MICHEL LEDOUX

Classe $L \log L$ et martingales fortes à paramètre bidimensionnel

Annales de l'I. H. P., section B, tome 17, nº 3 (1981), p. 275-280
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1981__17_3_275_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XVII, n° 3-1981, p. 275-280. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Classe L log L et martingales fortes à paramètre bidimensionnel

par

Michel LEDOUX
Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis-Pasteur,
Département de Mathématique,
Laboratoire associé au C. N. R. S., n° 1, 67084 Strasbourg Cedex

---

RÉSUMÉ. — Pour une martingale $\{ X_n, n \in \mathbb{N} \}$ de la classe L log L, $\sup_{n \in \mathbb{N}} | X_n |$ est intégrable. Cette propriété s'étend aux martingales fortes indexées par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, et c'est en un sens le meilleur résultat possible car une certaine classe de martingales fortes positives satisfait également au problème réciproque.

ABSTRACT. — A martingale $\{ X_n, n \in \mathbb{N} \}$ bounded in L log L is such that $E \{ \sup_{n \in \mathbb{N}} | X_n | \} < \infty$ and, at least for a certain class of non-negative martingales, this statement can be reversed. In this paper, the analogue results for multiparameter strong martingales are proved.

I. NOTATION ET PREMIÈRES DÉFINITIONS

Dans toute la suite $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ désignera un espace de probabilité, $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, et $\mathbb{N}^2$ le produit $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ muni de la relation d'ordre : $(i, j) \leq (m, n)$ si $i \leq m$ et $j \leq n$. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, nous désignerons par R_{mn} le rectangle de $\mathbb{N}^2$: $\{ (i, j) \in \mathbb{N}^2 : (i, j) \leq (m, n) \}$. Si $\{ \mathscr{F}_{mn}, (m, n) \in \mathbb{N}^2 \}$ désigne une famille croissante de sous-tribus de $\mathscr{F}$, nous poserons, pour tout $m, n \geq 0$: $\mathscr{F}_{m\infty} = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_{mn}$ et $\mathscr{F}_{\infty n} = \bigvee_{m \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_{mn}$.

Nous appellerons martingale, un processus adapté $X = \{ X_{mn}, (m, n) \in \mathbb{N}^2 \}$, qui est une martingale ordinaire relative à la filtration $\{ \mathscr{F}_{m\infty}, m \in \mathbb{N} \}$ pour tout entier n fixé, et une relative à $\{ \mathscr{F}_{\infty n}, n \in \mathbb{N} \}$ pour tout entier m fixé. Dans le cas où la famille $\{ \mathscr{F}_{mn}, (m, n) \in \mathbb{N}^2 \}$ satisfait à l'hypothèse d'indépendance conditionnelle (F*4*) de [*2*], cette notion de martingale coïncide avec la notion usuelle relative à l'ordre sur $\mathbb{N}^2$. Nous appellerons martingale forte une martingale $X = \{ X_{mn}, (m, n) \in \mathbb{N}^2 \}$ telle que

$$E \{ X_{mn} - X_{m-1,n} - X_{m,n-1} + X_{m-1,n-1} \mid \mathscr{F}_{m-1,\infty} \vee \mathscr{F}_{\infty,n-1} \} = 0$$

pour tout couple d'entiers $(m, n) \geq (1, 1)$.

II. L'INÉGALITÉ DE DOOB POUR LES MARTINGALES FORTES

Dans [*1*], R. Cairoli observait que l'inégalité maximale de Doob pour martingales fortes, initialement démontrée à l'aide de régions d'arrêts par J. B. Walsh ([*6*]), pouvait également être prouvée par un argument unidimensionnel de temps d'arrêt. Cette observation, convenablement exploitée, permet en fait d'établir l'inégalité de Doob pour martingales fortes sous la forme (3.4′) de [*3*] (p. 314).

THÉORÈME. — *Si* X *est une martingale forte, alors pour tout réel* $\lambda > 0$ *et tout entier* k, *on a :*

$$\lambda P \{ \sup_{(m,n) \leq (k,k)} | X_{mn} | > 4\lambda \} \leq \frac{5}{2} E \{ | X_{kk} | I_{\{ \sup_{(m,n) \leq (k,k)} | X_{mn} | > \lambda \}} \}.$$

Démonstration. — Soit k un entier fixé. Pour $\lambda > 0$ on définit :

$$T = T(\lambda) = \begin{cases} \inf \{ n : n \leq k, \sup_{(m,j) \leq (k,n)} | X_{mj} | > 4\lambda \} & \text{si } \{ \} \neq \emptyset ; \\ \infty & \text{si } \{ \} = \emptyset . \end{cases}$$

Il est aisé de voir que T est un temps d'arrêt de la filtration $\{ \mathscr{F}_{kn}, n \in \mathbb{N} \}$; par définition de T :

$$\begin{aligned} P \{ \sup_{(m,n) \leq (k,k)} | X_{mn} | > 4\lambda \} &= P \{ \sup_{m \leq k} | X_{m,T} | I_{\{T < \infty\}} > 4\lambda \} \\ &= P \{ \sup_{m \leq k} | X_{m,T \wedge k} | > 4\lambda \} . \end{aligned}$$

Or $X_{m,T \wedge k} = X_{mk} - (X_{mk} - X_{m,T \wedge k})$; $\{ X_{mk} - X_{m,T \wedge k}, m \leq k \}$ étant une martingale de par le caractère fort de X (cf. [*1*], paragraphe 3), on déduit de l'inégalité de Doob à un paramètre ([*3*], p. 314) que :

$$\begin{aligned} 2\lambda P\{ \sup_{(m,n)\leq(k,k)} |X_{mn}| > 4\lambda \} &\\ \leq 2\lambda P\{ \sup_{m\leq k} |X_{mk}| > 2\lambda \} &+ 2\lambda P\{ \sup_{m\leq k} |X_{mk} - X_{m,T\wedge k}| > 2\lambda \} \\ \leq E\{ |X_{kk}| I_{\{\sup_{m\leq k}|X_{mk}|>2\lambda\}} \} &+ E\{ |X_{kk} - X_{k,T\wedge k}| I_{\{\sup_{m\leq k}|X_{mk}-X_{m,T\wedge k}|>2\lambda\}} \}. \end{aligned}$$

Mais puisque :

$$\{ \sup_{m\leq k} |X_{mk} - X_{m,T\wedge k}| > 2\lambda \} \subset \{ \sup_{m\leq k} |X_{mk}| > \lambda \} \cup \{ \sup_{m\leq k} |X_{m,T\wedge k}| > \lambda \},$$

nous voyons que le membre de droite de l'inégalité précédente est majoré par :

$$\begin{aligned} 2E\{ |X_{kk}| I_{\{\sup_{m\leq k}|X_{mk}|>\lambda\}} \} &+ E\{ |X_{k,T\wedge k}| I_{\{\sup_{m\leq k}|X_{mk}|>\lambda\}} \} \\ &+ E\{ |X_{kk}| I_{\{\sup_{m\leq k}|X_{m,T\wedge k}|>\lambda\}} \} + E\{ |X_{k,T\wedge k}| I_{\{\sup_{m\leq k}|X_{m,T\wedge k}|>\lambda\}} \}. \end{aligned}$$

La conclusion découle d'une même majoration de chacun des trois derniers termes de cette somme ; plus précisément, le théorème d'arrêt appliqué à la sous-martingale $\{ |X_{kn}|, n \in \mathbb{N} \}$ nous assure que :

$$\begin{aligned} E\{ |X_{k,T\wedge k}| I_{\{\sup_{m\leq k}|X_{mk}|>\lambda\}} \} &\\ &\leq E\{ |X_{k,T\wedge k}| I_{\{T<\infty\}} \} + E\{ |X_{kk}| I_{\{\sup_{m\leq k}|X_{mk}|>\lambda,\, T=\infty\}} \} \\ &\leq E\{ |X_{kk}| I_{\{T<\infty\}} \} + E\{ |X_{kk}| I_{\{\sup_{m\leq k}|X_{mk}|>\lambda,\, T=\infty\}} \} \\ &\leq E\{ |X_{kk}| I_{\{\sup_{(m,n)\leq(k,k)}|X_{mn}|>\lambda\}} \}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé que $\{ T < \infty \} = \{ \sup_{(m,n)\leq(k,k)} |X_{mn}| > 4\lambda \}$.

Par ailleurs, la majoration est évidente pour le deuxième de ces trois termes, et s'obtient de la même façon que dans le point précédent pour le troisième. Ce qui achève la démonstration du théorème.

D'après J. L. Doob ([*3*], p. 317), il s'ensuit :

COROLLAIRE. — Il existe une constante positive C ($C \leq 350$), telle que si X est une martingale forte :

$$E\{ \sup_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} |X_{mn}| \} \leq C(1 + \sup_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} E\{ |X_{mn}| \log^+ |X_{mn}| \}).$$

Il est à noter que dans le cas d'une martingale le procédé itératif fait apparaître une puissance double du logarithme :

THÉORÈME. — *Si* X *est une martingale,*

$$\mathrm{E}\{\sup_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} |\mathrm{X}_{mn}|\} \leq 6(1 + \sup_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \mathrm{E}\{|\mathrm{X}_{mn}|(\log^+|\mathrm{X}_{mn}|)^2\}).$$

III. MARTINGALES FORTES (L^∞) RÉGULIÈRES

Dans [5], R. F. Gundy introduit la notion de martingale (L^∞) régulière indexée par $\mathbb{N}$, et démontre qu'une martingale (L^∞) régulière positive $\{\mathrm{X}_n, n \in \mathbb{N}\}$ telle que $\mathrm{E}\{\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{X}_n\} < \infty$ appartient à la classe L log L. Cette propriété se généralise aux martingales fortes (L^∞) régulières positives à paramètre bidimensionnel.

Nous supposerons que sur les bords de $\mathbb{N}^2$ (c'est-à-dire si m ou $n = 0$), $\mathscr{F}_{mn} = \{\emptyset, \Omega\}$.

Si D est un sous-ensemble de $\mathbb{N}^2$ et $\mathrm{X} = \{\mathrm{X}_{mn}, (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$ une martingale, nous poserons :

$$\mathrm{X}(\mathrm{D}) = \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} (\mathrm{X}_{ij} - \mathrm{X}_{i-1,j} - \mathrm{X}_{i,j-1} + \mathrm{X}_{i-1,j-1})\mathrm{I}_{\{(i,j)\in\mathrm{D}\}}.$$

La martingale X sera dite positive si pour tout $i, j, m, n \geq 1$

$$\mathrm{X}(\mathrm{R}_{ij} \cup \mathrm{R}_{mn}) + \mathrm{X}_{00} \geq 0,$$

$\mathrm{X}(\mathrm{R}_{ij} \cup \mathrm{R}_{mn}) + \mathrm{X}_{00}$ s'interprétant comme la valeur du processus au temps composé $(i, j) \circ (m, n)$; en particulier X est positive au sens usuel puisque

$$\mathrm{X}_{mn} = \mathrm{X}(\mathrm{R}_{mn}) + \mathrm{X}_{00} \qquad (m, n \geq 1) \qquad \text{et} \quad \mathrm{X}_{00} = \mathrm{E}\{\mathrm{X}_{mn}\}.$$

Une martingale forte $\mathrm{X} = \{\mathrm{X}_{mn}, (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$ est dite (L^∞) régulière si elle peut être écrite $\mathrm{X}_{mn} = u_{00}d_{00} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_{ij}d_{ij}$, où,

i) pour tout $i, j \geq 1$, $\mathrm{E}\{d_{ij} \mid \mathscr{F}_{i-1,\infty} \vee \mathscr{F}_{\infty,j-1}\} = 0$, $\mathrm{E}\{d_{ij}^2 \mid \mathscr{F}_{i-1,\infty} \vee \mathscr{F}_{\infty,j-1}\} = 1$, $d_{00} = 1$ et $d = \sup_{(i,j)\geq(1,1)} \|d_{ij}\|_\infty < \infty$;

ii) les variables aléatoires multiplicatrices u_{ij}, $i, j \geq 1$, sont intégrables et u_{ij} est mesurable par rapport à la tribu $\mathscr{F}_{i-1,j} \vee \mathscr{F}_{i,j-1}$.

THÉORÈME. — *Une martingale forte* $X = \{ X_{mn}, (m, n) \in \mathbb{N}^2 \}$ (L^∞) *régulière positive telle que* $E\{ \sup_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} X_{mn} \} < \infty$ *appartient à la classe* L log L.

Démonstration. — Soit $k \geq 1$ fixé. Pour tout $m, n \geq 1$, posons :

$$\tilde{X}_{mn} = X_{mn} - X_{m-1,n} + X_{m-1,k}, \qquad \text{et} \quad \tilde{X}_{10} = X_{00}.$$

Pour l'ordre lexicographique $\sim$ du carré R_{kk} $\langle\langle (i,j) \sim (m, n)$ si $i \leq m$ ou $(i = m$ et $j \leq n) \rangle\rangle$, $\tilde{X} = \{ \tilde{X}_{mn}, (m, n) \leq (k, k) \}$ est une martingale ordinaire (L^∞) régulière de la filtration $\{ \mathcal{F}_{mn} \vee \mathcal{F}_{m-1,k}, (m, n) \leq (k, k) \}$. Considérons en effet un couple d'entiers (m, n), $(1, 1) \leq (m, n) \leq (k, k)$; si $n \geq 2$ l'indice qui le précède dans l'ordre lexicographique est $(m, n-1)$, et donc : $\tilde{X}_{mn} - \tilde{X}_{m,n-1} = u_{mn}d_{mn}$. Si au contraire $n = 1$, l'indice qui le précède est $(m - 1, k)$ ($(0, 1)$ dans le cas où $m = 1$) et : $\tilde{X}_{m1} - \tilde{X}_{m-1,k} = u_{m1}d_{m1}$

$$(\tilde{X}_{11} - \tilde{X}_{10} = u_{11}d_{11}).$$

Par ailleurs, la martingale $\tilde{X}$ est positive ; pour le vérifier, il suffit de constater que $\tilde{X}_{mn} = X(R_{mn} \cup R_{m-1,k}) + X_{00}$ $(m, n \geq 1)$. $\tilde{X}$ est donc une martingale ordinaire (L^∞) régulière positive. En vertu de l'inégalité de R. F. Gundy ([*5*], théorème 2), il existe une constante positive C, ne dépendant que de d, telle que pour tout réel $\lambda > E\{ X_{00} \}$ on ait :

$$\lambda P\{ \sup_{(1,1)\leq(m,n)\leq(k,k)} \tilde{X}_{mn} > \lambda \} \geq CE\{ \tilde{X}_{kk} I_{\{ \sup_{(1,1)\leq(m,n)\leq(k,k)} \tilde{X}_{mn} > \lambda \}} \}.$$

Comme $\sup_{(1,1)\leq(m,n)\leq(k,k)} \tilde{X}_{mn} \leq 3 \sup_{(1,1)\leq(m,n)\leq(k,k)} X_{mn}$ et $\tilde{X}_{kk} = X_{kk}$, il s'ensuit que :

$$\lambda P\left\{ \sup_{(1,1)\leq(m,n)\leq(k,k)} X_{mn} > \frac{\lambda}{3} \right\} \geq CE\{ X_{kk} I_{\{X_{kk} > \lambda\}} \};$$

c'est une routine que de constater alors que X appartient à la classe L log L.

Comme l'a fait remarquer A. M. Garsia ([*4*], p. 88), il est peut-être préférable de remplacer l'hypothèse $\mathcal{F}_{m0} = \mathcal{F}_{0n} = \{ \emptyset, \Omega \}$ par la condition plus générale $X_{m0} = X_{0n} = X_{00}$, $X_{00} \geq 0$ et $X_{00} \in L \log L$. La conclusion précédente tient encore et l'hypothèse d'intégrabilité sur X_{00} ne peut être supprimée comme le montre l'exemple de la martingale $X_{mn} = X_{00}$ pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] R. CAIROLI, Sur la convergence des martingales indexées par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Séminaire de Probabilités XIII. *Lectures Notes in Math.*, Springer, t. **721**, p. 162-173.

[*2*] R. Cairoli, J. B. Walsh, Stochastic integrals in the plane. *Acta Math.*, t. **134**, 1975, p. 111-183.
[*3*] J. L. Doob, *Stochastic Processes*. Wiley, New York, 1953.
[*4*] A. M. Garsia, Martingale inequalities, Benjamin, 1973.
[*5*] R. F. Gundy, On the class L log L, martingales and singular integrals. *Studia Math.*, t. **33**, 1969, p. 109-118.
[*6*] J. B. Walsh, Convergence and regularity of multiparameter strong martingales. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, t. **46**, 1979, p. 177-192.

(Manuscrit reçu le 20 février 1981)