

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

BACHAR HACHEM

**Quelques théorèmes ergodiques sur-additifs
dans L^p ($1 \leq p < \infty$)**

Annales de l'I. H. P., section B, tome 18, n° 3 (1982), p. 201-222

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1982__18_3_201_0

© Gauthier-Villars, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Quelques théorèmes ergodiques sur-additifs dans $L^p(1 \leq p < \infty)$

par

Bachar HACHEM

Laboratoire de Probabilités, tour 56, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris VI,
4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — Nous montrons d'abord que la version de Burkholder du théorème de Kingman peut être étendue au cas où l'opérateur T est markovien de L^1 . Ensuite on donne une nouvelle démonstration de l'existence d'un dominant exact lorsque T est sous-markovien de L^1 . Nous considérons aussi le cas où T est une contraction positive de $L^p(1 < p < \infty)$ en généralisant le théorème ergodique additif d'Akcoglu [1] au cas sur-additif. Enfin nous donnons une version à paramètre continu de tous les résultats obtenus dans ce travail. Diverses autres questions sont aussi envisagées.

SUMMARY. — We show firstly that Burkholder's version of Kingman's theorem can be extended to the case where T is a markovian operator of L^1 . Next we give a new demonstration of the existence of an exact dominant when T is a sub-markovian operator of L^1 . We also study the case when T is a positive contraction in $L^p(1 < p < \infty)$ generalizing Akcoglu's additive ergodic theorem [1] to the super-additive case. Finally, we give a continuous parameter version of all the results obtained in this paper. Also others questions are studied.

1. INTRODUCTION

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré σ -fini et T un opérateur linéaire sur $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ($1 \leq p < \infty$). On dit que T est positif si :

$$f \geq 0 \quad \mu \cdot p \cdot p \Rightarrow Tf \geq 0 \quad \mu \cdot p \cdot p$$

et on dit que T est une contraction si : $\|Tf\|_p \leq \|f\|_p$ pour tout $f \in L^p$; ce qui est équivalent à dire que T est de norme ≤ 1 . L'opérateur adjoint (transposé) de T qui applique $L^q(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ dans lui-même, sera noté par T^* ($q = p/p - 1$ si $p > 1$ et $q = +\infty$ si $p = 1$). Cet opérateur adjoint est positif si T l'est. D'autre part la norme de T^* est égale à celle de l'opérateur T , par conséquent T^* est une contraction sur L^q dès que T l'est sur L^p . Une contraction positive de L^1 s'appelle un opérateur sous-markovien. L'opérateur sous-markovien T est dit markovien si :

$$(1.1) \quad \int_{\Omega} Tf d\mu = \int_{\Omega} f d\mu, \quad \text{pour tout } f \in L^1.$$

Soit $S = \{S_n, n \geq 1\}$ une suite d'éléments de L^p ($1 \leq p < \infty$), on dit que S est un processus sur-additif (additif) relatif à l'opérateur T de L^p si :

$$(1.2) \quad S_n + T^n(S_m) \leq (=) S_{n+m}, \quad \forall n, m \geq 1.$$

Le processus S est dit positif si $S_n \in L^p_+(n \geq 1)$. Remarquons que les théorèmes ergodiques de M. Akcoglu [1] (pour $1 < p < \infty$) et de Chacon-Ornstein [12] (pour $p = 1$) nous permettent de ramener l'étude d'un processus sur-additif quelconque à celle d'un processus sur-additif et positif.

Pour cela il suffit de remarquer que $\forall n \geq 1, S_n - \sum_{i=0}^{n-1} T^i S_1 \geq 0$. Donc

dans toute la suite nous allons considérer uniquement des processus sur-additifs et positifs.

Une fonction $\delta \in L^1_+$ est appelée un dominant pour un processus sur-additif $S = \{S_n, n \geq 1\}$ relatif à un opérateur positif T de L^1 si :

$$(1.3) \quad \forall n \geq 1, \quad S_n \leq \sum_{i=0}^{n-1} T^i \delta.$$

Soit $\mathcal{D}(S)$ la classe des dominants pour S ; $\delta_0 \in \mathcal{D}(S)$ est un dominant exact si : $\int \delta_0 d\mu = \inf \left\{ \int \delta d\mu ; \delta \in \mathcal{D}(S) \right\}$

J. F. C. Kingman dans une série d'articles ([21] [22] et [23]) développe la théorie des processus sur-additifs de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ dans le cas où l'opérateur T est induite par une transformation Θ , inversible et conservant la mesure μ , i. e. $Tf = f \circ \Theta$. Il démontre que si :

$$(1.4) \quad \gamma = \sup_{n \geq 1} (1/n) \int S_n d\mu < + \infty,$$

alors il existe au moins un dominant exact δ pour S tel que :

$$(1.5) \quad \gamma = \int \delta d\mu,$$

(voir aussi [9] [13] et [20]). Puis il montre que S et le processus additif

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n-1} T^i \delta, n \geq 1 \right\}$$

ont le même comportement asymptotique. Ainsi il

généralise le théorème ergodique de Birkhoff. Dans [5] M. Akcoglu et L. Sucheston ont étendu ce théorème au cas où T est markovien. Pour étendre ce théorème au cas où T est sous-markovien A. Brunel et L. Sucheston dans [8] (voir aussi [18]) ont introduit la condition de bornitude suivante :

$$(1.6) \quad \bar{\gamma} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S_i - T(S_{i-1})) \right\|_1 < + \infty, \quad S_0 = 0$$

et ceci pour établir l'existence d'un dominant exact $\delta \in L^1_+$ tel que :

$$(1.7) \quad \bar{\gamma} = \int \delta d\mu.$$

obtenant ainsi une complète généralisation du célèbre théorème de Chacon-Ornstein [12]. Remarquons que les conditions (1.4) et (1.6) sont équivalentes lorsque T est markovien et de plus dans le cas additif la condition (1.6) exprime que $S_1 \in L^1$.

Dans le paragraphe (2) de ce travail nous montrerons d'abord que la version de Burkholder [9] du théorème de Kingman, qui est basé sur le théorème de Komlos [24], peut être étendu au cas markovien. Ensuite nous donnerons une nouvelle démonstration de l'existence d'un dominant exact dans le cas où T est sous-markovien.

Dans le paragraphe (3) nous considérons le cas où T est une contraction positive de $L^p(1 < p < \infty)$ et nous donnerons une condition suffisante (analogue à celle de (1.6)) pour assurer la convergence μ -p. p. et en moyenne

dans L^p de S_n/n (voir [19]), ce qui généralise le théorème ergodique de M. Akcoglu [1].

Dans le paragraphe (4) nous considérons les processus sur-additifs à temps continu dans $L^p(1 \leq p < \infty)$ et nous démontrons une version à paramètre continu de tous les résultats obtenus dans les paragraphes (2) et (3). Nous généralisons ainsi, en particulier, les résultats de [2] [15] et [16].

Enfin nous envisageons aussi l'étude de la convergence stochastique de S_n/n (et sa version à paramètre continu) lorsque T est sous-markovien de L^1 ; en complétant ainsi le travail de H. Fong [15].

2. PROCESSUS SUR-ADDITIFS DANS $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

Dans [9], D. L. Burkholder donne une nouvelle démonstration du théorème de Kingman concernant l'existence d'un dominant exact d'un processus sur-additif S relatif à l'isométrie positive $Tf = f \circ \Theta$ de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, où Θ est une transformation mesurable conservant la mesure μ . Sa démonstration est basée sur le théorème suivant de Komlós [24] :

THÉORÈME (2.1). — Si $\{\xi_n, n \geq 1\}$ est une suite de fonctions de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ telle que :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\xi_n\|_1 < +\infty$$

alors il existe une sous-suite $\{\eta_n, n \geq 1\}$ et une fonction $\eta \in L^1$ telles que, pour toute sous-suite $\{\tilde{\eta}_n, n \geq 1\}$ de la suite $\{\eta_n, n \geq 1\}$ on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\eta}_i \rightarrow \eta \quad \mu\text{-p. p.}$$

Remarquons que l'argument de Burkholder ne peut pas être appliqué sans faire quelques modifications lorsque T est un opérateur markovien quelconque. La difficulté est la suivante : si $f_n \rightarrow f$ μ -p. p. et $Tf = f \circ \Theta$ alors $Tf_n \rightarrow Tf$ μ -p. p. ; mais lorsque T est markovien, Tf_n ne converge pas nécessairement μ -p. p. même si la suite $\{f_n\}$ est bornée dans L^1 . De plus même si Tf_n converge μ -p. p., la limite n'est pas nécessairement égale à Tf . En général on a la proposition suivante :

PROPOSITION (2.2). — (Voir II.1.2 de [17]).

Soit T un opérateur sous-markovien sur L^1 ; si

$$|f_n| \leq F, \quad F \in L^1 \quad \text{et} \quad f_n \rightarrow f \quad \mu\text{-p. p.}$$

alors $Tf_n \rightarrow Tf$ μ -p. p.

Nous proposons ici d'étendre la méthode de Burkholder au cas où T est markovien :

THÉORÈME (2.3). — Un processus sur-additif $S = \{S_n, n \geq 1\}$, relatif à un opérateur markovien de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, et qui satisfait à la condition (1.4) admet au moins un dominant exact.

Pour démontrer ce théorème il nous faut le lemme suivant :

LEMME (2.4). — (Voir le lemme 1 de [5]).

Soit $\{\phi_m, m \geq 1\}$ la suite d'éléments de L^1_+ définie par :

$$(2.1) \quad \forall m \geq 1, \quad \phi_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (S_i - T(S_{i-1})), \quad S_0 = 0.$$

alors on a :

$$(2.2) \quad \gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\phi_m\|_1 < +\infty ;$$

où γ est la constante définie par (1.4). De plus on a :

$$(2.3) \quad \forall m \geq 1 \quad \text{et} \quad 1 \leq n < m$$

$$\left(1 - \frac{n-1}{m}\right) S_n \leq \sum_{i=0}^{n-1} T^i(\phi_m).$$

Démonstration du théorème (2.3). — Le théorème de Komlós appliqué à la suite $\{\phi_m, m \geq 1\}$ du lemme (2.4) entraîne l'existence d'une sous-suite $\{\phi_{m,0}, m \geq 1\}$ et d'un $f_0 \in L^1_+$ tels que pour toute sous-suite

$$\{\tilde{\phi}_{m,0}, m \geq 1\} \text{ de la suite } \{\phi_{m,0}, m \geq 1\} \text{ on ait : } \frac{1}{j} \sum_{m=1}^j \tilde{\phi}_{m,0} \rightarrow f_0 \text{ } \mu\text{-p. p.}$$

Pour $k \geq 1$, la même méthode appliquée à la suite $\{T^k(\phi_{m,k-1}), m \geq 1\}$ entraîne l'existence d'une sous-suite $\{\phi_{m,k}, m \geq 1\}$ et d'un $f_k \in L^1_+$ tels

$$\text{que } \frac{1}{j} \sum_{m=1}^j T^k(\tilde{\phi}_{m,k}) \rightarrow f_k \text{ } \mu\text{-p. p. lorsque } j \uparrow \infty \text{ et ceci pour toute sous-}$$

suite $\{\tilde{\phi}_{m,k}, m \geq 1\}$ de la suite $\{\phi_{m,k}, m \geq 1\}$. Soit $\{\phi_{m_i}, i \geq 1\}$ une énumération de la suite diagonale $\{\phi_{i,i}, i \geq 1\}$ où $\{m_i, i \geq 1\}$ est une suite strictement croissante d'entiers positifs ; alors $\{\phi_{m_i}, i \geq 1\}$ est une

sous-suite de la suite initiale $\{\phi_m, m \geq 1\}$; de plus d'après la construction

de ϕ_{m_i} , $X_j = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j \phi_{m_i}$ est telle que :

$$(2.4) \quad \forall k \geq 0, T^k(X_j) \rightarrow f_k \quad \mu\text{-p. p.} \quad \text{lorsque } j \uparrow \infty.$$

Soit maintenant $n \geq 1$ fixé et choisissons $i_0 \geq 1$ tel que $n < m_{i_0}$; donc $n < m_{i_0} \leq m_i$ pour tout $i \geq i_0$. Par suite (2.3) donne :

$$\sum_{k=0}^{n-1} T^k(X_j) \geq \frac{1}{j} \left(\sum_{i=1}^{i_0-1} \sum_{k=0}^{n-1} T^k(\phi_{m_i}) \right) + \frac{1}{j} \sum_{i=i_0}^j \left(1 - \frac{n-1}{m_i} \right) S_n.$$

On en déduit que :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} T^k(X_j) \geq S_n.$$

D'après (2.4) cela entraîne :

$$(2.5) \quad \forall n \geq 1, \quad f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1} \geq S_n.$$

Posons $g_n = \inf_{j \geq n} X_j$; en vertu de (2.4) on a :

$$0 \leq g_n \uparrow f_0 \in L^1 \quad \mu \cdot p \cdot p.;$$

la proposition (2.2) montre alors que $T(f_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(g_n)$ $\mu\text{-p. p.}$ En utilisant encore une fois (2.4) et la positivité de l'opérateur, on obtient :

$$T(f_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(g_n) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \inf T(X_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} T(X_j) = f_1.$$

Posons $\psi_0 = f_0$ et $\psi_1 = f_1 - T\psi_0$, ce qui donne :

$$f_1 = \psi_1 + T\psi_0, \quad \text{où } \psi_0, \psi_1 \in L^1_+.$$

En répétant cette méthode, on montre d'une façon générale :

$$(2.6) \quad \forall n \geq 1, \quad f_n = \psi_n + T\psi_{n-1} + \dots + T^n\psi_0.$$

Donc en combinant (2.6) et (2.5) on obtient :

$$(2.7) \quad \forall n \geq 1, \quad (\psi_0 + \psi_1 + \dots + \psi_{n-1}) \\ + T(\psi_0 + \dots + \psi_{n-2}) + \dots + T^{n-2}(\psi_0 + \psi_1) \\ + T^{n-1}\psi_0 \geq S_n.$$

Posons maintenant : $\psi = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m$ alors $\forall n \geq 1, \sum_{i=0}^{n-1} T^i \psi \geq S_n$; en particulier $\int_{\Omega} \psi d\mu \geq \gamma$.

D'autre part (2.6) et (1.1) donnent :

$$\int_{\Omega} (\psi_0 + \psi_1 + \dots + \psi_n) d\mu = \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} \lim_{j \rightarrow \infty} T^n(X_j) d\mu \leq \liminf \int_{\Omega} X_j d\mu.$$

Or, $\int_{\Omega} \phi_{m_i} d\mu \rightarrow \gamma$ et par conséquent $\int_{\Omega} X_j d\mu = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j \int_{\Omega} \phi_{m_i} d\mu \rightarrow \gamma$

d'où : $\forall n \geq 0 : \int_{\Omega} (\psi_0 + \psi_1 + \dots + \psi_n) d\mu \leq \gamma$; et par suite $\int_{\Omega} \psi d\mu \leq \gamma$.

Donc $\int_{\Omega} \psi d\mu = \gamma$. On en déduit que ψ est un dominant exact. ■

Dans la suite de ce paragraphe nous allons supposer que T est sous-markovien et nous allons montrer que la condition de bornitude (1.6) entraîne l'existence d'un dominant exact $\delta \in L^1_+$ pour $S = \{S_n, n \geq 1\}$, qui satisfait à l'égalité (1.7). La méthode que nous utiliserons consiste à ajouter un point à l'espace Ω pour rendre l'opérateur T markovien ; cette idée est en fait un cas très particulier de la théorie de la dilatation [7]. Pour cela nous allons commencer par établir quelques résultats intermédiaires.

PROPOSITION (2.5). — La suite des nombres positifs

$$\left\{ \alpha_n = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (S_i - T(S_{i-1})) d\mu, n \geq 1 \right\},$$

où $S_0 = 0$, est sur-additive, c'est-à-dire :

$$(2.8) \quad \forall n, m \geq 1, \quad \alpha_{n+m} \geq \alpha_n + \alpha_m.$$

Démonstration. —

$$\alpha_{n+m} = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n+m} (S_i - T(S_{i-1})) d\mu = \alpha_n + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m (S_{n+i} - T(S_{n+i-1})) d\mu.$$

Or la sur-additivité entraîne que $\sum_{i=1}^m (S_{n+i} - S_i - T^i(S_n)) \geq 0$ et puisque T est sous-markovien, on trouve :

$$0 \leq \int_{\Omega} (I - T) \left(\sum_{i=1}^m (S_{n+i} - S_i - T^i(S_n)) \right) d\mu.$$

d'où l'on tire, pour tout $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \int \sum_{i=1}^m (S_i - T(S_{i-1})) d\mu \\ &\leq \int \sum_{i=1}^m (S_{n+i} - T(S_{n+i-1})) d\mu - \int T(S_{n+m} - S_m - T^m S_n + S_n) d\mu \\ &\leq \int \sum_{i=1}^m (S_{n+i} - T(S_{n+i-1})) d\mu, \end{aligned}$$

puisque par sur-additivité on a $S_{n+m} - S_m - T^m S_n \geq 0$. En tenant compte de ce qui précède on trouve (2.8). ■

Soit maintenant ϕ_n la suite définie par (2.1), alors il est évident que $\int \phi_n d\mu = \frac{\alpha_n}{n}$; or la suite α_n est sur-additive et par suite

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{n} = \sup_{n \geq 1} \frac{\alpha_n}{n} \leq +\infty, \quad \text{d'où :} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n d\mu = \sup_{n \geq 1} \int \phi_n d\mu \leq +\infty.$$

Nous allons supposer dans la suite que :

$$(2.9) \quad \bar{\gamma} = \sup_{n \geq 1} \int \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S_i - T(S_{i-1})) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n d\mu < +\infty.$$

PROPOSITION (2.6). — Si $\delta \in L^1_+(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est un dominant quelconque de S_n (i. e. satisfait uniquement à la condition (1.3)) alors on a :

$$(2.10) \quad \int_{\Omega} \delta d\mu \geq \bar{\gamma}.$$

Démonstration. — Puisque T est sous-markovien on peut écrire :

$$0 \leq \int (I - T) \left(\sum_{i=0}^{k-1} T^i(\delta) - S_k \right) d\mu,$$

ce qui donne :

$$\forall k \geq 1, \quad \int (T^k(\delta) + (S_k - TS_k)) d\mu \leq \int \delta d\mu.$$

Or, d'après (1.3) on a :

$$\phi_n = \frac{1}{n} \left(TS_n + \sum_{k=1}^n (S_k - TS_k) \right) \leq \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^n T^k(\delta) + \sum_{k=1}^n (S_k - TS_k) \right],$$

et par conséquent,

$$\int \phi_n d\mu \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int (T^k(\delta) + (S_k - T(S_k))) d\mu \leq \int \delta d\mu$$

en tenant compte de (2.9) on obtient la proposition. ■

Maintenant, on se donne un point $\bar{\omega}$ qui n'est pas dans Ω et on note : $\bar{\Omega}$ l'espace $\Omega \cup \{\bar{\omega}\}$, $\bar{\mathcal{F}}$ la tribu engendrée par \mathcal{F} dans $\bar{\Omega}$ (remarquons que $\{\bar{\omega}\} \in \bar{\mathcal{F}}$) et $\bar{\mu}$ la mesure sur $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}})$ définie par :

$$\bar{\mu}(A) = \mu(A) \quad \text{si } A \in \mathcal{F} \quad \text{et} \quad \bar{\mu}(\{\bar{\omega}\}) = 1.$$

Par convention toutes les fonctions f sur Ω seront prolongées à $\bar{\Omega}$ en posant $f(\bar{\omega}) = 0$.

On définit un opérateur linéaire \bar{T} sur $L^1(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mu})$ en posant pour toute fonction intégrable f à support dans Ω : $\bar{T}f = Tf$ sur Ω et

$$\bar{T}f = \int_{\Omega} f d\mu - \int_{\Omega} Tf d\mu$$

sur $\bar{\omega}$; et \bar{T} laisse la fonction $1_{\{\bar{\omega}\}}$ invariante, i. e. $\bar{T}(1_{\{\bar{\omega}\}}) = 1_{\{\bar{\omega}\}}$.

L'opérateur \bar{T} ainsi défini est markovien sur $L^1(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mu})$.

PROPOSITION (2.7). — La suite $\bar{S}_n = S_n + \left[\int \sum_{i=0}^{n-1} (S_i - TS_i) d\mu \right] 1_{\{\bar{\omega}\}}$, où

$S_0 = 0$, est un processus sur-additif relatif à l'opérateur markovien \bar{T} de $L^1(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mu})$. De plus on a :

$$(2.11) \quad \bar{\gamma} = \sup_{n \geq 1} \int_{\Omega} \bar{S}_n d\bar{\mu},$$

où $\bar{\gamma}$ est définie par (2.9).

Démonstration. —

$$\begin{aligned} \bar{S}_m + \bar{T}^m(\bar{S}_n) &= S_m + T^m(S_n) \\ &+ \left[\int S_n d\mu - \int T^m S_n d\mu + \int \sum_{i=0}^{m-1} (S_i - TS_i) d\mu + \int \sum_{i=0}^{n-1} (S_i - TS_i) d\mu \right] 1_{\{\bar{\omega}\}}. \end{aligned}$$

Or, comme dans la démonstration de la proposition (2.5), on a :

$$\int S_n d\mu - \int T^m S_n d\mu + \int \sum_{i=0}^{m-1} (S_i - TS_i) d\mu \leq \int \sum_{i=0}^{m-1} (S_{n+i} - T(S_{n+i})) d\mu.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \bar{S}_m + \bar{T}^m(\bar{S}_n) &\leq S_{n+m} \\ &+ \left[\int \sum_{i=0}^{m-1} (S_{n+i} - T(S_{n+i})) d\mu + \int \sum_{i=0}^{n-1} (S_i - TS_i) d\mu \right] 1_{\{\bar{\omega}\}} = \bar{S}_{n+m}. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int \bar{S}_n d\bar{\mu} &= \frac{1}{n} \int_{\Omega} S_n d\mu + \frac{1}{n} \int_{\Omega} \sum_{i=0}^{n-1} (S_i - TS_i) d\mu \\ &= \frac{1}{n} \int \sum_{i=1}^n (S_i - T(S_{i-1})) d\mu = \int \phi_n d\mu. \end{aligned}$$

d'où (2.11). ■

THÉORÈME (2.8). — Tout processus sur-additif $S = \{ S_n, n \geq 1 \}$ relatif à un opérateur sous-markovien T de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, et qui satisfait à la condition (2.9) admet au moins un dominant exact.

Démonstration. — La proposition (2.7) montre que la suite $\{ \bar{S}_n, n \geq 1 \}$ est sur-additif relatif à l'opérateur markovien \bar{T} de $L^1(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mu})$. Donc le théorème (2.3) montre qu'il existe une fonction $\bar{\delta} \in L^1_+(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mu})$ telle que :

$$(2.12) \quad \forall n \geq 1, \quad \bar{S}_n \leq \sum_{i=0}^{n-1} \bar{T}^i(\bar{\delta}),$$

et
$$\bar{\gamma} = \int_{\bar{\Omega}} \bar{\delta} d\bar{\mu}.$$

Soit δ la restriction de $\bar{\delta}$ à Ω , donc $\bar{\delta} = \delta + a 1_{\{\bar{\omega}\}}$, où $a = \bar{\delta}(\bar{\omega}) \geq 0$, et par suite :

$$(2.13) \quad \int_{\Omega} \delta d\mu \leq \int_{\bar{\Omega}} \bar{\delta} d\bar{\mu} = \bar{\gamma}.$$

D'autre part :

$$\bar{T}^i(\bar{\delta}) = \bar{T}^i(\delta) + a 1_{\{\bar{\omega}\}} = T^i(\delta) + \left[\int \delta d\mu - \int T^i \delta d\mu + a \right] 1_{\{\bar{\omega}\}}$$

par conséquent, l'inégalité (2.12) sur Ω implique (1.3).

Enfin, la proposition (2.6) et l'inégalité (2.13) entraînent que $\int \delta d\mu = \bar{\gamma}$. ■

COROLLAIRE (2.9). — (Voir [8]).

Soient, T un opérateur sous-markovien, $S = \{ S_n, n \geq 1 \}$ et $S' = \{ S'_n, n \geq 1 \}$ deux processus sur-additifs. Alors si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S_i - T(S_{i-1})) d\mu < + \infty,$$

la suite des quotients s_n/S'_n converge μ -p. p. sur l'ensemble $A = \{ \sup_n s'_n > 0 \}$.

Nous terminons ce paragraphe par les deux remarques suivantes :

REMARQUE (2.10). — Il a été démontré par Chacon [10] que, pour un opérateur sous-markovien T de L^1 et $f \in L^1_+$, les moyennes $\frac{1}{n} \sum_0^{n-1} T^i f$

ne convergent pas presque partout. Par contre U. Krengel [25] a démontré que ces moyennes convergent stochastiquement sur Ω (la convergence stochastique est équivalente à la convergence en mesure si Ω est de mesure finie). Dans [15], H. Fong démontre que si T est sous-markovien et $S = \{ S_n, n \geq 1 \}$ un processus sur-additif, qui satisfait à la condition

$$\gamma = \sup_n \int \frac{S_n}{n} d\mu < + \infty,$$

et si sur la partie dissipative D de Ω on a, $S_n = \sum_0^{n-1} T^i \delta$ pour une fonction $\delta \in L^1_+$, alors S_n/n converge stochastiquement sur Ω .

En tenant compte du théorème (2.8), nous pouvons annoncer le théorème suivant :

THÉORÈME (2.11). — Si T est sous-markovien et $S = \{ S_n, n \geq 1 \}$ un processus sur-additif tel que :

$$\bar{\gamma} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S_i - T(S_{i-1})) d\mu < + \infty,$$

alors S_n/n converge stochastiquement sur Ω .

En effet, le théorème (2.8) montre qu'il existe un dominant exact $\delta \in L^1_+$,

c'est-à-dire, d'une part $S_n \leq \sum_0^{n-1} T^i \delta (\forall n \geq 1)$ et d'autre part

$$\sup_n \int \frac{S_n}{n} \leq \int \delta d\mu = \bar{\gamma} < +\infty.$$

Par conséquent le théorème de H. Fong implique le théorème. ■

REMARQUE (2.12). — Soient, T une contraction de L^1 (non nécessairement positive) $S = \{S_n, n \geq 1\}$ un processus positif et sous-additif (i. e. $\forall n, m \geq 1 S_n + T^m S_n \geq S_{n+m}$) et $P = \{P_i, i \geq 0\}$ une suite admissible de fonctions de L^1_+ (i. e. $|g| \leq P_i \Rightarrow |Tg| \leq P_{i+1}$ pour tout $g \in L^1$). Il est facile de voir que P est aussi admissible par rapport à l'opérateur sous-markovien $|T|$ (le module linéaire de T (voir [11])). Par conséquent le

processus $\left\{ \sum_0^{n-1} P_i, n \geq 1 \right\}$ est sur-additif relatif à $|T|$. D'autre part S est

aussi sous-additif et positif relatif à $|T|$ et de plus :

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq S_n \leq \sum_0^{n-1} |T|^i(S_1)$$

ce qui implique que $S'_n = \sum_0^{n-1} |T|^i(S_1) - S_n$ est positif et sur-additif relatif à $|T|$. Donc on peut annoncer le théorème suivant :

THÉORÈME (2.13). — a) S_n/n converge stochastiquement sur Ω .

b) $S_n / \sum_0^{n-1} P_i$ converge presque partout sur l'ensemble $A = \left\{ \sum_0^{\infty} P_i > 0 \right\}$.

Démonstration. — Soient C et D les parties conservatrice et dissipative de Ω relativement à $|T|$. Puisque

$$\sup_{n \geq 1} \int \frac{S'_n}{n} d\mu \leq \int S_1 d\mu < +\infty,$$

$S'_n / \sum_0^{n-1} P_i$ converge sur $C \cap A$ par le théorème d'Akcoglu-Sucheston [5].

Sur l'ensemble $D \cap A$ on a $\lim \uparrow S'_n \leq \sum_0^\infty |T|^i(S_1) < +\infty$, ce qui entraîne

l'existence de la limite : $\lim_n \left(S'_n / \sum_0^{n-1} P_i \right) = \frac{\lim \uparrow S'_n}{\lim \uparrow \sum_0^{n-1} P_i}$. La convergence

de $S'_n / \sum_0^{n-1} P_i$ implique celle de $S_n / \sum_0^{n-1} P_i$.

Enfin, l'inégalité $0 \leq S'_n \leq \sum_0^{n-1} |T|^i(S_1)$ et le théorème de H. Fong

impliquent la convergence stochastique de S'_n/n et par suite celle de S_n/n . ■

3. PROCESSUS SUR-ADDITIFS DANS $L^p(1 < p < \infty)$

Dans ce paragraphe nous allons considérer un processus sur-additif $S = \{S_n, n \geq 1\}$ d'éléments de $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ relatif à une contraction positive T de $L^p(1 < p < \infty)$. Il a été démontré par Y. Derriennic et U. Krengel [14] que la condition de bornitude suivante :

$$(3.1) \quad \sup_{n \geq 1} \left\| \frac{S_n}{n} \right\|_p < +\infty$$

ne suffit pas pour établir la convergence en moyenne dans $L^p(1 < p < \infty)$ de S_n/n , tandis que le problème de convergence p. p. est resté ouvert.

Dans ce paragraphe nous allons poser, comme dans le cas où $P = 1$ et T sous-markovien, la condition de bornitude :

$$(3.2) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S_i - T(S_{i-1})) \right\|_p < +\infty, \quad \text{où } S_0 = 0,$$

et nous allons établir la convergence p. p. et en moyenne dans $L^p(1 < p < \infty)$ de S_n/n ; plus précisément nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME (3.1). — Soient T une contraction positive de $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ($1 < p < \infty$) et $(S_n, n \geq 1)$ un processus sur-additif qui satisfait à la condition (3.2), alors $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n/n$ existe au sens μ -p. p. et en moyenne dans L^p .

Remarquons que le théorème d'Akcoglu [1] et le théorème ergodique en moyenne dans $L^p(1 < p < \infty)$ nous permettent de ramener l'étude d'un

processus sur-additif quelconque à celle d'un processus sur-additif et positif.

Pour cela il suffit de remarquer que $\forall n \geq 1, S_n \geq \sum_{i=0}^{n-1} T^i S_1$.

On va commencer par établir quelques résultats intermédiaires.

PROPOSITION (3.2). — Sous les hypothèses du théorème, on peut trouver une fonction $\psi \in L_p^+(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ telle que :

$$(3.3) \quad \forall n \geq 1, \quad S_n \leq \sum_{i=0}^{n-1} T^i \psi,$$

et

$$(3.4) \quad \|\psi\|_p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S_i - T(S_{i-1})) \right\|_p.$$

Nous appellerons une telle fonction un dominant du processus.

Démonstration de la proposition. — Posons pour tout m entier > 0 ,

$$\psi_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (S_i - T(S_{i-1}))$$

alors, d'après le lemme (2.4) on a : pour tout $m \geq 1$ et $1 \leq n < m$,

$$(3.5) \quad \left(1 - \frac{n-1}{m}\right) S_n \leq \sum_{i=0}^{n-1} T^i(\psi_m), \quad \text{avec } \psi_m \geq 0.$$

En passant éventuellement à une sous-suite, on peut supposer $\{\psi_m, m \geq 1\}$ bornée dans $L_p^+(1 < p < \infty)$ et on peut extraire une sous-suite $\{\psi_{m_k}, k \geq 1\}$ qui converge faiblement dans L^p vers une fonction $\psi \in L_p^+$ qui satisfait donc à la condition (3.4).

D'autre part, T est un opérateur fortement continu et par suite faiblement continu, d'où :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{faible} \sum_{i=0}^{n-1} T^i(\psi_{m_k}) = \sum_{i=0}^{n-1} T^i \psi.$$

Par conséquent, l'inégalité (3.5) implique (3.3). ■

COROLLAIRE (3.3). — (Inégalité maximale).

Sous les hypothèses du théorème, on a :

$$(3.6) \quad \left\| \sup_{n \geq 1} \frac{S_n}{n} \right\|_p \leq \frac{p}{p-1} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S_i - T(S_{i-1})) \right\|_p.$$

En effet ce corollaire découle immédiatement de la proposition (3.2) et du théorème ergodique dominé d'Akcoglu [I].

LEMME (3.4). — [Proposition 3.1 et Corollaire 3.5 de [6]].

Soit T une contraction positive de $L^p(1 < p < \infty)$, alors il existe une décomposition unique de Ω en deux parties E et E^c telles que :

i) E est le support d'une fonction T -invariante $h \in L^+_p$, et le support de toute fonction T -invariante est contenu dans E .

ii) E et E^c sont invariants, i. e. les sous-espaces $L_p(E)$, et $L_p(E^c)$ sont tous les deux invariants sous T .

Démonstration du théorème. — D'après la proposition (3.2) et le théorème d'Akcoglu [I] on a : $0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i \psi = S$. Avec $S \geq 0$

et T -invariante ; ce qui implique, d'après (i) du lemme, que $S = 0$ sur E^c , on en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n/n = 0$ μ -p. p. sur E^c .

Pour établir le théorème sur E , on remarque que E est T -invariant et par suite le processus $(1_E S_n)$ est sur-additif et positif. On peut donc supposer que $\Omega = E$, ce qui implique l'existence d'une fonction strictement positive $h \in L^+_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ telle que $Th = h$ μ -p. p. On voit facilement que :

$$\begin{aligned} \|h\|_p^p &= \int Th \cdot h^{p-1} d\mu \\ &= \int h \cdot T^*(h^{p-1}) d\mu \leq \|h\|_p \|T^*(h^{p-1})\|_q \leq \|h\|_p \|h^{p-1}\|_q = \|h\|_p^p. \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\|h\|_p^p = \|h\|_p \|T^*(h^{p-1})\|_q = \int h \cdot T^*(h^{p-1}) d\mu.$$

Or h^{p-1} est l'unique fonction g de $L_q(q = p/p - 1)$ telle que

$$\int hg d\mu = \|h\|_p \|g\|_q = \|h\|_p^p,$$

donc on en déduit que $T^*(h^{p-1}) = h^{p-1}$.

Désignons par m la mesure finie $h^p \cdot \mu$; puis posons pour toute fonction $f \in L^p(m)$, $Pf = T(fh)/h$; cet opérateur est une contraction positive de $L^p(m)$ telle que $P1 = 1$; de plus on a :

$$\int Pf dm = \int h^{p-1} T(fh) d\mu = \int T^*(h^{p-1}) f \cdot h d\mu = \int h^{p-1} f h d\mu = \int f dm,$$

donc p se prolonger, comme un opérateur markovien à $L^1(m)$.

D'autre part, le processus $\{h^{-1}S_n\}$ est sur-additif, positif par rapport à P et dans $L^1(m)$, de plus :

$$\begin{aligned} \|h^{-1}S_n/n\|_{L^1(m)} &= \int \frac{S_n}{n} \cdot h^{p-1} d\mu \leq \left\| \frac{S_n}{n} \right\|_{L^p(\mu)} \cdot \|h^{p-1}\|_{L^q(\mu)} \\ &\leq \left\| \sup_{n \geq 1} \frac{S_n}{n} \right\|_{L^p(\mu)} \cdot \|h\|_{L^p(\mu)}^{p-1} < +\infty \end{aligned}$$

ce qui entraîne que le processus $\{h^{-1}S_n\}$ satisfait à la condition de bornitude (3.1), pour $p = 1$, et pour la norme de $L^1(m)$. Donc on peut appliquer le théorème ergodique d'Akcoglu-Sucheston [5] pour assurer la convergence p. p. sur E . Le corollaire (3.3) et la convergence p. p., impliquent la convergence en moyenne dans L^p . ■

REMARQUE (3.5). — 1) Pour une isométrie positive de $L^p(1 < p < \infty)$ on a les inégalités suivantes :

si $2 \leq p < \infty$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S_i - T(S_{i-1})) \right\|_p \leq 2^{p-1/p} \liminf_{n \rightarrow \infty} (\|S_n\|_p / n^{1/p});$$

et pour $1 < p < 2$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S_i - T(S_{i-1})) \right\|_p \leq 2^{1/p} \liminf_{n \rightarrow \infty} (\|S_n\|_p / n^{p-1/p}),$$

on peut voir cela en utilisant les inégalités de Clarkson et le fait que $S_i + TS_{i-1} \geq 2TS_{i-1} \geq 0$, d'où, pour $2 \leq p < \infty$:

$$\begin{aligned} \|S_i - TS_{i-1}\|_p^p &\leq 2^{p-1} (\|S_i\|_p^p + \|TS_{i-1}\|_p^p) - \|S_i + TS_{i-1}\|_p^p \\ &\leq 2^{p-1} (\|S_i\|_p^p - \|TS_{i-1}\|_p^p) = 2^{p-1} (\|S_i\|_p^p - \|S_{i-1}\|_p^p). \end{aligned}$$

ce qui entraîne l'inégalité souhaitée pour $2 \leq p < \infty$; on traite de la même façon pour $1 < p < 2$.

2) La proposition (3.2) reste valable même pour des opérateurs positifs quelconque dans $L^p(1 < p < \infty)$.

3) Si l'on suppose que $S = \{S_n, n \geq 1\}$ est un processus sous-additif et positif alors on a : $\forall n \geq 1, 0 \leq S_n \leq \sum_{i=0}^{n-1} T^i(S_1)$, par conséquent, dans

ce cas particulier le théorème (3.1) reste valable sans aucune condition de bornitude.

4. PROCESSUS SUR-ADDITIFS DANS $L^p(1 \leq p < \infty)$ A PARAMÈTRE CONTINU

Un processus $S = \{S_t, t > 0\}$ est une famille d'éléments de $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$; le processus est dit positif si $S_t \in L^p_+(t > 0)$, croissant si $S_t \leq S_u(0 < t < u)$, fortement continu si $\|S_t - S_u\|_p \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow u$ et linéairement borné si :

$$(4.1) \quad \sup_{0 < t \leq u} \|S_t/t\|_p = M < + \infty$$

pour au moins un $u > 0$.

Soit $T = \{T_t, t > 0\}$ un semi-groupe fortement continu d'opérateurs positifs sur L^p , c'est-à-dire $T_t(L^p_+) \subset L^p_+, T_u T_t = T_{t+u}(u, t > 0)$ et tel que $Tf = \{T_t f, t > 0\}$ est un processus fortement continu pour tout $f \in L^p$. Le semi-groupe est dit borné si :

$$(4.2) \quad \sup_{0 < t < \infty} \|T_t\| = K < + \infty.$$

Un processus $S = \{S_t, t > 0\}$ est dit additif (sur-additif) par rapport à T si : $S_t + T_t(S_u) = (\leq) S_{t+u}$ pour tout $t, u > 0$. Comme exemples de processus additifs on a $S_t = \int_0^t T_u f du$ et $S_t = (I - T_t)f(f \in L^p)$, où I est l'opérateur d'identité.

Dans [2] M. Akcoglu et J. Conzolo ont démontré une version à paramètre continu du théorème de Chacon-Ornstein [12]. Dans [16] H. Fong et L. Sucheston ont étendu ce théorème au cas où le semi-groupe est borné.

Dans ce paragraphe nous démontrerons une version à paramètre continu des résultats des paragraphes (2) et (3); généralisant ainsi (pour $p = 1$) les théorèmes additifs, démontrés dans ([2] [15] et [16]), au cas sur-additif.

Nous commençons par citer deux lemmes d'Akcoglu-Krengel [3] et [4] qui seront utilisés ultérieurement ; le premier lemme a été démontré dans le cas où T est un semi-groupe markovien de L^1 , mais nous avons observé

que la démonstration reste valable même dans la situation plus générale suivante :

LEMME (4.1). — Soit $T = \{T_t, t > 0\}$ un semi-groupe borné et fortement continu d'opérateurs positifs de $L^p(1 \leq p < \infty)$ et soit $S = \{S_t, t > 0\}$ un processus sur-additif linéairement borné. Alors il existe un processus additif $G = \{G_t, t > 0\}$ dans L^p tel que $G \leq S$.

LEMME (4.2). — Soit $T = \{T_t, t > 0\}$ un semi-groupe borné et fortement continu d'opérateurs positifs de $L^p(1 \leq p < \infty)$ et soit $G = \{G_t, t > 0\}$ un processus additif linéairement borné. Alors il existe deux processus additifs et positifs $G^i = \{G_t^i, t > 0\}$ ($i = 1, 2$) dans L^p tels que $G_t = G_t^{(1)} - G_t^{(2)}$.

Le théorème suivant est une version à paramètre continu du théorème (3.1) :

THÉORÈME (4.3). — Soit $T = \{T_t, t > 0\}$ un semi-groupe fortement continu de contraction positives de $L^p(1 < p < \infty)$ et soit $S = \{S_t, t > 0\}$ un processus sur-additif, linéairement borné et tel que :

$$(4.3) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S_i - T_1(S_{i-1})) \right\|_p < +\infty.$$

Alors S_t/t converge p. p. et au sens de $L^p(1 < p < \infty)$.

Démonstration. — Le lemme (4.1) montre que le processus sur-additif $H_t = S_t - G_t$ est positif. Or la positivité du semi-groupe et de H implique que H est croissant ; i. e. $H_u \leq H_t$ ($0 < u < t$). Soit donc $t > 0$ et n la partie entière de t alors :

$$(4.4) \quad H_n/n + 1 \leq H_t/t \leq H_{n+1}/n.$$

Mais $\{H_n, n \geq 1\}$ est un processus sur-additif relatif à la contraction positive T_1 de $L^p(1 < p < \infty)$; donc par le théorème (3.1) H_n/n converge p. p. et dans L^p , ce qui implique par (4.4), la convergence p. p. et dans L^p de H_t/t . Donc pour démontrer le théorème il suffit de démontrer la convergence p. p. et dans L^p de G_t/t . Pour cela, par le lemme (4.2) on a

$$G_t = G_t^{(1)} - G_t^{(2)} \quad \text{et} \quad G_t^{(1)}, G_t^{(2)}$$

sont positifs et additifs, par suite croissants. Le même argument utilisé pour H entraîne la convergence p. p. et dans L^p de $G_t^{(1)}/t$ et $G_t^{(2)}/t$, c'est-à-dire de G_t/t . ■

Il a été démontré par H. Fong (lemme 4.3 de [15]) que si T est sous-markovien, $S = \{S_n, n \geq 1\}$ un processus sur-additif positif qui satisfait

à la condition (1.4) et $S' = \{ S'_n, n \geq 1 \}$ un processus sur-additif et positif quelconque ; alors pour tout entier fixé k , on a $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+k}/S'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n/S'_n$ sur $C \cap E'$, où $E' = \{ \sup_n S'_n > 0 \}$. Le même résultat a lieu sur $D \cap E'$ si,

ou bien T est markovien, ou bien $S_n = \sum_0^{n-1} T^i \delta$ sur $D \cap E'$, pour une fonction $\delta \in L^1_+$. En tenant compte du théorème (2.8) on peut annoncer le lemme suivant :

LEMME (4.4). — Soient, T un opérateur sous-markovien, $S = \{ S_n, n \geq 1 \}$ un processus sur-additif et positif tel que :

$$\bar{\gamma} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S_i - T(S_{i-1})) d\mu < + \infty,$$

(la limite existe par la proposition (2.5)).

Si $S' = \{ S'_n, n \geq 1 \}$ est sur-additif et positif quelconque alors, pour tout entier fixé k , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+k}/S'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n/S'_n,$$

sur $E' = \{ \sup_n S'_n > 0 \}$.

Le théorème suivant est une version à paramètre continu du corollaire (2.9) et en même temps généralise le théorème d'Ackoglu-Conzolo [2].

THÉORÈME (4.5). — Soit $T = \{ T_t, t > 0 \}$ un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sous-markoviens (i. e. contraction positives) de L^1 et soit $S = \{ S_t, t > 0 \}$ un processus sur-additif, linéairement borné tel que :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S_i - T_1(S_{i-1})) \right\|_1 < + \infty$$

alors, pour tout processus sur-additif et positif $S' = \{ S'_t, t > 0 \}$ on a $\lim_{t \rightarrow \infty} S_t/S'_t$ existe p. p. sur l'ensemble $E' = \{ \sup_{t>0} S'_t > 0 \}$.

Démonstration. — Le lemme (4.1) montre que le processus sur-additif $H_t = S_t - G_t$ est positif. Or la positivité du semi-groupe et de H implique que H est croissant, i. e. $H_u \leq H_t$ ($0 < u < t$). Soit donc $t > 0$ et n la partie entière de t , alors sur l'ensemble E' on a :

$$(4.5) \quad H_n/S'_{n+1} \leq H_t/S'_t \leq H_{n+1}/S'_n.$$

Par le lemme (4.4) les rapports H_n/S'_{n+1} , H_{n+1}/S'_n et H_n/S'_n ont tous la

même limite sur E' ; ce qui implique, par (4.5), la convergence p. p. sur E' de H_t/S'_t . Donc pour démontrer le théorème il suffit de démontrer la convergence p. p. sur E' de G_t/S'_t . Pour cela, par le lemme (4.2) on a $G_t = G_t^{(1)} - G_t^{(2)}$ et $G_t^{(1)}$, $G_t^{(2)}$ sont positifs et additifs, par suite croissants. Le même argument utilisé pour H entraîne la convergence p. p. sur E' de $G_t^{(1)}/S'_t$ et $G_t^{(2)}/S'_t$, c'est-à-dire de G_t/S'_t . ■

En tenant compte des deux lemmes (4.1) et (4.2) nous pouvons démontrer, par une méthode analogue à celle utilisée dans les deux théorèmes (4.3) et (4.5), une version à paramètre continu du théorème (2.11), plus précisément nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME (4.6). — Soit $T = \{T_t, t > 0\}$ un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sous-markoviens de L^1 et soit $S = \{S_t, t > 0\}$ un processus sur-additif, linéairement borné tel que :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S_i - T_1(S_{i-1})) \right\|_1 < + \infty$$

alors S_t/t converge stochastiquement sur Ω .

Nous terminons ce paragraphe par l'étude du cas où le semi-groupe T est borné et $p = 1$.

Remarquons d'abord que les deux lemmes (4.1) et (4.2) (qui ont été démontrés pour un semi-groupe borné) nous permettent de ramener l'étude d'un processus sur-additif quelconque à celle d'un processus sur-additif et positif ; ce que nous allons supposer dans la suite.

Il est connu, par le travail de L. Sucheston [26] dans le cas discret et par H. Fong et L. Sucheston [16] dans le cas continu, que si $T = \{T_t, t > 0\}$ est un semi-groupe borné fortement continu d'opérateurs positifs de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ alors l'espace Ω se décompose en deux parties Y et Z telle que Z est T_t -invariant pour tout $t > 0$ et Y est le support d'une fonction $e \in L_\infty^+$ telle que $T_t^*e = e$ pour tout $t > 0$. De plus, on peut définir un semi-groupe $V = \{V_t, t > 0\}$ d'opérateurs sous-markoviens de L^1 par la formule :

$$(4.6) \quad V_t f = e \cdot T_t(f/(e + 1_Z)), \quad f \in L^1.$$

Soit maintenant $S = \{S_t, t > 0\}$ un processus sur-additif relatif à T . Alors le processus H défini par $H_t = e \cdot S_t$ est sur-additif relatif au semi-groupe sous-markovien $V = \{V_t, t > 0\}$. En effet :

$$\begin{aligned} H_t + V_t(H_u) &= e \cdot S_t + e \cdot T_t(e \cdot S_u/(e + 1_Z)) \\ &= e[S_t + T_t(S_u)] \\ &\leq e \cdot S_{t+u} = H_{t+u}, \end{aligned}$$

par conséquent, les théorèmes (4.5) et (4.6) nous permettent d'annoncer le théorème suivant, qui généralise le théorème de H. Fong et L. Sucheston [16].

THÉORÈME (4.7). — Soit $T = \{T_t, t > 0\}$ un semi-groupe borné, fortement continu d'opérateurs positifs de L^1 et soit $S = \{S_t, t > 0\}$ un processus sur-additif, linéairement borné tel que :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S_i - T_1(S_{i-1})) \right\|_1 < + \infty$$

alors S_t/t converge stochastiquement sur Y . D'autre part, si $S' = \{S'_t, t > 0\}$ est un processus sur-additif et positif alors $\lim_{t \rightarrow \infty} S_t/S'_t$ existe p. p. sur l'ensemble $Y \cap \left\{ \sup_{t > 0} S'_t > 0 \right\}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. A. AKCOGLU, A pointwise ergodic theorem in L_p -spaces, *Can. J. Math.*, t. **27**, 1975, p. 1075-1082.
- [2] M. A. AKCOGLU and J. CONZOLO, An ergodic theorem for semi-groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **24**, 1970, p. 161-171.
- [3] M. A. AKCOGLU and U. KRENGEL, A Differentiation Theorem for additive Processes, *Math. Z.*, t. **163**, 1978, p. 199-210.
- [4] M. A. AKCOGLU and U. KRENGEL, A Differentiation Theorem in L_p , *Math. Z.*, t. **169**, 1979, p. 31-40.
- [5] M. A. AKCOGLU and L. SUCHESTON, A ratio ergodic theorem for super-additive processes, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, t. **44**, 1978, p. 269-278.
- [6] M. A. AKCOGLU and L. SUCHESTON, On convergence of iterates of positive contraction in L_p -spaces, *J. Approx. Theory*, t. **13**, 1975, p. 348-362.
- [7] M. A. AKCOGLU and L. SUCHESTON, Dilations of positive contractions on L_p -spaces, *Canad. Math. Bull.*, t. **20** (3), 1977.
- [8] A. BRUNEL et L. SUCHESTON, Sur l'existence de dominants exacts pour un processus sur-additif, *C. R. A. S.*, t. **288**, 1979.
- [9] D. L. BIRKHOLDER, Contribution à la discussion de [22].
- [10] R. V. CHACON, A class of linear transformation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **15**, 1964, p. 560-564.
- [11] R. V. CHACON and U. KRENGEL, Linear modulus of a linear operator, *Proc. Am. Math. Soc.*, t. **15**, 1964, p. 553-559.
- [12] R. V. CHACON and D. S. ORNSTEIN, A general ergodic theorem. *Illinois J., Math.*, t. **4**, 1960, p. 153-160.
- [13] Y. DERRIENNIC, Sur le théorème ergodique sous-additif, *C. R. A. S., Paris*, t. **281**, Série A, 1975, p. 985-988.
- [14] Y. DERRIENNIC and U. KRENGEL, *Subadditive mean ergodic theorems* (à paraître).
- [15] H. FONG, Ratio and stochastic ergodic theorems for superadditive processes. *Can. J. Math.*, t. **XXXI**, n° 2, 1979, p. 441-447.
- [16] H. FONG and L. SUCHESTON, On the ratio ergodic theorem for semi-groups. *Pacific Journal of Mathematics*, t. **39**, n° 3, 1971.
- [17] A. GARSIA, *Topics in Almost Everywhere convergence*, Markham, Chicago, 1970.

- [18] B. HACHEM, *Thèse de 3^e Cycle*, Université de Paris VI, 1978.
- [19] B. HACHEM, Un théorème ergodique sur-additif dans $L^p(1 < p < \infty)$, *C. R. A. S., Paris*, t. **292**, 9 mars 1981.
- [20] A. DEL JUNCO, On the decomposition of a subadditive stochastic process, *Ann. Probability*, t. **5**, 1977, p. 298-302.
- [21] J. F. C. KINGMAN, The ergodic theory of subadditive stochastic processes, *J. Royal Statist. Soc. Ser. B*, t. **30**, 1968, p. 499-510.
- [22] J. F. C. KINGMAN, Subadditive ergodic theory, *Ann. Probability*, t. **1**, 1973, p. 883-905.
- [23] J. F. C. KINGMAN, Subadditive processes. École d'Été de Probabilités de Saint-Flour, Springer-Verlag, *Lectures notes in Math.*, n° 539, 1976, p. 168-223.
- [24] J. KOMLOS, A generalisation of a problem of steinhaus. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, t. **18**, 1967, p. 217-229.
- [25] On the global limit behaviour of Markov chains and of general non singular Markov processes, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, t. **6**, 1966, p. 302-316.
- [26] L. SUCHESTON, On the ergodic Theorem for positive operators, I. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, t. **8**, 1967, p. 1-11.

(Manuscrit reçu le 14 octobre 1981)