ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ALBERT RAUGI

Une démonstration d'un théorème de Choquet-Deny par les martingales

Annales de l'I. H. P., section B, tome 19, nº 1 (1983), p. 101-109
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1983__19_1_101_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XIX, n° 1, 1983, p. 101-109. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Une démonstration d'un théorème de Choquet-Deny par les martingales

par

Albert RAUGI

Laboratoire de Statistique et Probabilités E.R.A.-C.N.R.S. 591,
Université Paul-Sabatier, 118, route de Narbonne,
31062 Toulouse Cedex

RÉSUMÉ. — Nous donnons une démonstration, par les martingales, d'un théorème de Choquet-Deny sur la représentation des fonctions harmoniques positives dans les groupes abéliens, à l'aide des exponentielles harmoniques.

ABSTRACT. — We give a martingale proof of a Choquet-Deny's theorem on the representation of positive harmonic functions in abelian group with harmonic exponentials.

I. INTRODUCTION

Le but de cette note est de donner une démonstration du théorème de Choquet-Deny (voir J. Deny ([*1*])) utilisant la théorie des martingales, mais ne faisant pas appel aux résultats de G. Choquet sur les représentations intégrales dans certains cônes convexes.

L'énoncé de ce théorème nous amène à introduire les définitions et notations suivantes. Soient G un groupe abélien localement compact à base dénombrable dont la loi est notée additivement ; σ une mesure de Radon positive sur les boréliens B(G) de G telle que le plus petit sous-groupe fermé de G portant σ soit G lui-même. On appelle exponentielle sur G, toute fonction λ continue réelle sur G, ne s'annulant pas, et telle que :

$$\lambda(x + y) = \lambda(x)\lambda(y), \qquad \forall x, y \in G.$$

L'ensemble E des exponentielles sur G, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts est un espace localement compact. Une fonction borélienne positive h sur G est dite *σ-harmonique* positive si elle est localement intégrable par rapport à la mesure de Haar m de G et si

$$(*) \qquad h(g) = \int_G h(g + x)\sigma(dx), \qquad \forall g \in G$$

Nous désignons par E_σ le sous-ensemble de E formé par les exponentielles λ qui sont σ-harmoniques $\left(\text{i. e. telles que } \int_G \lambda(x)\sigma(dx) = 1\right)$.

Le théorème de Choquet-Deny, nous dit alors que :

« *Toute fonction σ-harmonique positive h sur* G, *s'écrit*

$$\underline{h(.) = \int_{E_\sigma} \lambda(.)\nu(d\lambda)} \quad \underline{m\text{-p. p.}},$$

où ν est une mesure positive sur l'espace localement compact E, *portée par le borélien* E_σ *des exponentielles σ-harmoniques; cette représentation est unique* ».

II. UNE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE CHOQUET-DENY PAR LA THÉORIE DES MARTINGALES

(2.1) Nous faisons l'hypothèse supplémentaire suivante : « Le semi-groupe fermé T_σ engendré par le support de la mesure σ est égal à G ». Il est fort probable qu'en travaillant un peu plus, on puisse éviter cette hypothèse ; mais l'intérêt de cette note étant surtout « pédagogique » nous nous contenterons d'établir le théorème sous cette hypothèse. Cependant nous démontrons que la mesure ν est à support compact. Nous nous inspirons d'un article de L. Davies ([*2*]) qui traite le cas d'un groupe abélien discret.

Nous désignons par h une fonction σ-harmonique positive, *non nulle* m-p. p., sur G (Nous supposons évidemment qu'une telle fonction existe !).

Nous appelons $C_K^+(G)$ l'ensemble des fonctions continues positives, à support compact, sur G. Si f est une fonction borélienne positive localement m-intégrable sur G, pour $g \in G$ et $\alpha \in C_K^+(G)$ nous notons f^g et $L_\alpha f$ les fonctions boréliennes positives définies par

$$f^g(x) = f(g + x) \qquad (x \in G).$$

$$L_\alpha f(x) = \int_G f(x + z)\alpha(z)dz \qquad (x \in G).$$

On notera que la « régularisée » $L_\alpha f$ de f est continue sur G.

Considérons la mesure positive $\rho = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \sigma^n$.

Pour tout élément non nul α de $C_K^+(G)$, $L_\alpha h$ est une fonction continue σ-harmonique et ρ-harmonique positive sur G.

L'hypothèse $T_\sigma = G$ implique que la fonction $L_\alpha h$ est strictement positive; par suite la mesure positive ρ est une mesure de Radon.

Quitte à remplacer σ par ρ, nous pouvons donc supposer dans la suite que le *support de σ est égal à* G.

(2.2) Lorsque G est discret, la relation de définition d'une fonction σ-harmonique, s'écrit :

$$h(x) = \sum_{z \in G} h(x + z)\sigma(z) \qquad (x \in G).$$

D'où l'on tire aisément :

$$(*) \qquad | h(g + x) - h(x) | \leq \delta(g)h(x) \qquad (x, g \in G)$$

où $$\delta(0) = 0 \quad \text{et} \quad \delta(g) = 1 + \frac{1}{\sigma(g)} \quad \text{si} \quad g \neq 0.$$

Cette propriété de continuité est indispensable pour la suite de la démonstration. Dans le cas non discret, le lemme suivant affirme que cette propriété est, en tout cas, vérifiée par les régularisées de h.

LEMME 1. — *Pour tous éléments α, β de $C_K^+(G)$, β non nul, il existe une fonction continue positive δ, nulle en* 0, *telle que* :

$$| L_\alpha h(g + x) - L_\alpha h(x) | \leq \delta(g)L_\beta h(x) \qquad (x, g \in G).$$

En outre la fonction $(L_\alpha h)^g/L_\beta h$ est bornée.

Preuve. — Puisque le support de σ est égal à G, la fonction ϕ :

$$z \mapsto \int \beta(z - u)\sigma(du)$$

est continue et strictement positive sur G. Il suffit alors de prendre

$$\delta(g) = \sup_{z \in G} \frac{|\alpha(z-g) - \alpha(z)|}{\phi(z)}.$$

De même la fonction $(L_\alpha h)^g / L_\beta h$ est majorée par $\sup\limits_{z \in G} \dfrac{\alpha(z-g)}{\phi(z)}$.

(2.3) Nous choisissons un élément η de $C_K^+(G)$ tel que $\int_G \eta(z)dz = 1$ et nous notons $\bar{h}$ la régularisée de h par η.

Nous appelons P la probabilité de transition sur (G, B(G)) définie par

$$Pf(g) = \frac{1}{\bar{h}(g)} \int_G \bar{h}(g+x) f(g+x) \sigma(dx).$$

Nous désignons par $(\Omega = G^N, B(G^N), \{X_n\}_{n \geq 0}, \{\mathscr{F}_n\}_{n \geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x \in G})$ la chaîne de Markov canonique de probabilité de transition P. Pour simplifier l'écriture nous désignons par $\mathbb{P}$ la probabilité $\mathbb{P}_0$ et par $\mathbb{E}$ l'espérance associée à cette mesure.

Du lemme 1 il résulte : d'une part que, pour tout $g \in G$ et tout $\alpha \in C_K^+(G)$, la fonction $(L_\alpha h)^g / \bar{h}$ est une fonction P-harmonique *bornée*; d'autre part qu'il existe sur G des fonctions continues δ et $\bar{\delta}$ nulles en 0 telles que

$$(1) \quad \operatorname*{Sup}_{z \in G} \frac{|L_\alpha h(g+x+z) - L_\alpha h(x+z)|}{\bar{h}(z)} \leq \delta(g)(1 + \bar{\delta}(x)) \qquad (x, g \in G).$$

Pour tout $g \in G$, la suite de v. a. $\{(L_\alpha h)^g(X_n)/\bar{h}(X_n) ; n \geq 0\}$ définie sur $(\Omega, B(\Omega), \mathbb{P})$ est une martingale bornée. Elle converge donc $\mathbb{P}$-p. s. Comme G est séparable, il résulte de (1) que pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, la suite réelle $\{(L_\alpha h)^g(X_n(\omega)/\bar{h}(X_n(\omega)) ; n \geq 0\}$ converge pour tout $g \in G$.

Pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $\alpha \in C_K^+(G)$, appelons $Z^\alpha(., \omega)$ la fonction sur G définie de la façon suivante : $Z^\alpha(., \omega)$ est la limite simple de la suite de fonctions $\{L_\alpha h(. + X_n(\omega))/\bar{h}(X_n(\omega)); n \geq 0\}$ lorsque cette limite existe ; $Z^\alpha(., \omega) \equiv 1$ sinon. Nous avons alors

$$(2) \qquad |Z^\alpha(g+x, \omega) - Z^\alpha(x, \omega)| \leq \delta(g)(1 + \bar{\delta}(x)) \qquad (x, g \in G ; \omega \in \Omega) ;$$

et il existe un sous-ensemble $\Omega_{1.\alpha}$ de Ω de $\mathbb{P}$-mesure 1 tel que $\forall \omega \in \Omega_{1.\alpha}$,

$$\lim_n [(L_\alpha h)^g(X_n(\omega))/\bar{h}(X_n(\omega))] = Z^\alpha(g, \omega) \qquad \forall g \in G.$$

De plus cette dernière assertion implique, via le théorème de convergence dominée que

$$L_\alpha h(g) = \bar{h}(0)\,\mathbb{E}[Z^\alpha(g, .)]. \tag{3}$$

Dans la suite nous notons $\bar{Z}$ au lieu de Z^η.

(2.4) LEMME 2. — *Pour tout* $\alpha \in C_K^+(G)$, *il existe un sous-ensemble* $\Omega_{2,\alpha}$ *mesurable de* Ω *de* $\mathbb{P}$*-mesure* 1 *tel que, pour tout* $\omega \in \Omega_{2,\alpha}$,

$$\underline{Z^\alpha(g + x, \omega) = Z^\alpha(g, \omega)\bar{Z}(x, \omega), \qquad \forall x, g \in G.}$$

En outre, pour $\mathbb{P}$*-presque tout* $\omega \in \Omega$, $\bar{Z}(., \omega)$ *est un élément de* E_σ.

Preuve. — Nous appelons H la fonction P-harmonique bornée $\dfrac{(L_\alpha h)^g}{\bar{h}}$. Pour tout entier $N \geq 0$, on vérifie facilement que :

$$\begin{aligned}
E\left[\int_G \sum_{n=0}^{N} \frac{\bar{h}(X_n + x)}{\bar{h}(X_n)}(H(X_n + x) - H(X_n))^2\sigma(dx)\right]
&= \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}[P[(H(.) - H(X_n))^2](X_n)] \\
&= \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}[P(H^2)(X_n) - H^2(X_n)] \\
&= \sum_{n=0}^{N} (P^{n+1}H^2(0) - P^nH^2(0)) \\
&= P^{N+1}H^2(0) - H^2(0) \leq \|H\|_\infty^2
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n=0} \frac{\bar{h}(X_n + x)}{\bar{h}(X_n)}(H(X_n + x) - H(X_n))^2$ est convergente pour $\mathbb{P} \otimes \sigma$-presque tout (ω, x). En particulier le terme général de cette série tend vers zéro et nous avons, pour $\mathbb{P} \otimes \sigma$-presque tout (ω, x),

$$\bar{Z}(x, \omega) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lim_n H(x + X_n(\omega)) = \lim_n H(X_n(\omega)) = Z^\alpha(g, \omega).$$

De l'égalité,

$$\frac{L_\alpha h(g + x + z)}{\bar{h}(z)} = \frac{L_\alpha h(g + x + z)}{\bar{h}(x + z)} \cdot \frac{\bar{h}(x + z)}{\bar{h}(z)}$$

il résulte alors que pour $\mathbb{P} \otimes \sigma$-presque tout (ω, x),

$$Z^{\alpha}(g + x, \omega) = Z^{\alpha}(g, \omega)\overline{Z}(x, \omega).$$

On obtient la première assertion du lemme, en utilisant les propriétés de continuité exprimées par les inégalités (2) et en tenant compte de la séparabilité de G. D'après ce qui précède, $\overline{Z}(., \omega)$ est, pour $\mathbb{P}$-presque tout ω de Ω, une exponentielle. D'après le lemme de Fatou nous avons pour $\omega \in \Omega_{1,\eta}$

$$\int_G \overline{Z}(g, \omega)\sigma(dg) \leqslant \liminf_n \int_G \frac{\overline{h}(g + X_n(\omega))}{\overline{h}(X_n(\omega))}\sigma(dg) = 1.$$

D'autre part si on intègre par rapport à σ les deux membres de l'égalité (3) prise pour $\alpha = \eta$, on obtient à l'aide du théorème de Fubini

$$E\left[\int_G \overline{Z}(g, \omega)\sigma(dg)\right] = 1.$$

On en déduit que $\int_G \overline{Z}(g, .)\sigma(dg) = 1$ $\mathbb{P}$-p. s.

(2.5) LEMME 3. — *Pour tout* $\alpha \in C_K^+(G)$, *il existe un sous-ensemble* $\Omega_{3,\alpha}$ *de* $\Omega_{2,\alpha}$ *de* $\mathbb{P}$*-mesure 1 tel que* $\forall \omega \in \Omega_{3,\alpha}$

$$Z^{\alpha}(g, \omega) = \overline{Z}(g, \omega)\frac{\int \overline{Z}(z, \omega)\alpha(z)dz}{\int \overline{Z}(z, \omega)\eta(z)dz}, \qquad \forall g \in G$$

Preuve. — Du lemme 1, du théorème de convergence dominée, et du théorème de Fubini, il résulte que pour tout $\omega \in \Omega_{1,\alpha} \cap \Omega_{1,\eta}$,

$$\lim_n \frac{L_\alpha L_\eta h(g + X_n(\omega))}{\overline{h}(X_n(\omega))} = \int_G \overline{Z}(g + z, \omega)\alpha(z)dz = \int_G Z^{\alpha}(g + z, \omega)\eta(z)dz$$

pour tout élément g de G.

Cette dernière égalité nous donne alors, via le lemme 2, la relation cherchée. [On notera que d'après le lemme 2, $\overline{Z}(., \omega)$ ne s'annule pas pour $\omega \in \Omega_{2,\eta}$].

(2.6) Posons, pour $g \in G$ et $\omega \in \Omega$, $Z(g, \omega) = \dfrac{\overline{Z}(g, \omega)}{\int_G \overline{Z}(z, \omega)\eta(z)dz}$ lorsque cette expression a un sens, zéro sinon.

On vérifie facilement que pour $\omega \in \Omega_{3,\alpha} \cap \Omega_{2,\eta}$

$$\forall g \in \mathrm{G}, \mathrm{Z}^{\alpha}(g, \omega) = \int_{\mathrm{G}} \mathrm{Z}(g + z, .)\alpha(z)dz.$$

Pour tout élément α de $\mathrm{C}_{\mathrm{K}}^{+}(\mathrm{G})$, nous avons alors (d'après (3)),

$$\int_{\mathrm{G}} h(z)\alpha(z)dz = \overline{h}(0) \int_{\mathrm{G}} \mathbb{E}[\mathrm{Z}(z, .)]\alpha(z)dz.$$

ce qui montre que, pour m-presque tout $g \in \mathrm{G}$,

$$h(g) = \overline{h}(0)\, \mathbb{E}[\mathrm{Z}(g, .)]. \tag{4}$$

Compte tenu de la définition de Z et du lemme 2, la partie « existence » du théorème de Choquet-Deny est donc prouvée.

Avant d'aborder l'unicité de la mesure ν, nous allons prouver que (sous l'hypothèse $\mathrm{T}_\sigma = \mathrm{G}$) cette mesure est à support compact.

(2.7) Remarque. — D'après (4) la fonction h est m-p. p. égale à la fonction σ-harmonique positive $h'(g) = \overline{h}(0)\, \mathbb{E}[\mathrm{Z}(g, .)]$. Or nous avons

$$\begin{aligned} | h'(g + x) - h'(x) | &\leq \overline{h}(0)\, \mathbb{E}[| \mathrm{Z}(g + x, .) - \mathrm{Z}(x, .) |] \\ &\leq \overline{h}(0)\, \mathbb{E}[\mathrm{Z}(x, .) | \overline{\mathrm{Z}}(g, .) - 1 |] \\ &\leq \overline{h}(0)\overline{\delta}(g)\, \mathbb{E}[\mathrm{Z}(x, .)] \\ &\leq \overline{\delta}(g)h'(x). \end{aligned}$$

Autrement dit h' vérifie la propriété de continuité voulue. Nous pouvons donc procéder pour h' comme nous l'avons fait pour $\overline{h}$.

Soit P′ la probabilité de transition sur G définie par

$$\mathrm{P}'f(g) = \frac{1}{h'(g)} \int_{\mathrm{G}} h'(g + x)f(g + x)\sigma(dx), \qquad (g \in \mathrm{G}).$$

Appelons $\mathbb{P}'$ la probabilité sur $(\Omega = \mathrm{G}^{\mathbb{N}}, \mathrm{B}(\Omega))$ qui fait des coordonnées $\{ \mathrm{X}_n \}_{n \geq 0}$ de Ω une chaîne de Markov de probabilité de transition P′, partant de 0. Pour tout $\omega \in \Omega$, désignons par $\mathrm{Z}'(., \omega)$ la limite simple de la suite de fonction $\left\{ \dfrac{h'(. + \mathrm{X}_n(\omega))}{h'(\mathrm{X}_n(\omega))}, n \geq 0 \right\}$ lorsque cette limite existe ; $\mathrm{Z}'(., \omega) \equiv 1$ sinon.

Alors nous avons :

i) $\qquad | \mathrm{Z}'(g, \omega) - 1 | \leq \overline{\delta}(g) \qquad \forall g \in \mathrm{G}, \quad \forall \omega \in \Omega$

ii) il existe un sous-ensemble Ω_1 de Ω, de $\mathbb{P}'$-mesure 1 tel que pour tout élément ω de Ω_1, la suite de fonction $\{ h'(.+X_n(\omega))/h'(X_n(\omega));\ n \geq 0 \}$ converge simplement vers $Z'(.,\omega)$;

iii) il existe un sous-ensemble Ω_2 de Ω, de $\mathbb{P}'$-mesure 1 tel que pour tout élément ω de Ω_2, $Z'(.,\omega)$ est une exponentielle harmonique.

iv) $$h'(g) = h'(0)\,\mathbb{E}[Z'(g,.)] \qquad (g \in G).$$

De *i*) il résulte que la famille d'exponentielles harmoniques $\{ Z(.,\omega); \omega \in \Omega' \}$ est équi-continue. D'après le théorème d'Ascoli l'ensemble de ces exponentielles est relativement compact dans E. La relation *iv*) nous montre alors que la mesure ν du théorème de Choquet-Deny, qui représente à la fois h et h' est à support compact.

Ceci dit la partie « unicité » du théorème de Choquet-Deny, résultera immédiatement du lemme suivant :

(2.8) LEMME. — Soit ν une mesure sur E_σ représentant la fonction σ-harmonique positive h. Supposons que la fonction σ-harmonique positive $g \mapsto \int_{E_\sigma} \lambda(g)\nu(d\lambda)$ soit continue. Alors, (avec les notations de (2.7)), pour $\mathbb{P}'$-presque tout $\omega \in \Omega$, la suite de mesure de probabilité sur E_σ

$$\left\{ \nu_n(\omega) = \frac{\lambda(X_n(\omega))\nu(d\lambda)}{\int_{E_\sigma} \lambda(X_n(\omega))\nu(d\lambda)},\ n \geq 0 \right\}$$

converge vaguement vers la mesure de Dirac au point $Z'(.,\omega)$ de E_σ.

Preuve. — D'après (2.7), il est clair que

$$h'(g) = \int_{E_\sigma} \lambda(g)\nu(d\lambda) \qquad (g \in G).$$

Soit $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ et appelons $\theta(\omega)$ une valeur d'adhérence vague de la suite de probabilités $\{ \nu_n(\omega),\ n \geq 0 \}$.

Nous avons :

$$\int_{E_\sigma} \lambda(g)\theta(\omega)(d\lambda) \leq \varliminf_n \frac{\int \lambda(g)\lambda(X_n(\omega))\nu(d\lambda)}{\int \lambda(X_n(\omega))\nu(d\lambda)}$$

$$= \varliminf_n \frac{h'(g + X_n(\omega))}{h'(X_n(\omega))} = Z'(g,\omega)$$

Compte tenu que $Z'(.,\omega)$ est une exponentielle, on voit aisément d'abord que cette inégalité est nécessairement une égalité et ensuite que $\theta(\omega)$ est nécessairement la mesure de Dirac au point $Z'(.,\omega)$ de E_σ.

(2.9) Soit ν une mesure positive sur E_σ représentant h.

Lorsque la fonction $g \mapsto \int_G \lambda(g)\nu(d\lambda)$ est continue, le lemme (2.8) prouve que ν est nécessairement la loi de la v. a. $Z'(.,\omega)$ définie sur $(\Omega, B(\Omega), \mathbb{P}')$. Il suffit pour cela de noter que pour tout $n \geq 0$ la loi de la v. a. ν_n définie sur $(\Omega, B(\Omega), \mathbb{P}')$ est ν.

Dans le cas général on se ramène au cas précédent « en régularisant ». On obtient alors que pour tout élément non nul α de $C_K^+(G)$ la mesure $\left(\int \lambda(x)\alpha(x)dx\right)\nu(d\lambda)$ est déterminée de façon unique. D'où le résultat.

(2.9) REMARQUE. — Signalons pour terminer, que la technique précédente permet de prouver le résultat suivant :

PROPOSITION. — Soit G un groupe L. C. D. Soit σ une mesure positive bornée sur G possédant une densité continue à support compact par rapport à une mesure de Haar de G et telle que $T_\sigma = G$. Soit H un sous-groupe de G sur lequel G agit de façon compacte (i. e. que pour tout compact C de H, $\{ gCg^{-1} : g \in G \}$ est un compact de G) :

Alors toute solution positive *extrémale* h de l'équation

$$\int_G h(gx)\sigma(dx) = h(g) \qquad (g \in G)$$

vérifie

$$h(ug) = \lambda(u)h(g),$$

où λ est une exponentielle sur H.

On peut aussi retrouver le résultat de [*3*], en utilisant évidemment le théorème de représentation intégrale de Choquet mais en se passant de « la propriété de droite fixe ».

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] G. CHOQUET et J. DENY, Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$, *CRAS*, t. **250**, 1960, p. 799-801.

[*2*] L. DAVIES, *A theorem of Deny with applications to characterization problems*. Lecture Notes n° 861. Proc., Oberwolfach, Germany, 1980.

[*3*] J. P. CONZE et Y. GUIVARC'H, *Propriété de droite fixe et fonctions propres des opérateurs de convolution*. Séminaire de probabilité de Rennes, 1976.

(Manuscrit reçu le 24 février 1982)