

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JACQUES-ÉDOUARD DIES

**Quelques propriétés des librairies d'Aven,  
Boguslavsky et Kogan**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 18, n° 2 (1982), p. 115-148

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1982\\_\\_18\\_2\\_115\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1982__18_2_115_0)

© Gauthier-Villars, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Quelques propriétés des librairies d'Aven, Boguslavsky et Kogan

par

Jacques-Édouard DIES

Laboratoire de Statistique et Probabilités, E. R. A.-C. N. R. S., 591,  
118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex, France

**ABSTRACT.** — The main purpose of this paper is to establish the necessary and sufficient condition of transience for a specific class of Markov chains on permutations introduced by Aven, Boguslavsky and Kogan as a generalization of the Tsetlin library.

### 0. INTRODUCTION

#### DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

On a commencé à étudier, ces dernières années, une classe de chaînes de Markov sur les permutations, les *librairies*, dont on pourra trouver une définition générale dans (Letac, 1978).

Aven, Boguslavsky et Kogan (1976) ont introduit une famille spéciale de librairies, étudiées par Letac (1978) sous le nom de « variantes russes », notées  $T_\omega(p; \nu)$  et définies comme suit :

$\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers naturels; pour deux entiers  $h$  et  $k$ ,  $h \leq k$ , on pose  $[h, k] = \{i \in \mathbb{N}; h \leq i \leq k\}$ . A tout  $\nu \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  on associe le segment initial  $I(\nu)$  défini par

$$\begin{cases} I(\nu) = [0, \nu] & \text{si } \nu < \infty \\ I(\infty) = \mathbb{N}. \end{cases}$$

Soit  $\omega \in \mathbb{N}$  et  $\nu \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  tel que  $\nu > \omega + 1$ .

Donnons-nous deux ensembles  $B$  dont les éléments sont appelés *livres* et  $T = I(v)$  l'ensemble des *places* des livres. Nous supposons que  $B$  et  $T$  sont de même cardinalité et nous subdiviserons  $T$  en deux sous-ensembles non vides  $[0, \omega] \subset T$  appelé *mémoire principale* et  $I(v) \setminus [0, \omega] \subset T$  appelé *mémoire auxiliaire*.

La façon dont les livres sont rangés est décrite par une bijection  $\pi$  de  $T$  sur  $B$ . Supposons les livres rangés suivant  $\pi$ ; si on prend le livre  $b$  situé à la place  $t = \pi^{-1}(b)$ , on ne le remet pas nécessairement en  $t$  après utilisation; ce faisant, on obtient un nouveau rangement  $\pi'$ . Nous admettrons que le passage de  $\pi$  à  $\pi'$  se fait comme suit: soit  $G$  le groupe des permutations de  $T$  et soit  $t \rightarrow \tau_t$  l'application de  $T$  dans  $G$ , appelée *police* et telle que

$$\begin{aligned} & \text{si } t \leq \omega \quad \tau_t \text{ est l'identité} \\ & \text{si } t > \omega \quad \begin{cases} \tau_t(s) = s & \text{si } s > t \\ \tau_t(s) = s - 1 & \text{si } 0 < s \leq t \\ \tau_t(0) = t. \end{cases} \end{aligned}$$

Le nouveau rangement  $\pi'$  est donné par  $\pi' = \pi \circ \tau_t$ ; si on désire mettre l'accent sur le livre choisi et non sur sa place  $t = \pi^{-1}(b)$ , on écrira  $\pi' = \pi * b$ , où on a posé

$$(0.1) \quad \pi * b = \pi \circ \tau_{\pi^{-1}(b)}$$

La signification intuitive de cette police est que si le livre choisi est en mémoire principale il est remis à sa place sans autre changement alors que s'il est en mémoire auxiliaire il est replacé en 0 et on décale les livres qui le précédaient d'une place vers la droite.

Cela étant, soit  $e$  une bijection de  $T \rightarrow B$  appelée *état initial* et  $E_e = e \circ S$  où  $S$  désigne le sous semi-groupe de  $G$  engendré par l'image  $(\tau_t)_{t \in T}$  de  $\tau$ ; il convient de noter qu'en fait  $S$  est un *groupe*: si  $v < \infty$ ,  $S = G$  et si  $v = \infty$ ,  $S$  est le groupe des bijections de  $\mathbb{N}$  ne dérangeant qu'un nombre fini de termes; en outre  $E_e$  est *dénombrable* (fini ou infini).

On se donne enfin une *probabilité*  $p$  sur  $B$  telle que  $p_b > 0$  pour tout  $b \in B$  et une suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  de variables aléatoires (V. A.) indépendantes et de même loi à valeurs dans  $B$  telles que  $P(X_n = b) = p_b$ .

**DÉFINITION 0.1.** — La *librairie*  $T_\omega(p; v)$  est la chaîne de Markov homogène  $(Y_n)_{n \geq 0}$ , ayant  $E_e$  pour espace d'états et définie par

$$\begin{cases} Y_0 = e \\ Y_{n+1} = Y_n * X_{n+1} \quad (n \geq 0). \end{cases}$$

Il convient de noter que les librairies  $T_\omega(p; \nu)$  sont liées à des chaînes classiques :

1) Le cas particulier obtenu en faisant  $\omega = 0$  est un exemple très important connu sous le nom de *librairie de Tsetlin*.

2) La librairie-quotient induite de  $T_\omega(p; \nu)$  par la partition

$$\{0\}, \{1\}, \dots, \{\omega\}, \{t; t > \omega\},$$

i. e. la chaîne de Markov obtenue en surveillant les états de la mémoire principale, est connue en Informatique sous le nom de *pile FIFO* (first-in-first-out) (Letac, 1978).

Il est facile de voir (Letac, 1978, § 2) que les chaînes  $T_\omega(p; \nu)$  sont :

*indécomposables* (comme toute librairie),

*irréductibles* (S est un groupe),

*apériodiques* ( $\tau_0$  est l'identité).

D'autre part, Aven, Boguslavsky et Kogan (1976) ont montré, au moins

pour le cas  $\nu < \infty$ , que pour  $\pi \in E_e$  et en posant  $q_t(\pi) = \sum_{s=t}^{\nu} p_{\pi(s)}$ , une *mesure stationnaire homogène* (i. e. telle que  $u(e) = 1$ ) de  $T_\omega(p; \nu)$  est donnée par

$$(0.2) \quad u(\pi) = \prod_{t=\omega+1}^{\nu} q_t(e)/q_t(\pi);$$

d'où il n'est pas trop difficile de déduire, sachant que le résultat est vrai pour  $\omega = 0$  (Tsetlin, 1963), que, lorsque  $\nu < \infty$  la *distribution stationnaire* de  $T_\omega(p; \nu)$  est donnée par

$$(0.3) \quad \begin{cases} U(\pi) = (A_\omega^\nu)^{-1} \cdot p_{\pi(0)} \dots p_{\pi(\omega)} \prod_{t=\omega+1}^{\nu} p_{\pi(t)}/q_t(\pi) \\ A_\omega^\nu = \sum \{ p_{b_0} p_{b_1} \dots p_{b_\omega}; b_i \in B \text{ tous distincts} \}. \end{cases}$$

Enfin, une librairie  $T_\omega(p; \infty)$  est *récurrente positive* si et seulement si  $\sum_{t \geq 0} p_{e(t+1)}/p_{e(t)} < \infty$  (Letac, 1978); le moyen le plus simple de le voir est

d'observer que la mesure (0.2) est aussi la mesure stationnaire homogène d'une « librairie mixte du type R1 » (Dies, 1982).

Lorsque  $\nu < \infty$ , la librairie  $T_\omega(p; \nu)$  est évidemment récurrente positive

pour tout  $p$ ; dans ce cas, nous associerons à  $T_\omega(p; \nu)$  sa chaîne « stationnaire ».

DÉFINITION 0.2. — Soit  $\nu < \infty$  et  $(X_{-n})_{n \geq 0}$  une suite indexée par les entiers  $\leq 0$  de  $V$ . A. indépendantes et de même loi sur  $B$ ,  $P(X_{-n} = b) = p_b$ . On appelle *librairie stationnaire*  $T_\omega(p; \nu)$  une chaîne de Markov  $(Y_n)_{n \leq 0}$  indexée par les entiers  $\leq 0$ , à valeurs dans  $E_\omega$ , telles que :

$$0.2.1 \quad P[Y_0 = \pi] = U(\pi) \quad (\pi \in E_\omega, U(\pi) \text{ défini en (0.3)})$$

$$0.2.2 \quad Y_{-n+1} = Y_{-n} * X_{-n+1} \quad (n \geq 1).$$

Notons qu'on peut remplacer la condition 0.2.1 par

$$0.2.1' \quad P[Y_{-n+1} = \pi] = P[Y_{-n} = \pi] \quad (\pi \in E_\omega, n \geq 1).$$

Examinons maintenant le problème de la *transience* des librairies  $T_\omega(p; \infty)$ ; pour le cas particulier  $T_0(p; \infty)$ , Letac (1974) a réussi à établir la condition nécessaire et suffisante de transience

$$(0.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^n p_{e(i)} / [1 - s_i(e)] < \infty \\ s_i(e) = p_{e(0)} + p_{e(1)} + \dots + p_{e(i)}. \end{array} \right.$$

et même à déterminer la fonction génératrice du retour (à l'origine).

*Le but principal* de cet article est, au théorème 4.3, de montrer que (0.4) est la condition nécessaire et suffisante de transience pour toutes les librairies  $T_\omega(p; \infty)$ , quel que soit  $\omega \in \mathbb{N}$ . Pour cela, nous commencerons par étudier, au § 1, les mots finis attachés à la police de  $T_\omega(p; \nu)$  ce qui nous permettra, au § 2, de construire une librairie stationnaire  $T_\omega(p; \nu)$  à partir du seul espace d'états  $B$ . Grâce à cette construction nous pourrons caractériser, au § 3, les *mots infinis de retour* (à l'origine) pour une librairie stationnaire  $T_\omega(p; \nu)$ . Alors, en approchant une librairie  $T_\omega(p; \infty)$  par des librairies stationnaires finies  $T_\omega(p; \nu)$  et en utilisant les propriétés, vues au § 3, des mots de retour pour ces chaînes finies  $T_\omega(p; \nu)$ , nous réussirons, à trouver une valeur approchée de  $Q_{e,e}^n$ , probabilité de retour à l'origine en utilisant les livres  $0, 1, \dots, n$ , ce qui nous donnera le résultat annoncé.

Enfin, au § 5, nous étudierons,  $\nu$  étant fini et fixé, le *coût moyen de recherche* (Rivest, 1976) des librairies  $T_\omega(p; \nu)$ ,  $0 \leq \omega \leq \nu - 2$ ; nous montrerons que ces coûts sont croissants avec  $\omega$  et nous profiterons de ce résultat pour essayer de montrer qu'il peut exister une relation générale, *a priori*

étonnante, entre les coûts moyens de recherche et les mesures stationnaires homogènes. De plus, la Proposition 5.6 révèle une nouvelle librairie finie dont on sait calculer la probabilité stationnaire.

1. MOTS FINIS ATTACHÉS A LA POLICE  
DE  $T_\omega(p; \nu)$

Commençons par donner quelques définitions.

Soit  $A$  un ensemble fini appelé *alphabet* dont les éléments  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  sont appelés *lettres*. Un *mot fini* sur  $A$  est une suite finie  $x = x_1x_2 \dots x_n$  où  $x_i \in A$  pour  $1 \leq i \leq n$  est la *i-ème lettre de  $x$* .

Si  $x = x_1x_2 \dots x_n$  est un mot fini sur  $A$ ,  $|x| = n$  est appelé sa *longueur* et  $x^0$  est l'*alphabet de  $x$* , i. e. l'ensemble des lettres différentes qui composent  $x$ .

Le *mot vide* (de longueur nulle) est désigné par  $\Lambda$ .

$A^n$  désigne l'ensemble des mots finis sur  $A$  de longueur  $n \geq 0$  et  $A^* = \bigcup_{n \geq 0} A^n$  désigne l'ensemble de tous les mots finis sur  $A$ .

Deux mots  $x, y$  de  $A^*$  sont *égaux* si  $|x| = |y|$  et  $x_i = y_i$  pour tout  $i \in [1, |x|]$ .

La *concaténation* de  $x \in A^*$  et  $y \in A^*$  (dans cet ordre) est le mot  $xy \in A^{|x|+|y|}$  défini comme suit : si  $y = \Lambda$ ,  $xy = x$ ; si  $x = \Lambda$ ,  $xy = y$  et si  $x \neq \Lambda$  et  $y \neq \Lambda$

$$\begin{cases} (xy)_i = x_i & \text{si } i \in [1, |x|] \\ (xy)_{|x|+j} = y_j & \text{si } j \in [1, |y|] \end{cases}$$

Si  $A' \subset A^*$  et  $x \in A^*$ , on pose  $xA' = \{xy; y \in A'\}$  et  $A'x = \{yx; y \in A'\}$ .

Si  $x = x_1x_2 \dots x_n \in A^n$  on pose  $Tx = x_1x_2 \dots x_{n-1} \in A^{n-1}$  et  $T\Lambda = \Lambda$  : si pour tout entier naturel  $K$  on définit par récurrence  $T^Kx$  par  $T^0x = x$ ,  $T^1x = Tx$  et  $T^{K+1}x = T.T^Kx$ , alors pour tout  $K \geq |x|$ ,  $T^Kx = \Lambda$ .

Si  $x \in A^*$  on définit pour tout entier naturel  $K$ ,  $x^{(K)}$  comme étant le mot tel que  $x = T^Kx.x^{(K)}$ .

Soient deux entiers  $\omega$  et  $\nu$  tels que  $\nu > \omega + 1$  et une librairie  $T_\omega(p; \nu)$  définie au § 0. En fait nous n'utiliserons pas de probabilité dans ce paragraphe, la chaîne  $T_\omega(p; \nu)$  n'intervenant que par sa police ; nous préférons toutefois parler de librairie afin de pouvoir utiliser les notions introduites au § 0 :

$$B = T = [0, \nu],$$

$e$ , l'état initial, est l'identité de  $[0, \nu]$ ,

$E_e = \mathcal{S}_v$ , le groupe des permutations de  $[0, v]$ ,

$[0, \omega] \subset T$  est la mémoire principale,

$[\omega + 1, v] \subset T$  est la mémoire auxiliaire.

Pour tous  $\pi \in \mathcal{S}_v$  et  $n \leq v$ , on pose :

$$\pi_n = (\pi(0), \pi(1), \dots, \pi(n)),$$

$$\hat{\pi}_n = \{ \sigma \in \mathcal{S}_v ; \sigma_n = \pi_n \},$$

$$\pi_n^0 = \{ \pi(0), \pi(1), \dots, \pi(n) \},$$

$\pi_n^{0*} = (\pi_n^0)^*$ , ensemble des mots finis sur l'alphabet  $\pi_n^0$ .

Nous allons nous intéresser aux mots finis sur  $B = [0, v]$  attachés à la police de  $T_\omega(p; v)$ ; de façon précise l'application  $*$  :  $\mathcal{S}_v \times B \rightarrow \mathcal{S}_v$  ayant été définie en (0.1) nous allons l'*étendre* par récurrence (en conservant la même notation) en une application  $*$  :  $\mathcal{S}_v \times B^* \rightarrow \mathcal{S}_v$  par

$$\begin{cases} \pi * \Lambda = \pi & (\pi \in \mathcal{S}_v) \\ \pi * x = (\pi * Tx) * x^{(1)} & (\pi \in \mathcal{S}_v, x \in B^*). \end{cases}$$

DÉFINITION 1.1. — Soit  $\pi \in \mathcal{S}_v$ ,  $x \in B^n$  et  $\alpha \in B$ ; nous dirons que  $i \in [1, n]$  est une *occurrence  $\pi$ -active* (resp.  *$\pi$ -passive*) de  $\alpha$  dans  $x$  si :

1.  $x_i = \alpha$ ,

2.  $(\pi * T^{n-i}x)_\omega \neq (\pi * T^{n-i+1}x)_\omega$ ,

(resp. 2'.  $(\pi * T^{n-i}x)_\omega = (\pi * T^{n-i+1}x)_\omega$ ).

Intuitivement, dire que  $i$  est une occurrence  $\pi$ -active de  $\alpha$  signifie que la convocation, à l'« instant »  $i$ , du livre  $\alpha$  va modifier l'état antérieur (à l'instant  $i - 1$ ) de la mémoire principale ou encore qu'on a convoqué le livre  $\alpha$ , à l'instant  $i$ , en mémoire auxiliaire, i. e. avec nos notations  $x_i \notin (\pi * T^{n-i+1}x)_\omega^0$ .

Notons aussi que modifier l'état de la mémoire principale équivaut à modifier l'état de la chaîne; on aurait donc pu dans la définition 1.1 remplacer 2, par exemple, par :

3.  $\pi * T^{n-i}x \neq \pi * T^{n-i+1}x$ .

DÉFINITION 1.2. — Soit  $\pi \in \mathcal{S}_v$  et  $x \in B^n$ ;  $i$  est une occurrence  $\pi$ -active ( $\pi$ -passive) dans  $x$  s'il existe  $\alpha \in B$  tel que  $i$  soit une occurrence  $\pi$ -active ( $\pi$ -passive) de  $\alpha$  dans  $x$ .

REMARQUE 1.3. — L'« activité » (la « passivité ») d'une occurrence dépend de l'état « de départ »  $\pi \in \mathcal{S}_v$ ; la définition 1.1 ne faisant intervenir que les états successifs de la mémoire principale, il est clair que cette notion sera la même pour deux états  $\pi, \pi' \in \mathcal{S}_v$  tels que  $\pi'_\omega = \pi_\omega$  (i. e. tels que  $\pi' \in \hat{\pi}_\omega$ ).

DÉFINITION 1.4. — 1. Nous dirons qu'une occurrence  $i$  est *active* (*passive*) si elle est  $e$ -active ou plus généralement, d'après la remarque 1.3, si elle est  $\sigma$ -active, avec  $\sigma \in \hat{e}_v$ .

2. S'il existe une occurrence active de  $\alpha$  dans  $x \in B^*$ , nous parlerons de la *dernière occurrence active de  $\alpha$  dans  $x$* ,  $\alpha^*(x)$  définie par

$$\alpha^*(x) = \sup \{ i \in [1, |x|] ; i \text{ occurrence active de } \alpha \text{ dans } x \}.$$

DÉFINITION 1.5. — Soit  $\pi \in \mathcal{S}_v$  et  $x \in B^n$ ; soient  $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m \leq n$  les occurrences  $\pi$ -actives dans  $x$ . On appelle  $\pi$ -squelette de  $x$  (ou simplement *squelette* si  $\pi = e$ ) le mot  $S_\pi(x)$  éventuellement vide défini par

$$S_\pi(x) = x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_m}.$$

Il convient d'observer d'une part que  $S_\pi(x) = x$  caractérise le fait que  $x$  est un  $\pi$ -squelette et d'autre part, puisque  $S_\pi(x)^0 \subset x^0$  et qu'en général cette inclusion est stricte, que tout mot n'est pas un  $\pi$ -squelette.

REMARQUE 1.6. — Soit  $\pi \in \mathcal{S}_v$ ; la définition d'un  $\pi$ -squelette implique évidemment que, pour tout  $x \in B^*$ ,  $\pi * x = \pi * S_\pi(x)$ .

Prenons un exemple pour illustrer quelques-unes des notions introduites

$$\begin{aligned} \omega &= 1, & v &= 6, & \pi &= e. \\ x &= 102051150555010 \\ |x| &= 15 \\ x^0 &= \{ 0, 1, 2, 5 \} \\ \text{occurrences actives de } 0 \text{ dans } x &: 9,15 \\ \text{-----} & 1 \text{ -----} & : 6,14 \\ \text{-----} & 2 \text{ -----} & : 3 \\ \text{-----} & 5 \text{ -----} & : 5,10 \\ S_e(x) &= 2510510 \\ S_e(x) &\neq x, x \text{ n'est pas un squelette.} \\ e * x &= e * S_e(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_6 \end{aligned}$$

*Propriétés des  $\pi$ -squelettes*

PROPOSITION 1.7. — Soit  $\pi \in \mathcal{S}_v$  et  $x = x_1 x_2 \dots x_n$  un  $\pi$ -squelette; alors

$$\{ W \in B^* ; S_\pi(W) = x \} = \pi_\omega^0 * x_1 (\pi * T^{n-1} x)_\omega^0 * x_2 \dots x_{n-1} (\pi * T x)_\omega^0 * x_n (\pi * x)_\omega^0.$$

*Démonstration.* — Dire que  $W = W_1 W_2 \dots W_m$  est tel que  $S_\pi(W) = x$



équivalent à dire que  $m \geq n$ , que, si  $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m$  sont les occurrences  $\pi$ -actives dans  $x$ ,  $W_{\alpha_1} W_{\alpha_2} \dots W_{\alpha_n} = x$  et que, enfin, en utilisant la remarque 1.6, pour tout  $t$  tel que  $\alpha_i < t < \alpha_{i+1}$ ,

$$W_t \in (\pi * T^{m-\alpha_i} W)_\omega^0 = (\pi * T^{n-i} x)_\omega^0. \quad \square$$

**PROPOSITION 1.8.** — Soient  $\pi \in \mathcal{S}_v$ ,  $\pi_\omega = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\omega)$ ,  $x = x_1 x_2 \dots x_n$  et  $\bar{x} = \alpha_\omega \alpha_{\omega-1} \dots \alpha_1 \alpha_0 x$ ; alors  $x$  est un  $\pi$ -squelette si et seulement si  $(\bar{x})_i = (\bar{x})_j \Rightarrow |i - j| > \omega + 1$ .

*Démonstration.* — Dire que  $x$  n'est pas un  $\pi$ -squelette équivaut à dire que

$$J = \{k \in [1, n]; k \text{ occurrence } \pi\text{-passive dans } x\}$$

n'est pas vide; posons  $j = \inf \{k; j \in J\}$  et  $x_j = \alpha$ . Considérons maintenant

$$I = \{k < j; x_k = \alpha\} \quad (\text{éventuellement vide}).$$

*Supposons d'abord*  $I \neq \emptyset$  : on peut alors poser  $i = \sup \{k; k \in I\}$ . Les occurrences  $i, i + 1, \dots, j - 1$  sont  $\pi$ -actives : après la convocation de  $x_i$ ,  $\alpha$  occupe la position n° 0 de la mémoire principale; après la convocation de  $x_{i+1}$ ,  $\alpha$  occupe la position n° 1, ..., après chaque nouvelle convocation d'une lettre dont l'occurrence est  $\pi$ -active,  $\alpha$  est reculé d'une place vers la droite dans la mémoire principale et  $\alpha$  finira donc par revenir en mémoire auxiliaire après  $\omega + 1$  occurrences  $\pi$ -actives suivant  $i$ . Or  $j$  est une occurrence  $\pi$ -passive, cela veut dire qu'après  $j - 1$ ,  $\alpha$  est encore en mémoire principale et donc que  $j - i \leq \omega + 1$ .

*Supposons maintenant*  $I = \emptyset$  : alors nécessairement  $\alpha \in \pi_\omega^0$ , disons  $\alpha = \alpha_k$ , et  $1, 2, \dots, j - 1$  sont des occurrences  $\pi$ -actives. Or le même argument que précédemment montre que pour que  $\alpha$  quitte la mémoire principale il faut avoir convoqué au moins  $\omega - k + 1$  lettres dont l'occurrence est  $\pi$ -active.

$j$  étant  $\pi$ -passive on a donc  $j - 1 \leq \omega - k$ . Or, dans le mot  $\bar{x}$ ,

$$(\bar{x})_{\omega+1-k} = \alpha \quad \text{et} \quad (\bar{x})_{\omega+j+1} = x_j$$

et il est clair que

$$j - 1 \leq \omega - k \Leftrightarrow (\omega + j + 1) - (\omega + 1 - k) \leq \omega + 1.$$

Enfin, un argument plus simple du même type montre que si

$$(\bar{x})_i = (\bar{x})_j \quad \text{et} \quad |i - j| \leq \omega + 1$$

alors  $x$  n'est pas un  $\pi$ -squelette.  $\square$

REMARQUE 1.9. — La proposition 1.8 montre en particulier que si  $x$  est un  $\pi$ -squelette de longueur  $> \omega$ ,  $x$  peut s'écrire  $x = zw$  où  $z \in \mathbf{B}^*$  et  $w \in \mathbf{B}^{\omega+1}$  dont les lettres sont *toutes distinctes*.

Propriétés des « mots de retour »

$$\hat{e}_n = \{ \pi \in \mathcal{S}_v; \pi_n = e_n \} \quad n \in [0, v]$$

et, pour  $\sigma \in \hat{e}_v$ , posons

$$\begin{aligned} \text{et} \quad W_n(\sigma) &= \{ x \in \mathbf{B}^*; \sigma * x \in \hat{e}_n \} \\ \overline{W_n(\sigma)} &= \{ x \in W_n(\sigma); n \in x^0 \}. \end{aligned}$$

Nous nous proposons de décrire les mots de  $\overline{W_n(\sigma)}$  lorsque  $\omega < n \leq v$ : au préalable, faisons une remarque évidente sur la police de  $T_\omega(p; v)$ .

LEMME 1.10. — Soient trois livres  $a, b, x$  et  $\pi \in \mathcal{S}_v$ ; alors si  $\pi^{-1}(a) < \pi^{-1}(b)$ .

$$\begin{cases} [\pi * x]^{-1}(a) < [\pi * x]^{-1}(b) & \text{si } x \neq b \\ [\pi * b]^{-1}(a) < [\pi * b]^{-1}(b) & \text{si } \pi^{-1}(b) \leq \omega \\ [\pi * b]^{-1}(a) > [\pi * b]^{-1}(b) & \text{si } \pi^{-1}(b) > \omega. \end{cases}$$

Autrement dit, l'interversion de l'ordre relatif de deux livres ne peut être réalisée que par la convocation, en *mémoire auxiliaire*, du livre le plus à droite.

Nous pouvons à présent caractériser les mots de  $\overline{W_n(\sigma)}$ .

PROPOSITION 1.11. — Soit  $\sigma \in \hat{e}_v$  et  $n$  tel que  $\omega < n \leq v$ .

1. Si  $x \in \overline{W_n(\sigma)}$  la dernière occurrence active de  $k$  dans  $x$ ,  $k^*(x)$  existe pour tout  $k \leq n$ .

2. Si  $\underline{n}^*(x)$  désigne la dernière occurrence active dans  $x$  des lettres de  $x^0 \setminus [0, n]$  lorsque cet ensemble est non vide,

$$x \in \overline{W_n(\sigma)} \Leftrightarrow \underline{n}^*(x) < n^*(x) < (n-1)^*(x) < \dots < 1^*(x) < 0^*(x).$$

Démonstration. — 1. Soit  $x \in \overline{W_n(\sigma)}$ ; d'abord il est évident que  $n^*(x)$  existe puisque  $n \in x^0$  et  $n > \omega$ . Après la convocation du livre  $n$  à l'instant  $n^*(x)$ ,  $n$  occupera la place n° 0, autrement dit tous les autres livres seront à sa droite. Or, puisque  $x \in \overline{W_n(\sigma)}$ ,  $[\sigma * x]^{-1}(n-1) < [\sigma * x]^{-1}(n)$  et on doit, d'après le lemme 1.10, convoquer  $(n-1)$  en mémoire auxiliaire après  $n^*(x)$ . Par conséquent  $(n-1)^*(x)$  existe et  $n^*(x) < (n-1)^*(x)$ . En répétant ce raisonnement il est clair que  $k^*(x)$  existe pour tout  $k \leq n$  et, de plus,

$$n^*(x) < (n-1)^*(x) < \dots < 1^*(x) < 0^*(x).$$

2. [ $\Rightarrow$ ] Il suffit de montrer, et la méthode est la même qu'en 1., que  $\underline{n}^*(x) < n^*(x)$  si  $\underline{n}^*(x)$  existe.

[ $\Leftarrow$ ] On déduit aisément du lemme 1.10 que si

$$\underline{n}^*(x) < n^*(x) < (n-1)^*(x) < \dots < 1^*(x) < 0^*(x)$$

alors

$$\begin{cases} [\sigma * x]^{-1}(0) < [\sigma * x]^{-1}(1) < \dots < [\sigma * x]^{-1}(n) \\ [\sigma * x]^{-1}(n) < [\sigma * x]^{-1}(m) \text{ pour tout } m > n. \end{cases}$$

et par conséquent  $x \in \overline{W}_n(\sigma)$ .  $\square$

REMARQUE 1.12. — Observons que si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux éléments de  $\hat{e}_\omega$ , la proposition 1.11 montre en particulier que  $\overline{W}_n(\sigma) = \overline{W}_n(\sigma')$ .

*Théorème de « remise au zéro ».*

Nous supposons jusqu'à la fin de ce paragraphe que  $\nu$  est un entier supérieur ou égal à  $3\omega + 2$ ; nous nous proposons de montrer l'existence d'un mot fini  $\beta \in B^*$  tel que, pour tout  $\pi \in \mathcal{S}_\nu$ ,  $\pi * \beta = e$ .

Nous devons au préalable établir deux lemmes.

LEMME 1.13. — Si  $\pi \in \mathcal{S}_\nu$  et  $x \in B^{2\omega+2}$  dont toutes les lettres sont distinctes alors  $(\pi * x)_\omega^0 \subset x^0$ .

*Démonstration.* — Supposons qu'il existe  $\alpha$  tel que  $\alpha \in (\pi * x)_\omega^0$  et  $\alpha \notin x^0$ ; nécessairement  $\alpha \in \pi_\omega^0$ .  $\alpha$  n'étant jamais convoqué, puisque  $\alpha \notin x^0$ , cela veut dire que  $\alpha$  n'est jamais sorti de la mémoire principale.

Or, puisqu'il y a  $\omega + 1$  lettres dans  $\pi_\omega^0$  et  $2(\omega + 1)$  dans  $x^0$ , il existe au moins  $\omega + 1$  lettres  $x_i$  de  $x_0$  qui n'appartiennent pas à  $\pi_\omega^0$ .

Soit donc  $x_t \in x^0 \setminus \pi_\omega^0$ ; puisque

$$(\pi * T^{n-t+1}x)_\omega^0 \subset \pi_\omega^0 \cup (T^{n-t+1}x)^0,$$

$$x_t \notin (T^{n-t+1}x)^0 \quad (\text{les lettres de } x \text{ sont toutes distinctes}), \quad \text{et} \quad x_t \notin \pi_\omega^0,$$

On a

$$x_t \notin (\pi * T^{n-t+1}x)_\omega^0.$$

Par conséquent,  $t$  est une occurrence  $\pi$ -active dans  $x$ ;  $x_t$  vient en position  $n^0$  et  $\alpha$  est reculé d'une place vers la droite. Comme il y a au moins  $\omega + 1$  lettres  $x_i$  du type précédent,  $\alpha$  aura été finalement reculé d'au moins  $\omega + 1$  places vers la droite et sera donc sorti de la mémoire principale.  $\square$

LEMME 1.14. — Soit  $\pi \in \mathcal{S}_\nu$  et  $x \in B^{\omega+1}$  dont toutes les lettres sont distinctes; si  $x^0 \cap \pi_\omega^0 = \emptyset$  alors  $(\pi * x)_\omega = (x_{\omega+1}, x_\omega, \dots, x_1)$ .

*Démonstration.* — Puisque toutes les lettres de  $x$  sont distinctes et que

$x^0 \cap \pi_\omega^0 = \emptyset$ , on déduit de la proposition 1.8 que  $x$  est un  $\pi$ -squelette. Par conséquent, après la convocation de  $x_1$ ,  $x_1$  occupe la place n° 0 ; après la convocation de  $x_2$ ,  $x_2$  occupe la place n° 0 et  $x_1$  la place n° 1 ; ... ; après la convocation de  $x_{\omega+1}$ ,  $x_{\omega+1}$  occupe la place n° 0,  $x_\omega$  la place n° 1, ...,  $x_1$  la place n°  $\omega$ .  $\square$

Cela étant, soit

$$\gamma = v(v-1) \dots 2 \ 1 \ 0 \in \mathbf{B}^{v+1} \quad \text{et} \quad \beta = \gamma\gamma \in \mathbf{B}^{2v+2}.$$

Nous avons le

**THÉORÈME 1.15.** —  $\forall x \in \mathbf{B}^*$ ,  $\forall \pi \in \mathcal{S}_v$ ,  $\pi * x\beta = e$ .

*Démonstration.* — Observons d'abord que, puisque  $\pi * x\beta = (\pi * x) * \beta$ , il suffit de prouver que, pour tout  $\pi \in \mathcal{S}_v$ ,  $\pi * \beta = e$ .

D'autre part, puisque  $v \geq 3\omega + 2$ , on peut écrire

$$\beta = \mathbf{T}^{v-2\omega-1}\gamma \cdot \gamma^{(v-2\omega-1)} \cdot \gamma.$$

Puisque toutes les lettres de  $\gamma$  sont distinctes et que  $|\mathbf{T}^{v-2\omega-1}\gamma| = 2\omega + 2$ , on déduit du lemme 1.13,

$$(1) \quad (\pi * \mathbf{T}^{v-2\omega-1}\gamma)_\omega^0 \subset (\mathbf{T}^{v-2\omega-1}\gamma)_\omega^0.$$

Comme  $\gamma^{(v-2\omega-1)} \in \mathbf{B}^{\omega+1}$  et que toutes les lettres de  $\gamma$  sont distinctes, on déduit de (1) que

$$(\gamma^{(v-2\omega-1)})_\omega^0 \cap (\pi * \mathbf{T}^{v-2\omega-1}\gamma)_\omega^0 = \emptyset$$

et, en appliquant le lemme 1.14, que

$$(2) \quad \pi * \gamma \in \hat{e}_\omega$$

D'après la proposition 1.8,  $\gamma$  est un squelette et d'après (2) et la proposition 1.11,  $\gamma \in \overline{\mathbf{W}}_v$  donc

$$\pi * \beta = (\pi * \gamma) * \gamma = e. \quad \square$$

## 2. CONSTRUCTION DE LA LIBRAIRIE STATIONNAIRE $T_\omega(p; v)$

Définir une chaîne de Markov dénombrable à partir de son espace des suites est une construction standard (Kemeny, Snell et Knapp, 1966, ch. 2). Le problème envisagé dans ce paragraphe est moins évident : de façon précise, on se donne deux entiers  $\omega$  et  $v$  tels que  $v \geq 3\omega + 2$ ,  $\mathbf{B} = [0, v]$ ,

$\mathcal{S}_v$  est le groupe des permutations de  $[0, v]$  et  $p$  est une probabilité sur  $B$  telle que  $p_b > 0$  pour tout  $b$  de  $B$ . Construire une librairie stationnaire  $T_\omega(p; v)$  signifie d'après la définition 0.2, définir deux suites de variables aléatoires  $(X_{-n})_{n \geq 0}$  et  $(Y_{-n})_{n \geq 0}$  telles que :

1)  $(X_{-n})_{n \geq 0}$  est une suite de V. A. indépendantes et de même loi sur  $B$ ,  $P(X_{-n} = b) = p_b$ .

2)  $(Y_{-n})_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov sur  $\mathcal{S}_v$  telle que :

$$\begin{cases} P[Y_{-n} = \pi] = P[Y_{-n+1} = \pi] & (n \geq 1, \pi \in \mathcal{S}_v) \\ Y_{-n+1} = Y_{-n} * X_{-n+1} & (n \geq 1) \end{cases}$$

(Rappelons qu'on peut remplacer la condition  $P[Y_{-n} = \pi] = P[Y_{-n+1} = \pi]$  par  $P[Y_0 = \pi] = U(\pi)$ , où  $U(\pi)$  est la distribution stationnaire de  $T_\omega(p; v)$ . Nous nous proposons ici de construire les deux suites  $(X_{-n})_{n \geq 0}$  et  $(Y_{-n})_{n \geq 0}$  à partir du seul espace d'états  $B$ .

Soit donc l'espace des suites  $B^\infty$ , i. e. l'ensemble des applications de  $-\mathbb{N}$  (ensemble des entiers  $\leq 0$ ) dans  $B$  ou encore l'ensemble des mots infinis à gauche

$$x = \dots x_{-n} x_{-n+1} \dots x_{-2} x_{-1} x_0 \quad \text{où} \quad x_i \in B \quad \text{pour tout } i \leq 0.$$

Si  $x = \dots x_{-n} x_{-n+1} \dots x_{-2} x_{-1} x_0 \in B^\infty$ , on définit

$$Tx = \dots x_{-n-1} x_{-n} \dots x_{-3} x_{-2} x_{-1} \in B^\infty,$$

et, par récurrence,  $T^{k+1}x = T \cdot T^k x$  avec  $T^0 x = x$  et  $T^1 x = Tx$ .

Si  $x = \dots x_{-n} x_{-n+1} \dots x_{-2} x_{-1} x_0 \in B^\infty$ , on définit

$$\begin{cases} x^{(k)} = x_{-k+1} \dots x_{-1} x_0 \in B^k & \text{pour } k \geq 1 \\ x^{(0)} = \Lambda. \end{cases}$$

Si  $y \in B^\infty$  et  $z \in B^*$ , la concaténation de  $y$  et  $z$  est mot  $x = yz \in B^\infty$  tel que  $T^{|z|}x = y$  et  $x^{(|z|)} = z$ . De plus, si  $C \subset B^\infty$  et  $D \subset B^*$ , on pose

$$CD = \{ yz \in B^\infty; y \in C \text{ et } z \in D \}.$$

On sait construire de façon standard un espace de probabilité  $(B^\infty, \mathcal{A}, P)$  à partir de l'espace des suites  $B^\infty$ , où  $P$  est définie sur les cylindres par

$$(2.1) \quad P \{ x \in B^\infty; x_{-n} = \alpha_n, x_{-n+1} = \alpha_{n-1}, \dots, x_0 = \alpha_0 \} = p_{\alpha_0} p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_n}.$$

La suite  $(X_{-n})_{n \geq 0}$  des applications  $X_{-n} : B^\infty \rightarrow B$  définies par

$$(2.2) \quad X_{-n}(x) = x_{-n}$$

est évidemment une suite de V. A. indépendantes et de même loi sur  $B$ ,

$P(X_{-n} = b) = p_b$ . Soit le « bloc »  $\beta = \gamma\gamma$  où  $\gamma = v(v - 1) \dots 2 1 0$ , introduit au théorème 1.15; considérons les cylindres

$$R_n = \{ x \in B^\infty ; x_{-n-2v-1}x_{-n-2v} \dots x_{-n-1}x_{-n} = \beta \}$$

et l'ensemble (mesurable)

$$R = \bigcap_{N \geq 0} \bigcup_{n \geq N} R_n.$$

( $R$  est l'ensemble des mots de  $B^\infty$  contenant une infinité de blocs  $\beta$ ). On a la

**PROPOSITION 2.1.** —  $P(R) = 1$ .

*Démonstration.* — C'est une conséquence immédiate de la loi forte des grands nombres.  $\square$

Nous pourrions donc nous placer dorénavant dans l'espace de probabilité  $(R, \mathcal{A}, P)$ . Observons que  $x \in R \Rightarrow Tx \in R$  et que tout  $x \in R$  est de la forme  $Ty, y \in R$ ; nous dirons simplement que  $TR = R$ . Ensuite, si  $x = \dots x_{-n}x_{-n+1} \dots x_{-2}x_{-1}x_0 \in R$ , on peut définir par récurrence la suite infinie d'entiers  $(\beta_K(x))_{K \geq 0}$  par

$$(2.3) \quad \begin{cases} \beta_0(x) = \inf \{ n \geq 0 ; x \in R_n \} \\ \beta_{K+1}(x) = \inf \{ n > \beta_K(x) ; x \in R_n \} \end{cases}$$

et nous poserons

$$x^{[K]} = x^{(\beta_K(x))}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de définir, pour tout  $n \geq 0$ , une application  $Y_{-n} : R \rightarrow \mathcal{S}_v$ .

**PROPOSITION 2.2.** — Soit  $x \in R$ . Il existe un état  $Y_0(x)$  de  $\mathcal{S}_v$  tel que

$$\forall \pi \in \mathcal{S}_v \quad \exists K' \in \mathbb{N} : \pi * x^{(K)} = Y_0(x) \quad \text{si} \quad K \geq K'.$$

Nous poserons  $Y_{-n}(x) = Y_0(T^n x)$  pour tout  $n \geq 0$ .

(En d'autres termes si  $x \in R, Y_0(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi * x^{(k)}$  existe si  $\mathcal{S}_v$  a la topologie discrète et  $Y_0(x)$  est indépendant de  $\pi$ .)

Si  $x \notin R \lim_{k \rightarrow \infty} \pi * x^{(k)}$  peut ne pas exister ou dépendre de  $\pi \in \mathcal{S}_v$  :

*Exemple 2.2.1.* —  $\omega = 0, v = 3 \geq 3\omega + 2; B = \{0, 1, 2, 3\}$ . Soit  $\xi \in B^\infty$  tel que  $\xi_{-n} = 0$  pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \pi * \xi^{(k)} = \begin{cases} \pi & \text{si} \quad \pi(0) = 0 \\ \pi * 0 & \text{si} \quad \pi(0) \neq 0 \end{cases}$$

*Exemple 2.2.2.* —  $\omega = 2, v = 9 \geq 3\omega + 2; B = [0, 9]$ . Prenons  $\pi \in \mathcal{S}_9$

tel que  $\pi_2 = (0,3,1)$  et  $\eta = \dots 2103 \ 2103 \ 2103 \in \mathbf{B}^\infty$  alors pour tout  $K \geq 0$

$$\begin{aligned}(\pi * \eta^{(8K)})_3 &= (0,3,1,2) \\ (\pi * \eta^{(8K+4)})_3 &= (3,1,2,0)\end{aligned}$$

et donc  $\pi * \eta^{(K)}$  n'a pas de limite quand  $K \rightarrow \infty$ .

*Démonstration de la proposition 2.2.* — Soit  $x \in \mathbf{R}$ ; pour tout entier  $k \geq \beta_0(x) + 2\nu + 1$ ,  $x^{(k)}$  est de la forme  $Z\beta x^{[0]}$  où  $Z \in \mathbf{B}^*$  et par conséquent, pour tout  $\pi \in \mathcal{S}_\nu$ ,

$$\pi * x^{(k)} = (\pi * Z) * x^{[0]}$$

et donc, d'après le théorème 1.15,

$$\pi * x^{(k)} = e * x^{[0]}$$

d'où

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \pi * x^{(k)} = e * x^{[0]} = Y_0(x). \quad \square$$

**REMARQUE 2.3.** — On vient de montrer que  $Y_0(x) = e * x^{[0]}$ ; on démontrerait de la même manière que  $Y_0(x) = e * x^{[k]}$  pour tout  $k \geq 0$ .

**COROLLAIRE 2.4.** —  $(Y_{-n})_{n \geq 0}$  est une suite *stationnaire* de V. A. à valeurs dans  $\mathcal{S}_\nu$ .

*Démonstration.* —  $Y_0$  est une V. A. : en effet, d'après la proposition 2.2, si  $\pi \in \mathcal{S}_\nu$ ,

$$\{Y_0 = \pi\} = \{x \in \mathbf{R}; e * x^{[0]} = \pi\}$$

et donc  $\{Y_0 = \pi\}$  est une réunion de cylindres.

Puisque  $Y_{-n}(x) = Y_0(T^n x)$  et que  $T^n \mathbf{R} = \mathbf{R}$ ,

$$\{Y_0 = \pi\} = \{Y_{-n} = \pi\}$$

et  $(Y_{-n})_{n \geq 0}$  est bien une suite stationnaire de V. A.  $\square$

Pour achever la construction de la librairie stationnaire  $T_\omega(p; \nu)$ , il nous reste à montrer la

**PROPOSITION 2.5.** —  $(Y_{-n})_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov liée à la suite  $(X_{-n})_{n \geq 0}$  définie en (2.2) par

$$Y_{-n+1} = Y_{-n} * X_{-n+1} \quad (n \geq 1).$$

*Démonstration.* — Puisque d'après la remarque 2.3  $\{Y_{-n} = \pi\}$  ( $n \geq 0, \pi \in \mathcal{S}_\nu$ ) est une réunion de cylindres de la forme

$$\{x \in \mathbf{R}; x_{-n-k} = \alpha_k, x_{-n-k+1} = \alpha_{k-1}, \dots, x_{-n} = \alpha_0\},$$

tout sera montré si l'on prouve la relation

$$Y_{-n+1} = Y_{-n} * X_{-n+1} \quad (n \geq 1)$$

mais en fait, comme  $Y_{-n}(x) = Y_0(T^n x)$  et  $X_{-n}(x) = X_0(T^n x)$ , il suffit de prouver que

$$Y_0 = Y_{-1} * X_0.$$

Soit donc  $x \in \mathbb{R}$ ; comme, d'après la remarque 2.3

$$Y_{-1}(x) = Y_0(Tx) = e * (Tx)^{[0]},$$

on a

$$Y_{-1}(x) * X_0(x) = (e * (Tx)^{(\beta_0(Tx))}) * X_0(x) = e * x^{(\beta_0(Tx)+1)}.$$

Si  $\beta_0(x) > 0$  alors  $\beta_0(Tx) = \beta_0(x) - 1$  et donc

$$Y_{-1}(x) * X_0(x) = e * x^{[0]} = Y_0(x).$$

Si  $\beta_0(x) = 0$  alors  $\beta_0(Tx) = \beta_1(x) - 1$  et donc, en utilisant la remarque 2.3,

$$Y_{-1}(x) * X_0(x) = e * x^{[1]} = Y_0(x). \quad \square$$

La construction de la librairie stationnaire  $T_\omega(p; \nu)$  à partir du seul espace d'états  $B$  est ainsi achevée; l'intérêt de cette construction est de pouvoir travailler directement sur l'espace des suites, i. e. sur les mots infinis de  $\mathbb{R}$ , comme nous allons le faire au paragraphe suivant.

### 3. MOTS INFINIS DE RETOUR A L'ORIGINE D'UNE LIBRAIRIE STATIONNAIRE $T_\omega(p; \nu)$

Considérons une librairie stationnaire  $T_\omega(p; \nu)$  où, rappelons-le  $\nu$  est fini et supérieur ou égal à  $3\omega + 2$ . Cette librairie a été construite au paragraphe précédent à partir de l'espace des suites  $\mathbb{R}$ ; nous nous proposons dans ce paragraphe d'étendre aux mots infinis de  $\mathbb{R}$  certaines des propriétés des mots finis de  $B^*$  vues au § 1 afin d'étudier les mots infinis « de retour à l'origine ».

Commençons par étendre les définitions 1.1 et 1.2.

**DÉFINITION 3.1.** — Soit  $x = \dots x_{-n}x_{-n+1} \dots x_{-2}x_{-1}x_0 \in \mathbb{R}$ . —  $i \leq 0$  est une *occurrence active* (resp. *passive*) de  $\alpha \in B$  dans  $x$  si

1.  $x_{-i} = \alpha$ ,
2.  $Y_{-i}(x) \neq Y_{-i-1}(x)$ ,  
(resp. 2'.  $Y_{-i}(x) = Y_{-i-1}(x)$ ).

**DÉFINITION 3.2.** — Soit  $x \in \mathbb{R}$ . —  $i \leq 0$  est une *occurrence active* (resp.



passive) dans  $x$  s'il existe  $\alpha \in B$  tel que  $-i$  soit une occurrence active (resp. passive) de  $\alpha$  dans  $x$ .

On peut relier la notion d'occurrence active dans un mot infini de  $R$  à la notion d'occurrence active dans un mot fini.

PROPOSITION 3.3. — Soit  $x \in R$ ,  $-i \leq 0$  et  $k \in \mathbb{N}$  tel que

$$\beta_k(x) = \beta_0(T^i x)(\beta_k(x))$$

a été défini en (2.3)). Alors dire que  $-i$  est une occurrence active dans  $x$  équivaut à dire que  $-i$  est une occurrence active dans  $x^{[k]} \in B^*$ . Il suffit d'observer, d'après la proposition 2.2 et puisque  $Y_{-i}(x) = Y_0(T^i x)$ , que

$$Y_{-i}(x) = e * x_{-\beta_k(x)+1} x_{-\beta_k(x)+2} \cdots x_{-i-1} x_{-i}. \quad \square$$

On peut aussi étendre simplement la proposition 1.8.

PROPOSITION 3.4. — Soit  $x \in R$  et  $\alpha \in B$ ; entre deux occurrences actives consécutives de  $\alpha$  dans  $x$ , il y a au moins  $\omega + 1$  occurrences actives.

*Démonstration.* — Si  $-i_1 < -i_2$  sont deux occurrences actives consécutives de  $\alpha$  dans  $x$ , il suffit de considérer  $k$  tel que  $\beta_k(x) = \beta_0(T^{i_1} x)$ , d'utiliser la proposition 3.3 et d'appliquer la proposition 1.8 au mot fini  $S_e(x^{[k]})$ , le squelette de  $x^{[k]}$ .  $\square$

Le but principal de ce paragraphe est d'étudier les propriétés des « mots de retour » qui nous seront utiles au § 4 pour l'étude de la transience des librairies  $T_\omega(p, \infty)$ ; de façon précise, rappelons que si  $n \leq v - 1$ ,

$$\hat{e}_{n+1} = \{ \pi \in \mathcal{S}_v; \pi(i) = i, i \in [0, n + 1] \}$$

et nous poserons

$$(3.1) \quad \{ \hat{e}_{n+1} \} = \{ x \in R; Y_0(x) \in \hat{e}_{n+1} \}.$$

Nous nous proposons d'abord de caractériser les mots de  $\{ \hat{e}_{n+1} \}$  en étendant la proposition 1.11 mais, pour ce faire, nous devons au préalable introduire la

DÉFINITION 3.5. — Soit  $x \in R$ ; on appelle *dernière occurrence active* de  $\alpha \in B$  dans  $x$  l'entier négatif  $\alpha^*(x)$  défini par

$$\alpha^*(x) = \sup \{ -i \leq 0; -i \text{ occurrence active de } \alpha \text{ dans } x \}.$$

Observons qu'on peut relier la notion de dernière occurrence active dans un mot infini de  $R$  à la même notion dans un mot fini, introduite à la définition 1.4.2.

PROPOSITION 3.6. — Pour tout  $x \in R$ ,  $\alpha^*(x) = \alpha^*(x^{[1]})$ .

*Démonstration.* — Il suffit d'utiliser la proposition 3.3 et d'observer que, d'après la proposition 1.8,  $v = v(v - 1) \dots 210$  est un squelette contenant toutes les lettres de  $\mathbf{B}$  et contenu dans  $x^{[1]}$ .  $\square$

Nous pouvons à présent caractériser les mots de  $\{\hat{e}_{n+1}\}$ ; notons que dans toute la suite de ce paragraphe nous supposons

$$(3.2) \quad \omega < n \leq v - 1$$

**PROPOSITION 3.7.** — Soit  $\omega < n \leq v - 1$ ; si  $(n + 1)^*(x)$  désigne la dernière occurrence active dans  $x \in \mathbf{R}$  des lettres de  $[n + 2, v]$ , lorsque  $n + 1 < v$ ,

$$\{\hat{e}_{n+1}\} = \{x \in \mathbf{R}; \underline{n+1}^*(x) < (n + 1)^*(x) < n^*(x) \dots < 1^*(x) < 0^*(x)\}$$

*Démonstration.* — Il suffit de remarquer, en utilisant la proposition 3.6 et la remarque 2.3, que

$$x \in \{\hat{e}_{n+1}\} \Leftrightarrow x^{[1]} \in \overline{\mathbf{W}_{n+1}(e)}$$

et d'appliquer la proposition 1.11.  $\square$

Il est facile de calculer la probabilité de  $\{\hat{e}_{n+1}\}$ .

**PROPOSITION 3.8.**

$$P[\{\hat{e}_{n+1}\}] = (A_\omega^v)^{-1} p_0 p_1 \dots p_\omega \prod_{i=\omega+1}^{n+1} \frac{p_i}{1 - s_{i-1}}$$

où  $s_i = p_0 + p_1 + \dots + p_i$  et  $A_\omega^v$  a été défini en (0.3).

*Démonstration.*

$$P[\{\hat{e}_{n+1}\}] = P[Y_0 \in \hat{e}_{n+1}] = \sum_{\pi \in \hat{e}_{n+1}} U(\pi)$$

où  $U(\pi)$  est la distribution stationnaire de la librairie  $T_\omega(p; v)$  défini en (0.3)

$$\sum_{\pi \in \hat{e}_{n+1}} U(\pi) = (A_\omega^v)^{-1} p_0 p_1 \dots p_\omega \prod_{i=\omega+1}^{n+1} \frac{p_i}{1 - s_{i-1}} \sum_{\pi \in \hat{e}_{n+1}} \prod_{t=n+2}^v \frac{p_{\pi(t)}}{q_t(\pi)}$$

avec  $q_t(\pi) = \sum_{s=t}^v p_{\pi(s)}$ .

Or,  $a_0, a_1, \dots, a_K$  étant des réels  $> 0$  et  $\mathcal{L}_K$  désignant le groupe des

permutations de  $[0, K]$ , l'identité élémentaire de Rackusin (1977) montre que

$$(3.3) \quad \sum_{\pi \in \mathcal{S}_K} \prod_{i=0}^K |a_{\pi(i)}| / \sum_{j=1}^K |a_{\pi(j)}| = 1.$$

Par conséquent,  $\tilde{\mathcal{C}}$  désignant le groupe des permutations de  $[n+2, v]$ ,

$$\sum_{\pi \in \hat{\mathcal{E}}_{n+1}} \prod_{t=n+2}^v \frac{p_{\pi(t)}}{q_t(\pi)} = \sum_{\pi \in \tilde{\mathcal{C}}} \prod_{t=n+2}^v \frac{p_{\pi(t)}}{q_t(\pi)} = 1. \quad \square$$

Un raisonnement en tous points analogue au précédent montrerait le résultat suivant :

Soit

(3.4)  $A(n, \omega)$  l'ensemble des mots de  $[0, n]^{\omega+1}$  dont toutes les lettres sont distinctes.

Si, pour  $\beta \in A(n, \omega)$ , on pose

$$(3.5) \quad R(\beta) = \{x \in \mathbb{R}; (Y_0(x))_\omega = (\beta_{\omega+1}, \beta_\omega, \dots, \beta_1)\},$$

On a la

**PROPOSITION 3.9.**

$$P[R(\beta)] = (A_\beta^v)^{-1} \cdot p_{\beta_1} p_{\beta_2} \dots p_{\beta_{\omega+1}}.$$

Enfin, nous allons « analyser » les mots  $\{\hat{e}_{n+1}\}$ , c'est-à-dire décomposer  $\{\hat{e}_{n+1}\}$  en sous-ensembles pour les mots  $x$  desquels on aura, en gros, fixé les lettres antérieures et postérieures à  $x_{-(n+1)^*(x)}$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , définissons par récurrence la suite d'entiers négatifs  $(k|x)_{k \geq 0}$  où  $(0|x)$ ,  $(1|x)$ , ... désignent la dernière, l'avant-dernière, ... occurrence active dans  $x$ .

De façon précise, on pose, pour  $k \geq 0$ ,

$$(3.6) \quad \begin{cases} (0|x) = \sup \{-i \leq 0; -i \text{ occurrence active dans } x\} \\ (k+1|x) = \sup \{-i < (k|x); -i \text{ occurrence active dans } x\}. \end{cases}$$

Si  $x \in \{\hat{e}_{n+1}\}$ ,  $\overline{n+1}$  désigne l'entier négatif tel que

$$(3.7) \quad \overline{(n+1|x)} = (n+1)^*(x).$$

D'après la proposition 3.7,

$$(3.8) \quad \begin{cases} 1. \overline{n+1} \geq n+1 \text{ et a fortiori } \overline{n+1} > \omega+1 \text{ puisque, d'après (3.2) } n > \omega. \\ 2. \text{ Pour tout } m < \overline{n+1}, x_{(m|x)} \in [0, n]. \end{cases}$$



2. Pour tout  $\alpha \in A(n, \omega)$ ,

$$\{ \hat{e}_{n+1} | \alpha \} = \sum_{\beta_i \in C_i} \{ \beta | \hat{e}_{n+1} | \alpha \}$$

3. Pour  $\alpha \in A(n, \omega)$  et  $\beta$  tel que  $\beta_i \notin C_i$ ,

$$\{ \beta | \hat{e}_{n+1} | \alpha \} = R(\beta) \cdot (n + 1) C_1^* \alpha_1 C_2^* \alpha_2 \dots C_{\omega+1}^* \alpha_{\omega+1} N(\alpha).$$

*Démonstration.* — Il suffit de démontrer le point 3.

D'abord, on déduit aisément de la remarque 1.6 et du lemme 1.14 que

$$R(\beta) = \{ T^{(\overline{n+1}|x)+1} x; x \in \{ \beta | \hat{e}_{n+1} | \alpha \} \}$$

D'autre part, le lemme 1.14 implique que, si  $x \in \{ \beta | \hat{e}_{n+1} | \alpha \}$

$$(Y_{(\overline{n+1}-i|x)})_{\omega}^0 = C_{i+1} \quad (0 \leq i \leq \omega).$$

et le résultat escompté est obtenu en utilisant la proposition 1.7. □

On peut schématiser le point 3 de la proposition 3.10 comme suit, les points gras représentant les occurrences actives.

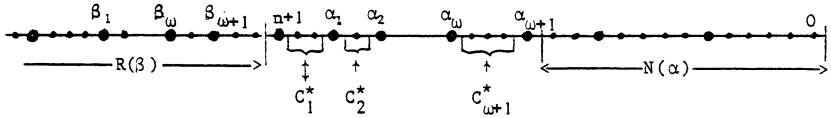


FIG. 1.

#### 4. CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE DE TRANSIENCE DES LIBRAIRIES $T_{\omega}(p; \infty)$

Étant donnée une librairie  $T_{\omega}(p; \infty)$ , nous allons d'abord décrire la méthode que nous suivrons pour établir sa transience.

Commençons par quelques notations :

$$(4.1) \quad p_w = p_{w_1} p_{w_2} \dots p_{w_k} \quad \text{si} \quad w \in [0, n]^k$$

$$(4.2) \quad Q(W) = \sum_{w \in W} p_w \quad \text{si} \quad W \subset [0, n]^k$$

$$(4.3) \quad M(\alpha) = \alpha N(\alpha), \quad \alpha \in A(n, \omega) \quad \text{et} \quad N(\alpha) \text{ défini en (3.11).}$$

Cela étant, la chaîne  $T_{\omega}(p; \infty)$  est transiente si et seulement si  $\sum_n P_{e,e}^n < \infty$ .

où  $P_{e,e}^n$  est la probabilité de retour à l'origine en  $n$  étapes ou, ce qui revient évidemment au même, si et seulement si

$$(4.4) \quad \sum_n Q(M_n) < \infty,$$

où  $M_n$  est l'ensemble des mots de retour à  $e$  de  $T_\omega(p; \infty)$  dont l'alphabet est  $[0, n]$ , c'est-à-dire

$$(4.5) \quad M_n = \{x \in [0, n]^* ; e * x = e \text{ et } n \in x^0\}.$$

Bien qu'on ne sache pas calculer exactement  $Q(M_n)$ , on peut en donner une « bonne évaluation » du fait que les ensembles  $M_n$  sont liés aux ensembles  $M(\alpha)$  définis en (4.3); de façon précise, nous montrerons que si on pose

$$(4.6) \quad \lambda_n = \sum_{\alpha \in A(n, \omega)} Q[M(\alpha)],$$

On peut trouver deux constantes positives  $C_1$  et  $C_2$  indépendantes de  $n$ , telles que

$$(4.7) \quad C_1 \lambda_n \leq Q(M_n) \leq C_2 \lambda_n \quad (n \geq 3\omega + 2).$$

Par conséquent, étudier la transience de  $T_\omega(p; \infty)$  revient à étudier la série de terme général  $\lambda_n$ .

Il ne reste plus qu'à calculer  $\lambda_n$ ; pour ce faire nous approcherons  $T_\omega(p; \infty)$  par les librairies stationnaires finies  $T_\omega(p^v; v)$  où  $v \geq 3\omega + 2$  et où la probabilité  $p^v$  sur  $[0, v]$  se déduit de  $p$  par

$$(4.8) \quad p_i^v = p_i / \sum_{i=0}^v p_i \quad (0 \leq i \leq v)$$

Si  $P_v$  est la probabilité attachée à  $T_\omega(p^v; v)$ , définie sur les parties mesurables de  $R$  (voir § 2), nous poserons pour simplifier,  $A$  étant une partie propre de  $[0, v]$  et  $W \subset A^*$ ,

$$(4.9) \quad P_v(W) = P_v(RW).$$

Alors si

$$(4.10) \quad \lambda_n^v = \sum_{\alpha \in A(n, \omega)} P_v[M(\alpha)],$$

Comme  $M(\alpha)$  est un ensemble de mots finis sur  $[0, n]$ , nous aurons

$$(4.11) \quad \lambda_n = \lim_{v \rightarrow \infty} \lambda_n^v.$$

et on sait calculer  $\lambda_n^v$  (en quelque sorte « par différence ») à partir des probabilités  $P_v[\{\hat{e}_{n+1}\}]$  et  $P_v[R(\beta)]$  données par les propositions 3.8 et 3.9 et de la décomposition de  $\{\hat{e}_{n+1}\}$  donnée par la proposition 3.10.

Nous commencerons, au théorème 4.1, par calculer  $\lambda_n$ ; au théorème 4.2 nous démontrerons la double inégalité (4.7); le regroupement du théorème 4.1 et 4.2 conduit au théorème 4.3 donnant la C. N. S. de transience des librairies  $T_\omega(p; \infty)$ .

**THÉORÈME 4.1.** — Si  $n > \omega$  alors

$$\lambda_n = \frac{p_0 p_1 \cdots p_\omega}{1 - s_\omega} \prod_{i=\omega+1}^n \frac{p_i}{1 - s_i}$$

où, rappelons-le,  $s_i = p_0 + p_1 + \dots + p_i$ .

*Démonstration.* — D'après (4.11), il suffit de démontrer l'analogie du théorème 4.1 où on a remplacé  $\lambda_n, p_i$  et  $s_i$  par  $\lambda_n^v, p_i^v$  et  $s_i^v = p_0^v + p_1^v + \dots + p_i^v$ .

Si on utilise la décomposition de  $\{\beta | \hat{e}_{n+1} | \alpha\}$  donnée au point 3 de la proposition 3.10, la proposition 3.9, (4.9) et la définition (4.3) de  $M(\alpha)$ ,

$$(1) \quad P_v[\{\beta | \hat{e}_{n+1} | \alpha\}] = p_{n+1}^v (A_\omega^v)^{-1} \cdot P_v[M(\alpha)] \cdot \prod_{i=1}^{\omega+1} p_{\beta_i}^v P_v(C_i^*)$$

Or,  $C$  étant une partie propre de  $[0, v]$ , il est facile de voir que

$$\sum_{\beta \in [0, v] \setminus C} p_\beta^v P_v(C^*) = 1$$

et par conséquent, si l'on se souvient de la définition (3.10') des ensembles  $C_i$ , il vient, en sommant successivement sur  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\omega+1}$ ,

$$(2) \quad \sum_{\beta_i \in C_i} \prod_{i=1}^{\omega+1} p_{\beta_i}^v P_v(C_i^*) = 1$$

Alors, puisque d'après le point 2 de la proposition 3.10,

$$P_v[\{\hat{e}_{n+1} | \alpha\}] = \sum_{\beta_i \notin C_i} P_v[\{\beta | \hat{e}_{n+1} | \alpha\}]$$

il vient, en utilisant (1) et (2),

$$(3) \quad P_v[\{ \hat{e}_{n+1} | \alpha \}] = (A_\omega^v)^{-1} p_{n+1}^v P_v[M(\alpha)].$$

Enfin, puisque d'après le point 1 de la proposition 3.10,

$$P_v[\{ \hat{e}_{n+1} \}] = \sum_{\alpha \in A(n, \omega)} P_v[\{ \hat{e}_{n+1} | \alpha \}],$$

il vient, en utilisant (3) et la proposition 3.8,

$$\sum_{\alpha \in A(n, \omega)} P_v[M(\alpha)] = \frac{p_0^v p_1^v \dots p_\omega^v}{1 - s_\omega^v} \prod_{i=\omega+1}^n \frac{p_i^v}{1 - s_i^v}. \quad \square$$

**THÉORÈME 4.2.** — Soit  $n \geq 3\omega + 2$ ; il existe deux constantes positives  $C_1$  et  $C_2$ , indépendantes de  $n$ , telles que

$$C_1 \lambda_n \leq Q(M_n) \leq C_2 \lambda_n.$$

*Démonstration.* — 1° Majoration de  $Q(M_n)$ .

Soit  $S(n, \omega) = \{ x \in [0, n]^{\omega+1}; S_e(x) = x \}$  l'ensemble des squelettes de longueur  $\omega + 1$  dont les lettres appartiennent à  $[0, n]$ ; il est clair d'après la proposition 1.8 que  $S(n, \omega) \subset A(n, \omega)$ .

Si  $x \in M_n$ , on désignera par  $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\omega+1}$  le mot formé par les  $\omega + 1$  premières lettres du squelette  $S_e(x)$  de  $x$  (il est clair que  $\alpha \in S(n, \omega)$ ); alors, si on utilise la proposition 1.7 et si on observe que tout mot de  $N(\alpha)$  est un mot de retour à  $e$  (ou de façon équivalente à  $\hat{e}_n$  puisqu'on n'utilise ici que des lettres de  $[0, n]$ ) à partir de l'état  $(\alpha_{\omega+1}, \alpha_\omega, \dots, \alpha_1) = (e * \alpha)_\omega$  de la mémoire principale, il vient

$$(1) \quad M_n = \sum_{\alpha \in S(n, \omega)} e_\omega^{0*} \alpha_1 (e * \alpha_1)_\omega^{0*} \alpha_2 (e * \alpha_1 \alpha_2)_\omega^{0*} \dots \alpha_\omega (e * T\alpha)_\omega^{0*} \alpha_{\omega+1} N(\alpha)$$

où

$$\begin{aligned} e_\omega^0 &= \{ \omega, \omega - 1, \dots, 1, 0 \} \\ (e * \alpha_1)_\omega^0 &= \{ \omega - 1, \omega - 2, \dots, 0, \alpha_1 \} \\ (e * T\alpha)_\omega^0 &= \{ 0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\omega-1}, \alpha_\omega \}. \end{aligned}$$

Alors, si on utilise (1), la définition (4.3) de  $M(\alpha)$  et si on remarque que

$$\begin{aligned} Q[e_\omega^{0*}] &= (1 - p_\omega - p_{\omega-1} - \dots - p_1 - p_0)^{-1} \\ Q[(e * \alpha_1)_\omega^{0*}] &= (1 - p_{\omega-1} - p_{\omega-2} - \dots - p_0 - p_{\alpha_1})^{-1} \\ Q[(e * T\alpha)_\omega^{0*}] &= (1 - p_0 - p_{\alpha_1} - \dots - p_{\alpha_{\omega-1}} - p_{\alpha_\omega})^{-1}, \end{aligned}$$



il vient

$$(2) \quad Q(M_n) = \sum_{\alpha \in S(n, \omega)} (1 - p_\omega - p_{\omega-1} - \dots - p_1 - p_0)^{-1} \\ \cdot (1 - p_{\omega-1} - p_{\omega-2} - \dots - p_0 - p_{\alpha_1})^{-1} \\ \dots (1 - p_0 - p_{\alpha_1} - \dots - p_{\alpha_{\omega-1}} - p_{\alpha_\omega})^{-1} \cdot Q[M(\alpha)].$$

Si maintenant on pose

$$\hat{p} = \sup_i p_i$$

$$C_2^{-1} = (1 - s_\omega)(1 - s_{\omega-1} - \hat{p}) \dots (1 - s_0 - \omega \hat{p})$$

et si on se rappelle que  $S(n, \omega) \subset A(n, \omega)$ , on a

$$Q(M_n) \leq C_2 \cdot \lambda_n.$$

## 2° Minoration de $Q(M_n)$ .

Si  $\alpha \in A(n, \omega)$ ,  $\alpha$  n'est pas forcément un squelette et partant  $(e * \alpha)_\omega$  n'est pas forcément  $(\alpha_{\omega+1}, \alpha_\omega, \dots, \alpha_1)$  donc, puisque tout mot de  $N(\alpha)$  est un mot de retour à  $e$  à partir de l'état  $(\alpha_{\omega+1}, \alpha_\omega, \dots, \alpha_1)$  de la mémoire principale,  $M(\alpha)$  n'est pas forcément inclus dans  $M_n$ . C'est pour cette raison que nous allons introduire, pour  $\alpha \in A(n, \omega)$ , le mot  $x(\alpha)$  formé des  $\omega + 1$  premières lettres de  $[\omega + 1, 3\omega + 2\omega] \setminus \alpha^0$  et aussi

$$\tilde{M}(\alpha) = x(\alpha)M(\alpha).$$

Alors il est clair, d'après la proposition 1.8, que  $x(\alpha)\alpha$  est un squelette et par conséquent  $\tilde{M}(\alpha) \subset M_n$ .

De plus, comme  $x \in \tilde{M}(\alpha) \Rightarrow x_{\omega+2}x_{\omega+3} \dots x_{2\omega+4} = \alpha, \tilde{M}(\alpha) \cap \tilde{M}(\beta) = \emptyset$  pour deux mots distincts  $\alpha$  et  $\beta$  de  $A(n, \omega)$ , nous avons donc

$$(3) \quad \sum_{\alpha \in A(n, \omega)} \tilde{M}(\alpha) \subset M_n.$$

Si on pose

$$p_* = \inf \{ p_i; 0 \leq i \leq 3\omega + 2 \}$$

et

$$C_1 = p_*^{\omega+1},$$

il est clair que, pour tout  $\alpha \in A(n, \omega)$

$$p_{x(\alpha)} \geq C_1$$

et comme

$$Q[\tilde{M}(\alpha)] = p_{x(\alpha)} Q[M(\alpha)],$$

on déduit de (3) que

$$Q(M_n) \geq C_1 \sum_{\alpha \in A(n, \omega)} Q[M(\alpha)]. \quad \square$$

Enfin, si on se souvient que  $T_\omega(p; \infty)$  est transiente si et seulement si  $\sum_n Q(M_n) < \infty$  et si on remarque que  $\prod_{i=0}^{\omega-1} (1 - s_i)^{-1}$  ne dépend pas de  $n$ , on obtient, en regroupant les théorèmes 4.1 et 4.2, le

**THÉORÈME 4.3.** — Pour tout  $\omega \in \mathbb{N}$ , la librairie  $T_\omega(p; \infty)$  est transiente si et seulement si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^n \frac{p_i}{1 - s_i} < \infty.$$

### 5. COÛTS MOYENS DE RECHERCHE ET MESURES STATIONNAIRES HOMOGÈNES

Bien que nous n'ayons jusqu'ici considéré que les librairies  $T_\omega(p; \nu)$  la définition de ces dernières, donnée au § 0, peut être généralisée sans difficulté et conduire à la notion de librairie quelconque ; disons brièvement qu'une librairie sera définie par la donnée d'un ensemble  $B$  de livres disposés sur un ensemble  $T$  de même cardinalité que  $B$ , d'une disposition initiale  $e$  des livres, d'une probabilité  $p$  sur  $B$  telle que  $p_b > 0$  pour tout  $b \in B$  (on choisira alors à chaque instant un livre  $b$  avec la probabilité  $p_b$ ) et d'une police  $\tau$ , c'est-à-dire d'un procédé de réarrangement des livres après utilisation du livre choisi à l'instant donné. Cela étant, nous allons, dans ce paragraphe,

1. Mettre en place une classe assez vaste de librairies, notée  $\mathcal{L}(\nu)$ , et contenant les librairies d'Aven, Boguslavsky et Kogan, ainsi que des définitions générales que nous utiliserons par la suite.
2. Montrer deux propriétés, présentant une grande analogie, des librairies  $T_\omega(p; \nu)$ .
3. Utiliser cette analogie pour montrer qu'on peut espérer trouver un résultat de caractère général concernant les librairies de  $\mathcal{L}(\nu)$ .

$\nu$  étant un entier  $\geq 3$  fixé une fois pour toutes, nous allons commencer

par considérer l'ensemble  $\mathcal{L}(v)$  des librairies finies caractérisées par les propriétés suivantes :

1)  $B = T = [0, v]$ ; on désigne par  $\mathcal{S}_v$  le groupe des permutations de  $[0, v]$ .

2)  $e$  est l'identité de  $\mathcal{S}_v$ .

3)  $p$  est une probabilité sur  $B$  telle que  $p_b > 0$  pour tout  $b \in B$ .

4) La police  $\tau : T \rightarrow \mathcal{S}_v$  satisfait aux deux conditions suivantes.

a)  $\tau$  est caractérisée par une application  $\rho : T \rightarrow T$  telle que  $\rho(t) \leq t$  comme suit :

$$\tau_t(s) = \begin{cases} s & \text{si } s \notin [\rho(t), t] \\ s - 1 & \text{si } \rho(t) < s \leq t \\ t & \text{si } s = \rho(t). \end{cases}$$

Remarquons que si  $\rho(t) = t$ ,  $\tau_t$  est l'identité et qu'en général  $\tau_t$  est la permutation circulaire de  $\{\rho(t), \rho(t) + 1, \dots, t\}$ . Nous représenterons graphiquement  $\tau_t$  par une flèche partant de  $t$  et aboutissant à  $\rho(t)$ . Soit par exemple  $v = 6$  et  $\rho$  définie par

$$\rho(6) = 3, \rho(5) = 4, \rho(4) = 2, \rho(3) = 1, \rho(2) = 2, \rho(1) = 0, \rho(0) = 0.$$

La police  $\tau$  est représentée comme suit

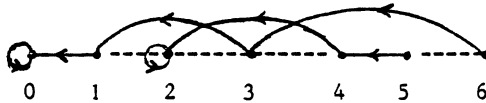


FIG. 2.

b) La police  $\tau$  est telle que le sous semi-groupe de  $\mathcal{S}_v$  engendré par  $(\tau_t)_{t \in T}$  est le groupe  $\mathcal{S}_v$  tout entier; on peut dire aussi que l'espace d'états  $E_e$  de la librairie est  $\mathcal{S}_v$ .

Un élément de  $\mathcal{L}(v)$ , i. e. une librairie vérifiant les conditions 1 - 4b précédentes, puisqu'il est caractérisé par sa police  $\tau$  et la probabilité  $p$  sur  $B$ , sera donc désigné par  $(\tau, p)$ . Pour  $(\tau, p) \in \mathcal{L}(v)$  et  $\pi \in \mathcal{S}_v$ , on définit :

1)  $u_\pi(\tau, p)$ , la mesure stationnaire homogène de  $(\tau, p)$ , i. e. telle que  $u_e(\tau, p) = 1$ .

2)  $U_\pi(\tau, p) = u_\pi(\tau, p) / \sum_{\pi \in \mathcal{S}_v} u_\pi(\tau, p)$ , la distribution stationnaire de  $(\tau, p)$ .

3)  $c(\tau, p) = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_v} \left( \sum_{t=0}^v t p_{\pi(t)} \right) U_\pi(\tau, p)$ , le *cout moyen de recherche* (d'un

livre) de  $(\tau, p)$ , quantité pratiquement importante pour tout système informatique auto-organisé. Le problème essentiel concernant  $c(\tau, p)$  est de déterminer une police optimale, i. e. une police pour laquelle le coût moyen de recherche est minimum, quel que soit  $p$ . De façon précise, soit  $\tau^0$  la police, consistant à permuter le livre choisi avec celui qui le précède, c'est-à-dire la police dont la représentation graphique est

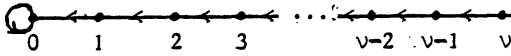


FIG. 3.

Une librairie  $(\tau^0, p) \in \mathcal{L}(v)$  est appelée *librairie de Mc Cabe*.

Rivest a émis la supposition suivante, éclairée par quelques résultats expérimentaux :

CONJECTURE 5.1 (Rivest, 1976). — Pour toute probabilité  $p$  et pour toute librairie  $(\tau, p) \in \mathcal{L}(v)$ ,

$$c(\tau^0, p) \leq c(\tau, p).$$

Après avoir mis en place les définitions générales qui nous seront utiles par la suite revenons à l'ensemble des librairies  $T_\omega(p; v)$ ,  $0 \leq \omega < v - 1$ , définies au § 0, ensemble que nous noterons  $\mathcal{L}_1(v)$ ; les propriétés de ces librairies montrent que  $\mathcal{L}_1(v) \subset \mathcal{L}(v)$ , en conséquence nous les noterons simplement  $(T_\omega, p)$ . Nous allons établir deux propriétés *du même type* pour les librairies de  $\mathcal{L}_1(v)$ , l'une portant sur les coûts moyens de recherche et l'autre sur les mesures stationnaires homogènes.

THÉORÈME 5.2. — Pour tout  $\omega \leq v - 3$  et pour toute probabilité  $p$ ,

$$c(T_\omega, p) \leq c(T_{\omega+1}, p).$$

*Démonstration.* — Associons à  $(T_\omega, p)$  sa librairie stationnaire (définitions 0.2) où, rappelons-le  $Y_0$  est l'état initial réparti suivant la distribution stationnaire (0.3) et où  $P_\omega$  désigne la probabilité qui lui est attachée.

D'après un résultat de Hendricks (1976), pour démontrer le théorème il suffit de prouver que,  $a$  et  $b$  étant deux livres de  $[0, v]$  tels que  $p_a \geq p_b$ ,

$$(1) \quad \frac{P_\omega[Y_0^{-1}(a) < Y_0^{-1}(b)]}{P_\omega[Y_0^{-1}(b) < Y_0^{-1}(a)]} \geq \frac{P_{\omega+1}[Y_0^{-1}(a) < Y_0^{-1}(b)]}{P_{\omega+1}[Y_0^{-1}(b) < Y_0^{-1}(a)]}.$$

Dans un premier temps, nous allons montrer que (1) peut prendre une forme plus simple.

Posons

$$\lambda_{\omega}(a, b) = P_{\omega}[Y_0^{-1}(a) < Y_0^{-1}(b); Y_0^{-1}(b) \leq \omega]$$

et

$$Q_{\omega}(a, b) = P_{\omega}[Y_0^{-1}(a) < Y_0^{-1}(b); Y_0^{-1}(b) > \omega].$$

On déduit aisément du lemme 1.10 que

$$P_{\omega}[Y_0^{-1}(a) < Y_0^{-1}(b)] = \lambda_{\omega}(a, b) + (1 - p_b)Q_{\omega}(a, b) + p_a Q_{\omega}(b, a)$$

d'où, si on remarque que

$$P_{\omega}[Y_0^{-1}(a) < Y_0^{-1}(b)] = \lambda_{\omega}(a, b) + Q_{\omega}(a, b),$$

il suit la relation

$$(2) \quad p_b Q_{\omega}(a, b) = p_a \cdot Q_{\omega}(b, a).$$

D'autre part, la distribution stationnaire (0.3) étant la même pour deux permutations qui ne diffèrent qu'en mémoire principale, il vient

$$(3) \quad \lambda_{\omega}(a, b) = \lambda_{\omega}(b, a).$$

En utilisant (2) et (3), un calcul rapide montre que (1) est équivalent à

$$(4) \quad \lambda_{\omega}(a, b)[Q_{\omega+1}(b, a) - Q_{\omega+1}(a, b)] \geq \lambda_{\omega+1}(a, b)[Q_{\omega}(b, a) - Q_{\omega}(a, b)].$$

Or, comme

$$P_{\omega}[Y_0^{-1}(a) < Y_0^{-1}(b)] + P_{\omega}[Y_0^{-1}(b) < Y_0^{-1}(a)] = 1,$$

on a

$$Q_{\omega}(a, b) + Q_{\omega}(b, a) = 1 - 2\lambda_{\omega}(a, b)$$

et donc, d'après (2),

$$Q_{\omega}(b, a) - Q_{\omega}(a, b) = \frac{p_b - p_a}{p_b + p_a} [1 - 2\lambda_{\omega}(a, b)],$$

les deux termes de cette égalité étant  $\leq 0$  puisque, par hypothèse,  $p_a \geq p_b$ ; il est alors facile de déduire de (4) que (1) est équivalent à

$$(5) \quad \lambda_{\omega}(a, b) \leq \lambda_{\omega+1}(a, b).$$

Nous allons, dans un deuxième temps, démontrer l'inégalité (5) et, pour ce faire, nous allons d'abord évaluer  $\lambda_{\omega}(a, b)$ . En utilisant la distribution stationnaire (0.3) et l'identité de Rackusin (1977) (3.3), on montre que, si on pose  $S_0 = 0$ ,  $S_1 = 1$  et pour  $\omega > 1$ .

$$S_{\omega} = \Sigma \{ p_{b_1} p_{b_2} \dots p_{b_{\omega-1}}; b_i \in [0, v] \setminus \{a, b\} \text{ et } b_i < b_{i+1} \}$$

et si

$$\tilde{A}_{\omega} = \frac{A_{\omega}^v}{(\omega + 1)!} = \Sigma \{ p_{b_0} p_{b_1} \dots p_{b_{\omega}}; b_i \in [0, v] \text{ et } b_i < b_{i+1} \},$$

alors on a

$$(6) \quad \lambda_\omega(a, b) = \frac{p_a p_b}{2} \frac{S_\omega}{\tilde{A}_\omega}.$$

Notons qu'il existe une relation simple entre  $\tilde{A}_\omega$  et les  $S_\omega$ ; de façon précise, si  $w = b_0 b_1 \dots b_\omega$  est un mot sur l'alphabet  $B$  et si on pose  $p_w = p_{b_0} p_{b_1} \dots p_{b_\omega}$ ,  $\tilde{A}_\omega = \sum p_w$  où la somme est prise sur l'ensemble  $W$  des mots  $w = b_0 b_1 \dots b_\omega \in B^{\omega+1}$  tels que  $b_i < b_{i+1}$ ; alors, si l'on partitionne  $W$  en les mots contenant  $a$  et  $b$ ,  $a$  et pas  $b$ ,  $b$  et pas  $a$  et ne contenant ni  $a$  ni  $b$ , il vient

$$(7) \quad \tilde{A}_\omega = p_a p_b S_\omega + (p_a + p_b) S_{\omega+1} + S_{\omega+2}.$$

D'autre part, on peut montrer que les  $S_\omega$  satisfont à

$$(8) \quad S_\omega \cdot S_{\omega-2} \leq S_{\omega+1}^2.$$

Le moyen le plus simple de la voir est de considérer, comme on l'a fait pour  $\tilde{A}_\omega$ , que  $S_\omega = \sum p_w$  où la somme est prise sur l'ensemble  $S(\omega)$  des mots  $w = b_1 b_2 \dots b_{\omega-1} \in [B \setminus \{a, b\}]^{\omega-1}$  tels que  $b_i < b_{i+1}$ . Soit alors  $w_1 \in S(\omega)$  et  $w_2 \in S(\omega + 2)$ ;  $w_1$  et  $w_2$  ont  $k$  lettres communes,  $0 \leq k \leq \omega$ , et  $p_{w_1} p_{w_2}$  s'écrit  $p_{a_1}^2 p_{a_2}^2 \dots p_{a_k}^2 p_{c_1} p_{c_2} \dots p_{c_{2\omega-2k+2}}$  où  $c_i < c_{i+1}$ . L'inégalité (8) provient du fait que le nombre  $\binom{2\omega - 2k + 2}{\omega - k}$  de couples  $x_1, x_2, x_1 \in S(\omega)$ ,  $x_2 \in S(\omega + 2)$  tels que  $p_{x_1} p_{x_2} = p_{w_1} p_{w_2}$  est inférieur au nombre  $\binom{2\omega - 2k + 2}{\omega - k + 1}$  de couples  $y_1, y_2, y_1 \in S(\omega + 1), y_2 \in S(\omega + 1)$  tel que  $p_{y_1} p_{y_2} = p_{w_1} p_{w_2}$ . Cela étant, il est facile de voir que les relations (7) et (8) impliquent

$$\tilde{A}_{\omega+1} / \tilde{A}_\omega \leq S_{\omega+1} / S_\omega,$$

c'est-à-dire, en utilisant (6), l'inégalité cherchée (5).  $\square$

Remarquons au passage que le théorème précédent éclaire, dans un certain sens, les résultats de Franaszek et Wagner (1974) sur l'efficacité relative des piles LRU et FIFO.

Nous allons maintenant établir pour les librairies de  $\mathcal{L}_1(v)$ , i. e. pour les librairies finies d'Aven, Boguslavsky et Kogan, une propriété analogue au théorème 5.2, l'analogie consistant, *grosso modo*, à remplacer les coûts moyens de recherche par les mesures stationnaires homogènes. De façon précise, nous appellerons *hypothèse H* le fait que

$$(5.1) \quad p_i \geq p_{i+1} \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq v - 1.$$

Nous avons alors la

PROPOSITION 5.3. — Sous l'hypothèse H,  $u_\pi(\mathbb{T}_\omega, p) \leq u_\pi(\mathbb{T}_{\omega+1}, p)$  pour tout  $\pi \in \mathcal{L}_v$  et toute probabilité  $p$ .

*Démonstration.* — On sait, d'après (0.2), que  $u_\pi(\mathbb{T}_\omega, p) = \prod_{t=\omega+1}^v q_t(e)/q_t(\pi)$  où  $q_t(\pi) = \sum_{s=t}^v p_{\pi(s)}$ . Alors, après simplification,  $u_\pi(\mathbb{T}_\omega, p) \leq u_\pi(\mathbb{T}_{\omega+1}, p)$  est équivalent à

$$q_{\omega+1}(e)/q_{\omega+1}(\pi) \leq 1$$

soit

$$p_{\omega+1} + p_{\omega+2} + \dots + p_v \leq p_{\pi(\omega+1)} + p_{\pi(\omega+2)} + \dots + p_{\pi(v)}$$

et ceci est évident puisque, d'après l'hypothèse H,  $\{p_{\omega+1}, p_{\omega+2}, \dots, p_v\}$  sont les  $v - \omega$  plus petits nombres  $p_i$ .  $\square$

Un certain nombre de faits, trop imprécis pour être explicitement mentionnés, nous portent à croire que l'analogie existant entre le théorème 5.2 et la proposition 5.3 n'est pas une simple coïncidence. Pour être plus clair, nous dirons simplement que l'« analogue » de la conjecture 5.1 de Rivest, nous paraît être très vraisemblable. Nous allons donc formuler la

CONJECTURE 5.4. — Sous l'hypothèse H, pour toute  $(\tau, p) \in \mathcal{L}(v)$  et tout  $\pi \in \mathcal{L}_v$ ,

$$u_\pi(\tau^0, p) \leq u_\pi(\tau, p),$$

où, rappelons-le,  $(\tau^0, p)$  est une librairie de Mc Cabe.

La démonstration de cette conjecture présente une difficulté majeure : on ne connaît pas la mesure stationnaire homogène (du moins sous une forme utilisable) de la plupart des librairies de  $\mathcal{L}(v)$ . Nous nous contenterons ici de dresser la liste des éléments de  $\mathcal{L}(v)$  dont on sait calculer (sous une forme se prêtant au calcul) la mesure stationnaire homogène et de montrer la validité de la conjecture 5.4 pour ces dernières librairies.

Nous avons déjà vu que l'ensemble  $\mathcal{L}_1(v)$  des librairies d'Aven, Boguslavsky et Kogan est un sous-ensemble de  $\mathcal{L}(v)$ ; de plus, pour  $(\mathbb{T}_\omega, p) \in \mathcal{L}_1(v)$ ,  $u_\pi(\mathbb{T}_\omega, p)$  est donné par (0.2) et satisfait à la proposition 5.3.

Un deuxième sous-ensemble intéressant de  $\mathcal{L}(v)$  est constitué par l'ensemble, noté  $\mathcal{L}_2(v)$ , des librairies mixtes  $(\mathbb{N}_\omega, p)$  où  $0 \leq \omega < v$ , introduites

et étudiées par Letac (1978). La police  $N_\omega$  est caractérisée par l'application  $\rho$  suivante :

$$\rho(t) = \begin{cases} \omega & \text{si } t > \omega \\ t - 1 & \text{si } \omega \geq t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

autrement dit  $N_\omega$  peut être représentée graphiquement comme suit

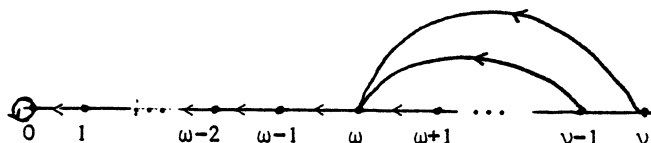


FIG. 4.

Remarquons que  $(N_{v-1}, p) = (\tau^0, p)$  est une librairie de Mc Cabe et que  $(N_0, p) = (T_0, p)$  est une librairie de Tsetlin.

Letac a donné la mesure stationnaire homogène des librairies  $(N_\omega, p)$  :

$$\left\{ \begin{aligned} u_\pi(N_\omega, p) &= \prod_{t=0}^{\omega-1} (p_{\pi(t)}/p_t)^{\omega-t} \prod_{t=\omega+1}^v q_t(e)/q_t(\pi) \\ q_t(\pi) &= \sum_{s=t}^v p_{\pi(s)}. \end{aligned} \right.$$

Les  $u_\pi(N_\omega, p)$  satisfont à la propriété suivante

**PROPOSITION 5.5** (Dies, 1980). — Sous l'hypothèse H,

$$u_\pi(N_{\omega+1}, p) \leq u_\pi(N_\omega, p)$$

pour toute probabilité  $p$  et tout  $\pi \in \mathcal{S}_v$ .

Remarquons que la conjecture d'Arnaud (1977) affirme que l'analogue de la proposition 5.5 pour les coûts moyens de recherche est vraie, c'est-à-dire que, pour tout  $p$ ,  $c(N_{\omega+1}, p) \leq c(N_\omega, p)$ .

Introduisons enfin un dernier sous-ensemble  $\mathcal{L}_3(v)$  de  $\mathcal{L}(v)$ . Dans l'article où ils ont défini les librairies  $(T_\omega, p) \in \mathcal{L}(v)$  comme une généralisation de la librairie de Tsetlin, Aven, Boguslavsky et Kogan (1976) ont également introduit des éléments  $(M_\omega, p)$  de  $\mathcal{L}(v)$ ,  $0 < \omega < v$ , généralisant la librairie de Mc Cabe et dont la police  $M_\omega$  peut être représentée comme suit.



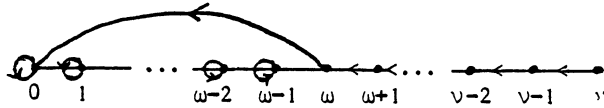


FIG. 5.

La famille  $\mathcal{L}_3(v)$  que nous allons définir constitue une généralisation des librairies  $(M_\omega, p)$ . Soit  $\{x_0, x_1, \dots, x_k\} \subset [0, v]$  avec

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_k = v$$

et considérons la police  $\tau$  associée au sous-ensemble  $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ , notée  $\tau(x_0, x_1, \dots, x_k)$  et caractérisée par l'application  $\rho$  suivante :

$$\begin{cases} \rho(x_i) = x_{i-1} & 1 \leq i \leq k \\ \rho(t) = t & \text{si } t \notin \{x_1, x_2, \dots, x_k\}. \end{cases}$$

$\mathcal{L}_3(v)$  désigne l'ensemble des librairies  $(\tau(x_0, \dots, x_k), p)$  appartenant à  $\mathcal{L}(v)$ , c'est-à-dire telles que l'espace d'états  $E_e$  soit le groupe symétrique  $\mathcal{S}_v$  tout entier (notons par exemple que tel est le cas s'il existe  $h < k$  tel que  $x_{h+1} = x_h + 1$ ). Prenons un exemple :  $v = 10$ ;  $(\tau(0, 3, 5, 6, 10), p) \in \mathcal{L}_3(10)$  et on peut représenter sa police comme suit

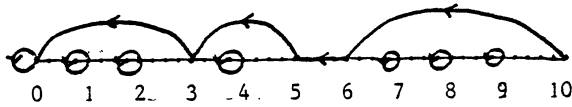


FIG. 6.

A l'instar des librairies de  $\mathcal{L}_1(v)$  et de  $\mathcal{L}_2(v)$ , on peut déterminer la mesure stationnaire homogène des librairies de  $\mathcal{L}_3(v)$ .

**PROPOSITION 5.6.** — Soit  $(\tau(x_0, x_1, \dots, x_k), p) \in \mathcal{L}_3(v)$ ; alors, si l'on pose  $T_i = \{t; x_i \leq t < x_{i+1}\}$  pour  $0 \leq i < k$  et  $T_k = \{v\}$ , on a

$$u_\pi(\tau(x_0, x_1, \dots, x_k), p) = \prod_{i=0}^k \left( \prod_{t \in T_i} p_t / p_{\pi(t)} \right)^i$$

donne la mesure stationnaire homogène.

*Démonstration.* —  $p$  et  $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  étant fixés, nous poserons  $\tau = \tau(x_0, x_1, \dots, x_k)$  et  $u(\pi) = u_\pi(\tau, p)$ . Pour montrer que  $u(\pi)$  défini

dans l'énoncé de la proposition est une mesure stationnaire il suffit de vérifier (Letac, 1978, ch. 3) que

$$1 = \sum_{t=0}^v p_{\pi \circ \tau^{-1}(t)} \frac{u(\pi \circ \tau^{-1})}{u(\pi)}.$$

Un calcul rapide montre que

$$\frac{u(\pi \circ \tau^{-1})}{u(\pi)} = \begin{cases} 1 & \text{si } t \notin \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \\ p_\pi(x_i)/p_{\pi(x_{i-1})} & \text{si } t = x_i, \quad 1 \leq i \leq k. \end{cases}$$

et le résultat est établi si on remarque que

$$\tau_i^{-1}(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \notin \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \\ x_{i-1} & \text{si } t = x_i, \quad 1 \leq i \leq k. \end{cases} \quad \square$$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la conjecture 5.4 pour les librairies de  $\mathcal{L}_1(v) \cup \mathcal{L}_2(v) \cup \mathcal{L}_3(v)$ , c'est-à-dire pour les éléments de  $\mathcal{L}(v)$  dont on sait calculer la mesure stationnaire homogène.

**PROPOSITION 5.7.** — Pour toute  $(\tau, p) \in \mathcal{L}_1(v) \cup \mathcal{L}_2(v) \cup \mathcal{L}_3(v)$ , tout  $\pi \in \mathcal{S}_v$  et toute probabilité  $p$  vérifiant l'hypothèse H,

$$u_\pi(\tau^0, p) \leq u_\pi(\tau, p).$$

*Démonstration.* — La réunion des propositions 5.5 et 5.3 montre que la proposition 5.7 est vraie pour toute  $(\tau, p) \in \mathcal{L}_1(v) \cup \mathcal{L}_2(v)$ . Il suffit donc de démontrer la proposition pour les librairies de  $\mathcal{L}_3(v)$ . Cette démonstration se fait par récurrence selon la méthode suivante :

Soit  $(\tau, p) \in \mathcal{L}_3(v)$ ; sa police  $\tau$  est associée à un sous-ensemble  $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  de  $[0, v]$ . Si  $(\tau, p)$  n'est pas une librairie de Mc Cabe, on peut parler de

$$i_0 = \sup \{ i \in [0, k-1]; x_{i+1} > x_i + 1 \}$$

Soit alors  $(\tau^*, p) \in \mathcal{L}_3(v)$  où la police  $\tau^*$  est associée au sous-ensemble  $\{x'_0, x'_1, \dots, x'_{k+1}\}$  de  $[0, v]$  obtenu à partir de  $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  en ajoutant  $x_{i_0+1} - 1$ , autrement dit  $x'_i = x_i$  si  $0 \leq i \leq i_0$ ,  $x'_{i_0+1} = x_{i_0+1} - 1$  et  $x'_j = x_{j-1}$  si  $i_0 + 1 < j \leq k + 1$ .

Alors, si on tient compte de la proposition 5.6,  $u_\pi(\tau^*, p) \leq u_\pi(\tau, p)$  équivaut, après simplification, à

$$\prod_{i=x_{i_0+1}-1}^v p_i \leq \prod_{i=x_{i_0+1}-1}^v p_{\pi(i)}.$$

Or ceci est évident puisque, sous l'hypothèse H,  $\{p_{x_{i_0+1}-1}, p_{x_{i_0+1}}, \dots, p_v\}$  sont les  $v - x_{i_0+1} + 2$  plus petits  $p_i$ .  $\square$

## BIBLIOGRAPHIE

- ARNAUD, *Sur quelques propriétés des librairies*. Thèse de Spécialité, Université Paul-Sabatier, 1977, Toulouse.
- AVEN, BOGUSLAVSKY et KOGAN, Some results on distribution-free analysis on paging algorithms, *I. E. E. Trans. on Computers*, v. C-25, n° 7, 1976, p. 737-744.
- DIES, Récurrence positive des librairies mixtes, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie* (à paraître).
- FRANASZEK et WAGNER, Some distribution-free aspects of paging algorithm performance, *J. A. C. M.*, t. 21, n° 1, p. 31-39.
- HENDRICKS, An account of self organizing systems, *S. I. A. M. J. Comput.*, t. 5, n° 4, 1976, p. 715-723.
- KEMENY, SNELL et KNAPP, *Denumerable Markov chains*, Van Nostrand, Princeton, 1966.
- LETAC, Transience and recurrence of an interesting Markov chain, *J. Appl. Prob.*, t. 11, p. 818-824.
- LETAC, *Chânes de Markov sur les permutations*, Presses de l'Université de Montréal, 1978.
- RACKUSIN, Pb. E 2652, *American Math. Monthly*, t. 84, 1977, p. 295.
- RIVEST, On self-organizing sequential search heuristics, *Comm. A. C. M.*, 1976, p. 63-67.
- TSETLIN, Finite automata and models of simple form of behavior, *Russian Math. Surveys*, t. 18, n° 4, 1963, p. 1-28.

(Manuscrit reçu le 2 octobre 1981)