

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

PIERRE JACOB

Représentations convergentes des intégrales stochastiques

Annales de l'I. H. P., section B, tome 18, n° 3 (1982), p. 249-275

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1982__18_3_249_0

© Gauthier-Villars, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Représentations convergentes des intégrales stochastiques

par

Pierre JACOB

RÉSUMÉ. — L'intégrale stochastique d'une fonction par rapport à un processus ponctuel est définie à l'aide d'une représentation sous la forme d'une série de variables aléatoires presque sûrement absolument convergente.

On vérifie que cette définition coïncide généralement avec celle qui est usuelle dans le cas des mesures aléatoires orthogonales. Divers types de convergence stochastique des intégrales ainsi construites sont étudiées, ainsi que la convergence faible des mesures aléatoires qu'elles engendrent.

MOTS CLÉS : mesures aléatoires ; processus ponctuels ; représentation ; intégrales stochastiques ; orthogonalité ; mesure moyenne ; mesure structurale.

Soit (X, d) un espace métrique séparable, \mathcal{B} sa tribu borélienne et \mathcal{B}_b l'anneau des boréliens bornés de X ; soit \mathcal{C}_b l'ensemble des fonctions f , continues et bornées sur X , telles que $\{f \neq 0\} \in \mathcal{B}_b$. \mathcal{M}^+ désigne l'ensemble des mesures boréliennes positives finies sur \mathcal{B}_b ; si μ et ν sont deux éléments de \mathcal{M}^+ , $\theta = \mu - \nu$ est une fonction d'ensemble à signe définie en général sur \mathcal{B}_b seulement, σ -additive sur \mathcal{B}_b , et telle que $\theta(\emptyset) = 0$.

Nous noterons \mathcal{M} l'espace vectoriel des fonctions d'ensemble possédant ces dernières propriétés, et nous appellerons mesures à distance finie, ou plus simplement mesures, les éléments de \mathcal{M} . Si μ est une telle mesure, elle peut être décomposée de façon unique sous la forme $\mu^+ - \mu^-$,

avec $\mu^+ \in \mathcal{M}^+$; $\mu^- \in \mathcal{M}^+$. On munit \mathcal{M} de la topologie F de la convergence faible à distance finie, admettant pour système fondamental de voisinages les ensembles :

$$F(\mu, h_1, \dots, h_n, \varepsilon) = \left\{ \nu \in \mathcal{M} : \left| \int h_i d\mu - \int h_i d\nu \right| < \varepsilon ; i = 1, \dots, n \right\}$$

où $\varepsilon > 0$; $n \in \mathbb{N}^*$; $h_i \in \mathcal{C}_b$; $i = 1, \dots, n$.

La topologie F induit sur \mathcal{M}^+ une topologie F^+ qui est métrisable par une distance ρ , introduite par J. Geffroy, et l'espace métrique (\mathcal{M}^+, ρ) est séparable (I).

On note \mathcal{E} l'ensemble des répartitions ponctuelles sur \mathcal{X} , autrement dit le sous-ensemble de \mathcal{M}^+ constitué par les mesures discrètes à masses entières. On notera encore F^+ la topologie induite par F^+ sur \mathcal{E} , et par ρ la métrique induite par ρ sur \mathcal{E} .

Soit \mathcal{C} la tribu sur \mathcal{M} engendrée par les applications ψ_B ($B \in \mathcal{B}_b$) :

$$\mu \rightarrow \mu(B) = \psi_B(\mu)$$

\mathcal{C} est contenue dans la tribu borélienne \mathcal{F} de l'espace topologique (\mathcal{M}, F) ; la tribu \mathcal{C}^+ engendrée par les restrictions à \mathcal{M}^+ des applications ψ_B , coïncide avec la tribu borélienne \mathcal{F}^+ de l'espace topologique (\mathcal{M}^+, F^+) .

On appelle mesure aléatoire positive toute application mesurable d'un espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) dans $(\mathcal{M}^+, \mathcal{F}^+)$; on appelle mesure aléatoire toute application mesurable de (Ω, \mathcal{A}) dans $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, ou, de façon équivalente, la différence de deux mesures aléatoires positives (II) ; enfin, on appelle processus ponctuel toute mesure aléatoire positive à valeurs dans \mathcal{E} .

Dans tout l'exposé, l'espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) est muni d'une probabilité fixée P, et les processus ponctuels f^* considérés sont tels que, pour tout borélien borné B, l'effectif $N(f^*, B)$ appartient à $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, P)$; nous désignerons par $N^*(f^*, B)$ l'effectif centré : $N(f^*, B) - E \{ N(f^*, B) \}$.

La fonction d'ensemble μ définie sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_b)$ en posant :

$$\forall B \in \mathcal{B}_b, \quad \mu(B) = E \{ N(f^*, B) \}$$

possède une extension unique, σ -additive sur \mathcal{B}_b ; nous noterons encore μ cette mesure, appelée mesure moyenne du processus f^* . Si g est une fonction μ -intégrable, alors g est aussi f^ω -intégrable, pour presque tout $\omega \in \Omega$ [cf : IV] : Cet article est consacré à l'étude de la variable aléatoire définie à une P-équivalence près :

$$Z = \int g(x) \cdot N(f^*, dx) - \int g(x) \cdot \mu(dx)$$

Dans [VI], nous avons démontré qu'il était possible de représenter tout processus ponctuel f^* par une suite $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires à valeurs dans \mathcal{X} , muni d'un point supplémentaire y , à l'infini. Cela nous permet d'obtenir une représentation de Z sous la forme naturelle :

$$\sum_{k=1}^{\infty} g \circ X_k - \int g d\mu.$$

Nous relient cette construction à la construction classique d'une intégrale stochastique par rapport à une mesure aléatoire orthogonale.

Nous envisageons ensuite diverses notions de convergences stochastiques d'une suite (f_n^*) de processus ponctuels, et nous étudions la suite des intégrales stochastiques (Z_n) d'une certaine fonction g ; ensuite nous considérons (Z_n) comme suite de mesures aléatoires, et nous en étudions la convergence faible à distance finie presque sûre.

Dans cette étude, nous utiliserons à plusieurs reprises les théorèmes suivants [VI].

THÉORÈME A. — Soit $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de processus ponctuels qui converge presque sûrement vers f_0^* , faiblement à distance finie :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n^*, f_0^*) = 0 \quad p. s.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite de variables aléatoires $\{X_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) , à valeurs dans $\overline{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \cup \{y\}$, telles que :

- 1) $\forall \omega \in \Omega ; \forall B \in \mathcal{B}_b ; \forall n \in \mathbb{N} ; N(f_n^\omega, B) = \text{Card} \{ k \in \mathbb{N}^* : X_{n,k}(\omega) \in B \}.$
- 2) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \lim_{n \rightarrow \infty} X_{n,k} = X_{0,k}, P$ -presque sûrement.

THÉORÈME B. — Supposons à présent que $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers f_0^* , faiblement à distance finie : $\forall \varepsilon > 0 ;$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ \rho(f_n^*, f_0^*) > \varepsilon \} = 0.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite de variables aléatoires $\{X_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) , à valeurs dans $\overline{\mathcal{X}}$, telles que :

- 1) $\forall \omega \in \Omega ; \forall B \in \mathcal{B}_b ; \forall n \in \mathbb{N} ; N(f_n^\omega, B) = \text{Card} \{ k \in \mathbb{N}^* : X_{n,k}(\omega) \in B \}.$
- 2) $\forall k \in \mathbb{N}^* ; \forall \varepsilon > 0 ; \forall B \in \mathcal{B}_b ;$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ X_{0,k} \in \mathcal{X} ; d(X_{0,k} ; X_{n,k}) < \varepsilon \} \cup \{ X_{0,k} = y ; X_{n,k} \in \overline{\mathcal{X}} - B \} = 1$$

Enfin, soit ν une mesure quelconque de \mathcal{M} . Pour des raisons de commodité et de généralité, nous utilisons dans la suite, de façon un peu abusive,

la notation $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \nu)$ [resp. $\mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \nu)$] pour désigner l'ensemble des fonctions ν -intégrables [resp. de carré ν -intégrable]. Ainsi, par exemple, un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \nu)$ peut prendre les valeurs $+\infty$ ou $-\infty$, ou n'être pas mesurable, mais seulement ν -mesurable, c'est-à-dire ν -pp. égal à une fonction mesurable.

PREMIÈRE PARTIE

I. On considère un processus ponctuel f^* sur \mathcal{X} , possédant une mesure moyenne μ , et une suite $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\overline{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \cup \{y\}$, qui représente le processus ponctuel f^* . Dans tout l'article, toute fonction g définie sur \mathcal{X} sera étendue à $\overline{\mathcal{X}}$ en posant $g(y) = 0$.

THÉORÈME 1. — Soit g un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$; la série $\sum_{k=1}^{\infty} g \circ X_k$ est presque sûrement absolument convergente. L'espérance mathématique de la variable aléatoire qui est ainsi définie à une égalité presque sûre près est :

$$E \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} g \circ X_k \right\} = \int g d\mu.$$

Démonstration. — 1) Soit g une fonction étagée à support borné :

$$g = \sum_{j=1}^m y_j \cdot 1_{A_j} \quad (\forall j = 1, \dots, m; A_j \in \mathcal{B}_b)$$

il est clair que pour tout $\omega \in \Omega$, $\sum_{k=1}^{\infty} g \circ X_k(\omega)$ est une somme finie, et que

$$\text{l'on a : } \sum_{k=1}^{\infty} g \circ X_k = \sum_{j=1}^m y_j \cdot N(f^*, A_j).$$

$$\text{D'autre part, } E \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} g \circ X_k \right\} = \sum_{j=1}^m y_j \cdot \mu(A_j) = \int g d\mu.$$

2) Soit $g \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$ une fonction mesurable positive, nulle en dehors d'un borélien borné S . Il existe une suite croissante $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions étagées positives, nulles en dehors de S , telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g$$

Comme S est borné, $N(f^*, S)$ est fini ; on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} g_n \circ X_k = \sum_{k=1}^{\infty} g \circ X_k .$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq E \left(\sum_{k=1}^{\infty} g_n \circ X_k \right) = \int g_n d\mu < \int g d\mu < +\infty .$$

D'après le théorème de convergence monotone :

$$E \left(\sum_{k=1}^{\infty} g \circ X_k \right) = \int g d\mu .$$

3) Soit g une fonction mesurable appartenant à $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$; on considère une suite $(A_l)_{l \in \mathbb{N}^*}$ croissante de boréliens bornés, formant un recouvrement de \mathcal{X} . Pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, on pose : $g_l = g \cdot 1_{A_l}$.

D'après 2), on sait que pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire

$$V_l = \sum_{k=1}^{\infty} |g_l| \circ X_k$$

est intégrable, et que :

$$0 \leq E \{ V_l \} = \int |g_l| d\mu \leq \int |g| d\mu < +\infty .$$

Comme la suite $\{ V_l \}_{l \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, elle converge dans $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mais aussi P-presque sûrement vers une variable aléatoire V ; on pose :

$$\Omega_1 = \{ \omega \in \Omega : V_l \rightarrow V \} .$$

On pose aussi : $M = \{ x \in \mathcal{X} : |g(x)| = +\infty \}$ et $\Omega_2 = \{ \omega \in \Omega : N(f^\omega, M) = 0 \}$. Comme $\mu(M)$ est nul, la probabilité de $\Omega_1 \cap \Omega_2$ est égale à 1.

$\varepsilon > 0$ étant fixé, ainsi que $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, il existe un entier l_0 tel que, pour tout $l \geq l_0$: $V(\omega) - V_l(\omega) < \varepsilon$.

Alors, si K désigne le plus grand indice k pour lequel $X_k(\omega)$ appartient à A_{l_0} , et si l_1 désigne un indice assez grand pour que A_{l_1} contienne les points $X_k(\omega)$ ($k = 1, \dots, K$), on a :

$$V(\omega) \geq V_{l_1}(\omega) \geq \sum_{k=1}^K |g| \circ X_k(\omega) \geq V_{l_0}(\omega) .$$

La série $\sum_{k=1}^{\infty} g \circ X_k$ est donc absolument convergente sur $\Omega_1 \cap \Omega_2$; on en déduit, à l'aide de 2), que : $E \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} g \circ X_k \right\} = \int g du$.

4) Soit g un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$ et h une fonction μ -presque partout égale à g . L'ensemble $\{x \in \mathcal{X} : g(x) \neq h(x)\}$ étant μ -négligeable son effectif pour le processus ponctuel f^* est P-presque sûrement nul, si bien que

$$\sum_{k=1}^{\infty} g \circ X_k = \sum_{k=1}^{\infty} h \circ X_k, \quad \text{P-presque sûrement.}$$

Ceci nous permet de poser la définition suivante :

DÉFINITION 1. — Soit g un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$; à sa classe d'équivalence dans $L(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$ correspond un élément unique de $L(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\bar{\eta}^*$ défini à une équivalence près pour l'égalité presque sûre par :

$$\sum_{k=1}^{\infty} g \circ X_k(\cdot) - \int g d\mu$$

II. On considère à présent un processus ponctuel orthogonal (p. p. o.), c'est-à-dire un processus ponctuel f^* tel que :

- 1) $\forall B \in \mathcal{B}_b; N^*(f^*; B) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$
 - 2) $\forall B_1 \in \mathcal{B}_b; \forall B_2 \in \mathcal{B}_b; B_1$ et B_2 disjoints;
- alors, $\text{cov} \{ N(f^*; B_1); N(f^*; B_2) \} = 0$.

En fait selon la terminologie usuelle, c'est la mesure aléatoire $(f^* - \mu)$ qui est orthogonale. Nous allons construire l'intégrale stochastique $\Gamma(g)$ d'une fonction g selon la méthode exposée dans [V], et l'identifier à $\bar{\eta}^*$. Cependant, le contexte particulier dans lequel nous nous sommes placés permet de préciser auparavant certains points. Rappelons d'abord la définition.

DÉFINITION 2. — On appelle fonction structurelle du p. p. o. f^* la fonction d'ensemble positive m , additive sur \mathcal{B}_b , telle que :

$$\forall B_1 \in \mathcal{B}_b; \forall B_2 \in \mathcal{B}_b; m(B_1 \cap B_2) = \text{cov} \{ N(f^*, B_1); N(f^*, B_2) \}$$

PROPOSITION 2.1. — m se prolonge de façon unique en une mesure σ -additive sur \mathcal{B} .

Démonstration. — Il suffit pour cela que m soit σ -additive sur l'anneau \mathcal{B}_b .

1) Soit A un borélien borné, union disjointe de boréliens bornés :

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i ;$$

Pour simplifier l'écriture, posons : $X = N(f^*, A)$ et,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : X_n = N\left(f^* ; \sum_{i=1}^n A_i\right).$$

Comme $X \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, P)$, le théorème de convergence dominé implique :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = E\{X\}.$$

On en déduit : $\lim_{n \rightarrow \infty} [X_n - E\{X_n\}]^2 = [X - E\{X\}]^2$.

2) Comme les variables X_n sont non négatives,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E(X_n) \geq 0 ;$$

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n - E\{X_n\} \leq X_n$ et $E\{X_n\} - X_n \leq E\{X_n\}$ si bien que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |X_n - E\{X_n\}| \leq \max(X_n; E\{X_n\}) \leq \max(X, E\{X\})$. Puisque X et $E\{X\}$ sont non négatives, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, [X_n - E\{X_n\}]^2 \leq \max(X^2, E^2\{X\}).$$

Comme $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\max(X^2, E^2\{X\}) \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, P)$. En utilisant à nouveau le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n - E\{X_n\}]^2 = E[X - E\{X\}]^2$$

c'est-à-dire : $\lim_{n \rightarrow \infty} m\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m(A_i) = m(A)$.

PROPOSITION 2.2. — Soit f^* un p. p. o. de mesure structurelle m , et A un borélien borné tel que $m(A) = 0$; le processus ponctuel f^*_A , restriction de f^* au borélien A , est presque sûrement constant.

Démonstration. — Comme la variable aléatoire $N(f^*, A)$ a une variance nulle, elle est presque sûrement constante ; si cette constante est 0, la proposition est vérifiée. Sinon, soit k un entier positif tel que : $N(f^*, A) = k$ p. s.

Notons $\{\mathcal{D}_l\}_{l \in \mathbb{N}^*}$ une suite de partitions emboîtées, \mathcal{B} -mesurables, de A , dont le module tend vers 0 avec $\frac{1}{l}$; les boréliens des partitions \mathcal{D}_l ont une

mesure m -nulle, et, par conséquent, un effectif presque sûrement constant.

Pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, on peut donc extraire de \mathcal{D}_l une famille finie

$$A_l = \{A_j^l; j = 1, \dots, t_l\}$$

telle que : $\forall j = 1, \dots, t_l : N(f^*, A_j) = k_j^l > 0$ p. s. et $\sum_{j=1}^{t_l} k_j^l = k$.

Il est clair que, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, $\text{Card}(A_l) \leq \text{Card}(A_{l+1}) \leq k$; il existe donc un entier $t \leq k$ et $L \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall l > L : \text{Card}(A_l) = t.$$

On peut, d'autre part, numérotter les boréliens des familles A_l ($l > L$) de façon que, pour tout $j = 1, \dots, t$, $\{A_j^l\}_{l > L}$ soit une suite de boréliens emboîtés; alors, le borélien $\bigcap_{l > L} A_j^l$ qui a un diamètre nul et un effectif positif p. s. constant k_j , est réduit à un point unique x_j . Cela permet d'écrire :

$$f_A^* = \sum_{j=1}^t k_j \cdot \delta x_j \quad (\text{p. s.})$$

PROPOSITION 2.3. — Soit f^* un p. p. o. de mesure structurelle m et de mesure moyenne μ . Il existe un borélien A tel que h^* , restriction de f^* à A , soit un p. p. o. de mesure structurelle m , et de moyenne v , mesure équivalente à m .

Démonstration. — 1) Soit f^* un p. p. o. dont la mesure structurelle m et la moyenne μ ne sont pas équivalentes :

$$\exists B \in \mathcal{B} \text{ tel que : } m(B) = 0 \text{ et } \mu(B) > 0 \quad (\text{propriété } P_1)$$

$$\text{ou } \exists B \in \mathcal{B} \text{ tel que : } m(B) > 0 \text{ et } \mu(B) = 0 \quad (\text{propriété } P_2)$$

Remarquons d'abord qu'il n'existe pas de borélien vérifiant la propriété P_2 , puisque, si $\mu(B)$ est nul, $N(f^*, B)$ est une v. a. presque sûrement constante (et nulle).

Remarquons ensuite que, si $m(B)$ est nul, et si $\mu(B)$ est positif, $\mu(B)$ est nécessairement supérieur ou égal à 1.

2) Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ une partition dénombrable de \mathcal{X} formée de boréliens bornés.

Soit i un indice quelconque : s'il n'existe pas dans A_i de borélien vérifiant la propriété P_1 , on pose $C_i = \emptyset$. Supposons au contraire qu'un tel borélien existe, et notons le : $B_{i,1}$. Si, dans $A_i - B_{i,1}$, il existe un borélien vérifiant P_1 , on le note $B_{i,2}$; si, dans $A_i - (B_{i,1} \cup B_{i,2})$ il existe à nouveau un borélien

vérifiant P_1 , on le note $B_{i,3}$, et ainsi de suite. On ne peut continuer à utiliser indéfiniment ce procédé, car :

$$\forall j, \mu(B_{i,j}) \geq 1 \quad \text{et} \quad \sum_j \mu(B_{i,j}) < \mu(A_i) < +\infty$$

On pose alors :

$$C_i = \bigcup_j B_{i,j}; \quad C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i; \quad A = \mathcal{X} - C.$$

On définit le processus ponctuel h^* comme la restriction de f^* au borélien A . Pour tout borélien borné B , f^* et h^* ont presque sûrement les mêmes effectifs centrés : $N^*(f^*, B) = N^*(h^*, B)$ p. s. Le processus ponctuel h^* est donc orthogonal, et a la même mesure structurelle m que f^* . Enfin, si ν est la mesure moyenne de h^* , ν est nulle sur C , et coïncide avec μ sur A ; comme il n'y a pas de borélien inclus dans A qui vérifie P_1 , les mesures m et ν sont équivalentes.

III. Soit f^* un processus ponctuel orthogonal de mesure moyenne μ et de mesure structurelle m . On considère une fonction étagée à support

$$\text{borné } g(x) = \sum_{k=1}^n b_k \cdot 1_{B_k}(x).$$

L'intégrale stochastique $\bar{\eta}^* = \int g(x) \cdot N^*(f^*; dx)$ est définie comme la classe d'équivalence, pour la relation d'égalité P-presque sûre, de

$$\eta^* = \sum_{k=1}^n b_k \cdot N^*(f^*, B_k).$$

Cette définition qui n'utilise pas la propriété

d'orthogonalité, coïncide naturellement avec celle du paragraphe I.

Soit \mathcal{S} l'ensemble des fonctions étagées à support borné, et S le quotient de \mathcal{S} pour l'égalité m -presque partout; soit $\| \cdot \|_m$ la norme de $L^2(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m)$. On vérifie aisément que S est un sous-ensemble dense de $L^2(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m)$.

D'autre part, soit \mathcal{L} l'ensemble des variables aléatoires qui peuvent s'écrire sous la forme η^* pour une fonction g de \mathcal{S} , et L le quotient de \mathcal{L} pour l'égalité P-presque sûre; soit $\| \cdot \|_P$ la norme de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et \bar{L} l'adhérence de L dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

L'orthogonalité de f^* entraîne l'égalité suivante : $\forall (g, h) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$,

$$E \{ \eta^*(g) \cdot \eta^*(h) \} = \int g \cdot h \cdot dm$$

ce qui permet d'établir une isométrie entre S et $L : \forall (\bar{g}, \bar{h}) \in S \times S$

$$\|\bar{g} - \bar{h}\|_m = \|\bar{\eta}^*(g) - \bar{\eta}^*(h)\|_P$$

Cette isométrie s'étend entre $L^2(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m)$ et \bar{L} , ce qui permet de définir l'intégrale stochastique $\Gamma(g)$ d'une fonction g de $\mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m)$ comme un élément de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Nous allons d'abord démontrer que l'appartenance de g à $\mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m)$ n'entraîne pas son appartenance à $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$, puis nous vérifierons que les intégrales $\Gamma(g)$ et $\bar{\eta}^*(g)$ coïncident si g appartient à la fois à $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$ et à $\mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m)$, ce qui est naturel, mais pas immédiat.

THÉORÈME 3.1. — *Soit g une fonction de $\mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m)$; en général, g n'est pas μ -intégrable, mais seulement μ -mesurable. Cependant, si g est bornée, et a un support borné, $g \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$.*

Démonstration. — 1) Voici d'abord un contre-exemple simple : supposons que le p. p. o. f^* possède un point x d'effectif presque sûrement constant et positif : $m(x)$ est nul, tandis que $\mu(x)$ est positif. Si g est une fonction de $\mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m)$ telle que $|g|(x) = +\infty$, il est clair que $g \notin \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$.

2) Soit $g \in \mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m)$ et $(g_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions étagées qui converge m -presque partout vers g ; soit B un borélien de mesure m -nulle, contenant $\{x \in \mathcal{X} : g_k(x) \rightarrow g(x)\}$; soit $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de boréliens bornés emboîtés recouvrant \mathcal{X} .

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose : $B_k = B \cap C_k$.

Comme $m(B_k) = 0$, la restriction de f^* à B_k est un processus ponctuel f_k^* presque sûrement constant :

$$f_k^* = \sum_{i=1}^{s_k} n_i \cdot \delta_{x_i}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $i = 1, \dots, s_k$, on a donc :

$$\mu(x_i) = n_i \quad \text{et} \quad \mu\left(B_k - \bigcup_{i=1}^{s_k} \{x_i\}\right) = 0$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on construit une fonction h_k définie par :

$$\begin{aligned} h_k(x) &= g_k(x) \cdot 1_{C_k}(x) & \text{si } x \notin B_k \\ h_k(x) &= 0 & \text{si } x \in B_k - \bigcup_{i=1}^{s_k} \{x_i\} \\ h_k(x) &= g(x) & \text{si } x = x_i \text{ et si } g(x_i) \neq \infty \\ h_k(x) &= \pm k & \text{si } x = x_i \text{ et si } g(x_i) = \pm \infty \end{aligned}$$

Il est clair que $\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions μ -étagées qui converge μ -presque partout vers g : g est donc μ -mesurable.

3) Si g est bornée, à support borné, et élément de $\mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m)$, alors g appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$: en effet, g est μ -mesurable, et, comme son support S_g est borné, $\mu(S_g) < +\infty$.

THÉORÈME 3.2. — Soit g une fonction appartenant à

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m) \cap \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu).$$

L'intégrale stochastique $I(g)$ définie par prolongement isométrique dans le paragraphe III, et l'intégrale stochastique $\bar{\eta}(g)$ définie par l'un de ses représentants au paragraphe I, coïncident.

Démonstration. — a) Soit $g \in \mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m) \cap \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$: il existe une suite $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions étagées qui converge μ -presque partout vers g . On peut supposer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est nulle en dehors d'un borélien borné et que $|g_n| \leq 2|g|$.

D'après le théorème I, il existe dans \mathcal{A} un événement Ω_0 de probabilité 1,

tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} g \circ X_k(\omega)$ soit absolument convergente.

Soit H un borélien de mesure μ -nulle, contenant $\{x \in \mathcal{X} : g_n(x) \nrightarrow g(x)\}$: l'événement $\{N(f^* ; H) = 0\}$ a une probabilité 1.

Fixons $\varepsilon > 0$ et $\omega \in \Omega_0 \cap \{N(f^* ; H) = 0\}$; il existe $K \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} |g| \circ X_k(\omega) < \varepsilon/4, \quad \text{donc, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=K+1}^{\infty} |g_n| \circ X_k(\omega) < \varepsilon/2$$

Or, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall k = 1, \dots, K ; \forall n \geq N$:

$$|g_n \circ X_k(\omega) - g \circ X_k(\omega)| < \varepsilon/4K$$

Ce qui montre que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} g_n \circ X_k = \sum_{k=1}^{\infty} g \circ X_k$, P-presque sûrement.

Par ailleurs, le théorème de convergence dominée dans $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$ montre que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = \int g d\mu$$

b) Comme μ domine m , la convergence de $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vers g a lieu aussi

m -presque partout ; le théorème de convergence dominée dans $L^2(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m)$ montre que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{g}_n - \bar{g}\|_m = 0.$$

Ce qui, par isométrie, entraîne :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{\eta}'(g_n) - \Gamma'(g)\|_P = 0$$

où $\Gamma'(g)$ désigne l'élément de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ défini par prolongement isométrique au paragraphe III.

Les fonctions $g_n (n \in \mathbb{N}^*)$ étant des fonctions étagées à support borné, les intégrales stochastiques $\bar{\eta}'(g_n)$ peuvent être représentées par :

$$\eta'(g_n) = \sum_{k=1}^{\infty} g_n \circ X_k - \int g_n \cdot d\mu$$

La convergence en moyenne quadratique de la suite $\{\bar{\eta}'(g_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers $\Gamma'(g)$ entraîne la convergence presque sûre d'une sous-suite des représentants $\eta'(g_n)$ de ces intégrales. Compte tenu de la partie a) de la démonstration, l'intégrale stochastique $\Gamma'(g)$ peut être représentée par l'expression P-presque sûrement définie :

$$\sum_{k=1}^{\infty} g \circ X_k - \int g d\mu$$

Nous pouvons désormais noter : $\Gamma'(g) = \bar{\eta}'(g)$.

Remarque. — Si $g \in \mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m)$ et si g n'est pas μ -intégrable, on peut quand même obtenir parfois une représentation de l'intégrale stochastique $\bar{\eta}'(g)$. Il suffit pour cela que g soit ν -intégrable, pour la mesure moyenne ν du processus ponctuel h^* obtenu dans la proposition 2.3 : Si $\{Y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de v. a. à valeurs dans $\bar{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \cup \{y\}$ qui représente le processus h^* , on peut représenter $\bar{\eta}'(g)$ par l'expression P-presque

sûrement définie : $\sum_{k=1}^{\infty} g \circ Y_k - \int g d\nu$.

DEUXIÈME PARTIE

IV. On considère une suite $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ de processus ponctuels, qui possèdent des mesures moyennes $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Chaque f_n^* est représenté par une

suite $\{X_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ de v. a. à valeurs dans $\overline{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \cup \{y\}$, de façon que les convergences presque sûres, en probabilité, et en loi de $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ vers f_0^* entraînent des convergences analogues de chaque suite $\{X_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ vers $X_{0,k}$ [cf. : (VII)].

Dans tout l'article, g appartiendra à $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu_n)$ de façon que pour tout n , l'expression

$$\eta_n^*(g) = \sum_{k=1}^{\infty} g \circ X_{n,k} - \int g d\mu_n$$

soit presque sûrement définie; pour tout borélien borné B , on posera :

$$g_B = g \cdot 1_B \quad \text{et} \quad \eta_n^*(g_B) = \sum_{k=1}^{\infty} g \cdot 1_B \circ X_{n,k} - \int_B g d\mu_n$$

Comme on le sait [cf. : (III)], la convergence faible de $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers f_0^* entraîne la convergence en loi, pour tout borélien borné B tel que $N(f_0^*, \partial B) = 0$ p. s. (ou $\mu_0(\partial B) = 0$), de la suite $\{N(f_n^*, B)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers $N(f_0^*, B)$. Comme cette suite est constituée de variables aléatoires réelles positives, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \{ N(f_n^*, B) \} = E \{ N(f_0^*, B) \}$$

si et seulement si la suite $(\{N(f_n^*, B)\})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est équi-intégrable. Nous ferons l'hypothèse que, pour tout borélien B tel que $\mu_0(\partial B)$ est nul, la suite $\{N(f_n^*, B)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est équi-intégrable, de façon à avoir pour les trois types de convergence envisagés :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\mu_n, \mu_0) = 0.$$

THÉORÈME 4.1. — Soit $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de processus ponctuels qui converge presque sûrement vers un processus ponctuel f_0^* ; soit g une fonction numérique bornée sur \mathcal{X} , μ_0 -presque partout continue; pour tout borélien borné B tel que : $\mu_0(\partial B) = 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n^*(g_B) = \eta_0^*(g_B) \quad \text{presque sûrement.}$$

Démonstration. — a) Soit \mathcal{D} l'ensemble, mesurable, des discontinuités de g ; on considère un point $\omega \in \Omega$ tel que :

$$N(f_0^\omega, \mathcal{D}) = 0; \quad N(f_0^\omega, \partial B) = 0; \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X_{n,k}(\omega) = X_{0,k}(\omega)$$

D'après [VI], l'ensemble des points $\omega \in \Omega$ ayant cette propriété a une probabilité égale à 1.

Comme B est un borélien borné, $N(f_0^\omega, B)$ est fini; il existe donc un entier N_1 tel que, pour tout $n > N_1$:

$$0 \leq \min_{X_{0,k}(\omega) \in B} d(X_{0,k}(\omega); X_{n,k}(\omega)) < \min_{X_{0,k}(\omega) \in B} d(X_{0,k}(\omega); B^c)$$

D'autre part, il existe un entier N_2 tel que, pour tout $n > N_2$:

$$N(f_n^\omega, B) = N(f_0^\omega, B).$$

Ainsi, pour $n > \max(N_1, N_2)$, les sommes : $\sum_{k=1}^{\infty} g_B \circ X_{n,k}(\omega)$ sont des sommes finies qui portent sur les mêmes indices k que la somme finie :

$\sum_{k=1}^{\infty} g_B \circ X_{0,k}(\omega)$; comme g est continue sur $\mathcal{X} - \mathcal{D}$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} g_B \circ X_{n,k}(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} g_B \circ X_{0,k}(\omega).$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| \sum_{k=1}^{\infty} g_B \circ X_{n,k} \right| \leq M \cdot N(f_n^*, B)$ où M désigne la borne supérieure de $|g_B|$. La suite $\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} g_B \circ X_{n,k} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ est donc équi-intégrable, ce qui implique compte tenu de a) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} g_B \circ X_{n,k} \right\} = E \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} g_B \circ X_{0,k} \right\}$$

c'est-à-dire, d'après le théorème 1.1 de la première partie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_B d\mu_n = \int g_B d\mu.$$

Remarque. — Si, en plus des conditions de ce théorème, on suppose que g a un support borné, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n^*(g) = \eta_0^*(g) \quad \text{p. s.}$$

Cependant, si g n'a pas un support borné, ce résultat est faux en général.

Voici un contreexemple qui servira souvent :

On pose $\mathcal{X} = \mathbb{R}^+ - \{0\}$, et pour tout $N \in \mathbb{N}^*$: $I_N =]N - 1; N]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\{t_{N,n}^*\}_{N \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes dont la loi de probabilité est définie par :

$$P \{ t_{N,n}^* = 2 \} = P \{ t_{N,n}^* = 0 \} = \frac{1}{2}$$

on pose alors :

$$f_0^* = \sum_{N=1}^{\infty} \delta_N$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n^* = \sum_{N=1}^n \delta_N + 2^n \sum_{N=n+1}^{\infty} t_{N,n}^* \cdot \delta_N$$

où δ_N désigne la mesure de Dirac au point N . Il est clair que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n^*, f_0^*) = 0 \quad \text{p. s.} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\mu_n, \mu_0) = 0.$$

Enfin, on pose pour tout $N \in \mathbb{N} : \left(g(N) = \frac{1}{2^N} \right)$ et on définit g sur \mathbb{R}^+ par interpolation linéaire.

Cette fonction est μ_0 -presque partout continue, bornée, elle appartient à $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu_n)$, mais elle n'est pas à support borné. On peut vérifier alors que :

$$\int g d\mu_0 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int g d\mu_n = 2$$

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\eta_n^*(g)$ peut s'écrire :

$$\sum_{N=n+1}^{\infty} \frac{t_{N,n}^*}{2^{N-n}} - 1$$

tandis que $\eta_0^*(g)$ est une variable aléatoire p. s. nulle.

Or la convergence de $\sum_{N=n+1}^{\infty} \frac{t_{N,n}^*}{2^{N-n}}$ vers 1 n'a même pas lieu en loi, puisque

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{N=n+1}^{\infty} \frac{t_{N,n}^*}{2^{N-n}}$ suit la loi uniforme sur $[0, 2]$.

Ce contreexemple peut donc être utilisé pour les deux théorèmes qui suivent.

THÉORÈME 4.2. — Soit $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de processus ponctuels qui converge en loi vers un processus f_0^* dans l'espace métrique (\mathcal{E}, ρ) . Soit g une fonction numérique bornée sur \mathcal{X} , μ_0 -presque partout continue ; pour tout borélien borné B tel que : $\mu_0(\partial B) = 0$, la suite $\{\eta_n^*(g_B)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $\eta_0^*(g_B)$.

Démonstration. — Comme (\mathcal{E}, ρ) est un espace métrique séparable, il existe une suite $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de processus ponctuels définis sur un espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ tels que [cf. VIII] :

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n^* et f_n^* ont la même loi
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^* = f_0^*$ P' · p. s.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\{X'_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ la représentation de f_n^* par une suite de v. a. à valeurs dans $\mathcal{X} = \mathcal{X} \cup \{y\}$, et

$$\eta_n^*(g_B) = \sum_{k=1}^{\infty} g_B \circ X'_{n,k} - \int_B g d\mu_n$$

Pour établir le théorème 4.2, il suffit, en vertu du théorème 4.1, de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{\infty} g_B \circ X_{n,k}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} g_B \circ X'_{n,k}$ ont des lois identiques.

C'est immédiat si g est une fonction étagée ; si g est un élément quelconque de $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu_0)$, g_B est la limite presque sûre d'une suite de fonctions étagées $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, nulles en dehors de B , ce qui permet d'achever aisément la démonstration.

THÉORÈME 4.3. — Soit $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de processus ponctuels qui converge en probabilité vers un processus ponctuel f_0^* :

$$\forall \varepsilon > 0 ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P \{ \rho(f_n^*, f_0^*) > \varepsilon \} = 0.$$

Soit g une fonction numérique bornée sur \mathcal{X} , μ_0 -presque partout continue ; pour tout borélien B tel que $\mu_0(\partial B) = 0$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P \{ |\eta_n^*(g_B) - \eta_0^*(g_B)| > \varepsilon \} = 0$$

Démonstration. — Soit ε un nombre positif fixé.

- 1) Soit \mathcal{D} l'ensemble des discontinuités de g ; l'événement

$$\Omega_0 = \{ N(f_0; \mathcal{D}) = 0 \}$$

a une probabilité égale à 1.

2) Fixons un borélien borné B tel que $\mu_0(\partial B) = 0$; si $\mu_0(\overset{\circ}{B}) = 0$, le théorème est trivialement vérifié; on supposera donc que $\overset{\circ}{B}$ est un ouvert non vide, et on posera pour tout entier i non nul :

$$B_i = \left\{ x \in \mathcal{X} : d(x, \overset{\circ}{B}^c) \geq \frac{1}{i} \right\}$$

Comme $\overset{\circ}{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, on a :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_0(B - B_i) = 0$$

On choisit i_1 de façon que $P \{ N(f_0^*, B - B_{i_1}) = 0 \} > 1 - \varepsilon/6$, et on pose

$$\Omega_{i_1} = \{ N(f_0^*, B - B_{i_1}) = 0 \}$$

3) K étant un entier qui sera défini en 6), pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble

$$D_i = \left\{ x \in B - \mathcal{D} ; d(x, y) > \frac{1}{i} = > |g(x) - g(y)| \leq \frac{\varepsilon}{K} \right\}$$

est un fermé de $B - \mathcal{D}$, donc est mesurable. Comme $B - \mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$, on a :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_0(B - \mathcal{D} - D_i) = 0$$

On choisit $i_2 > i_1$ de façon que $P \{ N(f_0^*, B - \mathcal{D} - D_{i_2}) = 0 \} > 1 - \varepsilon/6$, et on pose :

$$\Omega_{i_2} = \{ N(f_0^*, B - \mathcal{D} - D_{i_2}) = 0 \}$$

4) Soit Ω_n l'événement $\{ N(f_0^*, B) = N(f_n^*, B) \}$; il existe N_1 tel que, pour tout $n > N_1$: $P(\Omega_n) > 1 - \varepsilon/6$.

5) Soit $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}^*}$ la première des partitions qui servent à numérotter les points des répartitions ponctuelles [cf. VI]; comme $B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_0 \left(B - \bigcup_{j=1}^t A_j \right) = 0$$

On choisit T de façon que $P \left\{ N \left(f_0^* ; B - \bigcup_{j=1}^T A_j \right) = 0 \right\} > 1 - \varepsilon/6$, et on pose :

$$\Omega_T = \left\{ N \left(f_0^* ; B - \bigcup_{j=1}^T A_j \right) = 0 \right\}.$$

6) On choisit un entier K de façon que: $P \left\{ N \left(f_0^*, \bigcup_{j=1}^T A_j \right) \leq K \right\} > 1 - \varepsilon/6$
et on pose :

$$\Omega_K = \left\{ N \left(f_0^*, \bigcup_{j=1}^T A_j \right) \leq K \right\}.$$

7) D'après le théorème B, pour tout $k \leq K$, il existe $N_{2,k}$ tel que, pour $n > N_{2,k}$:

$$P \left[\left\{ X_{0,k} \in \mathcal{X}; d(X_{0,k}; X_{n,k}) < \frac{1}{i_2} \right\} \cup \left\{ X_{0,k} = y; X_{n,k} \in \mathcal{X} - B \right\} \right] > 1 - \varepsilon/6K$$

On note Ω_k^n l'événement entre crochets, et on pose $N_2 = \max_{k=1}^K \{ N_{2,k} \}$ et

$$\Omega_K^n = \bigcap_{k=1}^K \Omega_k^n.$$

8) Pour $n > \max(N_1, N_2)$, l'événement $\Omega_0 \cap \Omega_{i_1} \cap \Omega_{i_2} \cap \Omega_T \cap \Omega_K \cap \Omega_n \cap \Omega_K^n$ a une probabilité supérieure à $1 - \varepsilon$; si ω appartient à cet événement, tout point $X_{0,k}(\omega)$ qui appartient à B est tel que $k < K$ et tel que

$$d(X_{0,k}(\omega); \mathring{B}^c) > \frac{1}{i_1} > \frac{1}{i_2};$$

comme $d(X_{n,k}(\omega); X_{0,k}(\omega)) < \frac{1}{i_2}$, $X_{n,k}(\omega) \in \mathring{B}$, et comme de plus

$$X_{0,k}(\omega) \in D_{i_2} : |g_B \circ X_{0,k}(\omega) - g_B \circ X_{n,k}(\omega)| < \varepsilon/K.$$

D'autre part, si $X_{0,k}(\omega)$ n'appartient pas à B , $X_{n,k}(\omega)$ n'appartient pas à B non plus, puisque $N(f_0^\omega, B) = N(f_n^\omega, B)$. On a donc finalement :

$$P \left\{ \left| \sum_{k=1}^{\infty} g_B \circ X_{n,k} - \sum_{k=1}^{\infty} g_B \circ X_{0,k} \right| < \varepsilon \right\} > 1 - \varepsilon.$$

9) Comme dans le cas de la convergence presque sûre, on en déduit, grâce à l'équi-intégrabilité de la suite $\{ N(f_n^*, B) \}_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_B d\mu_n = \int g_B d\mu_0.$$

Remarque. — Les méthodes utilisées dans ce paragraphe permettent de démontrer facilement l'analogue d'un résultat utile dans l'étude de la convergence faible des mesures de probabilité ([VII, p. 52]).

THÉORÈME 4.4. — Soit $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de mesures positives de \mathcal{M} qui converge faiblement à distance finie vers μ_0 ; soit g une fonction bornée, μ_0 -presque partout continue, et nulle en dehors d'une partie bornée de \mathcal{X} ; alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g d\mu_n = \int g d\mu_0$$

Démonstration. — D'après [VI], il existe une suite $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ de processus ponctuels de Poisson de mesures moyennes $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n^*, f_0^*) = 0 \quad \text{p. s.}$$

Soit B un borélien borné de frontière μ_0 -nulle contenant $\{g \neq 0\}$; d'après le théorème 4.1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} g_B \circ X_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty} g_B \circ X_{0,k} \quad \text{p. s.}$$

et l'équi-intégrabilité de la suite $\{N(f_n^*, B)\}_{n \in \mathbb{N}}$ permet de conclure.

V. Soient $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de processus ponctuels, et g une fonction numérique, remplissant les conditions générales du paragraphe IV. On sait que, sous ces hypothèses, il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction γ_n finie et mesurable, qui est μ_n -presque partout égale à g , si bien que les

expressions $\sum_{k=1}^{\infty} g \circ X_{n,k}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_n \circ X_{n,k}$ sont P-presque sûrement définies et égales.

Pour tout borélien borné B , et pour tout $\omega \in \Omega$, posons :

$$\lambda_n^\omega(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{n,B} \circ X_{n,k}(\omega) - \int \gamma_{n,B} d\mu$$

Nous allons démontrer que la fonction d'ensemble aléatoire λ_n^* définit une mesure aléatoire, c'est-à-dire une application (Ω, \mathcal{F}) -mesurable de Ω dans \mathcal{M} . Pour cela, d'après (II), il suffit de montrer que λ_n^* peut être décomposée sous la forme $\lambda_n^{*+} - \lambda_n^{*-}$, où λ_n^{*+} et λ_n^{*-} sont deux mesures aléatoires positives $(\mathcal{A}, \mathcal{F}^+)$ -mesurables.

Il est clair, tout d'abord, que la formule :

$$\forall B \in \mathcal{B}_b, \quad \Gamma_n(B) = \int \gamma_{n,B} \cdot d\mu_n$$

définit un élément de \mathcal{M} qui peut être décomposé sous la forme :

$$\Gamma_n^+ - \Gamma_n^-, \quad \text{avec} \quad \Gamma_n^+ \in \mathcal{M}^+; \quad \Gamma_n^- \in \mathcal{M}^+.$$

D'autre part, nous noterons $\gamma_n^+ - \gamma_n^-$ la décomposition de γ_n en différence de deux applications mesurables positives ; pour tout $B \in \mathcal{B}_b$, on pose :

$$\theta_n^{*+}(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{n,B}^+ \circ X_{n,k} \quad \text{et} \quad \theta_n^{*-}(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{n,B}^- \circ X_{n,k}.$$

Pour tout $\omega \in \Omega$, comme γ_n^+ est finie, $\theta_n^{\omega+}$ est finie sur \mathcal{B}_b ; comme de plus $\theta_n^{\omega+}$ est une mesure positive σ -additive sur \mathcal{B}_b , il existe un prolongement unique à la tribu \mathcal{B} , noté encore $\theta_n^{\omega+}$. Il en résulte que $\lambda_n^{\omega+} = \theta_n^{\omega+} + \Gamma_n^-$ est, pour tout ω , un élément de \mathcal{M}^+ . De plus, comme γ_n^+ est mesurable, l'application $\gamma_{n,B}^+ \circ X_{n,k}$ est, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $B \in \mathcal{B}_b$, une variable aléatoire réelle. Il en résulte que, pour tout $B \in \mathcal{B}_b$, $\theta_n^{*+}(B)$ est aussi une v. a. r. Par conséquent (II), θ_n^{*+} est une mesure aléatoire ainsi que $\theta_n^{*+} + \Gamma_n^- = \lambda_n^{*+}$; il en est de même pour $(\theta_n^{*-} + \Gamma_n^+) = \lambda_n^{*-}$. Enfin, on a évidemment : $\lambda_n^* = \lambda_n^{*+} - \lambda_n^{*-}$.

THÉORÈME 5.1. — *Supposons que la fonction g soit μ_0 -presque partout continue, et qu'il existe une fonction mesurable γ qui soit bornée et μ_n -presque partout égale à g pour tout $n \in \mathbb{N}$. Supposons d'autre part que la suite $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge p. s. à distance finie vers f_0^* :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n^* ; f_0^*) = 0 \quad \text{p. s.}$$

Alors, la suite de mesures à signe aléatoires $\{\lambda_n^\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement à distance finie vers λ_0^* ; c'est-à-dire qu'il existe un sous-ensemble $\Omega_0 \subset \Omega$, de probabilité 1, tel que, pour toute fonction h continue et bornée sur \mathcal{X} , à support S_h borné, et pour tout $\omega \in \Omega_0$:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int h \cdot d\lambda_n^\omega = \int h \cdot d\lambda_0^\omega$$

Démonstration. — 1) h, n, ω , étant fixés nous démontrons d'abord la représentation :

$$\int h \cdot d\lambda_n^\omega = \sum_{k=1}^{\infty} h \cdot \gamma \circ X_{n,k}(\omega) - \int h \cdot \gamma \cdot d\mu_n.$$

Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction étagée nulle en dehors de S_h :

$$h_r = \sum_{i=1}^{t_r} b_{i,r} \cdot 1_{B_{i,r}}$$

telle que : $\sup_{x \in \mathcal{E}} |h(x) - h_r(x)| < \frac{1}{r}$; alors, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$:

$$\int h_r \cdot d\lambda_n^\omega = \sum_{i=1}^{t_r} b_{i,r} \cdot \lambda_n^\omega(B_{i,r}).$$

Comme, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{B_{i,r}} \circ X_{n,k}(\omega)$ est une somme finie, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int h_r \cdot d\lambda_n^\omega &= \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{t_r} b_{i,r} \cdot \gamma_{B_{i,r}} \circ X_{n,k}(\omega) - \int \sum_{i=1}^{t_r} b_{i,r} \cdot \gamma_{B_{i,r}} \cdot d\mu_n \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} h_r \cdot \gamma \circ X_{n,k}(\omega) - \int h_r \cdot \gamma \cdot d\mu_n. \end{aligned}$$

Comme S_h ne contient qu'un nombre fini de point $X_{n,k}(\omega)$:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} h_r \cdot \gamma \circ X_{n,k}(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} h \cdot \gamma \circ X_{n,k}(\omega)$$

D'autre part, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \int |h_r \cdot \gamma - h \cdot \gamma| d\mu_n \leq \int |h_r - h| \cdot |\gamma| d\mu_n \leq \frac{1}{r} \int |\gamma| d\mu_n < +\infty$$

ce qui implique : $\lim_{r \rightarrow \infty} \int h_r \cdot \gamma \cdot d\mu_n = \int h \cdot \gamma \cdot d\mu_n$.

Enfin, comme h est bornée, on peut supposer que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$:

$$|h_r| \leq 2 \sup_{x \in \mathcal{E}} |h(x)|$$

et, comme $\lambda_n^\omega(S_h) < +\infty$, le théorème de convergence dominée implique :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int h_r \cdot d\lambda_n^\omega = \int h d\lambda_n^\omega$$

2) l'ensemble des discontinuités de $h \cdot \gamma$ est inclus dans l'ensemble \mathcal{D} des discontinuités de γ ; par conséquent $h \cdot \gamma$ est une fonction μ_0 -p. p. continue, bornée, à support borné inclus dans S_n . D'après le théorème 4. 1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n^*(h \cdot \gamma) = \eta_0^*(h \cdot \gamma) \quad \text{p. s.}$$

sur un sous-ensemble de Ω , de probabilité un, défini par

$$N(f_0^\omega; \mathcal{D}) = 0; \quad \forall k \in \mathbb{N}^*; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X_{n,k}(\omega) = X_{0,k}(\omega).$$

Ce sous-ensemble de Ω ne dépendant pas de h , la démonstration est achevée.

VI. Supposons à présent que $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ soit une suite de processus ponctuels orthogonaux, de moyennes $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, et de mesures structurelles $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Un élément g de $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m_n)$ étant fixé, on considère la suite $\{\bar{\eta}_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ des intégrales stochastiques définies par prolongement isométrique dans le paragraphe III.

Les résultats des paragraphes IV et V restent acquis, en effet, comme dans ces théorèmes, g_B est pour tout borélien borné B une fonction μ_n -mesurable, bornée, à support borné, donc un élément de $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu_n)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale stochastique $\bar{\eta}_n^*(g_B)$ peut donc être représentée sous la forme :

$$\sum_{k=1}^{\infty} g \circ X_{n,k} - \int g d\mu_n.$$

Nous allons, dans ce paragraphe, étudier la convergence de la suite $\{\bar{\eta}_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour cela nous allons d'abord préciser les liens qui existent dans certains cas entre le mode de convergence de $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$, celui de $\{\mu_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$, celui de $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, et la convergence en moyenne quadratique des effectifs de $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$.

PROPOSITION 6.1. — 1) Soit $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de processus ponctuels de Poisson qui converge faiblement vers le processus ponctuel de Poisson f_0^* . Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\mu_n, \mu_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(m_n, m_0) = 0$$

2) Si $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers f_0^* , pour tout borélien borné A tel que $N(f_0^*, \partial A) = 0$ p. s. :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|N(f_n^*, A) - N(f_0^*, A)\|_P = 0$$

Démonstration. — a) Soit B un borélien borné tel que :

$$\mu_0(\partial B) = E \{ N(f_0^*, \partial B) \} = 0.$$

Comme la suite $\{N(f_n^*, B)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $N(f_0^*, B)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ N(f_n^*, B) = 0 \} = P \{ N(f_0^*, B) = 0 \}$$

c'est-à-dire : $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\mu_n(B)} = e^{-\mu_0(B)}$.

On en déduit que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\mu_n, \mu_0) = 0$, et comme le processus est Poissonien : $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(m_n, m_0) = 0$.

b) Soit B un borélien borné tel que : $\mu_0(\partial B) = E \{ N(f_0^*, B) \} = 0$. Comme la suite $\{N(f_n^*, B)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $N(f_0^*, B)$, on a aussi, d'après a) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(B) = \mu_0(B) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m_n(B) = m_0(B)$$

et par conséquent : $\lim_{n \rightarrow \infty} E \{ N(f_n^*, B)^2 \} = E \{ N(f_0^*, B)^2 \}$.

La suite $\{N(f_n^*, B)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est donc équi-intégrable d'ordre 2, et :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|N(f_n^*, B) - N(f_0^*, B)\|_P = 0$$

PROPOSITION 6.2. — Soit $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de processus ponctuels orthogonaux ; nous supposons que, pour tout borélien borné A tel que $N(f_0^*, \partial A) = 0$ p. s., la suite $\{N(f_n^*, A)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est équi-intégrable d'ordre 2.

1) si $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers f_0^* , on a simultanément :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\mu_n, \mu_0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(m_n, m_0) = 0$$

2) si $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers f_0^* , pour tout borélien borné A tel que $N(f_0^*, \partial A) = 0$ p. s. :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|N(f_n^*, A) - N(f_0^*, A)\|_P = 0$$

Démonstration. — a) Pour tout borélien borné A tel que $N(f_0^*, \partial A) = 0$ p. s., la suite $\{N(f_n^*, A)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi équi-intégrable d'ordre 1, ce qui donne simultanément :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu_0(A) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E \{ N(f_n^*, A)^2 \} = E \{ N(f_0^*, A)^2 \}$$

et donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n(A) = m_0(A).$$

Soit g une fonction continue bornée, à support borné. Fixons $\varepsilon > 0$, et B un borélien borné de frontière μ_0 -nulle, contenant $\{g \neq 0\}$; il existe

une fonction étagée $g_\varepsilon = \sum_{i=1}^t b_i \cdot 1_{B_i}$; telle que :

- 1) $|g - g_\varepsilon| < \varepsilon$
- 2) $\forall i = 1, \dots, t; \mu_0(\partial B_i) = 0$
- 3) $\{g_\varepsilon \neq 0\} \subset B$.

Alors : $\left| \int g dm_0 - \int g dm_n \right| \leq \varepsilon \cdot m_0(B) + \varepsilon \cdot m_n(B) + \sum_{i=1}^t b_i |m_0(B_i) - m_n(B_i)|.$

Donc : $0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup \left| \int g dm_0 - \int g dm_n \right| \leq 3\varepsilon \cdot m_0(B)$ et, comme $m_0(B)$ est fini, et ε arbitraire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g dm_n = \int g dm_0$$

la suite $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge donc faiblement à distance finie vers m_0 .

b) Si $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers f_0^* , pour tout borélien borné A tel que $N(f_0^*, \partial A) = 0$ p. s., la suite $\{N(f_n^*, A)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $N(f_0^*, A)$; comme cette suite est supposée de plus équi-intégrable d'ordre 2, le résultat est immédiat.

THÉORÈME 6.1. — Soit $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de processus ponctuels orthogonaux, telle que : $\forall A \in \mathcal{B}_b, \mu_0(\partial A) = 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|N(f_n^*, A) - N(f_0^*, A)\|_p = 0$$

Soit g une fonction μ_0 presque partout continue, bornée sur \mathcal{X} ; pour tout borélien borné $B \in \mathcal{B}_b$ tel que : $\mu_0(\partial B) = 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\eta_n^*(g_B) - \eta_0^*(g_B)\|_p = 0.$$

Démonstration. — Il résulte de l'hypothèse que, pour tout $A \in \mathcal{B}_b$ tel que $N(f_0^*, \partial A) = 0$ p. s., la suite $\{N(f_n^*, A)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $N(f_0^*, A)$, et qu'elle est équi-intégrable d'ordre 2. D'après le théo-

rème 4.3, la suite $\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} g_B \circ X_{n,k} \right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge donc en probabilité vers $\sum_{k=1}^{\infty} g_B \circ X_{0,k}$.

De plus, si M désigne la borne supérieure de $|g_B|$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left[\sum_{k=1}^{\infty} g_B \circ X_{n,k} \right]^2 \leq M^2 \cdot N^2(f_n^*, B).$$

Ce qui montre l'équi-intégrabilité d'ordre 2 de $\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} g_B \circ X_{n,k} \right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, et

donc sa convergence en moyenne quadratique vers $\sum_{k=1}^{\infty} g_B \circ X_{0,k}$.

D'autre part, la suite $\{N(f_n^*, B)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est *a fortiori* équi-intégrable d'ordre 1, ce qui montre que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_B d\mu_n = \int g_B d\mu_0$$

et permet de conclure.

Remarques. — Si, sous les conditions du théorème 6.1., g a un support borné, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{\eta}_n(g) - \bar{\eta}_0(g)\|_P = 0$$

mais cette propriété est fautive si g n'est pas à support borné. Reprenons le contreexemple qui suit le théorème 4.1. : g est un élément de

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m_n),$$

puisque

$$\int g^2 dm_0 = 0 \quad \text{et,} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* : \int g^2 dm_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}}.$$

Cependant : $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g\|_{m_n} \neq \|g\|_{m_0}$.

2) Si $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de processus ponctuels orthogonaux, la suite de mesures aléatoires $\{\lambda_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie au théorème 5.1 est elle-même orthogonale [cf. : (V)].

Soit $g \in \bigcap_{n=0}^{\infty} [\mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B}, m_n) \cap \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu_n)]$, et γ une fonction mesurable et bornée, μ_n -presque partout égale à g (donc aussi m_n -presque partout égale à g) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{B}_b \times \mathcal{B}_t$, et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} E \{ \lambda_n^*(A) \cdot \lambda_n^*(B) \} &= E \left\{ \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_A \circ X_{n,k} - \int \gamma_A d\mu_n \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_B \circ X_{n,k} - \int \gamma_B \cdot d\mu_n \right) \right\} \\ &= E \{ \vec{\eta}_n^*(g_A) \cdot \vec{\eta}_n^*(g_B) \} = \int g_A \cdot g_B dm_n \\ &= \int g_{A \cap B}^2 dm_n = \int \gamma_{A \cap B}^2 \cdot dm_n \end{aligned}$$

si $A \cap B = \emptyset$, on a donc $E \{ \lambda_n^*(A) \cdot \lambda_n^*(B) \} = 0$.

Pour tout $A \in \mathcal{B}_b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$v_n(A) = \int_A g^2 \cdot dm_n.$$

Il est clair que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n se prolonge en une mesure unique de \mathcal{M}^+ , que nous noterons encore v_n : c'est la mesure structurelle de λ_n^* .

Le dernier théorème montre que la convergence faible à distance finie de $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ et celle de $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont étroitement liées.

THÉORÈME 6.2. — Soit $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de processus ponctuels orthogonaux telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(m_n, m_0) = 0$$

Supposons que g soit mesurable, m_0 -presque partout continue, et bornée :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(v_n, v_0) = 0$$

Démonstration. — Pour tout borélien borné A , et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n(A) = \int g_A^2 dm_n$; nous allons donc démontrer que pour tout borélien borné tel que $v_0(\partial A) = 0$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_A^2 dm_n = \int g_A^2 dm_0.$$

D'après le théorème 4.4, il suffit donc de vérifier que g_A^2 est une fonction m_0 -presque partout continue.

Si $m_0(\partial A) = 0$, 1_A est une fonction m_0 -presque partout continue, donc g_A^2 l'est aussi.

Supposons donc plus généralement que : $g_{\partial A}^2 = 0$, m_0 -p. p.

Posons : $N = \{x \in \partial A : g^2(x) \neq 0\}$, $R = \{x \in \partial A : g^2(x) = 0\}$; et \mathcal{D} l'ensemble des discontinuités de g .

Comme $m_0(\mathbb{N}) = 0$ et $m_0(\mathbb{R} \cap \mathcal{D})$ sont nuls, il reste à vérifier qu'il n'y a pas de point de discontinuité de g_A dans $\mathbb{R} \cap \mathcal{D}^c$. On considère un point $x \in \mathbb{R} \cap \mathcal{D}^c$ et $\{x_n\}$ une suite qui converge vers x .

Comme $g_A^2(x_n) = 0$ si $x_n \in A^c$, on peut supposer sans perte de généralité, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in A$; mais alors, comme x est un point de continuité de g^2 : $\lim_{n \rightarrow \infty} g_A^2(x_n) = g_A^2(x)$.

Remarques. — Il existe une sorte de réciproque : supposons que pour toute fonction gm_0 p. p. continue, bornée, à support borné, la suite $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ des mesures définies par :

$$\forall B \in \mathcal{B}_b; \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad v_n^g(B) = \int_B g^2 \cdot dm_n$$

converge faiblement à distance finie vers v_0 . Alors $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement à distance finie vers m_0 .

En effet, pour tout borélien borné A tel que $m_0(\partial A) = 0$, $g = 1_A$ est une fonction m_0 -p. p. continue, bornée, à support borné.

Or

$$0 \leq v_0^g(\partial A) = \int_{\partial A} 1_A dm_0 \leq m_0(\partial A) = 0$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n^g(A) = \int_A 1_A dm_n = m_n(A).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [I] J. GEFFROY et H. ZEBoulON, Sur certaines convergences stochastiques des mesures aléatoires et des processus ponctuels. *C. R. A. S.*, t. **280**, série A, 1975, p. 291.
- [II] P. JACOB, Convergence uniforme à distance finie de mesures signées. *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **XV**, n° 4, 1979, p. 355-373, section B.
- [III] J. GEFFROY et P. QUIDEL, Convergences stochastiques des répartitions ponctuelles aléatoires. *Revue de la faculté des Sciences de Coïmbra*, t. **XLIX**, 1974.
- [IV] J. NEVEU, *École d'été de Saint-Flour*, Springer Verlag.
- [V] I. I. GIHMAn et A. V. SHOROKHOD, *The theory of stochastic processes*, Springer Verlag, 1974.
- [VI] P. JACOB, *Représentations convergentes de mesures et de processus ponctuels*. Publications de l'ISUP, t. **XXIII**, fasc. 3-4, 1978.
- [VII] P. BILLINGSLEY, *Convergence of probability measures*. Wiley, 1968.
- [VIII] R. M. DUDLEY, Distances of probability measures and random variables. *Ann. of Math. Stat.*, t. **39**, 1966, p. 1563-1572.

(Manuscrit reçu le 20 octobre 1981)