*, t. **14**, 1974, p. 365-368.

[*4*] G. A. EDGAR, Uniform semiamarts, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **15**, n° 3, 1979, p. 197-203.

[*5*] N. GHOUSSOUB and M. TALAGRAND, *A generalized Chacon's inequality and order convergence of processes*. Séminaire Choquet, 1978.

[*6*] N. GHOUSSOUB and J. M. STEELE, *Vector valued Sub-additive Processes* and *Applications in Probability*. A paraître.

[*7*] N. GHOUSSOUB and L. SUCHESTON, A refinement of the Riesz decomposition of amarts and semi-amarts. *J. Mult. Analysis*, t. **48**, n° 1, 1978, p. 146-150.

[*8*] H. HEINICH, Martingales asymptotiques pour l'ordre, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **14**, n° 3, 1978, p. 313-333.

[*9*] J. F. C. KINGMAN, Sub-additive processes. *Lectures notes in Math.*, n° 539, p. 168-223.

[*10*] J. LINDENSTRAUSS and L. TZAFIRI, *Classical Banach Spaces II.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1979.

[*11*] E. MOURIER, Éléments aléatoires dans un espace de Banach. *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **13**, 1953, p. 161-244.

[*12*] J. NEVEU, *Martingales à temps discret.* Masson, Paris.

[*13*] M. H. SCHAEFFER, *Banach lattices and positive operators.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1974.

(Manuscrit reçu le 23 février 1982)