ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

LIONEL THIBAULT

Espérances conditionnelles d'intégrandes semi-continus

Annales de l'I. H. P., section B, tome 17, nº 4 (1981), p. 337-350
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1981__17_4_337_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XVII, n° 4, 1981, p. 337-350.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Espérances conditionnelles d'intégrandes semi-continus

par

Lionel THIBAULT
Faculté des Sciences de Pau,
Département des mathématiques, 64000 Pau

RÉSUMÉ. — Dans cet article, en introduisant une notion de quasi-intégrabilité pour des intégrandes numériques définis sur $\Omega \times \mathrm{E}$, avec $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et E un espace de Banach séparable, nous établissons l'existence et l'unicité d'espérances conditionnelles pour de tels intégrandes. Les résultats obtenus englobent les cas d'intégrandes de Carathéodory par rapport à la topologie forte de E et d'intégrandes convexes normaux.

ABSTRACT. — In this paper we introduce a notion of quasi-integrability for extended-real-valued integrands defined on $\Omega \times \mathrm{E}$, with $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ a probability space and E a separable Banach space, and we establish the existence and the uniqueness of conditional expectations for such integrands. The results are strong enough to cover the cases of Carathéodory integrands with respect to the norm topology of E and of normal convex integrands.

INTRODUCTION

A la suite des travaux de Castaing [*2*], Neveu [*9*], Valadier [*14*] et Van Cutsem [*17*] relatifs au théorème de Radon-Nikodym multivoque et à l'espérance conditionnelle d'une multi-application, Bismut [*1*], Daurès [*7*] et Dynkin et Evstigneev [*8*] ont étudié les espérances conditionnelles de certaines fonctionnelles intégrandes. Dans [*1*] Bismut définit l'espérance conditionnelle d'un intégrande *convexe*, c'est-à-dire une application de $\Omega \times E((\Omega, \mathscr{A}, P)$ étant un espace probabilisé et E un espace de Banach) dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ qui est $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}(E)$-mesurable et qui est convexe par rapport a la seconde variable, notion mise à la mode par Rockafellar [*10*] et qui a trouvé toute une série d'applications dans plusieurs domaines des mathématiques. Daurès dans [*7*] étudie l'espérance conditionnelle d'un intégrande de *Carathéodory réel*, c'est-à-dire une application de $\Omega \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui est mesurable par rapport à la première variable et continue par rapport à la seconde pour certaines topologies sur E (voir [*7*]). Dans le but d'étudier les espérances conditionnelles de multi-applications, Dynkin et Evstigneev [*8*] établissent l'existence d'espérances conditionnelles pour des intégrandes à valeurs dans $\mathbb{R}$ et *majorés en valeur absolue par des fonctions intégrables* indépendantes de la seconde variable. Dans ce travail nous nous intéresserons aux intégrandes à *valeurs dans* $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ qui sont semi-continus par rapport à la seconde variable et non nécessairement convexes. Pour ce, nous introduisons une notion de quasi-intégrabilité pour de tels intégrandes et, utilisant une idée de Dynkin et Evstigneev [*8*] qui consiste à exprimer tout intégrande *borné* et semi-continu supérieurement comme limite d'une suite décroissante d'intégrandes lipschitziens, nous montrons l'existence d'espérances conditionnelles. Nous démontrons également que nos résultats englobent les cas d'intégrandes de Carathéodory par rapport à la topologie forte de E et d'intégrandes convexes normaux. Disons pour terminer cette introduction que l'espérance conditionnelle d'intégrandes de Carathéodory vectoriels et d'intégrandes normaux définis sur $\Omega \times E'_c$ et *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, E'_c désignant le dual d'un espace de Banach muni de la topologie de la convergence compacte, a été étudiée récemment par Castaing-Clauzure [*5*].

Dans ce qui suit, E sera un *espace de Banach séparable*, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé *complet* et f une application de $\Omega \times E$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Nous noterons $\mathscr{B}(E)$ la tribu borélienne de E et nous désignerons par Σ une *sous-tribu* P-*complète* de $\mathscr{A}$ et par B la *boule ouverte de centre* 0 *et de rayon* 1 dans E.

1. DÉFINITION. — Nous dirons que f est un $\mathscr{A}$-*intégrande semi-continu inférieurement* si f est $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}(E)$-mesurable et s'il existe un négligeable N de $\mathscr{A}$ tel que la fonction $f(\omega, .)$ soit semi-continue inférieurement pour tout $\omega \notin N$.

En vue de définir la notion de quasi-intégrabilité d'un intégrande semi-continu inférieurement nous rappelons qu'une fonction numérique h de Ω dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est $\mathscr{A}$-quasi-intégrable si h est $\mathscr{A}$-mesurable et si sa partie négative h^- définie par $h^-(\omega) = \sup(-f(\omega), 0)$ est $\mathscr{A}$-intégrable. Pour $A \in \mathscr{A}$, la quasi-intégrale

$$\int_A h(\omega)P(d\omega) = \int_A h^+(\omega)P(d\omega) - \int_A h^-(\omega)P(d\omega)$$

est bien définie. De plus, il est évident et bien connu qu'une telle fonction h admet une Σ-espérance conditionnelle Σ-quasi-intégrable.

2. DÉFINITION. — Nous dirons qu'une application h de $\Omega \times E$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est *$\mathscr{A}$-quasi-intégrable* si elle est $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}(E)$-mesurable et s'il existe une suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ de fonctions réelles $\mathscr{A}$-intégrables telles que pour tout entier $n \geq 1$

$$\alpha_n(\omega) \leq \inf\{h(\omega, x) \mid x \in nB\} \tag{1}$$

pour $\mathscr{A}$-presque tout $\omega \in \Omega$.

Remarque. — On vérifie sans peine que, si h est $\mathscr{A}$-quasi-intégrable, pour toute application $\mathscr{A}$-mesurable X définie sur Ω et à valeurs dans une partie bornée de E la fonction numérique $\omega \mapsto h(\omega, X(\omega))$ est $\mathscr{A}$-quasi-intégrable.

3. PROPOSITION. — *Supposons que* E *est un espace de Banach séparable dual d'un autre espace de Banach et que f est un $\mathscr{A}$-intégrande de Carathéodory à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire f est $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}(E)$-mesurable et il existe un négligeable* N *de $\mathscr{A}$ tel que la fonction $f(\omega, .)$ est continue sur* E *pour tout $\omega \notin$* N. *Si f est $\mathscr{A}$-intégrable au sens de Daurès* [7], *c'est-à-dire si la fonction*

$$\omega \mapsto \sup\{|f(\omega, x)| \mid x \in H\}$$

est $\mathscr{A}$-intégrable pour toute partie équicontinue H *de* E, *alors f et $-f$ sont des $\mathscr{A}$-intégrandes semi-continus inférieurement quasi-intégrables.*

Preuve. — Il suffit de prendre pour α_n la fonction définie par

$$\alpha_n(\omega) = -\sup\{|f(\omega, x)| \mid x \in nB\}. \quad \square$$

Considérons le cas convexe.

4. PROPOSITION. — *Supposons que f est un $\mathscr{A}$-intégrande convexe normal, c'est-à-dire f est $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}(E)$-mesurable et il existe un $\mathscr{A}$-négligeable* N *tel que pour tout $\omega \notin$* N *la fonction $f(\omega, .)$ soit convexe semi-continue inférieurement à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et non identique à $+\infty$. S'il existe une application* Y *de Ω dans* E' *scalairement $\mathscr{A}$-mesurable et telle que les fonctions $\omega \mapsto \|Y(\omega)\|$ et $\omega \mapsto f^*(\omega, Y(\omega))$ soient $\mathscr{A}$-intégrables, où*

$$f^*(\omega, Y(\omega)) = \sup_{z \in E}(\langle Y(\omega), z \rangle - f(\omega, z)),$$

alors f est un $\mathscr{A}$-intégrande semi-continu inférieurement $\mathscr{A}$-quasi-intégrable.

Preuve. — Pour tout entier naturel n et tout élément $x \in n\mathrm{B}$ nous avons

$$\begin{aligned} f(\omega, x) &\geq \langle \mathrm{Y}(\omega), x \rangle - f^*(\omega, \mathrm{Y}(\omega)) \\ &\geq -n \| \mathrm{Y}(\omega) \| - f^*(\omega, \mathrm{Y}(\omega)). \end{aligned}$$

Ainsi il suffit de prendre pour α_n la fonction définie par

$$\alpha_n(\omega) = -n \| \mathrm{Y}(\omega) \| - f^*(\omega, \mathrm{Y}(\omega)). \quad \square$$

Remarque. — S'il existe Y dans $\mathscr{L}^1_{\mathrm{E}'_s}(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ ou $\mathscr{L}^\infty_{\mathrm{E}'_s}(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ tel que $\omega \mapsto f^*(\omega, \mathrm{Y}(\omega))$ soit $\mathscr{A}$-intégrable, alors les conditions de la proposition sont vérifiées. $\square$

En vue d'obtenir l'unicité de l'espérance conditionnelle d'un intégrande semi-continu inférieurement et d'avoir des propriétés de composition, nous définissons comme suit l'espérance conditionnelle d'un tel intégrande.

5. DÉFINITION. — Soit f un $\mathscr{A}$-intégrande semi-continu inférieurement $\mathscr{A}$-quasi-intégrable. Nous dirons qu'une application g de $\Omega \times \mathrm{E}$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une Σ-*espérance conditionnelle* de f si g est un Σ-intégrande semi-continu inférieurement Σ-quasi-intégrable tel que

$$\int_{\mathrm{S}} f(\omega, \mathrm{X}(\omega))\mathrm{P}(d\omega) = \int_{\mathrm{S}} g(\omega, \mathrm{X}(\omega))\mathrm{P}(d\omega) \tag{2}$$

pour tout $\mathrm{S} \in \Sigma$ et toute application X *bornée* et Σ-mesurable de Ω dans E.

Établissons l'unicité de l'espérance conditionnelle d'un intégrande semi-continu inférieurement.

6. LEMME. — *Soient g_1 et g_2 deux applications $\Sigma \otimes \mathscr{B}(\mathrm{E})$-mesurables de $\Omega \times \mathrm{E}$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telles que pour toute application Σ-mesurable X définie sur Ω et à valeurs dans une partie bornée incluse dans un ouvert W de E les fonctions $\omega \mapsto g_i(\omega, \mathrm{X}(\omega))$, $i = 1, 2$, soient Σ-quasi-intégrables et vérifient pour tout $\mathrm{S} \in \Sigma$*

$$\int_{\mathrm{S}} g_1(\omega, \mathrm{X}(\omega))\mathrm{P}(d\omega) \leq \int_{\mathrm{S}} g_2(\omega, \mathrm{X}(\omega))\mathrm{P}(d\omega).$$

Alors il existe un négligeable $\mathrm{N} \in \Sigma$ tel que

$$g_1(\omega, x) \leq g_2(\omega, x)$$

pour tout $\omega \notin \mathrm{N}$ et tout $x \in \mathrm{W}$.

Preuve. — Il suffit de montrer que l'ensemble

$$\mathrm{T} = \{ \omega \in \Omega \mid \exists x \in \mathrm{W} \quad \text{vérifiant} \quad g_1(\omega, x) > g_2(\omega, x) \}$$

est un négligeable de Σ. Nous pouvons écrire

$$T = \{ \omega \in \Omega \mid \exists x \in W \quad \text{vérifiant} \quad g_2(\omega, x) < \infty$$

et

$$g_2(\omega, x) < g_1(\omega, x) \}.$$

Il est clair que T est la projection sur Ω d'un ensemble de la tribu $\Sigma \otimes \mathscr{B}(E)$. Comme Σ est P-complète et E polonais, il s'ensuit du théorème III.23 de Castaing-Valadier [*4*] que l'ensemble T est dans Σ.

Supposons $P(T) > 0$. Comme l'ensemble

$$G = \{ (\omega, x) \in \Omega \times E \mid x \in W, g_2(\omega, x) < \infty$$

et

$$g_2(\omega, x) < g_1(\omega, x) \}$$

est dans $\Sigma \otimes \mathscr{B}(E)$ le théorème de graphe mesurable (voir Castaing-Valadier [*4*]) nous donne l'existence d'une application Σ-mesurable X de T dans E telle que $(\omega, X(\omega)) \in G$ pour tout $\omega \in T$. Écrivons $T = \bigcup_{n \geq 1} T_n$ avec

$$T_n = \{ \omega \in T \mid X(\omega) \in W, \| X(\omega) \| \leq n, | g_2(\omega, X(\omega)) | < n$$

et

$$g_2(\omega, X(\omega)) < g_1(\omega, X(\omega)) \}.$$

Il existe alors un ensemble T_k de mesure strictement positive. Fixons un élément $b \in W$ avec $\| b \| \leq k$ et définissons une application Σ-mesurable X_1 de Ω dans W en posant

$$X_1(\omega) = X(\omega) \quad \text{si} \quad \omega \in T_k \quad \text{et} \quad X_1(\omega) = b \text{ sinon.}$$

En posant $S = T_k$ nous obtenons

$$\int_S g_2(\omega, X_1(\omega)) P(d\omega) < \int_S g_1(\omega, X_1(\omega)) P(d\omega).$$

Comme la fonction $\omega \mapsto g_2(\omega, X_1(\omega))$ est Σ-intégrable sur S et que $P(S) > 0$, l'inégalité précédente est en contradiction avec la relation du lemme et donc $P(T) = 0$. □

Nous pouvons ainsi donner le résultat suivant qui est une conséquence directe du lemme 6.

7. PROPOSITION. — *Soit f un $\mathscr{A}$-intégrande semi-continu inférieurement $\mathscr{A}$-quasi-intégrable. Si g_1 et g_2 sont deux Σ-espérances conditionnelles de f, alors il existe un négligeable* N *de* Σ *tel que*

$$g_1(\omega, x) = g_2(\omega, x)$$

pour tout $\omega \notin N$ *et tout* $x \in E$.

8. DÉFINITION. — Soit W un *ouvert* de E. Nous dirons qu'une application h de $\Omega \times E$ dans $\mathbb{R}$ est un *$\mathscr{A}$-intégrande lipschitzien* sur l'ouvert W si :

a) pour tout $x \in W$ la fonction $h(.,x)$ est $\mathscr{A}$-intégrable;

b) il existe une fonction $\mathscr{A}$-intégrable réelle et positive α définie sur Ω telle que pour tous $x, y \in W$

$$| h(\omega, x) - h(\omega, y) | \leq \alpha(\omega) \| x - y \|.$$

Donnons une version simplifiée des propositions 2.6 et 2.10 de Thibault [*12*] (voir aussi prop. 5 de Castaing-Clauzure [*5*]; le cas d'intégrandes *majorés en valeur absolue* par une fonction intégrable indépendante de la seconde variable a été aussi considéré par Dynkin-Evstigneev [*8*], théor. 2-1, p. 330).

9. PROPOSITION. — *Soit h un $\mathscr{A}$-intégrande lipschitzien sur un ouvert* W *de* E. *Il existe un Σ-intégrande lipschitzien g sur l'ouvert* W *tel que pour toute application Σ-mesurable* X *de Ω dans une partie bornée incluse dans* W *la fonction $\omega \mapsto g(\omega, X(\omega))$ est une Σ-espérance conditionnelle de la fonction $\omega \mapsto f(\omega, X(\omega))$. De plus, deux intégrandes vérifiant les propriétés ci-dessus sont égaux sauf sur un ensemble de la forme* $N \times W$ *avec* N *Σ-négligeable et pour tous $x, y \in W$ et $\omega \in \Omega$*

$$| g(\omega, x) - g(\omega, y) | \leq \beta(\omega) \| x - y \|$$

où β est une Σ-espérance conditionnelle de α.

Preuve. — Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dense dans W et soit g_{x_n} une Σ-espérance conditionnelle de $f(.,x_n)$. Si β est une Σ-espérance conditionnelle de α alors il existe un Σ-négligeable $N_{m,n}$ tel que

$$| g_{x_n}(\omega) - g_{x_m}(\omega) | \leq \beta(\omega) \| x_n - x_m \|$$

pour tout $\omega \notin N_{m,n}$. En posant $N = \bigcup_{m,n} N_{m,n}$ on obtient que pour tout $\omega \notin N$ l'application $x_n \mapsto g_n(\omega)$ de $Z = \{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ est uniformément continue et donc se prolonge de façon unique en une application continue $x \mapsto g_x(\omega)$ de W dans $\mathbb{R}$. Définissons $g : \Omega \times E \to \mathbb{R}$ en posant

$$g(\omega, x) = g_x(\omega) \quad \text{si} \quad \omega \notin N \quad \text{et} \quad x \in W, \quad \text{et} \quad g(\omega, x) = 0 \text{ sinon.}$$

On constate que

$$| g(\omega, x) - g(\omega, y) | \leq \beta(\omega) \| x - y \| \quad \text{pour tous} \quad x, y \in W \quad \text{et} \quad \omega \in \Omega,$$

que g est un Σ-intégrande lipschitzien sur W et que, d'après le théorème de la convergence dominée, pour tout $x \in W$ la fonction $g(.,x)$ est une Σ-espérance conditionnelle de $f(.,x)$. Ainsi si $X = \sum_{i \in I} a_i \chi_{A_i}$, avec $(A_i)_{i \in I}$

Σ-partition finie de Ω et $a_i \in W$, est une application Σ-étagée de Ω dans W nous avons pour tout $S \in \Sigma$

$$\begin{aligned}\int_S f(\omega, X(\omega))P(d\omega) &= \sum_{i \in I} \int_{S \cap A_i} f(\omega, a_i)P(d\omega) \\ &= \sum_{i \in I} \int_{S \cap A_i} g(\omega, a_i)P(d\omega) \\ &= \int_S g(\omega, X(\omega))P(\omega).\end{aligned}$$

Soit maintenant X une application Σ-mesurable et bornée de Ω à valeurs dans W. Elle est limite uniforme d'une suite d'applications Σ-étagées à valeurs dans X et donc d'après les égalités qui précèdent et le théorème de la convergence dominée nous avons pour tout $S \in \Sigma$

$$\int_S f(\omega, X(\omega))P(d\omega) = \int_S g(\omega, X(\omega))P(d\omega)$$

et le théorème est prouvé. □

Remarque. — Nous dirons que g est une *Σ-espérance conditionnelle* de f sur W. □

Nous allons maintenant démontrer que tout $\mathscr{A}$-intégrande semi-continue inférieurement défini sur $\Omega \times E$ et $\mathscr{A}$-quasi-intégrable admet une Σ-espérance conditionnelle.

Nous commencerons par étudier le cas où la fonction f est majorée sur $\Omega \times E$ en faisant apparaître comme dans Dynkin et Evstigneev [*8*] (lemme 2.1 et théorème 2.2, pages 330 et 331) une suite monotone d'intégrandes lipschitziens. La nouveauté réside dans le fait que l'intégrande n'est pas *en valeur absolue* majorée par une fonction intégrable indépendante de x.

10. Lemme. — *Soit f un $\mathscr{A}$-intégrande semi-continu inférieurement $\mathscr{A}$-quasi-intégrable et majoré sur $\Omega \times E$ par un réel γ et soit $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions réelles $\mathscr{A}$-intégrables vérifiant la relation* (1) *pour l'intégrande f. Alors pour tout entier $n \geq 1$ il existe une suite $(f_{n,m})_{m \geq 1}$ de $\mathscr{A}$-intégrandes réels lipschitziens sur la boule ouverte nB et un $\mathscr{A}$-négligeable N_n tel que pour tous $\omega \notin N_n$ et $x \in n$B la suite $(f_{n,m}(\omega, x))_{m \geq 1}$ est croissante avec*

$$f(\omega, x) = \sup_{m \geq 1} f_{n,m}(\omega, x)$$

et

$$\alpha_n(\omega) \leq f_{n,m}(\omega, x) \leq \gamma.$$

Preuve. — Pour tout couple d'entiers $n, m \geq 1$ définissons une application $f_{n,m}$ de $\Omega \times \mathrm{E}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f_{n,m}(\omega, x) = \inf_{z \in n\mathrm{B}} (f(\omega, z) + md(x, z)) \quad \text{si} \quad \omega \in \Omega \backslash \mathrm{N}_n \quad \text{et} \quad \| x \| < n \qquad (3)$$

et

$$f_{n,m}(\omega, x) = 0 \text{ sinon}$$

où N_n est un $\mathscr{A}$-négligeable en dehors duquel $f(\omega, .)$ est minorée par $\alpha_n(\omega)$ sur $n\mathrm{B}$. Comme la tribu $\mathscr{A}$ est P-complète, alors il découle du théorème de projection mesurable que pour tout $x \in \mathrm{E}$ la fonction $f_{n,m}(., x)$ est $\mathscr{A}$-mesurable. De plus, pour tout $\omega \in \Omega \backslash \mathrm{N}_n$ et tout $x \in n\mathrm{B}$ la suite réelle $(f_{n,m}(\omega, x))_{m \geq 1}$ est croissante et on vérifie facilement en utilisant la semi-continuité inférieure de $f(\omega, .)$ que $f(\omega, x) = \sup_{m \geq 1} f_{n,m}(\omega, x)$. Enfin, pour tous $\omega \in \Omega$, x et $y \in n\mathrm{B}$ d'après la construction de $f_{n,m}$, nous avons

$$| f_{n,m}(\omega, x) - f_{n,m}(\omega, y) | \leq md(x, y)$$

et pour tout ω en dehors du $\mathscr{A}$-négligeable N_n nous avons d'après (1)

$$\alpha_n(\omega) \leq f_{n,m}(\omega, x) \leq \gamma \qquad \text{pour tout} \qquad x \in n\mathrm{B}.$$

Ainsi les fonctions $f_{n,m}$ sont des $\mathscr{A}$-intégrandes réels lipschitziens vérifiant les propriétés du lemme. □

Remarque. — La formule (3) est inspirée d'une formule analogue définie par une borne supérieure dans Dynkin et Evstigneev [*8*] et aussi dans Castaing [*3*].

11. Lemme. — *Soit f un $\mathscr{A}$-intégrande semi-continu inférieurement $\mathscr{A}$-quasi-intégrable et majoré sur $\Omega \times \mathrm{E}$ par un réel γ. Alors f admet une Σ-espérance conditionnelle.*

Preuve. — Pour tout couple d'entiers $n, m \geq 1$, soit $f_{n,m}$ le $\mathscr{A}$-intégrande lipschitzien sur l'ouvert $n\mathrm{B}$ donné par le lemme précédent. D'après la proposition 9 il admet une Σ-espérance conditionnelle $g'_{n,m}$ sur $n\mathrm{B}$ pour laquelle, d'après la proposition 9, il existe un Σ-négligeable $\mathrm{N}_{n,m}$ et une Σ-espérance conditionnelle β_n de α_n tels que

$$\beta_n(\omega) \leq g'_{n,m}(\omega, x) \qquad \text{pour tous} \qquad \omega \notin \mathrm{N}_{n,m} \qquad \text{et} \qquad x \in n\mathrm{B}.$$

Définissons maintenant une application $g_{n,m}$ de $\Omega \times \mathrm{E}$ dans $\mathbb{R}$ en posant

$$g_{n,m}(\omega, x) = g'_{n,m}(\omega, x) \qquad \text{si} \qquad \omega \in \Omega \backslash \mathrm{N}_{n,m} \qquad \text{et} \qquad x \in n\mathrm{B}$$
$$g_{n,m}(\omega, x) = 0 \ \text{ sinon.}$$

Alors $g_{n,m}$ est aussi une Σ-espérance conditionnelle de l'intégrande $\mathscr{A}$-lipschitzien $f_{n,m}$ sur $n\mathrm{B}$ et $g_{n,m}$ est $\Sigma \otimes \mathscr{B}(\mathrm{E})$-mesurable. De plus, pour tout couple d'entiers $m_1 \leq m_2$ et tout $n \geq 1$ en utilisant une suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ dense dans nB et la continuité sur nB pour Σ-presque tout $\omega \in \Omega$ des fonctions $g_{n,m_1}(\omega, .)$ et $g_{n,m_2}(\omega, .)$, on vérifie sans peine qu'il existe un Σ-négligeable $M^n_{m_1,m_2}$ tel que

$$g_{n,m_1}(\omega, x) \leq g_{n,m_2}(\omega, x)$$

pour tous $\omega \notin M^n_{m_1,m_2}$ et $x \in n\mathrm{B}$. Considérons maintenant l'application $\Sigma \otimes \mathscr{B}(\mathrm{E})$-mesurable de $\Omega \times \mathrm{E}$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$g_n(\omega, x) = \limsup_{m\to\infty} g_{n,m}(\omega, x)$$

pour tout $(\omega, x) \in \Omega \times \mathrm{E}$. Si nous posons

$$\mathrm{M}_0 = \left(\bigcup_{\substack{n\geq 1\\ m\geq 1}} \mathrm{N}_{n,m}\right) \cup \left(\bigcup_{\substack{m_1\leq m_2\\ n\leq 1}} \mathrm{M}^n_{m_1,m_2}\right),$$

nous obtenons que pour tout entier $n \geq 1$, tout $\omega \notin \mathrm{M}_0$ et tout $x \in n\mathrm{B}$ la suite $(g_{n,m}(\omega, x))_{m\geq 1}$ est croissante et

$$\beta_n(\omega) \leq g_n(\omega, x). \tag{4}$$

De plus, si m et r sont deux entiers, alors pour tous entiers $p, q \geq r$, pour toute application Σ-mesurable X de Ω dans rB et pour toute partie Σ-mesurable S de Ω nous avons, d'après la relation (4), la proposition 9, le lemme précédent et la croissance des suites $(g_{p,m})_{m\geq 1}$ et $(f_{p,m})_{m\geq 1}$

$$\begin{aligned}
\int_S g_p(\omega, \mathrm{X}(\omega))\mathrm{P}(d\omega) &= \sup_{m\geq 1}\int_S g_{p,m}(\omega, \mathrm{X}(\omega))\mathrm{P}(d\omega)\\
&= \int_S \sup_{m\geq 1} f_{p,m}(\omega, \mathrm{X}(\omega))\mathrm{P}(d\omega)\\
&= \int_S \sup_{m\geq 1} f_{q,m}(\omega, \mathrm{X}(\omega))\mathrm{P}(d\omega)\\
&= \sup_{m\geq 1}\int_S g_{q,m}(\omega, \mathrm{X}(\omega))\mathrm{P}(d\omega)\\
&= \int_S g_q(\omega, \mathrm{X}(\omega))\mathrm{P}(d\omega).
\end{aligned} \tag{5}$$

Ainsi, d'après le lemme 6, il existe un Σ-négligeable M_1 tel que

$$g_p(\omega, y) = g_q(\omega, y)$$

pour tout $\omega \notin \mathrm{M}_1$, tout $y \in r\mathrm{B}$ et tous entiers $p, q \geq r$. Par suite, si nous posons $\mathrm{M} = \mathrm{M}_0 \cup \mathrm{M}_1$ et si nous définissons une application g de $\Omega \times \mathrm{E}$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ par

$$g(\omega, x) = \limsup_{n\to\infty} g_n(\omega, x) \quad \text{pour tout} \quad (\omega, x) \in \Omega \times \mathrm{E},$$

nous obtenons que $g(\omega, .)$ est semi-continue inférieurement pour tout $\omega \notin M$ et donc, d'après ce qui précède, que g est un Σ-intégrande semi-continu inférieurement Σ-quasi-intégrable. Pour conclure que g est une Σ-espérance conditionnelle de f il ne reste plus qu'à vérifier que g satisfait la relation (2) de la définition 5. Soient donc S un élément de Σ et X une application bornée et Σ-mesurable de Ω dans E. Il existe un entier $r \geq 1$ tel que $X(\omega) \in rB$ pour tout $\omega \in \Omega$. Ainsi l'égalité

$$\int_S f(\omega, X(\omega))P(d\omega) = \int_S g(\omega, X(\omega))P(d\omega)$$

se démontre comme la relation (5) et la preuve du lemme est terminée. □

12. PROPOSITION. — *Soit f un $\mathscr{A}$-intégrande semi-continu inférieurement $\mathscr{A}$-quasi-intégrable, alors f admet une Σ-espérance conditionnelle.*

Preuve. — Pour tout entier $n \geq 1$ définissons un $\mathscr{A}$-intégrande semi-continu inférieurement $\mathscr{A}$-quasi-intégrable f_n majoré par n sur $\Omega \times E$ en posant

$$f_n(\omega, x) = \inf(n, f(\omega, x))$$

pour tout $(\omega, x) \in \Omega \times E$. Pour tout $(\omega, x) \in \Omega \times E$ la suite $(f_n(\omega, x))_{n \geq 1}$ converge en croissant vers $f(\omega, x)$ et, d'après le lemme précédent, pour tout $n \geq 1$, f_n admet une Σ-espérance conditionnelle g_n. Pour tout $S \in \Sigma$ et toute application bornée et Σ-mesurable X de Ω dans E, d'après la définition 5, nous avons

$$\begin{aligned}\int_S g_m(\omega, X(\omega))P(d\omega) &= \int_S f_m(\omega, X(\omega))P(d\omega) \\ &\leq \int_S f_{m+1}(\omega, X(\omega))P(d\omega) \\ &= \int_S g_{m+1}(\omega, X(\omega))P(d\omega).\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le lemme 6, il existe un Σ-négligeable N tel que pour tout $\omega \notin N$ et tout $x \in E$ la suite $(g_m(\omega, x))_{m \geq 1}$ soit croissante. Définissons un Σ-intégrande semi-continu inférieurement g en posant

$$g(\omega, x) = \sup_{m \geq 1} g_m(\omega, x) \qquad \text{pour tout} \qquad (\omega, x) \in \Omega \times E.$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que g est Σ-quasi-intégrable et vérifie la relation (2) de la définition 5. Soit donc $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions réelles $\mathscr{A}$-intégrables vérifiant les conditions de la définition 2 pour la fonction f. Si, pour tout entier $n \geq 1$, β_n est une Σ-espérance conditionnelle de α_n, alors pour toute application Σ-mesurable Y définie sur Ω et à valeurs dans nB et tout $S \in \Sigma$ nous avons

$$\begin{aligned}\int_S \beta_n(\omega)P(d\omega) &= \int_S \alpha_n(\omega)P(d\omega) \\ &\leq \int_S f(\omega, Y(\omega))P(d\omega) \\ &= \sup_m \int_S f_m(\omega, Y(\omega))P(d\omega) \\ &= \sup_m \int_S g_m(\omega, Y(\omega))P(d\omega) \\ &= \int_S g(\omega, Y(\omega))P(d\omega).\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le lemme 6, pour tout ω en dehors d'un Σ-négligeable et tout $x \in n$B nous avons $\beta_n(\omega) \leq g(\omega, x)$ et donc g est Σ-quasi-intégrable. On prouve de façon similaire que la relation (2) de la définition 5 est vérifiée et donc la proposition est démontrée. □

La proposition suivante donne une propriété importante de l'espérance conditionnelle d'un intégrande semi-continu inférieurement.

13. PROPOSITION. — *Soit f un $\mathscr{A}$-intégrande semi-continu inférieurement $\mathscr{A}$-quasi-intégrable et soit g une Σ-espérance conditionnelle de f. Si* X *est une application Σ-mesurable de Ω dans* E *telle que la fonction $\omega \mapsto f(\omega, X(\omega))$ soit $\mathscr{A}$-quasi-intégrable, alors la fonction $\omega \mapsto g(\omega, X(\omega))$ est Σ-quasi-intégrable et est une Σ-espérance conditionnelle de la fonction $\omega \mapsto f(\omega, X(\omega))$.*

Preuve. — Soient $\varphi(\omega) = -(f(\omega, X(\omega)))^-$ et $\psi = E^\Sigma(\varphi)$. Écrivons $\Omega = \bigcup_{n \geq 1} \Omega_n$ avec

$$\Omega_1 = \{ \omega \in \Omega \mid \| X(\omega) \| \leq 1 \}$$

et

$$\Omega_n = \{ \omega \in \Omega \mid n - 1 < \| X(\omega) \| \leq n \} \qquad \text{pour} \qquad n \geq 2.$$

Si S est un élément quelconque de Σ, d'après la définition 5, nous avons pour tout entier $n \geq 1$ en désignant par χ_{Ω_n} la fonction caractéristique de Ω_n

$$\chi_{\Omega_n}(\omega)\psi(\omega) \leq \chi_{\Omega_n}(\omega)g(\omega, \chi_{\Omega_n}(\omega)X(\omega)) \ \Sigma\text{-p. p.}$$

et

$$\int_{S \cap \Omega_n} f(\omega, X(\omega))P(d\omega) = \int_{S \cap \Omega_n} g(\omega, X(\omega))P(d\omega).$$

Il s'ensuit donc

$$\psi(\omega) \leq g(\omega, X(\omega)) \qquad \text{pour } \Sigma\text{-presque tout} \qquad \omega \in \Omega$$

et

$$\int_S f(\omega, X(\omega)P(d\omega) = \sum_{n\geq 1}\int_{S\cap\Omega_n} f(\omega, X(\omega))P(d\omega)$$
$$= \sum_{n\geq 1}\int_{S\cap\Omega_n} g(\omega, X(\omega))P(d\omega)$$
$$= \int_S g(\omega, X(\omega))P(d\omega)$$

et la proposition est démontrée. □

La proposition 12 admet les conséquences suivantes relatives aux cas continu et convexe.

14. Proposition. — *Soit f une application de $\Omega \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui est un $\mathscr{A}$-intégrande de Carathéodory. Supposons que pour tout entier $n \geq 1$ il existe une fonction réelle positive α_n dans $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathscr{A}, P)$ vérifiant*

$$\sup_{x\in nB} |f(\omega, x)| \leq \alpha_n(\omega)$$

pour $\mathscr{A}$-presque tout $\omega \in \Omega$, alors il existe un Σ-intégrande de Carathéodory g tel que

$$\int_S f(\omega, X(\omega))P(d\omega) = \int_S g(\omega, X(\omega))P(d\omega)$$

pour tout $S \in \Sigma$ et toute application bornée et Σ-mesurable X de Ω dans E.

Preuve. — Les applications f et $-f$ sont des $\mathscr{A}$-intégrandes semi-continus inférieurement et $\mathscr{A}$-quasi-intégrables. Il existe donc, d'après la proposition 12, des Σ-espérances conditionnelles g_1 et g_2 de f et $-f$. Ainsi, d'après le lemme 6 et la définition 5, il existe un négligeable N de Σ tel que les fonctions $g_1(\omega, .)$ et $g_2(\omega, .)$ soient semi-continues inférieurement sur E pour tout $\omega \notin N$ et que $g_1(\omega, x) = -g_2(\omega, x)$ pour tout $\omega \notin N$ et tout $x \in E$. Par suite $g = g_1$ est un Σ-intégrande de Carathéodory vérifiant les propriétés voulues. □

Remarque. — Cette proposition entraîne que, si E est un espace de Banach séparable dual d'un autre espace de Banach et f un $\mathscr{A}$-intégrande de Carathéodory pour la topologie forte de E, $\mathscr{A}$-intégrable au sens de Daurès [7], alors f admet une Σ-espérance conditionnelle qui est un Σ-intégrande de Carathéodory. □

Cas convexe :

15. Proposition. — *Soit f un $\mathscr{A}$-intégrande semi-continu inférieurement $\mathscr{A}$-quasi-intégrable tel que la fonction $f(\omega, .)$ soit convexe pour $\mathscr{A}$-presque*

tout $\omega \in \Omega$. *Alors f admet une* Σ-*espérance conditionnelle g et pour* Σ-*presque tout* $\omega \in \Omega$ *la fonction* $g(\omega, .)$ *est convexe.*

Preuve. — Soit g une Σ-espérance conditionnelle de f donnée par la proposition 12 et soit M un Σ-négligeable tel que la fonction $g(\omega, .)$ soit semi-continue inférieurement pour tout $\omega \notin M$. Considérons deux nombres rationnels $s, t \in \mathbb{Q} \cap]0, 1[$ avec $s + t = 1$.

Pour tout couple d'applications X, Y dans $L_E^\infty(\Omega, \Sigma, P)$ et tout $S \in \Sigma$, nous avons d'après la définition 1-3

$$\begin{aligned}\int_S g(\omega, sX(\omega) + tY(\omega))P(d\omega) &= \int_S f(\omega, sX(\omega) + tY(\omega))P(d\omega) \\ &\leq \int_S [sf(\omega, X(\omega)) + tf(\omega, Y(\omega))]P(d\omega) \\ &= \int_S [sg(\omega, X(\omega)) + tg(\omega, Y(\omega))]P(d\omega).\end{aligned}$$

Il existe donc d'après le lemme 6 un Σ-négligeable $N_{s,t}$ tel que

$$g(\omega, sx + ty) \leq sg(\omega, x) + tg(\omega, y)$$

pour tous $x, y \in E$ et $\omega \notin N_{s,t}$. Posons

$$N = M \cup (\cup \{ N_{s,t} \mid s, t \in \mathbb{Q} \cap]0, 1[\quad \text{et} \quad t + s = 1 \}).$$

Alors si λ et μ sont deux réels strictement positifs avec $\lambda + \mu = 1$, il existe deux suites de nombres rationnels strictement positifs $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant respectivement vers λ et μ et telles que $\lambda_n + \mu_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour tout $\omega \notin N$, comme $g(\omega, .)$ est semi-continue inférieurement, nous avons pour tous $x, y \in E$

$$\begin{aligned}g(\omega, \lambda x + \mu y) &\leq \limsup_{n\to\infty} g(\omega, \lambda_n x + \mu_n y) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} [\lambda_n g(\omega, x) + \mu_n g(\omega, y)] \\ &= \lambda g(\omega, x) + \mu g(\omega, y).\end{aligned}$$

et la proposition est démontrée. □

16. Corollaire. — *Soit f un* $\mathscr{A}$-*intégrande convexe normal pour lequel il existe une application* Y *de* Ω *dans* E′ *scalairement* $\mathscr{A}$-*mesurable et telle que les fonctions*

$$\omega \mapsto \| Y(\omega) \| \qquad \text{et} \qquad \omega \mapsto f^*(\omega, Y(\omega))$$

soient $\mathscr{A}$-*intégrables. Alors f admet une* Σ-*espérance conditionnelle qui est un* Σ-*intégrande convexe normal.*

Preuve. — C'est une conséquence directe des propositions 4 et 15.

Remarque. — Ainsi nous retrouvons le résultat établi par Bismut [*1*] pour des intégrandes convexes normaux avec E *réflexif séparable.*

REMERCIEMENTS

Nous remercions le referee pour ses utiles remarques concernant cet article.

RÉFÉRENCES

[*1*] M. BISMUT, Intégrandes convexes et probabilités, *J. Math. Anal. Appl.*, t. **42**, 1973, p. 639-673.

[*2*] C. CASTAING, Quelques résultats de compacité liés à l'intégration, *Bull. Soc. Math. France*, t. **31**, 1972, p. 73-81.

[*3*] C. CASTAING, A propos de l'existence des sections séparément mesurables et séparément continues d'une multiapplication séparément mesurable et séparément semi-continue inférieurement, *Séminaire d'Analyse Convexe*, Exposé n° 6, Montpellier, 1976.

[*4*] C. CASTAING et M. VALADIER, Convex Analysis and Measurable Multifunctions, *Lectures Notes in Mathematics*, n° 580, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[*5*] C. CASTAING et P. CLAUZURE, Quelques résultats de représentation intégrale et applications à l'espérance conditionnelle des multi-applications et des intégrandes, *Séminaire d'Analyse Convexe*, Exposé n° 14, Montpellier, 1979.

[*6*] J. P. DAURES, Version multivoque du théorème de Doob, *Ann. Inst. H. Poincaré, sect. B*, t. **9**, 1973, p. 167-176.

[*7*] J. P. DAURES, Quelques propriétés des espérances conditionnelles des intégrandes convexes de Carathéodory, *Séminaire d'Analyse Convexe*, Exposé n° 5, Montpellier, 1973.

[*8*] E. B. DYNKIN et I. V. EVSTIGNEEV, Regular conditional expectations of correspondences, *Theor. Probability Appl.*, t. **21**, 1976, p. 325-338.

[*9*] J. NEVEU, Convergence presque sûre de martingales multivoques, *Ann. Inst. H. Poincaré, sect. B*, t. **8**, 1972, p. 1-7.

[*10*] R. T. ROCKAFELLAR, Integrals which are convex functionals, *Pacific J. Math.*, t. **24**, 1968, p. 525-539.

[*11*] L. THIBAULT, Subdifferentials of compactly lipschitzian vector-valued functions, *Annali Math. Pura Appl.*, t. **CXXV**, 1980, p. 157-192.

[*12*] L. THIBAULT, Espérances conditionnelles d'intégrandes lipschitziens et d'intégrandes semi-continus inférieurement, *Séminaire d'Analyse Convexe*, Exposé n° 16, Montpellier, 1979.

[*13*] M. VALADIER, Sur l'espérance conditionnelle multivoque, *Séminaire d'Analyse Convexe*, Exposé n° 9, Montpellier, 1978.

[*14*] M. VALADIER, Espérance conditionnelle d'un convexe fermé aléatoire, *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A*, t. **273**, 1971, p. 1265-1267.

[*15*] M. VALADIER, Sur l'espérance conditionnelle multivoque non convexe, *Ann. Inst. H. Poincaré, sect. B*, t. **18**, 1980, p. 109-116.

[*16*] B. VAN CUTSEM, Martingales de convexes fermés aléatoires en dimension finie, *Ann. Inst. H. Poincaré, sect. B*, t. **8**, 1972, p. 365-385.

[*17*] B. VAN CUTSEM, Espérance conditionnelle d'une multiapplication à valeurs convexes compactes, *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A*, t. **269**, 1969, p. 212-214.

[*18*] B. VAN CUTSEM, Éléments aléatoires à valeurs convexes compactes, *Thèse*, Université de Grenoble, 1971.

(Manuscrit reçu le 29 avril 1981)