ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

B. TRUONG-VAN

Une généralisation du théorème de Kolmogorov-Aronszajn « Processus V-bornés q-dimensionnels : domaine spectral § dilatations stationnaires »

Annales de l'I. H. P., section B, tome 17, nº 1 (1981), p. 31-49

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1981__17_1_31_0>

© Gauthier-Villars, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XVII, n° 1, 1981, p. 31-49. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Une généralisation du théorème de Kolmogorov-Aronszajn Processus V-bornés q-dimensionnels : domaine spectral § dilatations stationnaires

par

B. TRUONG-VAN

Laboratoire de Statistique et Probabilités,
Université Paul Sabatier,
118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex

INTRODUCTION

Il est connu qu'un processus stationnaire continu $y : \mathbb{R} \to L^2_{\mathbb{C}}(\Omega', \mathscr{A}', P')$ admet une représentation spectrale

$$y(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} d\beta_0(\lambda) \tag{1}$$

où $\beta_0 : \mathbb{R} \to L^2_{\mathbb{C}}(\Omega', \mathscr{A}', P')$ est une mesure orthogonale.

L'importance de cette représentation (1) due au théorème d'isomorphisme de Kolmogorov (cf. [*13*]) conduit à considérer des processus $x : \mathbb{R} \to L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ayant une représentation analogue à (1) mais relative à une certaine mesure stochastique β qui n'est plus orthogonale. Ils sont appelés par [*24*] et [*15*], processus harmonisables. Or ceux-ci ont un autre sens pour Loève (voir [*9*]). Aussi, pour éviter des confusions, nous les appelons processus V-bornés, suivant ainsi Bochner [*3*].

Les études sur ces processus ont concerné essentiellement leur prédiction linéaire (cf. [*4*], [*24*], [*19*]) et leurs caractérisations (cf. [*3*], [*17*]) en particulier la propriété importante que tout processus V-borné $x : \mathbb{R} \to L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est à dilatations stationnaires i. e. il existe un processus

© Gauthier-Villars

stationnaire $y : \mathbb{R} \to L^2_{\mathbb{C}}(\Omega', \mathscr{A}', P')$ tel que $x(t) = \mathrm{Proj}_{H(x)} y(t)$ pour tout t réel, où $\mathrm{proj}_{H(x)}$ est la projection orthogonale sur le domaine temporel $H(x)$ de x (cf. [*1*], [*15*], [*18*], [*19*], [*21*]).

Seulement toutes ces études ont été faites pour des processus unidimensionnels. Notre étude, par contre, considère des processus V-bornés q-dimensionnels pour $q \in \mathbb{N}^* \cup \{ \infty \}$ (cf. définition 4). Pour de tels processus, nous obtenons d'une part des résultats analogues à celui précédent, concernant l'existence des dilatations stationnaires (voir Théorèmes 8 et 9), d'autre part une étude de leur domaine spectral (cf. Théorèmes 3, 4 et 5) et un théorème d'isomorphisme analogue à celui de Kolmogorov (Théorème 6). Or pour parvenir aux deux objectifs précédents, nous avons besoin du Théorème de factorisation de Kolmogorov-Aronszajn. Une étude de ce dernier nous donne l'occasion d'en proposer une nouvelle généralisation, dans les Théorèmes 1 et 2 qui correspondent à une synthèse des travaux de [*10*], [*11*], [*12*] et de [*67*], [*7*]. Les noyaux considérés dans les théorèmes 1 et 2 sont les noyaux de corrélation de trajectoires à valeurs dans des espaces de Loynes H, i. e. des familles $(X(\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ d'opérateurs linéaires continus définis sur un espace vectoriel topologique W dans H, trajectoires considérées par Weron (cf. [*27*]).

L'ensemble des résultats et des démonstrations de l'étude présentée ici, est développé dans [*28*] et les principales références y sont aussi indiquées.

1. GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE FACTORISATION DE KOLMOGOROV-ARONSZAJN

D'abord nous rappelons ci-dessous les notions d'espace admissible Z et de Z-produit, introduites par [*10*].

DEFINITION 1. — (cf. [*10*], p. 373). *Un espace vectoriel topologique* (*e. v. t.*) Z *est admissible s'il vérifie les axiomes suivants :*

(A1) Z *a une involution d'espace vectoriel* $z \in Z \mapsto z^* \in Z$.

(A2) *Il existe une relation d'ordre* $\leq$ *sur* Z, *définie par un cône convexe saillant fermé* Z_+ *dont tout élément est *-invariant.*

(A3) *La topologie de* Z *est compatible avec* Z_+ i. e. *il existe un système fondamental de voisinages de* 0, *dans* Z, *formé de parties fermées, disquées, absorbantes noté* $\mathscr{V}_Z(0)$ *tel que*

$$\forall N \in \mathscr{V}_Z(0) \qquad \forall x \in N \quad et \quad \forall y / 0 \leq y \leq x \quad alors \quad y \in N .$$

(A4) Z *est un espace uniforme complet.*

DEFINITION 2 (cf. [*10*], p. 374). — *i) un espace vectoriel* E *est dit Z-préhilbertien si* E *admet un Z-produit i. e. une application* $(x, y) \in E \times E \mapsto [x, y] \in Z /$

(Zp1) $[x, x] \geq 0$ *et* $[x, x] = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(Zp2) $[x, y] = [y, x]^* \quad \forall x, y \in E$
(Zp3) $x \mapsto [x, y]$ *est linéaire*

ii) si E *est complet, on dira que* E *est Z-hilbertien.*

Le Z-produit garde les propriétés essentielles du produit scalaire (sesquilinéarité hermitienne, positivité) et il définit la topologie sur E, qui le rend continu et dont un voisinage U de 0 dans E s'écrit

$$U = \{ x \in E / [x, x] \in N \text{ ; pour un } N \in \mathscr{V}_Z(0) \}$$

(cf. [*10*], p. 374-376).

Exemple (structure gammienne) (cf. [*28*], ch. I. [*2.4.*]). — Étant donné un espace hilbertien H, soit $q \in N^* \cup \{ \infty \}$, alors la somme

$$H^q = \bigotimes_{j=1}^{q} H_j ,$$

de q espaces hilbertiens $H_j = H$, est Z-hilbertien pour

$$[x, y] = (\langle x_i, y_j \rangle_H)_{i,j=1,\dots,q}$$

matrice grammienne dont les composantes sont formées de produits scalaires $\langle x_i, y_j \rangle$ dans H où $z = (z_j)_{j=1}^q \in H^q$ et où $Z = \mathscr{N}\mathscr{S}_q = \mathscr{N}\mathscr{S}(l_q^2)$, l'espace des opérateurs nucléaires sur

$$l_q^2 = \left\{ (\alpha_j)_{j=1}^q \in \mathbb{C}^q \Big/ \sum_{j=1}^{q} | \alpha_j |^2 < \infty \right\},$$

est admissible si on le munit de la topologie faible des opérateurs.

On remarque que l'espace H^q est aussi hilbertien pour $\langle\langle x, y \rangle\rangle = \operatorname{tr} [x, y]$, trace de l'opérateur nucléaire $[x, y]$.

Considérons, pour la suite de ce paragraphe, un espace admissible Z, un ensemble Λ et un espace de Banach W. Alors notre généralisation consiste à prendre des noyaux K définis sur $\Lambda \times \Lambda$, à valeurs dans $\mathscr{S}(W ; Z)$ où $\mathscr{S}(W, Z)$ est l'espace des applications *-sesquilinéaires à valeurs dans Z.

DÉFINITION 3 (cf. [*28*], p. 31). — *Une application* $K : \Lambda \times \Lambda \mapsto \mathscr{S}(W, Z)$ *est dit un noyau Z-non-négatif sur* Λ *si on a*

$$\sum_{i,j=1}^{n} K(\lambda_i, \lambda_j)(u_i, u_j) \geq 0 \; ; \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* , \ \forall \lambda_i \in \Lambda , \ \forall u_i \in W \; ; \ i = 1, \ldots, n.$$

et

$$K(\lambda, v)(u, v) = [K(v, \lambda)(v, u)]^* \qquad \forall \lambda, v \in \Lambda \quad \forall u, v \in W .$$

Le résultat suivant généralise le théorème de Kolmogorov-Aronszajn.

THÉORÈME 1 (Factorisation de Kolmogorov-Aronszajn-Loynes). — *Si* K *est un noyau Z-non-négatif et si* $\forall \lambda \in \Lambda$, $K(\lambda, \lambda)$ *est continu i. e. pour tout filtre* $\{ u_\alpha \}_{\alpha \in A}$ *dans* W *convergent vers* 0, $\operatorname{Lim}_{A} K(\lambda, \lambda)(u_\alpha, u_\alpha) = 0$. *Alors*

i) il existe un espace Z-hilbertien $\mathscr{H}$ *et une famille* $\{ X(\lambda) \}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathscr{L}(W, \mathscr{H})/$

(1) $$K(\lambda, v)(u, v) = [X(\lambda)u, X(v)v]_{\mathscr{H}} \qquad \forall \lambda, v \in \Lambda \; ; \ \forall u, v \in W .$$

ii) on a l'unicité à une équivalence unitaire près, de $\mathscr{H}$ *et de* X *si* $\mathscr{H}$ *est minimal.*

Notation. — E, F étant deux espaces vectoriels (resp. topologiques) on note L(E, F)) (resp. $\mathscr{L}(E, F)$) l'espace des applications linéaires (resp. continues) de E dans F.

Démonstration. — *i*) Soit

$$i)\ G = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \delta_{\lambda_j} u_j / \lambda_j \in \Lambda , \ u_j \in W \right\} \qquad \text{où} \qquad \delta_\lambda(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi \neq \lambda \\ 1 & \text{si } \xi = \lambda \end{cases}$$

Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, tout $\lambda_j, v_k \in \Lambda$ et tout $u_j, u'_k \in W$; $j = 1, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, m$. On pose

(4) $$\left[\sum_{j=1}^{n} \delta_{\lambda_j} u_j , \sum_{k=1}^{m} \delta_{v_k} u'_k \right] = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} K(\lambda_j, v_k)(u_j, u'_k) .$$

Il est immédiat de vérifier (cf. [*28*], p. 65) que (4) définit un Z-produit sur l'espace vectoriel G et que l'application $X(\lambda) : u \in W \to \delta_\lambda u \in G$ est linéaire de W dans G.

Soit $\mathscr{H}$ l'espace Z-hilbertien complété de G, à un isomorphisme près, i. e. un complété séparé de G pour la structure uniforme déduite du Z-produit (cf. [*10*] théorème 2).

D'après la définition de la topologie de $\mathscr{H}$ (cf. [*10*]), le filtre $\{ X(\lambda)u_\alpha \}_{\alpha\in A}$ convergent vers 0 équivaut à dire que le filtre $\{ [X(\lambda)u_\alpha, X(\lambda)u_\alpha] \}_{\alpha\in A}$ converge vers 0, d'où la continuité des applications linéaires $X(\lambda)$; $\lambda \in \Lambda$.

ii) La preuve de cette partie est classique (cf. par exemple [*28*], p. 67). □

Le résultat précédent permet de déduire de façon immédiate (cf. [*28*], p. 68) le théorème suivant de dilatation du noyau K.

THÉORÈME 2 (Théorème général de dilatation du noyau K). — *Si, en plus des hypothèses du Théorème 1, Λ est un semi-groupe unitaire d'élément neutre ε et si* K *est un noyau continu i. e. vérifie la condition*

$$(2)\quad \forall\alpha\in\Lambda\ \forall N_0\in\mathscr{V}_Z(0)\ \exists N_0^*\in\mathscr{V}_Z(0)/\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall u_j\in W, \forall\lambda_j\in\Lambda\,; j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j,k=1}^{n}\sum K(\lambda_j, \lambda_k)(u_j, u_k) \in N_0^* \Rightarrow \sum_{j,k=1}^{n}\sum K(\alpha\lambda_j, \alpha\lambda_k)(u_j, u_k) \in N_0$$

Alors il existe un espace Z-*hilbertien* $\mathscr{H}$ *et un semi-groupe*

$$\{ T(\lambda) \}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathscr{L}(\mathscr{H})/$$

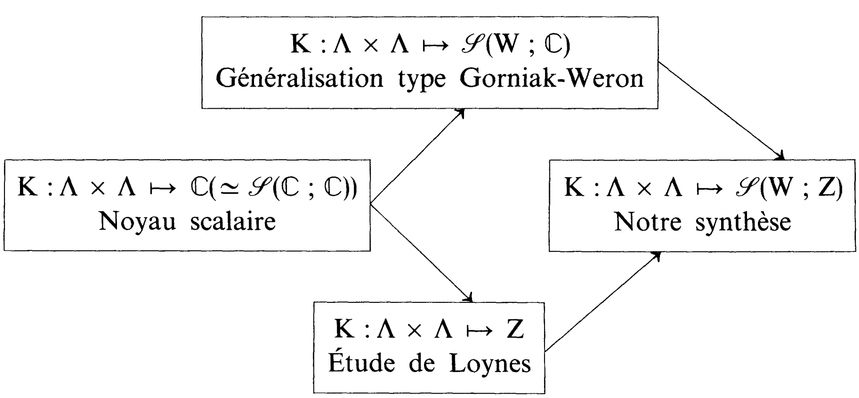
$$(3)\quad [T(\lambda)X(\varepsilon)u, T(\nu)X(\varepsilon)] = K(\lambda, \nu)(u, v) \qquad \forall\lambda, \nu\in\Lambda,\ \forall u, v\in W\,.$$

Notons que les résultats obtenus dans les théorèmes 1 et 2 se généralisent aussi au cas où W est un espace vectoriel localement convexe (cf. [*28*], § 3).

Les théorèmes 1 et 2 donnent une synthèse de divers résultats obtenus sur la factorisation et la dilatation des noyaux non négatifs K car si $Z = \mathbb{C}$ on retrouve en particulier les résultats de [*6*], [*7*], [*16*], si $W = \mathbb{C}$, on obtient immédiatement les résultats de [*10*], [*11*] en considérant

$$K(\lambda, \nu)(u, v) = u\bar{v}K(\lambda, \nu) \qquad \forall\lambda, \nu\in\Lambda,\ \forall u, v\in\mathbb{C}\,.$$

Donnons ci-dessous le schéma de notre synthèse :



Une des applications importantes du Théorème 1 est le résultat suivant :

COROLLAIRE 1 (cf. [*28*], I. Th. (4.6)). — *Considérons un espace mesurable* $(D, \mathscr{D})$, *un espace vectoriel* W *et un espace admissible* Z.

i) Soit $\mathscr{H}$ *un espace Z-hilbertien et une mesure σ-additive pour la topologie faible* $\beta : (D, \mathscr{D}) \mapsto L(W, \mathscr{H})$.

Alors la relation suivante

$$(4) \qquad \mu(A \times B)(u, v) = [\beta(A)u, \ \beta(B)v]_{\mathscr{H}} \qquad \forall u, v \in W, \ \forall A, B \in \mathscr{D}$$

définit une bimesure spectrale unique μ *i. e.*

(BM1) *un noyau* $\mu : \mathscr{D} \times \mathscr{D} \to \mathscr{S}(W ; Z)$ *défini Z-positif tel que :*

(BM2) μ *est additive.*

(BM3) $A \times B \in \mathscr{D} \times \mathscr{D} \to \mu(A \times B)(u, v)$ *est continu supérieurement vers* $\phi \times \phi$ *pour tout* $u, v \in W$.

ii) Réciproquement, soit une bimesure spectrale $\mu : \mathscr{D} \times \mathscr{D} \mapsto \mathscr{S}(W ; Z)$ *alors il existe un espace Z-hilbertien* $\mathscr{H}$ *et une mesure dite stochastique* $\beta : (D, \mathscr{D}) \mapsto L(W, \mathscr{H})$ *vérifiant* (4).

II. DOMAINE SPECTRAL DE PROCESSUS V-BORNÉS q-DIMENSIONNELS

Soit H un espace hilbertien (en général $H = L^2_{\mathbb{C}}(\Omega) = L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathscr{A}, P)$) et $q \in \mathbb{N}^* \cup \{ \infty \}$.

Soit T un groupe abélien localement compact (L. C. A.) de mesure de Haar m et de groupe dual $\hat{T}$.

On désigne par $\langle \lambda / . \rangle$ un caractère de $\hat{T}$ et $\mathscr{C}, \hat{\mathscr{C}}$ sont les tribus boréliennes de T, $\hat{T}$ resp.

DÉFINITION 4. — $x : T \mapsto H^q$ *est dit un processus* V-*borné q-dimensionnel pour* $q \in \mathbb{N}^* \cup \{ \infty \}$ *s'il existe une mesure stochastique* $\beta : (\hat{T}, \hat{\mathscr{C}}) \mapsto H^q$ *telle que*

$$(1) \qquad x(t) = \int_{\hat{T}} \langle \lambda / t \rangle \, d\beta(\lambda) \qquad \forall t \in T$$

La bimesure spectrale associée à β est dite bimesure spectrale du processus x.

De façon plus générale, soit $(D, \mathscr{D})$ un espace mesurable; $q \in \mathbb{N}^* \cup \{ \infty \}$, considérons une bimesure spectrale $\mu : \mathscr{D} \times \mathscr{D} \mapsto \mathscr{N}\mathscr{S}_q$, il lui est alors associé (voir corollaire 1) une mesure stochastique $\beta : (D, \mathscr{D}) \mapsto H^q$.

Pour définir le domaine spectral $\mathscr{F}_{pq}(\mu)$, pour $p \in \mathbb{N}^* \cup \{ \infty \}$, on se heurte aux difficultés suivantes :

i) μ n'étant pas une mesure, on ne peut plus utiliser la même méthode que pour des processus stationnaires (cf. [*13*]),

ii) l'étude de l'intégration relative à μ pour $q = 1$, de [*17*] peut difficilement se généraliser au cas où $q > 1$.

En conséquence on est conduit à définir $\mathscr{F}_{pq}(\mu)$ grâce à une intégration relative à β :

On définit sur l'espace $\varepsilon_{pq}(\mathscr{D})$ des fonctions $\mathscr{D}$-étagées, $\mathscr{L}_{pq}$-valuées une intégrale $\beta(\phi) = \int \phi d\beta$ et une structure gramienne relative à $\mathscr{N}\mathscr{S}_q$ de la manière suivante :

$$\beta(\phi) = \sum_{j=1}^{n} a_j \beta(\mathrm{A}_j) \quad \text{pour} \quad \phi = \sum_{j=1}^{n} a_j 1_{\mathrm{A}_j} \in \varepsilon_{pq} \quad (\mathscr{D}) \quad \text{où} \quad \mathscr{L}_{pq} = \mathscr{L}(l_q^2, l_q^2) \quad (p \in \mathbb{N}^* \cup \{ \infty \})$$

$$[\phi, \psi]_\mu = \iint_{\mathrm{D}\times\mathrm{D}} \phi(\lambda) d\mu(\lambda, \theta) \psi^*(\theta) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j \mu(\mathrm{A}_j \times \mathrm{B}_k) b_k^*$$

on vérifie aisément que ces définitions ont un sens et que l'on a

$$(5) \quad [\phi, \psi]_\mu = [\beta(\phi), \beta(\psi)]_{\mathrm{H}^p} \qquad \forall \phi, \psi \in \varepsilon_{pq}(\mathscr{D}), \ \forall p, q \in \mathbb{N}^* \cup \{ \infty \} .$$

Alors le problème consiste à étendre la structure grammienne $[\, , \,]_\mu$ et l'intégrale $\beta(\phi)$ à un sous-espace, le plus grand possible de $\mathscr{M}_{pq}(\mathscr{D})$, espace des fonctions $\mathscr{D}$-mesurables $\mathscr{L}_{pq}$-valuées, tout en conservant la relation (5). Aussi nous sommes amenés à la méthode suivante d'extension de $\beta(\phi)$:

Considérons pour toute la suite une mesure ν non-négative finie sur $(\mathrm{D}, \mathscr{D})$ telle que $\lim_{\nu(\mathrm{A})\to 0} \| \beta(\mathrm{A}) \|_{\mathrm{H}^q} = 0$ (il suffit de choisir pour ν une mesure de contrôle de la semi-variation $\dot{\beta}$ de β, définie par

$$(6) \quad \dot{\beta}(\mathrm{A}) = \sup \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta(\mathrm{A}_j) \right\|_{\mathrm{H}^q} \Big/ \alpha_j \in \mathbb{C} \ ; \ |\alpha_j| \leq 1, j = 1, \ldots, n \text{ et } \{ \mathrm{A}_j \}_{j=1}^{n} \text{ est une } \mathscr{D}\text{-sous partition finie de A} \right\}$$

Nous introduisons une nouvelle notion de semi-variation de β relative à $\mathscr{L}_{pq}$ définie pour tout $A \in \mathscr{D}$ par

$$(7) \qquad \hat{\beta}(A) = \sup \{ \| \beta(\phi) \|_{H^q} \, ; \ \phi \in \varepsilon_{pq}(\mathscr{D}) / \| \phi \|_{\mathscr{L}pq} \leq 1_A \}$$

et nous supposons pour toute la suite que $\hat{\beta}(D) < \infty$. Alors

DÉFINITION 5. —

$$* \ f \in \mathscr{F}_{pq}(\mu) \Leftrightarrow \exists \{ \phi_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset \varepsilon_{pq}(\mathscr{D}) / \begin{cases} \text{(E1)} \ \phi_n \underset{n\infty}{\rightarrow} f \qquad v\text{-}pp \\ \text{(E2)} \ \forall A \in \mathscr{D}, \ \underset{n,m\infty}{\operatorname{Lim}} \langle\langle \phi_n 1_A, \phi_m 1_A \rangle\rangle \text{ existe}. \end{cases}$$

. *Une telle suite $\{ \phi_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ est dite une suite de β-approximation de f dans $\varepsilon_{pq}(\mathscr{D})$.*

Il est immédiatement vérifié que l'on a :

$$\varepsilon_{pq}(\mathscr{D}) \subset \mathscr{F}_{pq}(\mu) \quad \text{et} \quad \mathscr{B}_{pq}(\mathscr{D}) \subset \mathscr{F}_{pq}(\mu)$$

où $\mathscr{B}_{pq}(\mathscr{D})$ est l'espace des fonctions $\mathscr{D}$-mesurables $\mathscr{L}_{pq}$-valuées à image compacte.

Les propriétés de $\mathscr{F}_{pq}(\mu)$ sont décrites dans les théorèmes et proposition suivants :

PROPOSITION 1. — *i) Soit $\{ \phi_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset \varepsilon_{pq}(\mathscr{D})$. Alors une CNS pour que $\{ \phi_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie* (E2) *est que pour tout* A *de $\mathscr{D}$, la suite $\{ \phi_n 1_A \}_{n \in \mathbb{N}}$ soit de Cauchy pour la semi-norme $\| \ \|_\mu$, associée au produit scalaire $\langle\langle \, , \, \rangle\rangle_\mu$ qui est la trace de $[\, , \,]_\mu$. Dans ce cas, $\forall A \in \mathscr{D} \ \{ \beta(\phi_n 1_A) \}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $H_{pq}(\beta)$ qui est la fermeture hilbertienne de l'espace vectoriel $\{ \beta(\phi) \, ; \, \phi \in \varepsilon_{pq}(\mathscr{D}) \}$.*

ii) Soit $f \in \mathscr{F}_{pq}(\mu)$ et $\{ \phi_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de β-approximation de f dans $\varepsilon_{pq}(\mathscr{D})$. Alors d'une part pour tout A *de $\mathscr{D}$,*

$$\underset{n,m\infty}{\operatorname{Lim}} \, [\phi_n 1_A, \phi_m 1_A]_\mu$$

existe dans $\mathscr{H}\mathscr{S}_p$ et est un élément de $\mathscr{N}\mathscr{S}_p$, d'autre part on peut définir sans ambiguïté, pour tout A *de $\mathscr{D}$*

$$(8) \qquad \beta(f 1_A) = \int_A f d\beta = \underset{n\infty}{\operatorname{Lim}} \int_A \phi_n d\beta$$

$$(9) \qquad [f 1_A, f 1_A]_\mu = \underset{n,m\infty}{\operatorname{Lim}} \, [\phi_n 1_A, \phi_m 1_A]_\mu$$

où on a noté par $\mathscr{H}\mathscr{S}_p$, l'espace des opérateurs Hilbert-Schmidt sur l_p^2.

Preuve. — *i*) La démonstration de la CNS est immédiate tandis que la dernière assertion de cette partie se prouve par le même procédé que dans [*5*] p. 324 (cf. [*28*], p. 98-99).

ii) Soit $f \in \mathscr{F}_{pq}$ et $\{ \phi_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de β-approximation de f dans $\varepsilon_{pq}(\mathscr{D})$ alors $\forall h, l, m, n \in \mathbb{N}$. $\forall A \in \mathscr{D}$ on a, en posant $\phi'_n = \phi_n 1_A$, $V_{n,m} = [\phi'_n, \phi'_m]$:

$$(*) \quad | V_{h,l} - V_{n,m} |_E \leq | V_{hl} - V_{nl} |_E + | V_{nl} - V_{nm} |_E \\ \leq \| \phi'_h - \phi'_n \|_\mu \| \phi'_l \|_\mu + \| \phi'_n \|_\mu \| \phi'_l - \phi_m \|_\mu .$$

D'après (*i*), $\{ V_{n,m} \}_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ est une suite de Cauchy dans $\mathscr{H}\mathscr{S}_p$ qui est complet pour $| \;|_E$, par conséquent cette suite admet une limite. Cette limite est un élément de $\mathscr{N}\mathscr{S}_p$ car $[f 1_A, f 1_A] = \operatorname*{Lim}_{n \infty} [\phi'_n, \phi'_n]_\mu \in \mathscr{N}\mathscr{S}_p$.

Par ailleurs, soit $\{ \xi_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ une autre suite de β-approximation de f dans $\varepsilon_{pq}(\mathscr{D})$, il suffit alors d'appliquer le même procédé qu'en $(*)$ pour conclure que

$$\operatorname*{Lim}_{n,m \infty} [\phi_n 1_A, \phi_m 1_A] = \operatorname*{Lim}_{n,m \infty} [\xi_n 1_A, \xi_m 1_A],$$

d'où (9) tandis que (8) se déduit de (*i*). □

On déduit immédiatement le théorème suivant (cf. [*28*], II. propr. (2.15), th. (2.17)).

THÉORÈME 3. — *Soit* $\dot{\mathscr{F}}_{pq}(\mu) = \mathscr{F}_{pq}(\mu)/_{[\mu]}$ *l'espace quotient de* $\mathscr{F}_{pq}(\mu)$ *par la relation d'équivalence déduite de* $\langle\langle \phi = 0[\mu] \Leftrightarrow [\phi, \phi]_\mu = 0 \rangle\rangle$. *Alors*

i) $\mathscr{F}_{pq}(\mu)$ *est un espace prégrammien relatif à* $\mathscr{N}\mathscr{S}_q$ *tel que* $\varepsilon_{pq}(\mathscr{D})$ *y soit dense pour la semi-norme* $\| \phi \|_\mu = (\operatorname{tr} [\phi, \phi]_\mu)^{1/2}$.

ii) *La fermeture de* $\dot{\mathscr{F}}_{pq}(\mu)$ *et* $H_{pq}(\beta)$ *sont deux espaces grammiens isomorphes par extension de* [*8*].

Ce théorème signifie que l'on a prolongé la structure grammienne à $\mathscr{F}_{pq}(\mu)$ et donne un prélude à une généralisation du théorème d'isomorphisme de Kolmogorov.

THÉORÈME 4. — *Soit* $\{ f_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{F}_{pq}(\mu)$ *telle que on a*

$$\begin{cases} (E'1) & f_n \underset{n\infty}{\rightarrow} f \quad \nu\text{-}pp \\ (E2) & \forall A \in \mathscr{D} \operatorname*{Lim}_{m,n \infty} \langle\langle f_m 1_A, f_n 1_A \rangle\rangle \textit{ existe} \end{cases}$$

Alors

i) $f \in \mathscr{F}_{pq}(\mu)$ *et* $\operatorname*{Lim}_{n \infty} \| f_n 1_A - f 1_A \|_\mu = 0, \quad \forall A \in \mathscr{D}$

ii) $[f 1_A, f 1_A]_\mu = \operatorname*{Lim}_{m,n \infty} [f_m 1_A, f_n 1_A]_\mu$ *dans* $\mathscr{H}\mathscr{S}_p$, $\quad \forall A \in \mathscr{D}$.

Ce théorème indique d'une part l'arrêt du procédé d'extension de l'intégration, à l'espace $\mathscr{F}_{pq}(\mu)$ et d'autre part que l'on peut permuter l'intégration et la limite i. e.

$$\operatorname*{Lim}_{n\infty} \int_A f_n d\beta = \int_A \operatorname*{Lim}_{n\infty} f_n d\beta .$$

Preuve. — Comme $f_n \in \mathscr{F}_{pq}(\mu)$ et $\forall A \in \mathscr{D}$, $\operatorname*{Lim}_{n\infty} \int_A f_n d\beta$ existe (d'après l'hypothèse (E2)) il s'ensuit de la proposition 2.19 de [*28*] qu'il existe une suite $\{ g_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\varepsilon_{pq}(\mathscr{D})$ telle que on ait

$$(*1) \qquad f_n - g_n \to 0 \quad \nu\text{-}pp$$

et

$$(*2) \qquad \operatorname*{Lim}_{n\infty} \int_A g_n d\beta = \operatorname*{Lim}_{n\infty} \int_A f_n d\beta .$$

Par conséquent d'après (E'1), (*1) et (*2), $f \in \mathscr{F}_{pq}(\mu)$ et

$$\int_A f d\beta = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \int_A g_n d\beta = \operatorname*{Lim}_{n\infty} \int_A f_n d\beta \quad \text{i. e.} \quad \| (f - f_n) 1_A \|_\mu \underset{n\infty}{\to} 0$$

d'où (*i*) tandis que (*ii*) se démontre à partir de (*i*) de manière analogue à la proposition 1. □

En application du théorème 4, aux processus V-bornés (définition 4), on a le théorème suivant :

THÉORÈME 5 (cf. [*28*], II. prop. (3.3)). — *Soit*

$$\mathscr{P}_{pq}(T) = Sm_{pq}(\{ \langle \lambda/t \rangle ; t \in T \}) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j \langle \cdot/t_j \rangle ; a_j \in \mathscr{L}_{pq} \right\}$$

Alors tout élément de $\mathscr{F}_{pq}(\mu)$ est une suite de β-approximation dans $\mathscr{P}_{pq}(T)$ donc $\mathscr{P}_{pq}(T)$ est dense dans $\mathscr{F}_{pq}(\mu)$ pour $\| \ \|_\mu$.

Ce résultat signifie, pour un processus V-borné q-dimensionnel

$$x(t) = \int_T \langle \lambda/t \rangle d\beta(\lambda),$$

l'égalité de $H_{pq}(\beta) = H_{pq}(x) = \overline{\mathscr{P}_{pq}(T)}$.

En général l'espace $\mathscr{F}_{pq}(\mu)$ n'a aucune raison d'être complet. Cependant il existe des classes de processus V-bornés particuliers dont le domaine spectral $\mathscr{F}_{pq}(\mu)$ est complet :

DÉFINITION 6. — *Un processus* $x : \mathrm{T} \mapsto (\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\Omega))^q$; $q \in \mathbb{N}^* \cup \{ \infty \}$ *est dit linéairement stationnarisable* (L.S) *s'il existe un couple* (y, A) *dit similarité stationnaire de* x, *tel que* $y : \mathrm{T} \mapsto (\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\Omega'))^q$ *est un processus stationnaire et tel que* A *est une application* $\mathscr{L}_{pq}$*-linéaire continue de* $\mathrm{H}_{pq}(y)$ *dans* $\mathrm{H}_{pq}(x)$, *à inverse continu et vérifiant*

$$x(t) = \mathrm{A}y(t) \qquad \forall t \in \mathrm{T}. \tag{10}$$

Les processus L.S ont été étudiés par [*14*], [*26*] et [*20*] exclusivement dans le cadre unidimensionnel (i. e. pour $p = q = 1$) et dans le point de vue de leur prédiction linéaire.

Notre travail considère le cas où leur dimension est supérieure à un et s'intéresse aussi à leur domaine fréquentiel :

THÉORÈME 6. — *Soit* $x : \mathrm{T} \mapsto (\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\Omega))^q$ *un processus* L.S *continu.*
Alors

i) x *est un processus* V*-borné. Soit* μ *sa bimesure spectrale.*

ii) $\mathscr{F}_{pq}(\mu)$ *est complet pour la semi-norme* $\| \ \|_\mu$ *et* $\mathscr{F}_{pq}(\mu) = \mathrm{L}^2_{pq}(\mathrm{F}_y)$ *pour toute similarité stationnaire* (y, A) *de* x*; où* F_y *est la mesure spectrale du processus stationnaire* y *et où* $\mathrm{L}^2_{pq}(\mathrm{F}_y)$ *est l'espace des classes d'équivalence de fonctions* ϕ, $\hat{\mathscr{C}}$*-mesurables, à valeurs opérateurs linéaires de* l^2_q *dans* l^2_p *et telles que* $\mathrm{tr} \int_{\hat{\mathrm{T}}} \phi d\mathrm{F} \phi^* < \infty$.

Preuve. — *i)* Cette partie est évidente d'après la définition 6 et la continuité de x.

ii) Soit (y, A) une similarité stationnaire de x et $\mathrm{F}y$ la mesure spectrale du processus stationnaire y qui est continu car x l'est. De la définition 6, on déduit que

$$\beta = \mathrm{A} \circ \beta_y \qquad \text{et} \qquad \beta_y = \mathrm{A}^{-1} \circ \beta \tag{*}$$

où β, β_y désignent les mesures stochastiques de x, y resp. et

$$\forall \mathrm{Q} \in \mathscr{P}_{pq}(\mathrm{T}) \frac{1}{\| \mathrm{A}^{-1} \|} \| \mathrm{Q} \|_{\mu_y} \leq \| \mathrm{Q} \|_\mu \leq \| \mathrm{A} \| \ \| \mathrm{Q} \|_{\mu_y} \tag{**}$$

où $\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \hat{\mathscr{C}} \ \ \mu_y(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = \mathrm{F}y(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

Il s'ensuit de (*), (**) et du théorème 5 que $\mathscr{F}_{pq}(\mu) = \mathscr{F}_{pq}(\mu_y)$.

Par ailleurs d'après le théorème (3.17) de [*28*] on a l'égalité des deux espaces normés $\mathrm{L}^2_{pq}(\mathrm{F}_y)$ et $\mathscr{F}_{pq}(\mu_y)$, d'où le théorème est achevé car $\mathrm{L}^2_{pq}(\mathrm{F}_y)$ est complet et les normes $\| \ \|_\mu$ et $\| \ \|_{\mu_y}$ sont équivalentes d'après (**). □

Remarque. — On montre facilement que pour les processus du Théorème précédent, le domaine spectral $\dot{\mathscr{F}}_{pq}(\mu)$ est isomorphe au domaine temporel $H_{pq}(x)$. En fait plus généralement le théorème d'isomorphisme de Kolmogorov se généralise à des processus V-bornés à domaine spectral complet (cf. [*28*], p. 129).

III. DILATATIONS STATIONNAIRES DE PROCESSUS V-BORNÉS q-DIMENSIONNELS

Considérons un groupe L. C. A. T de groupe dual $\hat{T}$ et, pour $q \in \mathbb{N}^* \cup \{ \infty \}$ un processus V-borné $x : T \mapsto (L^2_{\mathbb{C}}(\Omega))^q$ i. e.

$$x(t) = \int_{T} \langle \lambda/t \rangle \, d\beta(\lambda), \qquad \forall t \in T .$$

Le problème consiste à savoir s'il existe un processus stationnaire $y : T \mapsto (L^2_{\mathbb{C}}(\Omega'))^q$ tel que

$$x(t) = \mathrm{Proj}_{H_{pq}(x)} y(t) \, ; \qquad \forall t \in T , \ \forall p \in \mathbb{N}^* \cup \{ \infty \} . \tag{11}$$

La solution à ce problème a été donnée par [*1*], [*18*], [*19*], [*21*] et [*15*], seulement pour $p = q = 1$ et pour $T = \mathbb{R}$. Nous montrons qu'elle se généralise aussi aux processus V-bornés q-dimensionnels ci-dessus décrits.

PROPOSITION 2. — *Pour $n \geq 2$ considérons l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ et la mesure de Haar m_n normalisée sur la sphère unité A_n de $\mathbb{R}^n$.*

Soit $t_j \in \mathbb{R}^n$ et $x_j \in H$ $\forall j \in \mathbb{N}$, où H est un espace de Hilbert. Alors on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (t_i, t_j) \langle x_i, x_j \rangle_H \leq \frac{\pi}{2} \int_{A_n} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i(r) x_i \right|_H^2 dm_n(r) \tag{12}$$

pourvu que l'on ait les 2 conditions suivantes :

$$\sum_{j=1}^{\infty} | \gamma_j(r) |^2 < \infty \quad \forall r \in A_n \quad \textit{avec} \quad \gamma_j(r) = sgn(t_j, r) \, \| t_j \| \tag{13}$$

où $(\cdot , \cdot)$, $\| \ \|$ sont le produit scalaire et la norme usuels de $\mathbb{R}^n$ et sgn α désignant le signe du nombre réel α et

$$\sum_{j=1}^{\infty} | x_j |_H^2 < \infty . \tag{14}$$

Preuve. — D'abord soit $q \in \mathbb{N}$ et $j = 1, \ldots, q$. Alors en systématisant la méthode de [*23*] (théorème 1) on montre facilement cf. [*28*], p. 158 que l'on a

$$(12') \qquad \sum\sum_{i,j=1}^{q} (t_i, t_j) \langle x_i, x_j \rangle_{\mathrm{H}} \leq \frac{\pi}{2} \int_{\mathrm{A}_n} \left| \sum_{j=1}^{q} \gamma_j(r) x_j \right|_{\mathrm{H}}^2 dm_n(r) .$$

Maintenant considérons le cas où q est infini, on a :

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j(r) x_j \right|_{\mathrm{H}}^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} | \gamma_j(r) |^2 \sum_{j=1}^{\infty} | x_j |_{\mathrm{H}}^2 < \infty$$

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} | (t_i, t_j) \langle x_i, x_j \rangle_{\mathrm{H}} | \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} | \gamma_j(r) |^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} | x_j |_{\mathrm{H}}^2 \right) < \infty$$

Par conséquent (12) se déduit de ce qui précède et de (12'). □

Remarque. — La condition (14) nous incite pour l'étude des dilatations stationnaires à nous limiter à la considération des processus V-bornés à valeurs dans H^q ($q \in \mathbb{N}^* \cup \{ \infty \}$).

Nous avons besoin pour le théorème suivant d'introduire une nouvelle notion de semi-variation de β (cf. [*28*], II. § [*2*]), définie pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{D}$ par

$$(15) \quad \tilde{\beta}(\mathrm{A}) = \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^{q} \sum_{\xi=1}^{n} \gamma_\xi^k \beta_k(\mathrm{A}_\xi) \right|_{\mathrm{H}} ; \ \forall \gamma_\xi^k \in \mathbb{C} \middle/ \sum_{k=1}^{q} | \gamma_\xi^k |^2 \leq 1 ; \ \xi = 1, \ldots, n \right.$$

$$\left. \text{pour toute } \mathscr{D}\text{-sous-partition finie } \{ \mathrm{A}_\xi \}_{\xi=1}^n \text{ de A.} \right\}$$

Notons que pour $q = 1$ on a $\tilde{\beta}(\mathrm{A}) = \dot{\beta}(\mathrm{A})$ et que l'on a toujours

$$(16) \qquad \dot{\beta}(\mathrm{A}) \leq \tilde{\beta}(\mathrm{A}) \leq \hat{\beta}(\mathrm{A}) \qquad \forall \mathrm{A} \in \mathscr{D} .$$

Le théorème suivant généralise le théorème 1 de [*23*] et le lemme 3 de [*15*].

THÉORÈME 7. — *Soit pour* $q \in \mathbb{N}^* \cup \{ \infty \}$ *une mesure* $\beta : (\mathrm{D}, \mathscr{D}) \mapsto \mathrm{H}^q$ *telle que*

$$(17) \qquad \tilde{\beta}(\mathrm{D}) < \infty ,$$

où $(\mathrm{D}, \mathscr{D})$ *est un espace mesurable quelconque.*

Alors il existe une constante $c \geq 0$ telle que pour toutes suites finies $\{ \Lambda_\sigma \}_{\sigma=1}^{s}$ de l_p^2, $\{ \phi_\alpha^\sigma \}_{\substack{\sigma=1,\dots,s \\ \alpha=1,\dots,n}}$ de $\varepsilon_{pq}(\mathscr{D})$, on ait pour tout $p \in \mathbb{N}^* \cup \{ \infty \}$

$$(18) \quad \sum_{\sigma=1}^{s} \sum_{\alpha=1}^{n_\sigma} \langle [\phi_\alpha^\sigma, \phi_\alpha^\sigma]_\mu(\Lambda_\sigma), \Lambda_\sigma \rangle_{l_p^2} \leq c \sup_{\theta \in \mathrm{D}} \sum_{\sigma=1}^{s} \sum_{\alpha=1}^{n_\sigma} \langle \phi_\alpha^\sigma(\theta) \overset{*}{\phi}{}_\alpha^\sigma(\theta)(\Lambda_\sigma), \Lambda_\sigma \rangle_{l_p^2}.$$

Démonstration. — Soit une suite finie $\{ \phi_\alpha^\sigma \}_{\substack{\alpha=1,\dots,n_\sigma \\ \alpha=1,\dots,s}}$ de $\varepsilon_{pq}(\mathscr{D})$, alors il existe une même $\mathscr{D}$-partition finie $\{ \mathrm{A}_\xi \}_{\xi \in \mathrm{L}}$ telle que

$$\phi_\alpha^\sigma = \sum_{\xi \in \mathrm{L}} a_{(\sigma,\alpha);\xi} 1_{\mathrm{A}_\xi}$$

où $a_{(\sigma,\alpha);\xi} \in \mathscr{L}_{pq}$ $\forall \alpha = 1, \dots, n_\sigma$, $\forall \sigma = 1, \dots, s$; $\forall \xi \in \mathrm{L}$.

i) Supposons d'abord que $a_{(\sigma,\alpha);\xi}^{ik} \in \mathbb{R}$ et $\Lambda_i^\sigma \in \mathbb{R}$ pour tout $\sigma, \alpha, \xi, i, k$ variant dans leur domaine respectif, où (a^{ik}), (λ_i) sont resp. les représentations matricielles, dites canoniques de $a \in l_{pq}$, $\Lambda \in l_p^2$ i. e. relatives aux bases canoniques de l_q^2, l_p^2.

Posons

$$\mathrm{A}_\sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} [\phi_\alpha^\sigma, \phi_\alpha^\sigma]_\mu, \qquad \mathrm{A} = \sum_{\sigma=1}^{s} \langle \mathrm{A}_\sigma(\Lambda_\sigma), \Lambda_\sigma \rangle$$

et

$$b_{(\sigma,\alpha);\xi}^{k} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^\sigma a_{(\sigma,\alpha);\xi}^{ik},$$

alors un calcul élémentaire permet d'obtenir que

$$\mathrm{A} = \sum_{(\xi,\eta) \in \mathrm{L}^2} \sum_{k,l=1}^{q} \left[\sum_{\sigma=1}^{s} \sum_{\alpha=1}^{n_\sigma} b_{(\sigma,\alpha);\xi}^{k} b_{(\sigma,\alpha);\eta}^{l} \right] \langle \beta_k(\mathrm{A}_\xi), \beta_l(\mathrm{A}_\eta) \rangle_{\mathrm{H}}$$

Comme $b_\xi^k = \{ b_{(\sigma,\alpha);\xi}^{k} \}_{(\sigma,\alpha)} \in \mathbb{R}^n$ avec $n = \sum_{\sigma=1}^{s} n_\sigma$ il vient d'après proposition 2 que

$$\mathrm{A} \leq \pi/2 \int_{\mathrm{A}_n} \left| \sum_{\xi \in \mathrm{L}} \sum_{k=1}^{q} \gamma_\xi^k(t) \beta_k(\mathrm{A}_\xi) \right|_{\mathrm{H}}^2 dm_n(t)$$

où $\gamma_\xi^k(t) = sgn(b_\xi^k, t) \| b_\xi^k \|$ puisque

$$\sum_{k=1}^{q} | \gamma_\xi^k(t) |^2 = \sum_{\sigma=1}^{s} \sum_{\alpha=1}^{n_\sigma} \langle \phi_\alpha^\sigma(\theta)(\phi_\alpha^\sigma(\theta))^*(\Lambda_\sigma), \Lambda_\sigma \rangle_{l_p^2}$$

$$\leq \sum_{\sigma=1}^{s} \sum_{\alpha=1}^{n_\sigma} \| a_{(\sigma,\alpha);\xi} \|_{\mathscr{L}_{pq}}^2 | \Lambda_\sigma |_{l^2 p}^2$$

où $\phi_\alpha^\sigma(\theta) = a_{(\sigma,\alpha);\xi}$ pour $\theta \in A_\xi$.

Par conséquent la relation (18) est prouvée car

$$\int_{A_n} \left| \sum_{\xi \in L} \sum_{k=1}^{q} \gamma_\xi^k(t) \beta_k(A_\xi) \right|_H^2 dm_n(t) \leq \sup_{\theta \in D} \left[\sum_{\sigma=1}^{s} \sum_{\alpha=1}^{n_\sigma} | [\phi_\alpha^\sigma(\theta)]^*(\Lambda_\sigma) |_{l_q^2}^2 \right] (\tilde{\beta}(D))^2$$

ii) Cas général où $a_{(\sigma,\alpha);\xi}^{ik} \in \mathbb{C}$ et $\lambda_i^\sigma \in \mathbb{C}$ pour tout σ, α, ξ, i, k variant dans leur domaine respectif.

D'une part on décompose les fonctions $\phi_\alpha^\sigma = (\phi_\alpha^\sigma)^R + i(\phi_\alpha^\sigma)^J$ en partie réelle et imaginaire et on montre facilement que

(*1) $[\phi_\alpha^\sigma, \phi_\alpha^\sigma]_\mu \leq 2([\phi_\alpha^\sigma)^R, (\phi_\alpha^\sigma)^R]_\mu + [(\phi_\alpha^\sigma)^J, (\phi_\alpha^\sigma)^J]_\mu$ (cf. [*28*], p. 169)

(*2) $0 \leq \phi_\alpha^\sigma(\theta)[\phi_\alpha^\sigma(\theta)]^* = (\phi_\alpha^\sigma)^R(\theta)(\overset{*}{\phi_\alpha^\sigma})^R(\theta) + (\phi_\alpha^\sigma)^J(\theta)(\overset{*}{\phi_\alpha^\sigma})^J(\theta)$ (cf. [*28*], p. 170).

D'autre part, décomposant aussi $\Lambda_\sigma = \Lambda_\sigma^R + i\Lambda_\sigma^J$ en partie réelle et imaginaire, on obtient (cf. [*28*], p. 170)

$$(*3) \quad \langle \phi_\alpha^\sigma(\theta)\overset{*}{\phi_\alpha^\sigma}(\theta)(\Lambda_\sigma), \Lambda_\sigma \rangle_{l_p^2} = \langle (\phi_\alpha^\sigma)^R(\theta)(\overset{*}{\phi_\alpha^\sigma})^R(\theta)(\Lambda_\sigma^R), \Lambda_\sigma^R \rangle_{l_p^2}$$
$$+ \langle (\phi_\alpha^\sigma)^R(\theta)(\overset{*}{\phi_\alpha^\sigma})^R(\theta)(\Lambda_\sigma^J), \Lambda_\sigma^J \rangle_{l_p^2} + \langle (\phi_\alpha^\sigma)^J(\theta)(\overset{*}{\phi_\alpha^\sigma})^J(\theta)(\Lambda_\sigma^R), \Lambda_\sigma^R \rangle_{l_p^2}$$
$$+ \langle (\phi_\alpha^\sigma)^J(\theta)(\overset{*}{\phi_\alpha^\sigma})^J(\theta)(\Lambda_\sigma^J), \Lambda_\sigma^J \rangle_{l_p^2}.$$

Il s'ensuit de (*1), (*2) et de (*3) que

$$(*4) \quad A \leq 4 \sum_{\sigma=1}^{s} [\langle A_\sigma^R(\Lambda_\sigma^R), \Lambda_\sigma^R \rangle + \langle A_\sigma^R(\Lambda_\sigma^J), \Lambda_\sigma^J \rangle$$
$$+ \langle A^J(\Lambda_\sigma^R), \Lambda_\sigma^R \rangle + \langle A_\sigma^J(\Lambda_\sigma^J), \Lambda_\sigma^J \rangle]$$

où A_σ^R, A_σ^J sont les expressions analogues à A correspondant à $(\phi_\alpha^\sigma)^R$, $(\phi_\alpha^\sigma)^J$ resp. Le théorème est alors achevé en appliquant *i*) à chaque terme du membre de droite de (*4). □

Le résultat essentiel de ce paragraphe est contenu dans le théorème suivant qui généralise celui de [*22*].

THÉORÈME 8. — *Supposons que* D *soit localement compact,* $\mathcal{D}$ *étant sa tribu borélienne et que la mesure* $\beta : (\mathrm{D}, \mathcal{D}) \mapsto \mathrm{H}^q$ *soit telle que* $\hat{\beta}(\mathrm{D}) < \infty$ *pour* $q \in \mathbb{N}^* \cup \{ \infty \}$. *Soit* μ *la bimesure spectrale de* β.

Alors il existe une mesure positive finie τ *sur* $(\mathrm{D}, \mathcal{D})$, *appelée mesure 2-majorante de* β *i. e. telle que l'on ait*

$$(19) \qquad [\phi, \phi]_\mu \leq \int_{\mathrm{D}} \phi(\theta)\overset{*}{\phi}(\theta)d\tau(\theta) \qquad \forall \phi \in \mathrm{L}^2_{pq}(\tau), \ \forall p \in \mathbb{N}^* \cup \{ \infty \}$$

où $\mathrm{L}^2_{pq}(\tau) = \left\{ f : \mathrm{D} \mapsto \mathcal{HS}_{pq} \ \ \textit{mesurable} \Big/ \int | f(\theta) |^2_{\mathcal{HS}_{pq}} d\tau < \infty \right\}$ *et* $\mathcal{HS}_{pq} = \mathcal{HS}(l^2_q, l^2_p)$ *étant l'espace des opérateurs Hilbert-Schmidt de* l^2_q *dans* l^2_p.

Démonstration. — Pour généraliser le résultat de [*22*], nous modifions la fonctionnelle sous-linéaire $\tilde{\mathrm{S}}$ de Pietsch de la façon adéquate suivante : $\forall g \in \mathrm{C}^r_b(\mathbb{R})$

$$\mathrm{S}(g) = \inf \left\{ \begin{array}{l} \sup\limits_{\theta \in \mathrm{D}} \left[g(\theta) + \mathrm{A}(\{ \Lambda_\sigma ; \phi^\sigma_\alpha \} ; \theta) \right] ; \text{pour toutes suites finies} \\ \qquad \{ \Lambda_\sigma \}^s_{\sigma=1} \text{ de } l^2_p \text{ et } \{ \phi^\sigma_\alpha \}_{\substack{\alpha=1,\dots,n_\sigma \\ \sigma=1,\dots,s}} \text{ de } \mathcal{B}_{pq}(\mathcal{D}) \end{array} \right\}$$

où

$$\mathrm{A}(\{ \Lambda_\sigma ; \phi^\sigma_\alpha \} ; \theta) = \sum_{\sigma=1}^{s} \sum_{\alpha=1}^{n_\sigma} \langle \left[c \, . \, \phi^\sigma_\alpha(\theta)\overset{*}{\phi^\sigma_\alpha}(\theta) - [\phi^\sigma_\alpha, \phi^\sigma_\alpha]_\mu \right](\Lambda_\sigma), \Lambda_\sigma \rangle_{l^2_p} .$$

i) Alors par un procédé analogues à [*22*] on montre (cf. [*28*], p. 178-179) qu'il existe sur l'espace $\mathrm{C}^r_b(\mathrm{D})$ des fonctions réelles continues bornées sur D, une forme linéaire positive L telle que (*1) $\mathrm{L}(g) \leq \mathrm{S}(g)$, $\forall g \in \mathrm{C}^r_b(\mathrm{D})$.

Il est immédiat que la forme linéaire positive se prolonge en une forme linéaire continue positive unique $\tilde{\mathrm{L}}$ sur $\mathrm{C}_0(\mathrm{D})$, l'espace des fonctions complexes continues sur D et s'annulant à l'infini (cf. [*15*], lemme 4). Par conséquent d'après le théorème de représentation de Riesz (cf. [*25*], Th. 6.19), il existe une mesure positive régulière τ_0 telle que

$$(*2) \qquad \tilde{\mathrm{L}}(f) = \int_{\mathrm{D}} f(\lambda)d\tau_0(\lambda) \qquad \forall f \in \mathrm{C}_0(\mathrm{D}) .$$

ii) Soit $\phi \in \mathrm{C}_c(\mathrm{D}, \mathcal{HS}_{pq})$, l'espace des fonctions continues sur D à support compact et à valeurs dans $\mathcal{HS}_{pq}$. Alors pour tout Λ de l^2_p la fonction

$$g_\Lambda : \theta \to \langle \phi(\theta)\phi^*(\theta)(\Lambda), \Lambda \rangle \, l^2_p$$

est un élément de $C_c(D)$ (cf. [*28*], corollaire (26)) et $\phi \in \mathcal{F}_{pq}(\mu)$ car ϕ est à image compacte dans $\mathcal{HS}_{pq}$. Pour ces fonctions g_Λ, on a

$$(*3) \quad S(-c.g_\Lambda) \leq \sup_{\theta\in D} [-g_\Lambda(\theta) \times c + c \langle \phi(\theta)\overset{*}{\phi}(\theta)(\Lambda), \Lambda \rangle_{l_p^2} - \langle [\phi, \phi]_\mu(\Lambda), \Lambda \rangle_{l_p^2} = - \langle [\phi, \phi]_\mu(\Lambda), \Lambda \rangle_{l_p^2}.$$

On déduit de (*i*) et de (*3) que

$$\int_D \langle \phi(\theta)\overset{*}{\phi}(\theta)(\Lambda), \Lambda \rangle_{l_p^2} d\tau = L(c.g_\Lambda) \geq -S(-c.g_\Lambda) \geq \langle [\phi, \phi]_\mu(\Lambda), \Lambda \rangle_{l_p^2}$$

i. e.

$$(19') \qquad [\phi, \phi]_\mu \leq \int_D \phi(\theta)\overset{*}{\phi}(\theta) d\tau \qquad \forall \phi \in C_c(D, \mathcal{HS}_{pq})$$

en posant $\tau = C.\tau_0$.

iii) On montre maintenant que l'inégalité précédente (19′) se prolonge aux fonctions de $L^2_{pq}(\tau)$ qui est l'espace des fonctions f définies sur D, $\mathcal{HS}_{pq}$-valuées telles que $\int_D |f|_E^2 d\tau < \infty$.

En effet soit $f \in L^2_{pq}(\tau)$, d'après le théorème de Lusin (cf. [*8*], § 55), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble C qui soit G_δ-compact dans D tel que $\tau(D\backslash C) < \varepsilon$ et tel que la restriction de f à C soit une fonction continue, donc il existe une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $C_c(D, \mathcal{HS}_{pq})$, convergente vers f τ-*pp* et telle que $|f_n|_E \leq |f|_E$. Comme $f \in L^2_{pq}(\tau)$ alors

$$\lim_{n\infty} \int_D |f_n - f_m|_E^2 d\tau = 0$$

donc $f_n \to f$ $\dot{\beta}$-*pp* car $\tau \gg \dot{\beta}$ (cf. [*28*], p. 181). Il s'ensuit d'après le théorème 4 que $f \in \mathcal{F}_{pq}(\beta)$. Le théorème est donc achevé car $\mathcal{B}(\mathcal{D}, \mathcal{HS}_{pq}) \subset L^2_{pq}(\tau)$. □

Remarque. — Quand q est fini, il est récemment montré dans [*23 bis*] que le théorème 8 précédent est encore vrai pour un espace mesurable $(D, \mathcal{D})$ tout à fait quelconque.

Enfin la réponse au problème posé au début du paragraphe est dans le résultat suivant dont la démonstration découle de manière évidente du Théorème 8 précédent (cf. [*28*], p. 191).

THÉORÈME 9. — *Soit* $x : \mapsto L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)^q$ *tel que*

$$x(t) = \int_{\hat{T}} \langle \lambda/t \rangle \, d\beta(\lambda), \qquad \forall t \in T$$

où T *est un groupe L. C. A. de groupe dual* $\hat{T}$ *et* $q \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.

Si $\hat{\beta}(\hat{\mathrm{T}}) < \infty$ *alors il existe un processus stationnaire continu*

$$y : \mathrm{T} \mapsto \mathscr{L}(l_q^2, \mathrm{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega'))$$

tel que

$$x(t) = \mathrm{Proj}_{\mathrm{H}_{pq}(x)} y(t), \qquad \forall t \in \mathrm{T},\ \forall p \in \mathbb{N}^* \cup \{ \infty \}.$$

Remarque. — Abreu (cf. [*1*]) a donné dans le cas où $q = 1$ une construction « pratique » d'une mesure 2-majorante de β à partir de μ en supposant que μ est une mesure sur la tribu produit $\mathscr{D} \otimes \mathscr{D}$. Cette construction peut se généraliser à $q \in \mathbb{N}^* \cup \{ \infty \}$ en supposant dans le cas de q infini que μ est à variation totale finie (cf. [*28*], p. 208).

Par ailleurs on peut noter que pour des processus L. S. de dimension $q \in \mathbb{N}^* \cup \{ \infty \}$ on peut construire aisément une de leurs dilatations stationnaires. En effet soit un processus $x : \mathrm{T} \mapsto (\mathrm{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega))^q$ pour $\mathrm{T} = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{N}^* \cup \{ \infty \}$, si la fonction d'auto-corrélation moyenne R de x existe i. e.

$$\mathrm{R}(\tau) = \operatorname*{Lim}_{s\infty} s^{-1} \int_0^s \mathrm{R}(t + \tau, t) dm(t)$$

et si R est continu (i. e. x est à spectre) alors R est la fonction de corrélation d'un processus stationnaire $y : \mathrm{T} \mapsto (\mathrm{L}_{\mathbb{C}}^2(\Omega'))^q$. De plus, du point de vue de la prédiction linéaire, il est important que la nature (déterministe ou régulière) de x soit la même que celle de y. Pour que cette propriété soit vérifiée il suffit de supposer que x soit un processus L. S., il existe alors un opérateur hermitien positif $\mathrm{B} : \mathrm{H}_{pq}(y) \mapsto \mathrm{H}_{pq}(x)$ et une constante $\mathrm{M} > 0$ avec $\mathrm{M}^{-1} \leq \| \mathrm{B} \| \leq \mathrm{M}$ tels que (y, B) soit une similarité stationnaire de x (cf. [*20*]).

De la relation (*1) de [*28*], p. 137, on déduit aisément que M. F_y est une mesure 2-majorante de β où F_y est la mesure spectrale de y.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] J. L. ABREU, H-valued generalized functions and orthogonally scattered measures. *Advances in Math.*, t. **19**, n° 13, 1976, p. 382-412.

[*2*] G. D. ALLEN, F. J. NARCOWICH, J. O. WILLIAMS, An operator version of a theorem of Kolmogorov. *Pacific Journal of Math.*, t. **61**, n° 2, 1975, p. 305-312.

[*3*] S. BOCHNER, Stationarity, boundedness, almost periodicity of random valued functions. *Proceed. of the 3rd Berkeley symposium on math. stat. and proba.* Univ. of California Press, 1956, p. 7-27.

[*4*] H. CRAMER, *On the linear prediction problem for certain stochastic processes.* ARTIV für MAT-Band, t. **4**, n° 6, 1959, p. 45-53.

[*5*] N. DUNFORD, J. T. SCHWARTZ, Part I, Linear operators. *Interscience.* New York, Wiley, 1966.

[*6*] J. GORNIAK, Remarks on positive définite operator valued functions in linear spaces. Springer Verlag, *Lectures Notes in Math.*, t. **656**, 1978, p. 37-44.

[7] J. GORNIAK, A. WERON, Aronszajn-Kolmogorov type theorem for positive définite kernels in locally corvex spaces preprint (to appear in Studia Math.), 1978.

[8] P. R. HALMOS, *Measure theory*. Van Nostrand, New York, 1950.

[9] M. LŒVE, *Probability theory*. Van Nostrand (2e édition), 1960, Princeton, Toronto, London, Melbourne.

[10] R. M. LOYNES, On generalized positive definite functions. *Proc. London Math. Soc.*, t. **3**, n° 15, 1965, p. 373-384.

[11] R. M. LOYNES, On generalization of second-order stationarity. *Proc. London. Math. Soc.*, t. **3**, 15, 1965, p. 385-398.

[12] R. M. LOYNES, Linear operators in V H-spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **116**, 1965, p. 167-180.

[13] V. MANDREKAR, H. SALEHI, The square integrability of operator valued functions with respect to a non-negative operator valued measure and the Kolmogorov Isomorphism theorem. *Indiana. Univ. Math. J.*, t. **20**, n° 6, 1970, p. 545-563.

[14] M. M. MARTIN, Utilisation des méthodes de l'Analyse spectrale à la prévision linéaire de certains processus stationnaires. *Rev. CETHEDEC*, t. **16**, 1968, p. 137-148.

[15] A. G. MIAMÉE, H. SALEHI, Harmonizability, V-boundedness and stationary dilation of stochastic Processes. *Indiana. Univ. Math. J.*, t. **27**, n° 1, 1978, p. 37-50.

[16] P. MASANI, Dilatations as propagators of Hilbertian varieties. *SIAM J. Math. Anal.*, t. **9**, n° 3, june 1978, p. 414-456.

[17] H. NIEMI, Stochastic processes as Fourier transforms for stochastic measures. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Series A. I. Math.*, t. **591**, 1975.

[18] H. NIÉMI, On the support of a bimesure and orthogonally scattered vector measures. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Series A. I. Math.*, t. **I**, 1975, p. 249-275.

[19] H. NIÉMI, On stationary dilations and the linear prediction of certain stochastic processes. *Comm. Physico. Math.*, t. **45**, n° 4, 1975, p. 111-130.

[20] H. NIÉMI, On the linear prediction problems of certain non-stationary stochastic processes. *Math. Scand.*, t. **39**, 1976, n° 1, p. 146-160.

[21] H. NIÉMI, On orthogonally scattered dilations of bounded vector measures. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Séries I. I Math.*, vol. **3**, 1977, p. 43-52.

[22] A. PIETSCH, p-majorisierbare vektorwertige Masse. *Wiss Z. F. Schiller, Univ. Jena Math. Naturwiss.* Reihe, t. **18**, 1969, p. 243-247.

[23] R. ROGGE, Masse mit werten in einem Hilbertraum. *Wiss Z. F. Schiller, Univ. Jena Math. Naturwiss.* Reihe, t. **18**, 1969, p. 253-257.

[23 *bis*] M. ROSENBERG, Minimum trace quasi-isometric dilations of operator-valued measures and minimum trace orthogonally-scattered dilations of multivariate vector measures. *Jour. of Multivariate Anal.* (à paraître).

[24] A. Yu. ROZANOV, Spectral Analysis of Abstract functions. *SIAM The theory of Proba. and. Appl.*, t. **IV**, n° 3, 1959, p. 271-287.

[25] W. RUDIN, *Real and complex Analysis*. Mac Graw Hill. New York, 1974.

[26] D. TJÖSTHEIM, J. B. THOMAS, Some properties and examples of random processes that are almost wide sense stationary. *I. E. E. E. Trans. Inf. Th.*, t. **21**, 1975, p. 257-262.

[27] A. WERON, Prediction theory in Banach spaces. *Lecture Notes in Math.*, t. **472**, 1975, p. 207-228, Springer-Verlag. Berlin.

[28] B. TRUONG-VAN, *Contribution à l'étude des processus V-bornés multidimensionnels*. Thèse de 3e Cycle, Université P. Sabatier, Toulouse, 1979.

(Manuscrit reçu le 23 septembre 1980).