ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

B. BRU
H. HEINICH

Isométries positives et propriétés ergodiques de quelques espaces de Banach

Annales de l'I. H. P., section B, tome 17, n° 4 (1981), p. 377-405
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1981__17_4_377_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XVII, n° 4, 1981, p. 377-405. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Isométries positives et propriétés ergodiques de quelques espaces de Banach

par

B. BRU et H. HEINICH

Laboratoire de Probabilités associé au C. N. R. S. LA 224,
Processus Stochastiques et Applications, Université P.-et-M.-Curie, Paris VI,
tour 56, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. — On montre que les isométries positives d'un grand nombre d'espaces de Banach ordonnés, les espaces « strictement monotones », sont caractérisées de la même façon que celles des espaces L^p.

Dans une deuxième partie, nous montrons, sur l'exemple des espaces d'Orlicz munis des normes d'Orlicz ou de Luxemburg, que lorsqu'on s'éloigne trop des espaces L^p, on ne rencontre pratiquement plus d'isométries positives non triviales.

Nous terminons en caractérisant les espaces d'Orlicz pour lesquels le théorème ergodique dominé est vrai; nous introduisons, pour résoudre ce problème, certains espaces d'Orlicz non localement convexes associés aux fonctions d'Young et nous en indiquons quelques propriétés.

SUMMARY. — We show that positive isometries of many Banach lattices, the « strictly monotonous spaces », are caracterized in the same way as those of L^p spaces.

In a second part, we show, on the example of Orlicz spaces with Orlicz or Luxemburg norms, that when we are too far away from L^p spaces, non-trivial positive isometries are very rare.

Then, we caracterize the Orlicz spaces for which the dominated ergodic theorem is true; in solving that problem, we introduce some non locally convex Orlicz spaces associated with Young functions and we give some of their properties.

I. STRUCTURE DES ISOMÉTRIES POSITIVES DES ESPACES STRICTEMENT MONOTONES

La structure des isométries des espaces L^p, $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$, a été donnée par Banach dans [*1*], chapitre 11. Lamperti, dans [*6*], a montré que les isométries des classes d'Orlicz $L^\phi = \left\{ f \mid \int \phi(|f|)d\mu < \infty \right\}$ munies de la pseudo-norme $\int \phi(|f|)d\mu$, possédaient la même structure, pour certaines fonctions convexes ϕ; dans [*4*], A. Ionescu Tulcea a remarqué qu'il en était de même des isométries positives de L^2. Nous montrons ici que le théorème de Banach s'étend aux isométries positives d'une classe très générale d'espaces de Banach ordonnés (toutes les isométries considérées ici sont supposées surjectives, ce qui ne diminue en rien la généralité).

On se donne un espace de Banach $\mathbb{E}$, réel, réticulé solide (Banach lattice), on adopte la terminologie et les notations classiques des livres [*7*] et [*12*].

Définition 1. — On dira que $\mathbb{E}$ est strictement monotone si

$$0 \leq x \leq y \qquad \text{et} \qquad \| x \| = \| y \| \Rightarrow x = y$$

Remarque. — Rappelons qu'un espace de Banach est dit strictement convexe si $\| x \| = \| y \| = \left\| \frac{x+y}{2} \right\| = 1 \Rightarrow x = y$, c'est-à-dire si sa sphère unité ne contient pas de segments de droite. Les espaces strictement monotones sont, eux, caractérisés par le fait que leur sphère ne contient pas d'intervalles d'ordre positifs; dans une version préliminaire de cet article nous avions appelé ces espaces « convexes pour l'ordre ». Notre rapporteur nous a signalé que cette terminologie était impropre et nous a suggéré l'expression « strictement monotone » que nous avons adoptée. Nous sommes heureux de l'en remercier ici.

Exemples d'espaces strictement monotones.

a) Les espaces de Banach réticulés strictement convexes sont évidemment strictement monotones. On en déduit que les espaces de Banach réticulés localement uniformément convexes [*7*] sont strictement monotones et qu'ainsi tous les espaces à norme continue pour l'ordre peuvent être renormés pour devenir strictement monotones, cf. [*7*], page 28.

Les espaces d'Orlicz, dont on sait qu'ils sont en général strictement convexes [*7*], pour les normes d'Orlicz et de Luxemburg, sont strictement monotones, voir paragraphe II.

b) L'espace L^1 est strictement monotone bien que non strictement convexe. Nous donnons ci-dessous d'autres exemples de ce type, les espaces de Lorentz :

Soit W une fonction réelle strictement positive décroissante sur $\mathbb{R}_+$, vérifiant :

$$\lim_{t\to 0} W(t) = \infty, \qquad \lim_{t\to\infty} W(t) = 0, \int_0^\infty W(t)dt = 1,$$

on on appelle espace de Lorentz $L_{W,p}(0, \infty)$, $1 \leq p < \infty$, l'ensemble des fonctions mesurables sur $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\| f \| = \int_0^\infty [f^*(t)]^p W(t)dt < \infty,$$

dans lequel f^* désigne le réarrangement décroissant de f pour la mesure de Lebesgue (cf. [*7*], c'est-à-dire la variable aléatoire décroissante de même « loi » que f).

$L_{W,p}(0, \infty)$ est un espace de Banach strictement monotone; en effet si $0 \leq f \leq g$ et $\|f\| = \|g\|$ alors $0 \leq f^* \leq g^*$ d'où il résulte que $f^* = g^*$ puis que $f = g$.

On définit de façon analogue les espaces $L_{W,p}(0, 1)$ qui sont naturellement strictement monotones.

Nous étudierons ci-dessous une classe très générale d'espaces strictement monotones qui englobent les espaces de Lorentz, $L_{W,p}$, $p > 1$.

Propriétés élémentaires des espaces strictement monotones.

a) Comme c_0 n'est manifestement pas strictement monotone, les espaces strictement monotones sont de type KB [*12*] : toute suite croissante, bornée en norme, converge dans $\mathbb{E}$. On peut remarquer que cette propriété ne caractérise pas les espaces strictement monotones; par exemple, le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la norme Sup est KB mais n'est pas strictement monotone.

b) La propriété suivante nous sera très utile :

LEMME 2. — $\mathbb{E}$ est strictement monotone si et seulement si :

$$x, y \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \| x - y \| = \| x + y \| \Rightarrow x \wedge y = 0.$$

Preuve. — Soient $\mathbb{E}$ un espace strictement monotone, x et y deux éléments positifs de $\mathbb{E}$, on a : $0 \leq | x - y | \leq x + y$ donc si $\| x - y \| = \| x + y \|$, nécessairement $|x - y| = x + y$ et comme $x \wedge y = x + y - |x - y|$ il en résulte que $x \wedge y = 0$.

Inversement, si $\mathbb{E}$ vérifie la propriété du lemme 2 et si x et y sont deux éléments de $\mathbb{E}$ vérifiant $0 \leq x \leq y$ et $\|x\| = \|y\|$, en posant $u = \frac{x+y}{2}$ et $v = \frac{y-x}{2}$ on constate que $u + v = y$ et $u - v = x$ donc que

$$\|u + v\| = \|u - v\|,$$

d'où $u \wedge v = 0$, soit $(y - x) \wedge (y + x) = 0$ et comme $y - x \leq y + x$, il en résulte que $x = y$.

Remarque. — L'implication inverse : $x, y \geq 0$ et

$$x \wedge y = 0 \Rightarrow \|x - y\| = \|x + y\|$$

est vérifiée dans tous les espaces de Banach réticulés; en effet, si $x, y \geq 0$ vérifient $x \wedge y = 0$ on a $|x - y| = x \vee y = x + y$.

c) Soit $\mathbb{E}$ un espace de Banach réticulé; on appelle isométrie d'ordre de $\mathbb{E}$ [*7*], toute isométrie (surjective) T de $\mathbb{E}$, préservant l'ordre :

$$\mathrm{T}(x \vee y) = \mathrm{T}(x) \vee \mathrm{T}(y),\ \mathrm{T}(x \wedge y) = \mathrm{T}(x) \wedge \mathrm{T}(y),$$

on a :

LEMME 3. — Soit $\mathbb{E}$ un espace strictement monotone; toute isométrie positive de $\mathbb{E}$ est une isométrie d'ordre, continue pour l'ordre.

Preuve. — Soient x, y deux éléments positifs de $\mathbb{E}$, vérifiant $x \wedge y = 0$, alors $\|x - y\| = \|x + y\|$ donc $\|\mathrm{T}x - \mathrm{T}y\| = \|\mathrm{T}x + \mathrm{T}y\|$ et par conséquent $\mathrm{T}x \wedge \mathrm{T}y = 0$, on en déduit ([*8*], page 98) que T est une isométrie d'ordre.

Puisque $\mathbb{E}$ est KB, il est à norme continue pour l'ordre, c'est-à-dire que, si x_n est une suite décroissante vérifiant $\bigwedge_n x_n = 0$, alors $\|x_n\| \searrow 0$ et par conséquent $\bigwedge_n \mathrm{T}x_n = 0$.

d) On a vu que les espaces strictement monotones sont à norme continue pour l'ordre, et l'on sait que tout espace à norme continue pour l'ordre, possédant une unité faible, peut être identifié à un espace de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé convenable : [7], théorème 1.*b*.14.

Ainsi pour alléger les énoncés, nous supposerons, sans perte de généralité, que tous les espaces de Banach considérés sont des espaces de variables aléatoires définies sur l'espace de Lebesgue $([0, 1], \mathscr{B}, \lambda)$, dans lequel λ

désigne la mesure de Lebesgue et $\mathscr{B}$ la tribu borélienne complétée, et vérifiant les propriétés du théorème 1.*b*.14 de [7] :

i) $L^\infty(0, 1) \subset \mathbb{E} \subset L^1(0, 1)$, $\mathbb{E}$ est un idéal de $L^1(0, 1)$.

ii) $\mathbb{E}$ est dense dans L^1, L^∞ est dense dans $\mathbb{E}$.

iii) $\| f \|_1 \leq \| f \| \leq \| f \|_\infty$.

iv) Le dual $\mathbb{E}'$ de $\mathbb{E}$ est isométrique pour l'ordre à l'ensemble

$$\left\{ g \in L^1(0, 1) \mid \| g \|_{\mathbb{E}'} = \sup_{\| f \| \leq 1} \int_0^1 fgd\lambda < \infty \right\}$$

muni de la norme $\| \, . \, \|_{\mathbb{E}'}$ et on a $< g, f > = \int_0^1 fgd\lambda$ pour tous $g \in \mathbb{E}'$ et $f \in \mathbb{E}$.

v) $\| f \| = \bigvee_{\| g \|_{\mathbb{E}'} \leq 1} \int fgd\lambda$.

— Ce plongement nous permet de construire toute une classe d'espaces associés à un espace de Banach $\mathbb{E}$ à norme continue pour l'ordre et à unité faible.

Soit $p \geq 1$, nous posons $\mathbb{E}^p = \{ f \mid f^p \in \mathrm{E} \}$ et $\| f \|_p = (\| f^p \|_{\mathbb{E}})^{1/p}$.

La convexité de la fonction $x \to x^p$ et le fait que $\mathbb{E}$ soit un idéal de L^1 montrent que $\mathbb{E}^p$ est un idéal de L^1. De plus, l'inégalité

$$f \leq f 1_{\{f \leq 1\}} + f^p 1_{\{f \geq 1\}}$$

implique $L^\infty \subset \mathbb{E}^p \subset \mathbb{E}$.

Propriétés des espaces $\mathbb{E}^p$.

— $\mathbb{E}^p$ est, pour la norme $\| \, . \, \|_p$, un espace de Banach réticulé à norme continue pour l'ordre et se plonge continûment dans $\mathbb{E}$. De plus, si p et q sont deux réels conjugués > 1 et si $f \in \mathbb{E}^p$ et $g \in \mathbb{E}^q$ alors

$$\| f . g \|_{\mathbb{E}} \leq \| f \|_p . \| g \|_q .$$

En effet, soit $\mathrm{B} = \{ \phi \in \mathbb{E}'_+, \| \phi \|_{\mathbb{E}'} \leq 1 \}$ on a $\mathbb{E}^p \subset L^p(\phi . d\lambda)$ et

$$\| f \|_p = \bigvee_{\phi \in \mathrm{B}} \| f \|_{L^p(\phi . d\lambda)},$$

de là on montre que $\| . \|_p$ est une norme.

Si maintenant $f \in \mathbb{E}^p$ et $g \in \mathbb{E}^q$, l'inégalité

$$\| f . g \|_{L^1(\phi . d\lambda)} \leq \| f \|_{L^p(\phi . d\lambda)} \| g \|_{L^q(\phi . d\lambda)}$$

implique

$$\bigvee_{\phi \in \mathrm{B}} \int | fg | \phi d\lambda \leq \| f \|_p . \| g \|_q \quad (*)$$

Soit $(g_n) \subset L^\infty$ telle que g_n converge p. s. et dans $\mathbb{E}^q$ vers g. L'inégalité (*) montre que (fg_n) est de Cauchy dans $\mathbb{E}$ et qu'ainsi $fg \in \mathbb{E}$. On obtient l'inégalité de Hölder recherchée. En particulier $\| f \|_{\mathbb{E}} \leq \| f \|_p . \| 1 \|_q$, c'est le plongement continu de $\mathbb{E}^p$ dans $\mathbb{E}$. On achève la démonstration de façon standard.

— Si $\mathbb{E}$ est strictement monotone, il en est de même de $\mathbb{E}^p$.

— Si $\mathbb{E} = L_{W,1}$ on vérifie que $\mathbb{E}^p = L_{W,p}$.

Nous montrons maintenant le résultat annoncé :

Structure des isométries positives des espaces strictement monotones.

On appelle automorphisme de l'espace de Lebesgue $([0, 1], \mathscr{B}, \lambda)$, toute bijection p. s. de [0, 1] sur [0, 1], bimesurable et telle que les mesures λ et $\lambda \circ \tau^{-1}$ soient équivalentes. Dans le cas d'un espace $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ général, les résultats obtenus seront valables pour des automorphismes τ de la tribu $\mathscr{A}$ tels que P et $P \circ \tau^{-1}$ soient équivalentes.

On a, en désignant par 1 la fonction constante 1 définie sur [0, 1] :

PROPOSITION 4. — Toute isométrie positive T d'un espace de Banach strictement monotone est induite par un automorphisme τ, c'est-à-dire que pour tout $f \in \mathbb{E}$:

$$T(f) = T(1).f \circ \tau^{-1}$$

Preuve. — Elle se déroule essentiellement comme dans le cas classique [*6*].

Soit $A \in \mathscr{B}$, on pose $\tau(A) = \{ x \in [0, 1] \mid T(1_A) > 0 \}$ ($1_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon). τ est une application de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}$.

Comme T est une isométrie d'ordre (lemme 3), $T(1_A) \wedge T(1_B) = 0$ dès que A et B sont disjoints, il en résulte que si $A \cap B = \emptyset$, $\tau(A) \cap \tau(B) = \emptyset$ et $\tau(A \cup B) = \tau(A) \cup \tau(B)$. Comme $\tau(\emptyset) = \emptyset$ et $\tau([0, 1]) = [0, 1]$ p. s. (T est supposée surjective : $T(1) > 0$ p. s.), on a donc $\tau(A^c) = (\tau(A))^c$ (p. s.) d'où

$$T(1_A) = T(1) . 1_{\tau(A)}.$$

De plus $T(1_A) = 0 \Leftrightarrow \lambda(A) = 0$ d'où $\lambda(A) = 0 \Leftrightarrow \lambda \circ \tau^{-1}(A) = 0$.

Enfin, comme T est continue pour l'ordre (lemme 3) il vient :

$$A_n \searrow \emptyset \text{ p. s.} \Rightarrow T(1_{A_n}) \searrow 0 \Rightarrow \tau(A_n) \searrow \emptyset \text{ p. s.}$$

τ est donc un « isomorphisme régulier » de $([0, 1], \mathscr{B}, \lambda)$ [*6*], on peut lui associer un automorphisme ponctuel de l'espace de Lebesgue, que l'on notera également τ et on aura pour toute fonction étagée $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$:

$$T(f) = T(1).\sum_{i=1}^{n} a_i 1_{\tau(A_i)} = T(1).f \circ \tau^{-1}.$$

Comme les fonctions étagées sont denses dans $\mathbb{E}$ (propriété *ii*)), on en déduit le théorème.

Remarque. — Si $T(1) = 1$, T est évidemment multiplicative sur L^∞.

Dans le cas des espaces L^p on sait que $T(1) = \left(\frac{d\lambda \circ \tau^{-1}}{d\lambda}\right)^{1/p}$, d'où il résulte en particulier que $T(1) = 1$ si et seulement si τ préserve la mesure λ. On va montrer que ce résultat demeure vrai dans la plupart des espaces de Banach classiques, strictement monotones.

Rappelons qu'un espace de Banach $\mathbb{E}$ de variables aléatoires sur $([0, 1], \mathscr{B}, \lambda)$ est dit invariant par réarrangement (r. i.) si, pour tout automorphisme τ préservant λ :

. $f \in \mathbb{E} \Rightarrow f \circ \tau^{-1} \in \mathbb{E}$

. $\| f \| = \| f \circ \tau^{-1} \|$ (cf. [7]).

C'est évidemment le cas des espaces d'Orlicz et de Lorentz.

On a alors :

PROPOSITION 5. — Si $\mathbb{E}$ est un espace r. i. strictement monotone et si T est une isométrie positive de $\mathbb{E}$ de la forme $T(f) = T(1).f \circ \tau^{-1}$ alors $T(1) = 1$ si et seulement si l'automorphisme τ préserve la mesure.

Preuve. — Supposons que $T(1) = 1$, alors pour tout

$$A \in \mathscr{B} \| 1_A \| = \| 1_{\tau(A)} \|.$$

Puisque $\mathbb{E}$ est r. i. $\| 1_A \| = \| 1_{[0,\lambda(A)]} \|$ et comme $\mathbb{E}$ est convexe pour l'ordre, $0 \leq a, b \leq 1$ et $\| 1_{[0,a]} \| = \| 1_{[0,b]} \|$ implique que $a = b$. On a donc $\lambda(A) = \lambda(\tau(A))$.

Inversement, supposons que τ préserve λ. Posons $T(1) = h \circ \tau^{-1}$ et soit $f \in \mathbb{E}$ on a :

$$\| f \| = \| Tf \| = \| h.f \circ \tau^{-1} \| = \| h.f \|,$$

en appliquant cette égalité aux fonctions $f = 1_{\{h > \alpha\}}$, $\alpha > 1$ et $f = 1_{\{h < \beta\}}$, $\beta < 1$, on conclut que $h = 1$ p. s.

— Nous aurons besoin du résultat élémentaire suivant :

LEMME 6. — Soit T une isométrie positive d'un espace de Banach $\mathbb{E}$ de v. a. sur [0, 1], induite par un automorphisme τ : $T(f) = T(1).f \circ \tau^{-1}$. Alors sa transposée est une isométrie de $\mathbb{E}'$ induite par τ^{-1} et on a :

$$ {}^t T(g) = \left(T(1) \cdot \frac{d\lambda}{d\lambda \circ \tau^{-1}}\right) \circ \tau . g \circ \tau $$

Preuve. — Soient $f \in \mathbb{E}$ et $g \in \mathbb{E}'$ on a

$$ \langle {}^t Tg, f \rangle = \int T(1).f \circ \tau^{-1}.g d\lambda = \int T(1) \circ \tau . f . g \circ \tau . \frac{d\lambda \circ \tau}{d\lambda} . d\lambda $$
$$ = \left\langle \left(T(1) . \frac{d\lambda}{d\lambda \circ \tau^{-1}}\right) \circ \tau . g \circ \tau, f \right\rangle, $$

expression qui a bien un sens puisque :

$$ \| {}^t Tg \| = \operatorname*{Sup}_{\|f\| \leq 1} \int Tf . g d\lambda = \operatorname*{Sup}_{\|f\| \leq 1} \int f . g d\lambda $$
$$ = \| g \| = \operatorname*{Sup}_{\|f\| \leq 1} \int \left[T(1) . \frac{d\lambda}{d\lambda \circ \tau^{-1}} . g\right] \circ \tau f d\lambda $$

II. ISOMÉTRIES POSITIVES DES ESPACES D'ORLICZ

Nous venons de voir que toutes les isométries positives des espaces strictement monotones s'écrivaient $T(f) = T(1).f \circ \tau^{-1}$ pour un automorphisme τ, il ne paraît pas possible d'exprimer T(1) en fonction de τ dans un cadre aussi général et cela semble difficile dans la plupart des cas particuliers, comme celui des espaces de Lorentz par exemple. Lamperti dans [*6*] a montré que si $\Phi(\sqrt{t})$ est convexe, les isométries de la classe $\mathscr{C}^{\Phi}$ pour la pseudonorme $\int \Phi(|f|) d\lambda$ s'écrivaient exactement comme celles des espaces L^p : $T(1) = \Phi^{-1}\left(\frac{d\lambda \circ \tau^{-1}}{d\lambda}\right)$. Nous montrons ci-dessous qu'il en est de même des espaces d'Orlicz strictement monotones avec la norme de Luxemburg, puis, par dualité, de la norme d'Orlicz. Nous concluons en caractérisant les espaces d'Orlicz possédant des isométries non triviales.

Nous commençons par rappeler les définitions classiques des espaces d'Orlicz, ce qui nous permettra de fixer nos notations :

On se donne une fonction d'Orlicz U sur $[0, \infty)$, c'est-à-dire une fonction convexe strictement croissante vérifiant $U(0) = 0$ et $U(\infty) = \infty$, on sait alors que $U(x) = \int_0^x u(t) dt$ pour une fonction continue à gauche u positive et croissante. On dira que U est une fonction de Young si $\lim_{t \to 0} u(t) = 0$ et $u(\infty) = \infty$. U sera dite normalisée lorsque $U(1) = 1$.

On associe à la fonction U les 3 espaces suivants : cf. [7], [5] :

$$H^U = \left\{ f \in L^1(0,1) \mid \int_0^1 U(|f(t)|/\rho)dt < \infty \quad \text{pout tout} \quad \rho > 0 \right\}$$

$$\mathscr{C}^U = \left\{ f \in L^1(0,1) \mid \int_0^1 U(|f(t)|)dt < \infty \right\}$$

$$L^U = \left\{ f \in L^1(0,1) \mid \int_0^1 U(|f(t)|/\rho) < \infty \quad \text{pour un} \quad \rho > 0 \right\}$$

On a évidemment $H^U \subset \mathscr{C}^U \subset L^U$.

Soit $f \in L^U$ on appelle norme de Luxemburg de f et on note

$$\|f\|_{(U)} = \inf \left\{ \rho > 0 \mid \int_0^1 U(|f(t)|/\rho)dt \leq 1 \right\}.$$

Pour cette norme, l'espace L^U est un espace de Banach réticulé r. i., H^U est la fermeture dans L^U des fonctions bornées. On vérifie aisément que si

$$f \in H^U : \int U\left(\frac{f}{\|f\|_{(U)}}\right)d\lambda = 1$$

et que $H^U = L^U \Leftrightarrow$ U vérifie la propriété Δ_2 : $\operatorname{Sup}_{t>0} \dfrac{U(2t)}{U(t)} < \infty$ ([7], p. 120).

On établit maintenant un résultat élémentaire sur la convexité de L^U :

— Considérons les énoncés suivants :

i) L^U est strictement convexe.

ii) L^U est strictement monotone.

iii) $H^U = L^U$.

iv) U vérifie la propriété $\operatorname{Sup}_{t>0} \dfrac{U(2t)}{U(t)} < \infty$.

On a toujours *i*) $\Rightarrow$ *ii*) $\Leftrightarrow$ *iii*) $\Leftrightarrow$ *iv*) et, si U est strictement convexe, c'est-à-dire si u est strictement croissante, les 4 énoncés sont équivalents :

Démonstration. — *ii*) $\Rightarrow$ *iii*)

L^U est strictement monotone donc faiblement séquentiellement complet, il en résulte que L^∞ est dense dans L^U et donc que $H^U = L^U$.

iii) $\Rightarrow$ *ii*)

Soit $0 \leq f \leq g$ tels que $\int U(f)d\lambda = \int U(g)d\lambda$, on en déduit $f = g$ et l'implication cherchée.

Les autres implications sont triviales et classiques.

Remarque. — Le résultat précédent précise le théorème 2.2 de N. Herrndorf [*17*] et simplifie, nous semble-t-il, sa démonstration, par ailleurs fort ingénieuse.

On peut maintenant énoncer, en convenant d'appeler modérées, les fonctions d'Orlicz vérifiant la propriété Δ_2 : $\operatorname{Sup}_{t>0} \frac{U(2t)}{U(t)} < \infty$.

PROPOSITION 7. — Soit U une fonction d'Orlicz normalisées, modérée. Toute isométrie positive T de L^U muni de la norme de Luxemburg est induite par un automorphisme τ : $T(f) = T(1).f \circ \tau^{-1}$ et on a

$$T(1) = U^{-1}\left(\frac{d\lambda \circ \tau^{-1}}{d\lambda}\right).$$

Preuve. — Puisque

$$\int_0^1 U\left(\frac{1_A}{\| 1_A \|_{(U)}}\right) d\lambda = 1, \qquad \text{on a} \qquad U\left(\frac{1}{\| 1_A \|_{(U)}}\right) = \frac{1}{\lambda(A)}.$$

Soit T une isométrie positive de L^U, d'après la proposition 4, elle s'écrit $T(f) = T(1).f \circ \tau^{-1}$, posons $T(1) = h \circ \tau^{-1}$.

Soit $\alpha > 1$ et $A \in \mathscr{B}$ tels que $\lambda(A) = \frac{1}{\alpha}$; on a :

$$1 = \int U\left(\frac{T1_A}{\| 1_A \|_{(U)}}\right) d\lambda = \int U\left(\frac{(h1_A) \circ \tau^{-1}}{\| 1_A \|_{(U)}}\right) d\lambda = \int_A U\left(\frac{h}{\| 1_A \|_{(U)}}\right) \cdot \frac{d\lambda \circ \tau}{d\lambda} d\lambda$$

d'où

$$\int_A \left[U(h . U^{-1}(\alpha)) . \frac{d\lambda \circ \tau}{d\lambda} - \alpha \right] d\lambda = 0$$

pour tout A tel que $\lambda(A) = \frac{1}{\alpha}$ il en résulte que $U(h.U^{-1}(\alpha)) = \alpha . \frac{d\lambda}{d\lambda \circ \tau}$ pour tout $\alpha > 1$ et comme $U(1) = 1$, on en conclut

$$h = U^{-1}\left(\frac{d\lambda}{d\lambda \circ \tau}\right) \qquad \text{et} \qquad T(1) = U^{-1}\left(\frac{d\lambda \circ \tau^{-1}}{d\lambda}\right).$$

Au cours de la démonstration de la proposition 7, nous avons utilisé le résultat suivant :

« Soit $0 < \alpha < 1$ fixé et soit X une variable aléatoire vérifiant $E(X1_A) = 0$ pour tout événement A de probabilité $\lambda(A) = \alpha$ alors $X = 0$ p. s. », qui constitue un joli exercice que nous laissons au lecteur le soin de résoudre.

La proposition suivante montre qu'il n'y a généralement que très peu d'isométries positives. Rappelons qu'on appelle multiplicateur d'une fonction U sur $\mathbb{R}_+$ tout réel $a \neq 1$ vérifiant $U(a.x) = U(a).U(x)$ pour tout $x \geq 0$.

PROPOSITION 8. — Soit U une fonction d'Orlicz normalisée, modérée.

Soit T une isométrie positive de l'espace d'Orlicz L^U muni de la norme de Luxemburg; alors T(1) est à valeurs dans les multiplicateurs de U :

$$U(x.T(1)) = U(x).U(T(1)) \qquad \text{pour tout} \qquad x \geq 0.$$

En particulier si U est sans multiplicateur, les seules isométries positives de L^U sont les isométries triviales : $f \to f \circ \tau^{-1}$ dans lequel τ est un automorphisme préservant la mesure.

Preuve. — On a vu dans la démonstration précédente que

$$U(x.T(1)) = U(x).U(T(1))$$

pour tout $x \geq 1$, il reste à montrer que l'égalité demeure pour $x < 1$.

Considérons la fonction $f = a1_A + 1_{A^c}$ dans lequel a est un réel > 0 et $A \in \mathscr{B}$ avec $1 > \lambda(A) > 0$. Posons $x = \dfrac{1}{\|f\|_{(U)}}$ il vient :

$$1 = \int U\left(\frac{f}{\|f\|_{(U)}}\right)d\lambda = U(ax)\lambda(A) + U(x)\lambda(A^c) \tag{1}$$

d'où il résulte que $x \leq 1$ si et seulement si $ax \geq 1$.

D'autre part, en posant $h = T(1) \circ \tau$, on obtient :

$$1 = \int U\left(\frac{Tf}{\|f\|_{(U)}}\right)d\lambda = \int [U(axh)1_A + U(xh)]1_{A^c}\frac{d\lambda \circ \tau}{d\lambda}d\lambda \tag{2}$$

En soustrayant (1) de (2) il vient :

$$\int \left\{ \left[U(axh)\frac{d\lambda \circ \tau}{d\lambda} - U(ax)\right]1_A + \left[U(xh)\frac{d\lambda \circ \tau}{d\lambda} - U(x)\right]1_{A^c} \right\} d\lambda = 0.$$

L'un des deux crochets est nécessairement nul puisque x ou ax est ≥ 1, l'autre est alors nul lui aussi puisque x ne dépend que de $\lambda(A)$ et, comme a est un paramètre arbitraire, la proposition est démontrée.

Remarque. — Il existe des fonctions d'Orlicz, différentes des puissances, qui possèdent des multiplicateurs et donc des isométries non triviales. Lamperti dans [*6*] donne l'exemple de la fonction x^p exp sin Log x de multiplicateur $e^{2\pi}$ qui est une fonction d'Orlicz (et même de Young) pour p assez grand. Cet exemple est en fait le prototype de telles fonctions, comme le montre le résultat suivant :

LEMME 9. — Soit U une fonction d'Orlicz possédant des multiplicateurs; alors :

$$U(x) = x^p L(x) \quad \text{avec} \quad p \geq 1 \quad \text{et} \quad 0 < m \leq L(x) \leq M \quad \text{pour tout} \quad x > 0.$$

Preuve. — Soit a un multiplicateur de U, on peut supposer $a > 1$, puisque si a est un multiplicateur, a^n, $n \in \mathbf{Z}$, est un multiplicateur.

Posons $p = \dfrac{\text{Log } U(a)}{\text{Log } a}$, soit $U(a) = a^p$.

La fonction $L(x) = \dfrac{U(x)}{x^p}$ vérifie $L(ax) = L(x)$ pour tout $x \geq 0$, $L(x)$ est ainsi déterminée par ses valeurs dans l'intervalle $[1, a]$ et vérifie bien les inégalités demandées pour deux constantes $0 < m \leq M$ convenables.

D'autre part

$$\frac{U(x)}{x} = \frac{1}{x}\int_0^x u(t)dt \geq \frac{1}{x}\int_{\frac{x}{2}}^x u(t)dt \geq \frac{1}{2}u\left(\frac{x}{2}\right)$$

par conséquent $U(x)$ est au moins un $0(x)$ pour $x \to \infty$, d'où $p \geq 1$. On peut remarquer, en outre, que si $p = 1$, $L(x)$ est nécessairement constante.

Remarques. — Les seuls espaces d'Orlicz L^U possédant des isométries positives non triviales sont donc les espaces L^p renormés.

Il semble raisonnable de penser qu'il en est de même des espaces de Lorentz et peut-être des espaces r. i. strictement monotones plus généraux, mais cette question demeure ouverte.

Pour terminer ce paragraphe nous examinons le cas des espaces d'Orlicz munis de la norme d'Orlicz.

— Nous supposons maintenant que U est une fonction d'Young; on sait alors lui associer sa fonction conjuguée $V(x) = \int_0^x v(t)dt$ où $v(t)$ est l'inverse continue à gauche de u. V est une fonction d'Young.

Soit $f \in L^U$; on appelle norme d'Orlicz et on note $\| f \|_U$ l'expression

$$\operatorname{Sup}\left\{ \left| \int fgd\lambda \right| \mid g \in \mathscr{C}^V \text{ telle que } \int V(|g|)d\lambda \leq 1 \right\}$$

Pour cette norme L^U est un espace de Banach réticulé r. i. Le dual de H^U muni de la norme d'Orlicz est l'espace L^V muni de la norme de Luxemburg ([5]).

On vérifie aisément que l'espace L^U muni de la norme d'Orlicz possède les mêmes propriétés de stricte convexité et de stricte monotonie que l'espace L^U muni de la norme de Luxemburg; nous n'insistons pas sur ce point que nous n'utiliserons pas.

PROPOSITION 10. — Soit U une fonction d'Young de conjuguée V normalisée (U modérée).

Toute isométrie positive de l'espace H^U muni de la norme d'Orlicz est induite par un automorphisme τ : $T(f) = T(1).f \circ \tau^{-1}$ et on a :

$$T(1) = V^{-1}\left(\frac{d\lambda}{d\lambda \circ \tau^{-1}}\right) \cdot \frac{d\lambda \circ \tau^{-1}}{d\lambda}$$

Preuve. — La transformée ${}^t\mathrm{T}$ de T est une isométrie positive de L^{V} muni de la norme de Luxemburg; elle s'écrit donc :

$$ {}^t\mathrm{T}(g) = \mathrm{V}^{-1}\left(\frac{d\lambda \circ \tau}{d\lambda}\right).g \circ \tau $$

pour un automorphisme τ; la proposition se déduit alors du lemme 6.

Remarques. — Toute isométrie positive de L^{U} munie de la norme d'Orlicz induisant une isométrie sur $\mathrm{H}^{\mathrm{U}}(\mathrm{T}(1) \in \mathrm{H}^{\mathrm{U}})$, sa transposée est de la forme $\mathrm{V}^{-1}\left(\frac{d\lambda \circ \tau}{d\lambda}\right).g \circ \tau$, non triviale seulement si L^{V} est un espace L^p renormé; on constate à nouveau que les isométries non triviales sont exceptionnelles.

— On observe que la proposition 8 caractérise les isométries positives de L^{U} muni de la norme de Luxemburg; en effet, si

$$ \mathrm{T}(f) = \mathrm{U}^{-1}\left(\frac{d\lambda \circ \tau^{-1}}{d\lambda}\right).f \circ \tau^{-1} \qquad \text{et si} \qquad \mathrm{U}^{-1}\left(\frac{d\lambda \circ \tau^{-1}}{d\lambda}\right) $$

est à valeurs dans les multiplicateurs de U, on vérifie aisément que T est alors une isométrie positive de L^{U}. Les isométries de L^{U} sont donc identiques aux isométries de Lamperti [*6*]. Il serait intéressant de donner une raison directe de cette coïncidence : les isométries de L^{U} pour la norme de Luxemburg sont identiquement celles de $\mathscr{C}^{\mathrm{U}}$ pour la pseudo-norme $\int \mathrm{U}(|f|)d\lambda$.

III. THÉORÈMES ERGODIQUES DOMINÉS DES ESPACES D'ORLICZ DE VARIABLES ALÉATOIRES

Soit $\mathbb{E}$ un espace de Banach de variables aléatoires sur $([0, 1], \mathscr{B}, \lambda)$, invariant par réarrangement.

Soit τ un automorphisme préservant la mesure, l'application $f \to f \circ \tau^{-1}$ définit une isométrie positive sur $\mathbb{E}$. Comme $\mathbb{E}$ est inclus dans $\mathrm{L}^1(0, 1)$, les moyennes arithmétiques $\dfrac{f + f \circ \tau^{-1} + \ldots + f \circ \tau^{-(n-1)}}{n}$ convergent presque sûrement, pour toute fonction f de $\mathbb{E}$. On notera comme à l'accoutumée f^* la fonction maximale associée à f :

$$ f^* = \bigvee_n \left| \frac{f + f \circ \tau^{-1} + \ldots + f \circ \tau^{-(n-1)}}{n} \right|. $$

Il est regrettable que cette notation qui désignait dans les paragraphes précédents la réarrangée décroissante de f signifie maintenant tout autre chose, mais il n'y aura pas de confusion possible, f^* conservant une signification constante à l'intérieur de tout ce paragraphe.

Nous dirons que $\mathbb{E}$ vérifie le théorème ergodique dominé, $\mathbb{E}$ est e. d., s'il existe une constante k ne dépendant que de l'espace $\mathbb{E}$, telle que

$$\| f^* \| \leq k \| f \| \qquad \text{pour tout} \qquad f \in \mathbb{E}.$$

Soit $\mathbb{E}$ un espace r. i. strictement monotone de type e. d., on vérifie que les espaces $\mathbb{E}^p$, $p > 1$, sont également de type e. d.

On sait depuis Wiener [*14*] que les espaces L^p, $1 < p$, vérifient le théorème ergodique dominé, mais qu'il n'en est pas de même de L^1. Rédigé dans le cadre parallèle de la théorie des martingales, le chapitre IX de [*10*] montre que les espaces d'Orlicz « co-modérés » sont e. d. Nous montrons ci-dessous que tous les espaces d'Orlicz vérifient des inégalités du type ergodique dominé, nous obtenons ensuite une caractérisation des espaces d'Orlicz e. d., puis diverses conséquences.

Au préalable, nous avons besoin de quelques propriétés élémentaires des espaces d'Orlicz non localement convexes dont l'étude ne semble avoir intéressé personne jusqu'à présent.

a) Espaces d'Orlicz non localement convexes.

Dans ce qui suit, nous appellerons fonction de Luxemburg toute fonction $W : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, croissante (au sens large), continue à gauche et vérifiant :

$$W(\infty) = \infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \searrow 0} W(t) = W(0) = 0.$$

Soit W une fonction de Luxemburg; nous appellerons espace d'Orlicz l'ensemble $L^W = \left\{ f \in L^0(0, 1) \mid \text{il existe } \rho > 0 \text{ tel que } \int W(|f|/\rho) d\lambda < \infty \right\}$ et si $f \in L^W$ nous appellerons pseudonorme de Luxemburg l'expression :

$$\| f \|_{(W)} = \inf \left\{ \rho \mid \int W(|f|/\rho) d\lambda \leq 1 \right\}$$

Exemples. — Tous les espaces $L^p(0, 1)$, $0 < p < \infty$, deviennent ainsi des espaces d'Orlicz, et les anciens espaces d'Orlicz le demeurent.

Si U est une fonction d'Young de densité u et de conjuguée V, les fonctions $u(x)$, $xu(x)$ et $\mathrm{Vo}u(x) = xu(x) - U(x)$ sont des fonctions de Luxemburg qui ne sont généralement pas des fonctions d'Orlicz.

Propriétés élémentaires des espaces d'Orlicz.

PROPOSITION 11. — Les espaces d'Orlicz sont des espaces de Riesz, invariants par réarrangement, complètement réticulés, de type *l*AL [*2*]. Soit W une fonction de Luxemburg; on a :

. $\int W(|f|/\|f\|_{(W)})d\lambda \leq 1$

. $\|\alpha f\|_{(W)} = |\alpha| . \|f\|_{(W)}$

. Si $f_n \nearrow f$ et $f \in L^W$ alors $\|f_n\|_{(W)} \nearrow \|f\|_{(W)}$.

Preuve. — La première partie de la proposition est triviale; on remarque en particulier que les espaces d'Orlicz sont de type dénombrable [*12*].

. Soit

$$f \in L^W, \ \|f\|_{(W)} = \inf\left\{\rho \mid \int W(|f|/\rho)d\lambda \leq 1\right\} \quad \text{soit} \quad \rho_n \searrow \|f\|_{(W)},$$

alors $W(|f|/\rho_n) \nearrow W(|f|/\|f\|_{(W)})$ puisque W est continue à gauche, il suffit maintenant d'appliquer le théorème de convergence monotone pour obtenir la première égalité.

. $\dfrac{1}{|\alpha|}\|\alpha f\|_{(W)} = \inf\left\{\dfrac{\rho}{|\alpha|} \,\middle|\, \int W\left(\dfrac{|\alpha|.|f|}{\rho}\right)d\lambda \leq 1\right\} = \|f\|_{(W)}$.

. Soit $f_n \nearrow f \in L^W$, clairement $\|f_n\|_{(W)} \leq \|f\|_{(W)}$, soit l la limite de la suite $\|f_n\|_{(W)}$ et soit $\varepsilon > 0$, on a :

$$W\left(\frac{f_n}{l+\varepsilon}\right)\uparrow W\left(\frac{f}{l+\varepsilon}\right) \qquad \text{puis} \qquad \int\left(\frac{f_n}{l+\varepsilon}\right)d\lambda \leq 1 \quad \text{pour tout } n$$

d'où résultent successivement :

$$\int W\left(\frac{f}{l+\varepsilon}\right)d\lambda \leq 1, \ \|f\|_{(W)} \leq l\varepsilon \qquad \text{et} \qquad l = \|f\|_{(W)}.$$

Les critères de comparaison des espaces d'Orlicz classiques s'étendent, à quelques détails près, aux espaces d'Orlicz considérés ici; c'est ce que nous allons voir rapidement maintenant :

Soient W_1 et W_2 deux fonctions de Luxemburg, nous dirons que W_2 domine W_1 et nous écrirons $W_1 \prec W_2$ s'il existe x_0 et k tels que :

$$W_1(x) \leq W_2(kx) \qquad \text{pour tout} \qquad x \geq x_0 \text{ cf. [5], page 15.}$$

Nous dirons que W_1 et W_2 sont équivalents et nous noterons $W_1 \asymp W_2$ si W_1 et W_2 se dominent mutuellement. On a alors :

PROPOSITION 12. — Soient W_1 et W_2 deux fonctions de Luxemburg, on a toujours

$$W_1 \prec W_2 \Rightarrow L^{W_2} \subset L^{W_1}$$

— Si l'une ou l'autre des fonctions W_1 et W_2 est convexe on a :

$$W_1 \prec W_2 \Leftrightarrow L^{W_2} \subset L^{W_1}$$

Preuve. — La première partie est triviale.

Si W_2 est convexe, il suffit de recopier la démonstration du théorème 13.1 de [5] qui n'utilise pas la convexité de W_1.

Si W_1 est convexe, on procède de manière analogue : supposons que W_1 ne soit pas dominé par W_2, il existe une suite $x_n \nearrow \infty$ telle que

$$W_1\left(\frac{x_n}{2^n}\right) > W_2(nx_n) \qquad \text{et} \qquad \sum_n 1/W_1(x_n) < 1$$

comme W_1 est convexe $W_1\left(\frac{x_n}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n} W_1(x_n)$, on a donc

$$\sum_n \frac{W_2(nx_n)}{W_1(x_n)} < \infty .$$

Choisissons maintenant une suite (A_n) de boréliens disjoints de $[0, 1]$ de mesures respectives $\lambda(A_n) = \frac{1}{W_1(x_n)}$.

On vérifie aisément que la fonction $f = \sum_n nx_n 1_{A_n}$ appartient à L^{W_2} mais n'appartient pas à L^{W_1}.

On peut également obtenir un analogue du théorème 13.3 de [5] qui nous sera utile :

PROPOSITION 13. — Soient U une fonction d'Orlicz et W une fonction de Luxemburg, $L^U \supset L^W$ si et seulement si il existe une constante k telle que pour toute fonction f de L^W on ait $\| f \|_{(U)} \leq k \| f \|_{(W)}$.

Preuve. — D'après la proposition précédente $L^U \supset L^W \Rightarrow U \prec W$, il existe donc une constante q et un réel $x_0 > 0$ tels que $U(x) \leq W(qx)$ pour $x \geq x_0$, c'est-à-dire $U(x) \leq U(x_0) + W(qx)$ pour tout $x \geq 0$.

Soient $f \in L^W$, l'inégalité précédente permet d'écrire :

$$\int U\left(\frac{|f|}{q \| f \|_{(W)}}\right) d\lambda \leq U(x_0) + \int W\left(\frac{q\,|f|}{q \| f \|_{(W)}}\right) d\lambda \leq U(x_0) + 1 \text{ (proposition 11)}$$

Posons $a = U(x_0) + 1$ et $k = aq$ il vient, comme U est convexe et $a \geq 1$:

$$\int U\left(\frac{|f|}{k \| f \|_{(W)}}\right) d\lambda \leq \frac{1}{a} \int U\left(\frac{|f|}{q \| f \|_{(W)}}\right) d\lambda \leq 1, \qquad \text{d'où} \qquad \| f \|_{(U)} \leq k \| f \|_{(W)}.$$

— Nous étudions maintenant certains espaces d'Orlicz qui nous intéressent directement.

b) **Espaces d'Orlicz associés à une fonction d'Young.**

On se donne une fonction d'Young U, de densité u et de conjuguée V. Rappelons que $\mathrm{Vou}(x) = xu(x) - \mathrm{U}(x)$ et que $xu(x)$ et Vou sont des fonctions de Luxemburg, on notera $\mathrm{L}^{\mathrm{Vou}}$ et Lu(L) leurs espaces d'Orlicz associés, $\left(\mathrm{Lu(L)} = \left\{ f \mid \int |f|\, u\left(\frac{|f|}{\rho}\right) d\lambda < \infty \text{ pour un réel } \rho > 0 \right\}\right)$, nous allons les comparer à l'espace d'Orlicz classique L^{U}.

On a tout d'abord :

PROPOSITION 14. — Soit U une fonction d'Young, de densité u et de conjuguée V, on a toujours :

. $\mathrm{Vou} \prec \mathrm{U}$ et $xu(x) \asymp \mathrm{U}$, $\mathrm{L}^{\mathrm{U}} \subset \mathrm{L}^{\mathrm{Vou}}$ et $\mathrm{Lu(L)} = \mathrm{L}^{\mathrm{U}}$.

. $\| f \|_{(\mathrm{Vou})} \leq 2 \| f \|_{(\mathrm{U})}$ et $\| f \|_{(\mathrm{U})} \leq \| f \|_{(xu(x))} \leq 2 \| f \|_{(\mathrm{U})}$ pour toute $f \in \mathrm{L}^{\mathrm{U}}$.

Preuve. — Soit f une fonction mesurable bornée positive définie sur [0, 1]. L'inégalité d'Young $xy \leq \mathrm{U}(x) + \mathrm{V}(y)$ permet d'écrire :

$$(*) \qquad \int \mathrm{Vou}\left(\frac{f}{2}\right) d\lambda \leq \int \frac{1}{2} fu\left(\frac{f}{2}\right) d\lambda \leq \frac{1}{2}\left[\int \mathrm{U}(f) d\lambda + \int \mathrm{Vou}\left(\frac{f}{2}\right) d\lambda\right].$$

Soit $\int \mathrm{Vou}\left(\frac{f}{2}\right) d\lambda \leq \int \mathrm{U}(f) d\lambda$ et par conséquent $\| f \|_{(\mathrm{Vou})} \leq 2 \| f \|_{(\mathrm{U})}$.

Soit maintenant f une fonction positive de L^{U}, on a $f \wedge n \nearrow f$, la proposition 11 montre alors que $\| f \|_{(\mathrm{Vou})} \leq 2 \| f \|_{(\mathrm{U})}$.

L'inégalité (*) peut encore s'écrire

$$\int fu\left(\frac{f}{2}\right) d\lambda \leq \int \mathrm{U}(f) d\lambda + \int \mathrm{Vou}\left(\frac{f}{2}\right) d\lambda \leq 2 \int \mathrm{U}(f) d\lambda$$

Le même procédé de troncage permet d'en déduire

$$\int \mathrm{U}(f) d\lambda \leq \int fu(f) d\lambda \leq \int \mathrm{U}(2f) d\lambda \text{ pour toute } f \in \mathrm{L}^{\mathrm{U}}_{+}$$

et par conséquent $\| f \|_{(\mathrm{U})} \leq \| f \|_{(xu(z))} \leq 2 \| f \|_{(\mathrm{U})}$.

Il suffit maintenant d'appliquer les propositions 12 et 13 pour conclure.

Remarques. — En général L^{U} est strictement plus petit que $\mathrm{L}^{\mathrm{Vou}}$; c'est le cas, par exemple, de l'espace de Zygmund L log L pour lequel

$$\mathrm{U}(x) = (x+1) \operatorname{Log}(x+1) - x, \quad u(x) = \operatorname{Log}(x+1), \quad v(x) = e^x - 1, \quad \mathrm{V}(x) = e^x - x - 1$$

et $\mathrm{Vou}(x) = x - \operatorname{Log}(x + 1)$, on voit ainsi que $\mathrm{L}^{\mathrm{Vou}} = \mathrm{L}^1$ qui, comme on le sait, diffère de $\mathrm{L}^{\mathrm{U}} = \mathrm{L} \log \mathrm{L}$.

— Il arrive également que L^{Vou} soit strictement plus grand que L^1 et ne soit plus par conséquent un espace d'Orlicz classique; prenons par exemple $u(x) = \mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,(x + e)$ c'est-à-dire

$$U(x) = \int_0^x \mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,(t + e)dt,$$

on a alors

$$\mathrm{Vou}(x) = \int_0^x \frac{sds}{(s + e)\,\mathrm{Log}\,(s + e)},$$

on constate que $U(x) = 0(x\,\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,x)$ et $\mathrm{Vou}(x) = 0\left(\frac{x}{\mathrm{Log}\,x}\right)$ quand $x \to \infty$ et donc que $L^U = L\log\log L$ et $L^{\mathrm{Vou}} = \frac{L}{\log L}$ qui est plus gros que L^1.

On observe également que si $U(x) = x^p$, $p > 1$, $\mathrm{Vou}(x) = (p - 1)x^p$ et $L^U = L^{\mathrm{Vou}}$.

Il est naturel de se demander si U ne peut être considéré comme le « Vou » d'une fonction d'Young. C'est l'objet du lemme suivant qui nous permettra de caractériser les espaces d'Orlicz e. d.

Lemme 15. — Soit U une fonction d'Young, de densité u, il existe une fonction d'Young U_1 dominant U et vérifiant les propriétés suivantes :

a) il existe $t_1 \geq 2$ tel que la densité u_1 de U_1 s'écrive

$$u_1(t) = \int_1^t \frac{u(s)}{s}ds \qquad \text{pour} \qquad t \geq t_1$$

b) si V_1 désigne la conjuguée de U_1, $L^{V_1 o u_1} = L^U$.

Preuve. — Posons :

$$\tilde{u}_1(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_1^t \frac{u(s)}{s}ds & \text{si} \quad t \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leq t < 1 \end{cases}$$

$\tilde{u}_1(t)$ est une fonction croissante et on a

$$\tilde{u}_1(t) \geq \frac{1}{t}\int_1^t u(s)ds = \frac{U(t)}{t} - \frac{U(1)}{t} \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \infty$$

on peut donc utiliser la procédure de la démonstration du théorème 3.3 de [5] pour en déduire une densité de fonction d'Young, il suffit pour cela de choisir $t_1 \geq 2$ tel que $\tilde{u}_1(t_1) > u_1(2)$; on a, alors, en posant

$$\tilde{U}_1(t) = \int_1^t \tilde{u}_1(s)ds$$

$$\tilde{U}_1(t_1) = \int_1^2 \tilde{u}_1(s)ds + \int_2^{t_1} \tilde{u}_1(s)ds \leq \tilde{u}_1(2) + u_1(t_1).(t_1 - 2) \leq \tilde{u}_1(t_1)(t_1 - 1),$$

il en résulte que $\dfrac{t_1 \tilde{u}_1(t_1)}{\tilde{U}_1(t_1)} > 1$.

On pose maintenant

$$U_1(t) = \begin{cases} \dfrac{\tilde{U}_1(t_1)}{t_1^\alpha}.t^\alpha & \text{si} \quad 0 \leq t \leq t_1 \\ \tilde{U}_1(t) & \text{si} \quad t \geq t_1 \end{cases}$$

On vérifie que U_1 est une fonction d'Young qui possède la propriété *a*) du lemme.

D'autre part, si $t \geq t_1$, $V_1 o u_1(t) = tu_1(t) - U_1(t)$ et on a

$$\int_1^t \tilde{u}_1(s)ds = \int_1^t ds \int_1^s \frac{u(x)}{x} ds = \int_1^t u(x) \frac{t-x}{x} dx = tu_1(t) - U(t) + U(1)$$

d'où $V_1 o u_1(t) = U(t) + \alpha$ pour tout t assez grand et pour une constante α.

On a donc $V_1 o u_1 \asymp U$ et $L^{V_1 o u_1} = L^U$.

Remarque. — La proposition 14 nous permet d'affirmer que $U \prec U_1$ et que $L^{U_1} \subset L^U$; ces inégalités sont généralement strictes, par exemple si L^U est l'espace de Zygmund L log L : $u(x) = \text{Log}(x + 1)$,

$$\int_1^x \frac{u(t)}{t} dt = 0((\text{Log}\, x)^2)$$

quand $x \to \infty$ et par conséquent $U_1(x) = 0(x(\text{Log}\, x)^2)$, c'est-à-dire $L^{U_1} = L(\log L)^2 \neq L^U = L \log L$. Or, précisément dans ce cas

$$L^U = L \log L \neq L^{V o u} = L^1.$$

Nous étudions ci-dessous les rapports entre les trois espaces L^U, $L^{V o u}$ et L^{U_1}. Rappelons au préalable les définitions suivantes :

Une fonction d'Young est dite modérée (ou Δ_2) si elle vérifie l'une des trois propriétés suivantes :

$$\sup_{x>0} \frac{U(2x)}{U(x)} < \infty, \qquad \sup_{x>0} \frac{u(2x)}{u(x)} < \infty, \qquad \sup_{x>0} \frac{xu(x)}{U(x)} < \infty. \qquad ([10])$$

Si la densité u de U n'est pas continue, on sait bien que la modération de la conjuguée V se traduit mal sur U; pour être complet, nous établissons les résultats élémentaires suivants :

Considérons les énoncés :

i) il existe x_0 et $q > 1$ tels que $\dfrac{xu(x)}{U(x)} \geq q$ pour $x \geq x_0$.

ii) V est modérée.

iii) il existe x_0, a, $q > 1$ tels que $\frac{u(ax)}{u(x)} \geq q$ pour $x \geq x_0$.

On a toujours *i*) $\Rightarrow$ *ii*) $\Rightarrow$ *iii*).

Si u est continue *i*) $\Leftrightarrow$ *ii*) $\Leftrightarrow$ *iii*.

Démonstration. — *i*) $\Rightarrow$ *ii*)

i) s'écrit $U(x) + \mathrm{Vou}(x) \geq qU(x)$ soit $\mathrm{Vou}(x) \geq (q-1)U(x)$ d'autre part, pour tout y, $u \circ v(y) \leq y$ (u et v sont continues à gauche) donc

$$V(y) \geq \mathrm{Vou}\, 0v(y) \geq (q-1)U \circ v(y) = (q-1)(yv(y) - V(y))$$

si $v(y) \geq x_0$ d'où $\frac{yv(y)}{V(y)} \leq \frac{q}{q-1} < \infty$ pour y assez grand.

ii) $\Rightarrow$ *iii*)

V modérée s'écrit $\frac{v(2x)}{v(x)} \leq k$ pour tout $x > 0$, c'est-à-dire $v(2x) \leq kv(x)$; or on a toujours $v(y) \leq x \Leftrightarrow y \leq u(x)$, donc l'hypothèse *ii*) est équivalente à $\frac{u(kv(x))}{x} \geq 2$ qui implique à son tour $\frac{u(ky)}{u(y)} \geq \frac{u(k\,\mathrm{vou}\,(y))}{u(y)} \geq 2$ et comme k peut être pris > 1, *iii*) en résulte.

— Supposons maintenant u continue, ce qui implique $u \circ v(y) = y$ pour tout y.

On a :

iii) $\Rightarrow$ *ii*)

En effet *iii*) est équivalent à $ax \geq v(q(u(x)))$ pour $x \geq x_0$, on a alors $\frac{v(qy)}{v(y)} = \frac{v(qu \circ v(y))}{v(y)} \leq a$ pour y assez grand ce qui montre *ii*).

ii) $\Rightarrow$ *i*)

L'hypothèse *ii*) s'écrit $1 < \frac{yv(y)}{V(y)} \leqslant k$ ou encore en écrivant

$$y = u \circ v(y) \frac{v(y)u \circ v(y)}{U(v(y))} \geq \frac{k}{k-1} > 1$$

c'est-à-dire $\frac{xu(x)}{U(x)} \geq \frac{k}{k-1}$ pour tout $x \in v(\mathbb{R}_+)$. Si $x \notin v(\mathbb{R}_+)$, x appartient à un palier de u, en appelant x_1 la borne droite de ce palier et en utilisant la continuité de u, il vient :

$$\frac{\mathrm{Vou}(x)}{U(x)} \geq \frac{\mathrm{Vou}(x_1)}{U(x_1)} \geqslant \frac{1}{k-1} > 0 \qquad \text{d'où le résultat.}$$

Remarque. — Si on avait choisi de prendre les versions continues à droite de u et v il aurait fallu inverser le sens des implications.

Dans ce qui suit nous adoptons la définition minimale suivante :

U sera dite comodérée si elle vérifie la propriété la plus faible *iii)* : il existe x_0, a et $q > 1$ tels que

$$\frac{u(ax)}{u(x)} \geq q > 1 \quad \text{pour} \qquad x \geq x_0.$$

Nous avons vu qu'en général L^U diffère de L^{Vou} et de L^{U_1}; nous allons voir maintenant que pour obtenir la stabilité de L^U, c'est-à-dire pour que $L^U = L^{\text{Vou}} = L^{U_1}$ il est nécessaire et suffisant que U soit comodérée.

Au préalable, nous introduisons les notations suivantes :

Nous posons $l(x) = \dfrac{U(x)}{x}$, l est une fonction croissante, infinie à l'infini, qui peut donc être considérée comme la densité d'une fonction d'Young. On vérifie aisément que $\mathscr{L} \asymp U$ ([5], lemme 6.2), en notant $\mathscr{L}(x) = \int_0^x l(t)dt$ cette fonction d'Young.

Nous notons de même $l_1(x) = \dfrac{U_1(x)}{x}$, $\mathscr{L}_1(x) = \int_0^x l_1(t)dt$ la fonction d'Young associée et $l_0(x) = \dfrac{\text{Vou}(x)}{x}$, l_0 n'est généralement pas croissante.

Nous avons :

PROPOSITION 16. — Les énoncés suivants sont équivalents :

i) U est comodérée.

ii) U_1 est comodérée.

iii) $u \succ u_1$.

iv) $L^U = L^{\text{Vou}}$,

v) $l_0 \succ \int_1^x \dfrac{l_0(t)}{t}\,dt$,

vi) $L^U = L^{U_1}$,

vii) $l \succ l_1$.

viii) $\mathscr{L}_1$ est comodérée.

ix) $\mathscr{L}$ est comodérée.

x) Il existe $a > 1$ et $q > 1$ tels que $\dfrac{U(ax)}{U(x)} \geq aq$ pour x assez grand.

Enfin, si u est continue, les énoncés précédents sont encore équivalents à *xi)* V est modérée.

Démonstration. — *i)* $\Rightarrow$ *ii)*

i) s'écrit $u(ax) \geq qu(x)$ (a et $q > 1$) pour tout $x \geq x_0$

$$u_1(ax) \geq \int_{x_0}^{ax} \frac{u(t)}{t}\,dt = \int_{\frac{x_0}{a}}^{x} \frac{u(as)}{s}\,ds \geq q\left(u_1(x) - u_1\left(\frac{x_0}{a}\right)\right)$$

d'où le résultat pour x assez grand.

ii) $\Rightarrow$ *iii*)

Supposons que $u_1(ax) \geq qu_1(x)$ pour $x \geq x_0$ (a et $q > 1$), il vient :

$$(q-1)u_1(x) \leq u_1(ax) - u_1(x) = \int_x^{ax} \frac{u(t)}{t} dt \leq u(ax) \operatorname{Log} a,$$

c'est-à-dire *iii*).

iii) $\Rightarrow$ *iv*)

iii) s'écrit $u(kx) \geq \int_1^x \frac{u(t)}{t} dt$ pour x assez grand et pour une constante k il en résulte :

$$u(kx) \geq \frac{1}{x}(\mathrm{U}(x) - \mathrm{U}(1)) \quad \text{d'où le résultat.}$$

iv) $\Rightarrow$ *v*)

$$\frac{l_0(t)}{t} = \frac{\mathrm{Vou}(t)}{t^2} = \frac{u(t)}{t} - \frac{l(t)}{t}$$

d'où

$$\int_1^x \frac{l_0(t)}{t} dt = u_1(t) - \int_1^x \frac{l(t)}{t} dt$$

d'autre part

$$u_1(x) = \int_1^x \frac{u(t)}{t} dt = \frac{\mathrm{U}(x)}{x} + \int_1^x \frac{\mathrm{U}(t)}{t^2} dt - \mathrm{U}(1)$$

et, par conséquent

$$\mathrm{U}_1(x) = xu_1(x) - \mathrm{V}_1\mathrm{ou}_1(x) = x\int_1^x \frac{\mathrm{U}(t)}{t^2} dt - \mathrm{U}(1)x + \mathrm{U}(x) - \mathrm{V}_1\mathrm{ou}_1(x)$$

comme $\mathrm{U}(x) - \mathrm{V}_1\mathrm{ou}_1(x) = \alpha$ (lemme 15) il en résulte que

$$l_1 \asymp \int_1^x \frac{l(t)}{t} dt \qquad \text{et} \qquad l \asymp \int_1^x \frac{l_0(t)}{t} dt,$$

ce qui montre en particulier l'implication cherchée.

v) $\Rightarrow$ *ix*)

v) s'écrit $l_0(x) \geq l(kx)$ pour x assez grand et une constante $k < 1$, on a alors :

$$l(3x) \geq \int_x^{3x} \frac{l_0(t)}{t} dt \geq \int_x^{3x} \frac{l(kt)}{t} dt \geq l(kx) \operatorname{Log} 3$$

d'où $\mathscr{L}$ est comodérée.

ix) $\Rightarrow$ *viii*) $\Rightarrow$ *vii*)

Il suffit d'utiliser les implications *i*) $\Rightarrow$ *ii*) $\Rightarrow$ *iii*) en changeant u en l.

vii) $\Leftrightarrow$ *vi*) est triviale.

vii) $\Rightarrow$ *ix*)

vii) s'écrit $l(kx) \geq \int_1^x \frac{l(t)}{(t)} dt$ pour $x \geq x_0$ et une constante $k > 1$; or on a :

$$\int_1^x \frac{l(t)}{t} \geq \int_{\frac{x}{3}}^x \frac{l(t)}{t} \geq l\left(\frac{x}{3}\right) \operatorname{Log} 3$$

d'où le résultat.

ix) $\Leftrightarrow$ *x*) est triviale.

x) $\Rightarrow$ *i*)

x) s'écrit $\frac{U(ax)}{U(x)} \geq aq$ (a et $q > 1$) il vient alors :

$$U(x)(aq - 1) \leq U(ax) - U(x) = \int_x^{ax} u(t)dt \leq u(ax).x(a - 1)$$

d'autre part en posant $\alpha = \frac{(aq - 1)}{2(aq - 1)}$ $(0 < \alpha < 1)$ on a :

$$U(x)(aq - 1) \geq (aq - 1) \int_{\alpha x}^x u(t)dt \geq xu(\alpha x)(aq - 1)(1 - \alpha)$$

et par conséquent

$$\frac{u(ax)}{u(\alpha x)} \geq \frac{(aq - 1)(1 - \alpha)}{a - 1} = 1 + \frac{aq - 1}{a - 1} > 1,$$

d'où le résultat.

Si u est continue, nous avons déjà vu que *xi*) $\Leftrightarrow$ *i*).

Remarques. — (1) Il ne faut pas confondre la comodération et la propriété Δ de [5]; en effet U à la propriété Δ s'écrit :

pour tout $a > 1$ il existe $q > 1$ tel que $\frac{u(ax)}{u(x)} \geq q$.

La propriété Δ est donc plus forte que la comodération et Annie Millet a montré dans [*18*] qu'il existait des fonctions d'Young U qui ne vérifient pas la propriété Δ et telles que $L^U = V^{Vou}$, qui sont par conséquent comodérées.

C'est J. C. Lootgieter qui a attiré notre attention sur ce phénomène curieux; nous lui en sommes très reconnaissants.

(2) La propriété (x) fournit un critère extrêmement commode de comodération; supposons, par exemple, que la fonction d'Young U soit à variations régulières c'est-à-dire que $U(x) = x^p L(x)$ avec $p \geq 1$ et L à variations lentes $\left(\frac{L(ax)}{L(x)} \xrightarrow[x \to \infty]{} 1 \text{ pour tout } a > 0\right)$, la propriété ($x$) nous montre aisément que

$$U \text{ est comodérée} \Leftrightarrow p > 1 \Leftrightarrow L^U = L^{U_1} \Leftrightarrow L^U = L^{Vou}.$$

Cet exemple s'applique, en particulier, aux fonctions

$$U(x) = \alpha^{\alpha}(\text{Log } x)^{\beta_1} \dots (\text{Log} \dots \text{Log } x)^{\beta_p}.$$

③ Nous venons de voir que l'espace L^U résiste aux petites déformations seulement lorsque U est assez puissante. C'est exactement ce même type de résistance qui caractérise la propriété ergodique dominée. Nous le montrons rapidement maintenant.

c) **Théorèmes ergodiques dominés pour les espaces d'Orlicz.**

Soit f une fonction positive de $L^1(0, 1)$ et soit τ un automorphisme de [0, 1] préservant la mesure; rappelons les 2 inégalités fondamentales suivantes [9] :

1) *Inégalité maximale :*

$$\text{pour tout } t > 0 \qquad \int_{\{f^* > t\}} fd\lambda \geq t\lambda\{f^* > t\}$$

2) *Inégalité maximale inverse :*

$$\text{si } \tau \text{ est ergodique et si } t > \int fd\lambda, \qquad \int_{\{f^* > t\}} fd\lambda \leq 4t\lambda\{f^* > t\}$$

Soit U une fonction d'Orlicz, de densité u; en intégrant les deux membres des inégalités précédentes par rapport à la mesure du, on obtient facilement la forme intégrale des inégalités maximales

$$\int [f^*u(f^*) - U(f^*)]d\lambda \leq \int u(f^*).fd\lambda \tag{1}$$

et si τ est ergodique, en posant $a = \int fd\lambda$:

$$\int u(f^*).fd\lambda \leq au(a) + 4\int [f^*u(f^*) - U(f^*)]d\lambda \tag{2}$$

(On peut remarquer que les formes intégrales des inégalités maximales contiennent les inégalités classiques comme cas particuliers; il suffit pour cela de considérer les fonctions $u(x) = 1_{]t,\infty)}(x)$, soit

$$U(x) = (x - t)1_{]t,\infty)}(x) \qquad \text{et} \qquad xu(x) - U(x) = t1_{]t,\infty)}(x)).$$

On obtient alors :

PROPOSITION 17. — Soit U une fonction d'Young, de densité u et de conjuguée V on a toujours :

a) Si $f \in L^U$ alors $f^* \in L^{Vou}$ et $\| f^* \|_{(Vou)} \leq 2 \| f \|_{(U)}$.

b) Si τ est ergodique et si $f^* \in L^{Vou}$ alors $f \in L^U$; si d'autre part $L^{Vou} \subset L^1$ alors $\| f \|_{(U)} \leq k \| f^* \|_{(Vou)}$.

Preuve :

Montrons a) : Soit f une fonction positive de $L^\infty(0, 1)$; par le même argument que dans la démonstration de la proposition 14, on obtient en utilisant l'inégalité (1) :

$$\int \mathrm{Vou}\left(\frac{f^*}{2}\right)d\lambda \leq \int \mathrm{U}(f)d\lambda$$

et par conséquent

$$\| f^* \|_{(\mathrm{Vou})} \leq 2 \| f \|_{(\mathrm{U})}$$

si maintenant $f \in L_+^{\mathrm{U}}$, on obtient le résultat cherché en considérant les tronquées $f \wedge n$.

Montrons b) : L'inégalité (2) permet d'écrire

$$\int u(f).fd\lambda \leq \int fd\lambda . u\left(\int fd\lambda\right) + 4\int \mathrm{Vou}(f^*)d\lambda$$

ou encore

$$\int \mathrm{U}(f) \leq \int fd\lambda . u\left(\int fd\lambda\right) + 4\int \mathrm{Vou}(f^*)d\lambda$$

Par le même argument que dans la démonstration de la proposition 13 on obtient

$$\| f \|_{(\mathrm{U})} \leq \left[4 + \int \frac{f}{\| f^* \|_{(\mathrm{Vou})}} d\lambda . u\left(\int \frac{f}{\| f^* \|_{(\mathrm{Vou})}} d\lambda\right)\right] . \| f^* \|_{(\mathrm{Vou})}$$

Si on suppose que $L^{\mathrm{Vou}} \subset L^1$, par la proposition 13, on en déduit que

$$\int fd\lambda \leq k \| f \|_{(\mathrm{Vou})} \leq k \| f^* \|_{(\mathrm{Vou})}$$

et le résultat suit.

Remarques. — Si $\mathrm{U}(x) = x^p$, $p > 1$, on retrouve le théorème ergodique dominé classique, puisque $\mathrm{Vou} = (p - 1)x^p$.

— Si $\mathrm{U}(x) = (x + 1) \operatorname{Log} (x + 1) - x$, $L^{\mathrm{U}} = L \log L$, $L^{\mathrm{Vou}} = L^1$, on retrouve le théorème d'Ornstein « $f^* \in L^1 \Leftrightarrow f \in L \log L$ » que l'on peut préciser en écrivant

$$k_1 \| f \|_{(\mathrm{U})} \leq \| f^* \|_1 \leq k_2 \| f \|_{(\mathrm{U})},$$

si τ est ergodique.

— La proposition 17 donne la forme générale des théorèmes ergodiques dominés dans les espaces d'Orlicz; on caractérise maintenant les espaces d'Orlicz de type e. d., c'est-à-dire ceux vérifiant $\| f^* \|_{(\mathrm{U})} \leq k \| f \|_{(\mathrm{U})}$ pour toute $f \in L^{\mathrm{U}}$:

PROPOSITION 18. — Soit U une fonction d'Young, de densité u et de conjuguée V, les énoncés suivants sont équivalents :

i) L^U est de type e. d. *i)'* si τ est ergodique $f \in L^U \Rightarrow f^* \in L^U$.

ii) $L^U = L^{U_1}$.

iii) U est comodérée.

Démonstration. — *i)* $\Rightarrow$ *i)'* est triviale.

i') $\Rightarrow$ *ii)*

Il suffit de montrer $L^U \subset L^{U_1}$. Soit $f \in L^U$ et τ une transformation ergodique, alors $f^* \in L^U$ par hypothèse; la proposition 17 *b)* montre que $f \in L^{1 \mathrm{V} o u_1} = L^U$.

ii) $\Rightarrow$ *i)*

En effet *ii)* $\Rightarrow L^{U_1}$ est e. d. et comme $L^U = L^{U_1}$, il en résulte que L^U est e. d.

Remarques. — On vérifie que

$$\begin{aligned} i) &\Leftrightarrow \text{« } f \in L^{\mathrm{V}ou} \Rightarrow f^* \in L^{\mathrm{V}ou} \text{ » (Vou est e. d.)} \\ &\Leftrightarrow \text{« } f^* \in L^U \Leftrightarrow f^* \in L^{\mathrm{V}ou}, \forall \tau \text{ ergodique »} \end{aligned}$$

qui est une condition *a priori* plus faible que « $f \in L^U \Leftrightarrow f \in L^{\mathrm{V}ou}$ ».

Le théorème 18 montre en particulier que les espaces L^U pour

$$U(x) = x\,(\mathrm{Log}\,x)^{\beta_1} \ldots (\mathrm{Log} \ldots \mathrm{Log}\,x)^{\beta_n}$$

ne vérifient pas le théorème ergodique dominé, ni par conséquent les théorèmes analogues de la théorie des fonctions [*13*] ou de la théorie des martingales [*10*]; ce résultat peut d'ailleurs se retrouver directement (communication personnelle de J. C. Lootgieter).

Nous terminons en montrant que les espaces d'Orlicz vérifient le théorème ergodique dominé abstrait [*4*] dès qu'ils sont e. d.

PROPOSITION 19. — Soit U une fonction d'Young telle que L^U soit e. d. et strictement monotone, soit T une isométrie positive de L^U, alors T vérifie le théorème ergodique dominé abstrait :

$$\left\| \bigvee_n \left| \frac{f + \mathrm{T}f + \ldots + \mathrm{T}^{n-1}f}{n} \right| \right\|_{(U)} \leq k \, \| f \|_{(U)}$$

Preuve. — Soit T une isométrie positive de L^U; on sait que $\mathrm{T}(f) = \mathrm{T}(1).f \circ \tau^{-1}$ pour un automorphisme τ.

Si $\mathrm{T}(1) \neq 1$, on sait d'après le lemme 9 qu'alors nécessairement pour tout $x \geq 0$ $mx^p \leq U(x) \leq Mx^p$ avec $0 < m \leq M$ et puisque L^U est e. d. on a $p > 1$.

On peut alors écrire

$$\frac{1}{M^{1/p}} x^{1/p} \leq U^{-1}(x) \leq \frac{1}{m^{1/p}} x^{1/p} \ (*)$$

Notons $\tilde{T}$ l'isométrie de L^p induite par τ :

$$\tilde{T}(f) = \left(\frac{d\lambda \circ \tau^{-1}}{d\lambda}\right)^{1/p} . f \circ \tau^{-1}$$

or l'inégalité (*) permet d'écrire

$$\frac{1}{M^{1/p}} \left(\frac{d\lambda \circ \tau^{-1}}{d\lambda}\right)^{1/p} \leq T(1) \leq \frac{1}{m^{1/p}} \left(\frac{d\lambda \circ \tau^{-1}}{d\lambda}\right)^{1/p}$$

Il en résulte que $| T(f) | \leq k\tilde{T}(|f|)$ pour toute $f \in L^U$ et on conclut en utilisant le théorème ergodique dominé abstrait des espaces L^p [*4*].

Remarques finales. — ① L'inclusion $L^U \subset L^{Vou}$ de la proposition 14 ne semble pas tout à fait classique, en tout cas elle ne figure pas dans [*5*]. Il en résulte, en particulier, que $H^U \subset H^{Vou}$ et que, par conséquent, si $f \in H^U_+$ l'application $\alpha \to \int Vou(\alpha f) d\lambda$ est définie partout et qu'elle est continue quand u est continue; dans ce cas, il existe un réel k_f^*, non nécessairement unique, vérifiant $\int Vou(k_f^* . f) d\lambda = 1$, on retrouve ainsi un résultat de [*5*], page 88; on observe que, si l'on définit

$$k_f^* = \operatorname{Sup} \left\{ \alpha \mid \int Vou(\alpha . f) d\lambda \leq 1 \right\}$$

on a

$$k_f^* = \frac{1}{\| f \|_{(Vou)}} \qquad \text{et si} \qquad f \in H^U_+, \qquad \| f \|_U = \int f u \left(\frac{f}{\| f \|_{(Vou)}} \right) d\lambda$$

(théorème 10.4 de [*5*]).

Avec les notations introduites ci-dessus, l'assertion *i*) du théorème 18 est encore équivalente à

iv) $\displaystyle\bigvee_{1 \leq \| f \|_{(U)}} k_f^* < \infty.$

En effet, si $U \not< Vou$, il existe une suite $x_n \nearrow \infty$ vérifiant $U(x_n) \geq Vou(nx_n)$; posons $f_n = x_n l_{A_n}$ avec A_n tel que $\| f_n \|_{(U)} = 1$ il vient

$$l = U(x_n)\lambda(A_n) = Vou(k_{f_n}^* x_n)\lambda(A_n) \geq Vou(nx_n)\lambda(A_n) \quad \text{d'où} \quad k_{f_n}^* \geq n.$$

Ce qui montre *iv*) $\Rightarrow$ *i*).

L'implication inverse *i*) $\Rightarrow$ *iv*) résulte de la proposition 13.

② La procédure employée dans les paragraphes *b*) et *c*) de cette troisième partie à propos des espaces d'Orlicz L^U définis par des fonctions convexes U, peut être appliquée sans changement notable aux espaces d'Orlicz de type concave; il suffit de changer, à bon escient, le sens des inégalités.

③ Sur la convergence faible des contractions positives.

Rappelons, au préalable, la notion suivante due à Browder [*16*]. Soit $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une application continue strictement croissante avec $u(0) = 0$, alors $D : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ est appelée application de dualité relativement à u si $\langle D(e), e \rangle = \| e \| u(\| e \|)$ et $\| D(e) \| = u(\| e \|)$, $e \in \mathbb{E}$.

Nous donnons, ci-dessous, une démonstration simple d'un résultat de A. Millet [*18*].

THÉORÈME. — Soit U une fonction d'Young de conjuguée V.

Supposons que L^V muni de la norme de Luxemburg soit uniformément convexe; soit T une contraction positive de L^U, muni de sa norme d'Orlicz, les assertions suivantes sont équivalentes :

i) T^n converge faiblement.

ii) pour toute sous-suite (n_i) $\frac{1}{N} \sum_{i<N} T^{n_i}$ converge fortement.

La preuve donnée par A. Bellow dans [*15*] pour les espaces L^p est basée sur l'inégalité suivante :

(1) $\forall \varepsilon\ \exists A(\varepsilon)$ tel que $< Df, g > \leq \varepsilon + A(\varepsilon) \leq D(g), f >$ où D est l'application de dualité canonique de L^p dans L^q et $f, g \in L^p_+$ tels que $\| f \| \vee \| g \| \leq 1$.

L'inégalité (1) et l'uniforme convexité du dual suffisent pour assurer la validité du théorème.

Remarquons que (1) est équivalente à

(2) $< D(f_n), g_n > \to 0 \Leftrightarrow \leq D(g_n), f_n > \to 0$ pour des f_n et g_n et bornées en norme.

On sait que, si U est Δ_2, l'application de dualité $D : L^U \to L^V$ relative à u est donnée par $D(f) = u(\| f \|) u(k_f^* f)$ et on a vu que pour tout $a > 0$ il existe m, M avec $0 < m \leq k_f^* \leq M$ lorsque $a < \| f \| \leq 1$. L'assertion (2) en résulte sans difficulté ainsi que le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] S. BANACH, *Théorie des opérations linéaires*, *Monogr. Mat.*, Varsovie, 1932.

[*2*] B. BRU, Espérance d'ordre, *C. R. A. S.*, Paris, t. **290**, 1980, p. 111-114.

[*3*] H. HEINICH, *Localisation et Mesures vectorielles*, à paraître, 1979.

[4] A. Tonescu tulcea, Ergodic Properties of isometries in L^p spaces, $1 < p < \infty$, *Bull. A. M. S.*, t. **70**, 1964, p. 366-371.

[5] M. A. Krasnoselskii et Ya. B. Ruticki, *Convex functions and Orlicz spaces*, Noordhoff, Groningen, 1961.

[6] J. Lamperti, On the isometries of certain function spaces, *Pacific J. Math.*, t. **8**, 1958, p. 459-466.

[7] J. Lindenstrauss et L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

[8] W. A. J. Luxemburg et A. C. Zaanen, *Riesz Spaces I*, North-Holland, Amsterdam, Londres, 1971.

[9] B. Marcus et K. Petersen, Balancing ergodic averages, *Lecture Notes in Math.*, t. **729**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979, p. 126-143.

[10] J. Neveu, *Martingales à temps discret*, Masson, Paris, 1972.

[11] D. Ornstein, A remark on the Birkhoff ergodic theorem, *Ill. J. Math.*, t. **15**, 1971, p. 77-79.

[12] H. H. Schaeffer, *Banach lattices and positive operators*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.

[13] E. M. Stein, Note on the class L log L, *Studia Math.*, t. **32**, 1969, p. 305-310.

[14] N. Wiener, The ergodic theorem, *Duke Math. J.*, t. **5**, 1939, p. 1-18.

[15] A. Bellow, An L^p inequality with application to ergodic theory, Houston, *J. Math.*, t. **1**, 1975, p. 153-159.

[16] F. E. Browder, On a theorem of Beurling and Livingston, *Can. J. Math.*, t. **17**, 1965, p. 367-372.

[17] N. Herrndorf, Counterexamples to Results of M. M. Rao, *Z. f. W.* Band 53, Heft, t. **3**, 1980, p. 283-290.

[18] A. Millet, *Thèse d'État*, Paris, 1979.

(Manuscrit reçu le 11 juin 1981)