ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ALAIN-SOL SZNITMAN

Perturbations ponctuelles d'évolutions : construction d'espaces stationnaires

Annales de l'I. H. P., section B, tome 16, nº 4 (1980), p. 299-326
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1980__16_4_299_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XVI, nº 4, 1980, p. 299-326. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Perturbations ponctuelles d'évolutions : construction d'espaces stationnaires

par

Alain-Sol SZNITMAN
Laboratoire de Probabilités associé au C. N. R. S., nº 224,
4, place Jussieu, Tour 56, F 75230 Paris

SUMMARY. — We try to develop in this paper a method to construct stationary models of queueing systems, using iteration of the evolutive models, and then we give applications of this method that are not all concerned with queueing theory.

INTRODUCTION

Une des questions qui apparaît dans diverses situations en théorie des files d'attente, est la suivante : on sait construire pour un système de files un modèle probabiliste non stationnaire (dont par exemple, l'état initial est le repos).

On s'intéresse alors aux propriétés d'équilibre asymptotique de ce modèle, et pour cela on cherche à construire le cas échéant, un modèle stationnaire du système (voir les travaux de [*2*] et [*14*]).

Dans le travail qui suit, on a essayé de développer une démarche générale pour attaquer ce problème; et on a principalement utilisé deux idées :

La première est de construire les modèles stationnaires à partir des modèles évolutifs par itération, au lieu de se donner *a priori*, ce qui n'est d'ailleurs pas toujours possible, l'espace stationnaire et de construire sur celui-ci les variables caractéristiques du système.

La seconde est de décrire les systèmes étudiés à l'aide de semi-groupes d'évolution perturbés à des instants discrets par des discontinuités (en général, le semi-groupe représentant l'évolution spontanée du système à partir d'un état donné sans arrivée extérieure de clients, et la discontinuité la modification du système due à l'entrée d'un client).

Ainsi dans l'exemple de la file de renouvellement, premier arrivé premier servi (voir [2]), étant donné S et T, variables aléatoires positives indépendantes, représentant respectivement la quantité de travail demandée par le client qui arrive à l'instant 0 et l'interarrivée, on cherche une variable aléatoire positive W indépendante de (S, T) et vérifiant $W \overset{\mathcal{L}}{=} (W + S - T)_+$ (*).

Dans cet exemple, S est la discontinuité qui perturbe le semi-groupe $S_t x = (x - t)_+$ représentant l'évolution spontanée de la charge de la file.

Un des intérêts de ce point de vue est de mettre en parallèle des questions de files d'attente, avec des questions de mécanique statistique, où des particules évoluent suivant un semi-groupe tant qu'elles restent à l'intérieur d'une enceinte et subissent une discontinuité quand elles rencontrent la paroi de l'enceinte (échange thermique avec une source) ou bien avec des problèmes de perturbation ponctuelle de semi-groupes étudiés en analyse fonctionnelle (par exemple le problème du volcan où on cherche un modèle stationnaire à la perturbation du semi-groupe de la chaleur opérant sur $C_0(R^n)$, par des discontinuités d_m dans $C_0(R^n)$, jouant le rôle de « pierres chaudes » tombant sur R^n aux temps T_m).

Il est à noter que la construction des modèles stationnaires permet d'obtenir des solutions à des équations analogues à (*) (dont la résolution analytique est assez compliquée, voir [5]).

Terminons cette introduction par quelques indications sur le contenu des différentes parties.

La première partie développe la « méthode générale » et ramène le problème de la construction de modèles stationnaires, par un argument de point fixe de type espace vectoriel topologique à une étroite compacité relative des itérées de la probabilité décrivant le modèle évolutif.

La seconde partie s'intéresse au cas où d'emblée on se donne la loi du processus ponctuel stationnaire marqué perturbateur. On donne deux applications : le cas d'une file dont l'évolution du serveur n'est plus décrite par l'équation $y' = -1(y > 0)$, mais par une équation différentielle stochastique, et un petit modèle de chocs de particules.

La troisième partie traite le cas d'une file d'attente premier arrivé premier servi, pour laquelle le temps de service du client qui entre est conditionnellement indépendant du processus d'entrée et du passé lorsqu'on se donne la charge du serveur à l'entrée du client.

Et la quatrième partie donne des exemples, dans l'esprit de la seconde partie où les semi-groupes d'évolution perturbés sont du type de ceux rencontrés en analyse fonctionnelle (les modèles stationnaires obtenus présentent un intérêt supplémentaire dans le cas de semi-groupes non réversibles, tels que le semi-groupe de la chaleur).

Pour les questions concernant les processus ponctuels stationnaires, le lecteur est renvoyé à [8] et [9]. L'appendice contient quelques points sur différentes topologies et tribus d'espaces que nous utiliserons.

PREMIÈRE PARTIE

MODÈLES ÉVOLUTIFS ET MODÈLES STATIONNAIRES

Soit M(resp M_+) l'espace des mesures ponctuelles simples doublement infinies sur $\mathbb{R}$ (resp infinies sur $\mathbb{R}_+$ et ne chargeant pas 0) muni de la tribu borélienne vague et du flot canonique $(\tau_t, t \in \mathbb{R})$ (resp $\mathbb{R}_+$) des translations. On appellera espace de type S (resp E) un espace mesurable $(\Omega, \mathscr{A})$ muni d'un flot $\theta = (\theta_t, t \in \mathbb{R})$ (resp d'un semi-flot $(\theta_t, t \in \mathrm{R}_+)$) mesurable et d'un processus ponctuel stationnaire N appliquant Ω dans M (resp M_+), ces espaces sont dits probabilisés si ils sont en outre munis d'une probabilité invariante.

Par définition un transport d'un espace $(\Omega_1, \theta^1, \mathrm{N})$ de type S dans un espace $(\Omega, \theta^2, \mathrm{N})$ de type S ou E est une application mesurable ϕ de Ω_1 dans Ω_2 telle que $\theta_t^2 \circ \phi = \phi \circ \theta_t^1$ pour tout $t \in \mathrm{R}$ ou $\mathbb{R}_+$ et telle que $\mathrm{N}^1 = \mathrm{N}^2 \circ \phi$ sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+^*$; si ces espaces sont probabilisés on supposera en outre que $\phi \circ \mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_2$.

Pour tout espace $(\Omega, \theta, \mathrm{N})$ de type S on pose $\widehat{\Omega} = \{ \omega \in \Omega ; \mathrm{N}(\omega, \{ 0 \}) = 1 \}$. Si $(\Omega, \theta, \mathrm{N})$ est de type S (resp E) et si $\mathrm{T}_1(\omega) = \inf \{ t : t > 0, \mathrm{N}(\omega, t) = 1 \}$ on note $\widehat{\theta}$ l'application mesurable θ_{T_1} de $\widehat{\Omega}$ dans $\widehat{\Omega}$ (resp de Ω dans Ω), enfin on désigne par C la classe des mesures positives bornées sur $\widehat{\Omega}$ (resp Ω) telles que $\widehat{\theta} \circ m = m$ et $\int \mathrm{T}_1 dm = 1$.

On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 1. — Soit Ω un espace topologique polonais ayant une structure d'espace de type E pour sa tribu borélienne. Supposons la classe C associée à Ω non vide, alors il existe au moins un espace Ω_1 de type S et un transport ϕ de Ω_1 vers Ω tels que pour toute mesure positive bornée m sur Ω, de la classe C il existe une et une seule probabilité stationnaire sur l'espace Ω_1 dont la mesure de Palm admette m pour image par ϕ.

Un tel triplet $\Omega_1 \xrightarrow{\phi} \Omega$ sera dit avoir la propriété de relèvement.

Démonstration. — Considérons $(\Omega, \widehat{\theta})$, la classe C étant non vide, on peut construire, voir [*12*], un espace $(\widehat{\Omega}_1, T)$ où T est une application bijective bi-mesurable de $\widehat{\Omega}_1$ dans $\widehat{\Omega}_1$, et une application Ψ de $\widehat{\Omega}_1$ dans Ω tels que : $\Psi \circ T = \widehat{\theta} \circ \Psi$ et que pour toute mesure m de C il existe une unique mesure M positive bornée invariante par T telle que $\Psi \circ M = m$ (M vérifie alors : $\int \widehat{T}_1 dM = 1$ si $\widehat{T}_1 = T_1 \circ \Psi$. Et on peut même supposer que sur $\widehat{\Omega}_1$: $\sum_{n \geq 0} \widehat{T}_1 \circ T^{-n} = \infty$.

Si on définit Ω_1 dans $\widehat{\Omega}_1 \times \mathbb{R}_+$ comme l'ensemble des couples (ω, s) vérifiant $\widehat{T}_1(\omega) > s$ et que l'on munit Ω_1 de la trace de tribu produit, alors on peut construire sur Ω_1 le flot spécial θ^1, voir [*13*], associé à $\widehat{T}_1$ et T. On définit sur $\widehat{\Omega}_1$ les $\widehat{T}_n$ par :

$$\sum_{0}^{n-1} \widehat{T}_1 \circ T^l \quad \text{si} \quad n > 0, \qquad 0 \quad \text{si} \quad n = 0, \; - \sum_{1}^{-n} \widehat{T}_1 \circ T^{-l} \quad \text{si} \quad n < 0,$$

et sur Ω_1 le processus ponctuel stationnaire $N_1 : (\omega, s) \to \tau_s \circ \Sigma \varepsilon_{\widehat{T}_n(\omega)}$. Il est aisé de vérifier que $(\Omega_1, \theta^1, N^1)$ a une structure d'espace de type S, de plus si ϕ de Ω_1 dans Ω est définie par $\phi(\omega, s) = \theta_s \circ \Psi(\omega) \in \Omega$ alors ϕ est un transport de Ω_1 dans Ω.

Si m est une mesure de C elle se remonte en M sur $\widehat{\Omega}_1$ et alors on utilise le théorème de construction des probabilités stationnaires qui se trouve dans [*8*] ou dans [*9*] pour assurer l'existence de P_1 sur Ω_1 stationnaire de mesure de Palm M. L'unicité de ce relèvement découle alors de l'unicité du relèvement des mesures de C à $(\widehat{\Omega}_1, T)$. ■

Nous allons maintenant étudier un cas particulier de la proposition précédente : étant donné un espace polonais D, l'espace $M \times D^Z$ est de type S pour le flot θ : $\theta_t(m, (d_n, n \in Z)) = [\tau_t(m), (d_{n+v}, n \in Z)]$ où $v = m(]0, t])$ si $t > 0$ et $- m(]t, 0])$ si $t \leq 0$; et le processus ponctuel $N[m, (d_n, n \in Z)] = m$. De même l'espace $M_+ \times D^{N_*}$ est naturellement un espace de type E et nous noterons p le transport canonique du premier espace sur le second.

Soit Π_1 un fermé invariant de $M \times D^Z$ tel que $\Omega_1 = p(\Pi_1)$ soit polonais dans $M_+ \times D^{N_*}$.

Considérons alors un espace polonais E et θ_e une extension du semi-flot sur Ω_1 à $\Omega_e = \Omega_1 \times E$, l'espace $\Pi_1 \times E^Z$ est alors naturellement muni d'une structure d'espace de type S et on considère Π_S la partie mesurable stable par le flot, éventuellement vide des $\bar{\omega} = [\omega, (e_n, n \in Z)]$ de $\Pi_1 \times E^Z$ qui vérifient : pour $k \in N$ et $n \in Z e_{n+k} = \mathrm{proj}_E \circ \theta^e_{T_k} \circ \Psi \circ \theta_{T_n}(\bar{\omega})$ où Ψ est l'application mesurable de $\Pi_1 \times E^Z$ dans Ω_e qui à $[\omega, (e_q, q \in Z)]$ associe $(p(\omega), e_0)$. Si Π_S n'est pas vide, on définit sur Π_S le processus stationnaire X_t à valeurs dans E qui à $(t, \bar{\omega})$ associe $X_t(\bar{\omega}) = \mathrm{proj}_E \circ \theta^e(t - T_n(\bar{\omega}), \Psi \circ \theta_{T_n}(\bar{\omega}))$ où $n \in Z$ est tel que $T_n(\bar{\omega}) \leq t$ (pour la définition des T_n on pourra se reporter à l'appendice).

On a alors la proposition :

PROPOSITION 2. — Supposons que les hypothèses précédentes à savoir D, E polonais, Π_1 fermé dans $M \times D^Z$ et stable par le flot, $\Omega_1 = p(\Pi_1)$ polonais dans $M_+ \times D^{N*}$ sont vérifiées et que la classe C associée à $\Omega_e = \Omega_1 \times E$ n'est pas vide, alors Π_S n'est pas vide et si $\bar{p}$ est le transport de Π_S vers Ω_e qui a $\bar{\omega}$ associe $(\mathrm{proj}_{\Pi_1}(\bar{\omega}), X_0(\bar{\omega}))$, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\Pi_1 \arrow[d, "p"'] & \Pi_S \arrow[l, dashed, "\mathrm{proj}_{\Pi_1}"'] \arrow[d, "\bar{p}"] \subset \Pi_1 \times E^Z \\
\Omega_1 & \Omega_e = \Omega_1 \times E \arrow[l, dashed, "\mathrm{proj}_{\Omega_1}"]
\end{tikzcd}$$

et $\Pi_S \xrightarrow{\bar{p}} \Omega_e$ a la propriété de relèvement.

Démonstration. — La commutativité du diagramme précédent est immédiate. Remarquons alors que sur Π_S on a $\theta^e_{-T_n(\bar{\omega})}(\Psi \circ \theta_{T_n}(\bar{\omega})) = \bar{p}(\bar{\omega})$ si $n \leq 0$. Ce qui permet de vérifier que $\bar{p}$ est un transport puisque :

si $t \geq 0$ et $\bar{\omega} = [\omega, (e_n, n \in Z)]\bar{p} \circ \theta_t(\bar{\omega}) = (p \circ \theta_t(\omega), X_t(\bar{\omega})) = (\theta_t \circ p(\omega), X_t(\bar{\omega}))$ et $X_t(\bar{\omega}) = \mathrm{proj}_E \circ \theta^e_t \circ \theta^e_{-T_0(\bar{\omega})} \circ \Psi \circ \theta_{T_0}(\bar{\omega}) = \mathrm{proj}_E \circ \theta^e_t \circ \bar{p}(\omega)$ d'où $\bar{p} \circ \theta_t(\bar{\omega}) = \theta^e_t \circ \bar{p}(\bar{\omega})$.

Vérifions alors que Π_S est non vide et $\Pi_S \xrightarrow{\bar{p}} \Omega_e$ a la propriété de relèvement :

On utilise la proposition précédente qui affirme l'existence de Π de type S et de ϕ transport de Π vers Ω_e tels que $\Pi \xrightarrow{\phi} \Omega_e$ ait la propriété de relèvement.

Soit sur $\widehat{\Pi}$ les applications D et G définies par $G = \mathrm{proj}_E \circ \Phi$ et D unique application sur $\widehat{\Pi}$ telle que $d_n \circ \phi = D \circ \theta_{T_n}$ si $n \geq 1$, où d_n est la $n$ième coordonnée en D sur l'espace $\Omega_e \subset M_+ \times D^{N*} \times E$.

On a alors un transport naturel H de Π vers $M \times D^Z \times E^Z$ qui à $\tilde{\omega}$ associe $[N(\tilde{\omega}), (D \circ \theta_{T_n}(\tilde{\omega}), n \in Z), (G \circ \theta_{T_n}(\tilde{\omega}), n \in Z)]$.

Comme Π_1 est fermé et stable par le flot dans $M \times D^Z$ on en déduit (voir la fin de l'appendice) que si $\omega \in \Pi$ alors $[N(\tilde{\omega}), (D \circ \theta_{T_n}(\tilde{\omega}), n \in Z)]$ est dans Π_1. Donc en fait H est à valeurs dans $\Pi_1 \times E^Z$ et nous allons voir dans un instant que H est à valeurs dans Π_S.

En effet si $n \in Z$ et $k \in N$

$$G \circ \theta_{T_{n+k}} = \text{proj}_E \circ \phi \circ \theta_{T_{n+k}} = \text{proj}_E \circ \theta_{T_k} \circ \phi \circ \theta_{T_n}.$$

Or sur $\widehat{\Pi}\phi = \Psi \circ H$ donc

$$G \circ \theta_{T_{n+k}} = \text{proj}_E \circ \theta_{T_k} \circ \Psi \circ H \circ \theta_{T_n} = \text{proj}_E \circ \theta_{T_k} \circ \Psi \circ \theta_{T_n} \circ H$$

ce qui prouve que H est à valeurs dans Π_S.

Enfin on a

$$\begin{aligned} \bar{p} \circ H = \Phi \quad \text{car} \quad \phi(\tilde{\omega}) &= \theta^e_{-T_0(\tilde{\omega})} \circ \phi \circ \theta_{T_0}(\tilde{\omega}) \\ &= \theta^e_{-T_0(\tilde{\omega})} \circ \Psi \circ H \circ \theta_{T_0}(\tilde{\omega}) = \theta^e_{-T_0(\tilde{\omega})} \circ \Psi \circ \theta_{T_0} \circ H(\tilde{\omega}) \\ &= \bar{p} \circ H(\tilde{\omega}). \end{aligned}$$

On déduit de l'égalité $\bar{p} \circ H\ \phi$ l'existence du relèvement, la forme produite de Π_S assurant son unicité on a le résultat annoncé. ■

Donnons un exemple d'extension à Ω_e du semi-flot sur Ω_1 :

PROPRIÉTÉ 3. — Soient D, E, Π_1, Ω_1 comme précédemment, S semi-groupe mesurable sur E et A application mesurable de D $\times$ E à valeurs dans E, alors l'application F mesurable de $\mathbb{R}_+ \times \Omega_1 \times E \to E$ définie par :

$$F(0, ., e) = e, \qquad \text{sur} \qquad \{ T_n \leq t < T_{n+1} \}$$

(avec la convention $T_0 = 0$)

$$F_t = S_{t-T_n} \circ F_{T_n} \qquad \text{et} \qquad F_{T_{n+1}} = A(d_{n+1}, S_{T_{n+1}-T_n} \circ F_n)$$

est telle que $(t, \omega_1, e) \to (\theta_t(\omega_1), F(t, \omega_1, e))$ est une extension mesurable à Ω_e du semi-flot θ sur Ω_1.

Terminons cette partie en donnant un résultat classique qui nous permettra d'avoir un critère pour montrer que la classe C associée à Ω de type E n'est pas vide.

PROPOSITION 4. — Soit T une transformation continue sur l'espace polonais Ω et soit P une probabilité sur Ω telle que la suite $(T^n \circ P, n \in \mathbb{N})$ soit étroitement relativement compacte. Alors l'enveloppe convexe étroitement fermée de cette suite contient une probabilité invariante par T.

Démonstration. — Grâce aux hypothèses l'enveloppe convexe fermée de la suite $(T^n \circ P,\ n \in \mathbb{N})$ est compacte dans l'espace localement convexe séparé des mesures bornées sur Ω. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Markov Kakutani (voir [*1*]) pour conclure.

Remarque. — Dans le cas où Ω est simplement métrique séparable, si les $(T^n \circ P, n \in N)$ sont tendues, la conclusion de la proposition 4 reste valable, on utilise alors le fait que si des probabilités sont tendues sur Ω alors elles sont étroitement relativement compactes (voir [*10*]).

DEUXIÈME PARTIE

PERTURBATION D'UNE ÉVOLUTION PAR UN PROCESSUS PONCTUEL STATIONNAIRE

Nous allons nous placer dans la situation de la propriété 3 de la première partie, c'est-à-dire D et E seront des espaces polonais, Π_1 sera une partie fermée stable par le flot de $M \times D^Z$, $\Omega_1 = p(\Pi_1)$, qui est une partie de $M_+ \times D^{\mathbb{N}^*}$, sera supposé polonais, S sera un semi-groupe continu sur E, espace des états et A une application continue de $D \times E$ à valeurs dans E qui déterminera la perturbation de l'évolution S. Ceci permettra de considérer sous certaines hypothèses supplémentaires, l'espace Π_S de type S, construit dans la première partie, en vertu des propositions 2 et 3.

Plus précisément, nous allons nous intéresser au problème suivant :

Étant donné une probabilité stationnaire P_1 *sur* Π_1, *admettant la probabilité de Palm* Q_1 *sur* $\widehat{\Pi}_1$, *peut-on trouver un modèle stationnaire à l'évolution* S *perturbée par* A *aux temps* T_n, *c'est-à-dire un triplet* $(\Pi, \Psi, (X_t, t \in \mathbb{R}))$ *où* Π *est un espace de type* S *probabilisé*, Ψ *un transport de* Π *vers* Π_1 *et* $(X_t, t \in R)$ *un processus stationnaire sur* Π *à valeurs dans* E *vérifiant :*

sur $\{ T_{n+1} \leq t < T_{n+1} \} \; X_t = S_{t-T_n} \circ X_{T_n}$ et $X_{T_{n+1}} = A(d_{n+1}, S_{\tau_n} \circ X_{T_n})$ (on note $\tau_l = T_{l+1} - T_l$, pour l dans Z).

Remarque. — Dans le cas classique de la file d'attente stationnaire à un serveur, de type premier arrivé, premier servi (voir [*2*]), on cherche à construire sur un espace de Palm sous des hypothèses convenables, une variable aléatoire W, positive finie, représentant la charge du serveur, juste avant l'arrivée du client au temps 0, et vérifiant la relation $W \circ \widehat{\theta} = (W + \sigma - \tau)_+$ où σ représente la charge du client arrivant au temps 0 et $\tau = \tau_0 = T_1$ l'interarrivée.

Ce problème correspond à la perturbation du semi-groupe $S(x, t) \to (x - t)_+$ sur $E = \mathbb{R}_+$, par la charge σ_n appartenant à $D = \mathbb{R}_+$ du client entrant dans le système au temps T_n (A n'est autre que $(\sigma, x) \to \sigma + x$ de $D \times E$ dans E). Il est à noter que sous l'hypothèse P_1 ergodique et $\int \sigma dQ_1 < \int \tau dQ_1$, on peut choisir pour modèle stationnaire à cette perturbation, une partie invariante pleine de Π_1.

Revenons au cas général, on a alors le résultat :

PROPOSITION 5. — Soit $a \in E$ et soient sur $\widehat{\Pi}_1$ les variables aléatoires Z_n, $n \in \mathbb{N}$ définies par : $Z_0 = a$ et $Z_{n+1} \circ \widehat{\theta} = A(d_1, S_{\tau_0} \circ Z_n)$.

Alors si la suite $(Z_n, n \in \mathbb{N})$ de v. a. est étroitement relativement compacte en loi, on peut munir Π_S d'une probabilité stationnaire P admettant la probabilité de Palm $\mathbb{Q}$, et alors $(\Pi_S, \Psi = \mathrm{proj}_{\Pi_1}, (X_t, t \in \mathbb{R}))$ est un modèle stationnaire de l'évolution S perturbée par A aux temps T_n.

De plus si $\mathscr{F}-$ est la tribu $\sigma(\tau_n, n < 0$ et $d_n, n \leq 0)$ sur $\widehat{\Pi}_S$ et $\mathscr{F} = \sigma(\tau_n, n \in Z, d_l, l \in Z)$ sur $\widehat{\Pi}_S$ alors X_0 est conditionnellement indépendante de $\mathscr{F}$ donné $\mathscr{F}-$ pour la probabilité $\mathbb{Q}$ (on continue de noter τ_n et d_l les applications $\tau_n \circ \Psi$ et $d_l \circ \Psi$, sur Π_S, pour ne pas alourdir l'écriture).

Démonstration. — Nous allons utiliser la méthode développée dans la première partie :

Considérons θ^e, l'extension à $\Omega_e = \Omega \times E$ du semi-flot sur Ω, que l'on construit en vertu de la proposition 3.

On a alors le lemme :

LEMME. — Soit $\phi_n (n \geq 0)$ l'application mesurable de $\widehat{\Pi}_1$ dans Ω_e qui à ω associe $(p(\omega), Z_n(\omega)) \in \Omega_e$ alors on a :

$$\phi_n \circ Q_1 = \widehat{\theta}^e_n \circ (p \circ Q_1 \otimes \varepsilon_a).$$

On notera

$$Q_e = (p \circ Q_1) \otimes \varepsilon_a$$

Démonstration. — Ceci provient du fait que Q_1 est invariante par $\widehat{\theta}$ et de ce que $\phi_n \circ \widehat{\theta}_n = \widehat{\theta}^e_n \circ \phi_0$: en effet cette relation est vraie pour $n = 0$ et par récurrence

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}^e_{n+1} \circ \phi_0(\omega) &= \widehat{\theta}^e \circ \phi_n \circ \widehat{\theta}_n(\omega) = [\widehat{\theta} \circ p \circ \widehat{\theta}_n(\omega), A(d_1 \circ \widehat{\theta}_n, S_{\tau_0 \circ \widehat{\theta}_n} \circ Z_n \circ \widehat{\theta}_n(\omega))] \\ &= [p \circ \widehat{\theta}_{n+1}(\omega), Z_{n+1} \circ \widehat{\theta}_{n+1}(\omega)] = \phi_{n+1} \circ \widehat{\theta}_{n+1}(\omega), \text{ d'où le lemme } \blacksquare \end{aligned}$$

Continuons la démonstration de la proposition, les $(Z_n, n \geq 0)$ étant étroitement relativement compactes en loi, si $\varepsilon > 0$ est donnée, il existe K_E compact de E et K_1 compact de Ω_1 tels que

$$p \circ Q_1(K_1) \geq 1 - \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall n \in N \; Q_1(Z_n \in K_E) \geq 1 - \varepsilon.$$

On en déduit que $\phi_n \circ Q_1[(K_1 \times K_E)^c] \leq 2\varepsilon$, d'où l'étroite compacité relative des $\widehat{\theta}^e_n \circ Q_e$.

L'application $\widehat{\theta}^e$ étant continue sur Ω_e, puisque $\widehat{\theta}^e = (\widehat{\theta}, A(d_1, S_{\tau_0}))$ sur $\Omega_1 \times E = \Omega_e$, on considère $(M_{N_k}, k \in \mathbb{N})$ suite extraite étroitement convergente de la suite

$$M_N = \frac{1}{M} \sum_{1}^{N} \widehat{\theta}_n^e \circ Q_e, \; N \geq 1.$$

On note M la limite, qui est invariante par $\widehat{\theta}^e$.

En vertu de la proposition 2, on peut construire une unique probabilité invariante $\mathbb{P}$ sur Π_S ayant une probabilité de Palm $\mathbb{Q}$, telle que $\bar{p} \circ \mathbb{Q} = M$. On a alors la commutativité du diagramme suivant, constitué d'espace de type S et E probabilisés :

$$\begin{tikzcd}
\Pi_S \arrow[r, "\Psi = \mathrm{proj}_{\Pi_1}"] \arrow[d, "\bar{p}"'] & \Pi_1 \arrow[d, "p"] \\
\Omega_e \arrow[r, "\mathrm{Proj}_{\Omega_1}"'] & \Omega_1
\end{tikzcd}$$

En effet, on a la commutativité au niveau des transports et de plus $\Psi \circ P$ et P_1 ont des probabilités de Palm ayant même image par p sur Ω_1, donc $\Psi \circ \mathbb{P} = P_1$.

Il nous reste alors à vérifier que si $A \in \mathscr{F}$ et $B \in \sigma(X_0)$ alors :

$(*)$ $E_{\mathbb{Q}}[1_A 1_B \mid \mathscr{F}-] = F_{\mathbb{Q}}[1_A \mid \mathscr{F}-] \times E_{\mathbb{Q}}[1_B \mid \mathscr{F}-]\mathbb{Q}$ p. s. sur Π_S.

Admettons pour un instant le lemme suivant :

LEMME. — Soit L sur $\widehat{\Pi}_S$ continue bornée ne dépendant que d'un nombre fini de τ_i et d_l et soient les v. a. $Z'_k = Z_k \circ \Psi$ de $\widehat{\Pi}_S$ dans E, alors si g est une fonction continue bornée de E dans $\mathbb{R}$, on a :

$$E_Q[L \times g \circ X_0] = \lim_{k \to \infty} E_{\mathbb{Q}}\left[L \times \frac{1}{N_k} \sum_{1}^{N_k} g \circ Z'_p\right]$$

Pour démontrer $(*)$ il nous suffit de vérifier que si H et L sont continues bornées dépendant respectivement d'un nombre fini de τ_i, $i \geq 0$ et d_l, $l \geq 1$ et d'un nombre fini de τ_i, $i \leq -1$ et d_l, $l \leq 0$, et si g est continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors :

$(**)$ $E_{\mathbb{Q}}[L \times (H \times g \circ X_0)] = E_{\mathbb{Q}}[L \times E_{\mathbb{Q}}[H \mid \mathscr{F}-] \times E_{\mathbb{Q}}[g \circ X_0 \mid \mathscr{F}-]]$.

Soit alors f continue bornée, ne dépendant que d'un nombre fini de τ_i et σ_l, $i \leq -1$, $l \leq 0$ telle que $\| E_{\mathbb{Q}}[H \mid \mathscr{F}-] - f \|_2 \leq \varepsilon$ dans $L^2(\mathbb{Q})$ (ce en vertu d'un argument de martingale puis de densité).

$$\left| E_Q\left[L \times H \times \frac{1}{N_k} \Sigma g \circ Z'_p\right] - E_{\mathbb{Q}}[L \times H \times g \circ X_0] \right| \leq \varepsilon$$

et

$$\left| E_{\mathbb{Q}}\left[L \times f \times \frac{1}{N_k} \Sigma g \circ Z'_p\right] - E_{\mathbb{Q}}[L \times f \times g \circ X] \right| \leq \varepsilon$$

On a alors (en utilisant le fait que $Z'_k \in \mathcal{F} -$)

$$\begin{aligned} &| E_Q[L \times H \times g \circ X_0] - E_{\mathbb{Q}}[L \times E[H \mid \mathcal{F} -] \times g \circ X_0] | \\ &\qquad \leq \left| E_Q[L \times H \times g \circ X_0] - E\left[L \times H \times \frac{1}{N_k} \Sigma g \circ Z'_p\right] \right| \\ &\qquad + \left| E_{\mathbb{Q}}\left[L \times (E[H \mid \mathcal{F} -] - f) \times \frac{1}{N_k} \Sigma g \circ Z'_k\right] \right| \\ &\qquad + \left| E_{\mathbb{Q}}\left[f \times L \times \left(\frac{1}{N_k} \Sigma g \circ Z'_k - g \circ X_0\right)\right] \right| \\ &\qquad + | E_Q[(f - E[H \mid \mathcal{F} -] \times L \times g \circ X_0] | \leq 4\varepsilon. \end{aligned}$$

On en déduit (**) et le résultat annoncé.

Démontrons maintenant le lemme utilisé :

Commençons par observer que sur $\widehat{\Pi}_S$, on a $X_0 \circ \widehat{\theta}_n = H_n \circ \bar{p}$ pour $n \geq 0$, où H_n est l'application continue sur Ω_e définie par

$$H_n = A\left[d_n, S_{\tau_{n-1}}[A[d_{n-1}, \ldots (A(d_1, S_{\tau_0}))]]\right]$$

et l'on a $H_n \circ \phi_n = Z_{n+p} \circ \widehat{\theta}_n$ sur $\widehat{\Pi}_1$ pour $n, p \geq 0$.

Si L sur $\widehat{\Pi}_S$ est continue bornée et ne dépend que d'un nombre fini de τ_i et σ_l, on peut trouver $n \geq 0$ tel que $L \circ \widehat{\theta}_n$ ne dépend que des τ_i, $i \geq 0$ et σ_l, $l \geq 1$ et $L \circ \widehat{\theta}_n$ peut alors s'écrire $F \circ \bar{p}$ avec F continue bornée sur Ω_e. Si g est continue bornée de R dans $\mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}}[L \times g \circ X_0] &= E_{\mathbb{Q}}[L \circ \widehat{\theta}_n \times g \circ X_0 \circ \widehat{\theta}_n] = E_{\mathbb{Q}}[F \circ \bar{p} \times g \circ H_n \circ \bar{p}) \\ &= E_M[F \times g \circ H_n] = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{N_k} \Sigma \int F \times g \circ H_n d(\widehat{\theta}^e_p \circ Q_e) \\ &= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{N_k} \Sigma E_{Q_1}[F \circ \phi_p \times g \circ H_n \circ \phi_p] = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{N_k} \Sigma E_{Q_1}[F' \times g \circ Z_{n+p} \circ \widehat{\theta}_n] \end{aligned}$$

où $F' = F \circ \phi_p \forall p \geq 0$ avec $F' \circ \Psi = L \circ \widehat{\theta}_n$ sur $\widehat{\Pi}_S$ car F ne dépend que des τ_i et d_l.

Donc

$$E_{\mathbb{Q}}[L \times g \circ X_0] = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{p=1}^{N_k} E_{\mathbb{Q}}[L \circ \widehat{\theta}_n \times g \circ Z'_{n+p} \circ \widehat{\theta}_n]$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{1}^{N_k} E_{\mathbb{Q}}[L \times g \circ Z'_{n+p}] = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{1=1}^{N_k} E_{\mathbb{Q}}[L \times g \circ Z']$$

d'où le lemme annoncé. ■

PREMIER EXEMPLE

Dans le cas de la file d'attente, premier arrivé premier servi, on cherche comme nous l'avons déjà remarqué, un modèle stationnaire à l'évolution S : $(x, t) \to (x - t)_+$ sur $\mathbb{R}_+$ (correspondant à l'équation différentielle $y' = -1(y > 0)$) perturbée par des discontinuités σ_n représentant la charge du client qui entre dans le système au temps T_n.

Ici nous allons nous intéresser au cas où l'évolution du serveur correspond à une équation différentielle stochastique stoppée en 0. Pour cela considérons a et b deux fonctions mesurables bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}$ respectivement, et un processus de Feller $(W, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, P_x)$ sur $W = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, où $[(\mathcal{F}_t, \mathcal{F})$ représente la filtration canonique, et $(X_t, t \geq 0)$ les coordonnées] solution du problème des martingales associé à a et b.

Soit alors $T = \inf \{ t \geq 0, X_t \leq 0 \}$ qui est un $\mathcal{F}_t$ temps d'arrêt, et le processus de Markov $(W, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_{t \wedge T}, P_x)$: on note S son semi-groupe sur $\mathbb{R}_+$ et on fait l'hypothèse que S est de Feller (cette condition est réalisée dès que $x \to P_x$ est continue, propriété vérifiée si $\sqrt{a}$ et b sont lipschitziens par exemple (voir [*11*])).

On définit alors $E = P(\mathbb{R}_+)$ l'espace des probabilités sur $\mathbb{R}_+$, espace polonais pour la topologie de la convergence étroite et on considère l'application A de $D \times E = \mathbb{R}_+ \times P(\mathbb{R}_+)$ dans E qui à (σ, m) associe $\nu \in E$ défini par : $\nu(f) = m(f(. + \sigma))$; comme précédemment soit Π_1 est une partie fermée stable par le flot de $M \times D^{Z}$ telle que $P(\Pi_1) = \Omega_1$ soit polonais dans $M_+ \times D^{\mathbb{N}^*}$.

Considérons alors le problème suivant : *Étant donné* P_1 *stationnaire sur* Π_1 *de probabilité de Palm* Q_1, *peut-on trouver un modèle stationnaire à l'évolution* S *sur* E *perturbée aux temps* T_n *par* A.

PROPOSITION. — Lorsque P_1 est ergodique $b \leq -1$, et $E_{Q_1}[\sigma] < E_{Q_1}[\tau]$ sur $\widehat{\Pi}_1$, le problème précédent à une solution.

Démonstration. — Nous allons appliquer la proposition 5. Il nous faut vérifier que l'application $(t, \mu) \to \mu S_t$ de $\mathbb{R}_+ \times E$ à valeurs dans E est continue, mais ceci est une conséquence du fait que S est un semi-groupe de Feller sur $\mathbb{R}_+$. De même A est continu de $\mathbb{R}_+ \times E$ dans E. Pour démontrer la proposition, il nous suffit donc de vérifier que la suite Z_n de v. a. sur $\widehat{\Pi}_1$ à valeurs dans E, définie par : $Z_0 = \varepsilon_0$, $Z_{n+1} \circ \widehat{\theta} = A(\sigma_1, S_{\tau_0} \circ Z_n)$ est étroitement relativement compacte en loi. Pour cela nous allons montrer qu'il existe un $\lambda > 0$ et une v. a. Y positive p. s. finie tels que si $n \in N$

$$Y_n = \text{Log}\left[\int_{\mathbb{R}_+} e^{\lambda x} dZ_n(x)\right] \leq Y.$$

On a alors le lemme :

LEMME. — Si $\mu \in P(\mathbb{R}_+)$ et

$$\lambda > 0, \int e^{\lambda x}(\mu S_t)(dx) \leq 1 + \int e^{\lambda x} d\mu(x) \times \exp\left[\lambda t\left(\frac{\alpha\lambda}{2} - 1\right)\right]$$

où α est une constante qui majore la fonction a.

Démonstration. — La f. a.

$$N_t^\lambda = \exp\left\{\lambda\left[X_t - \int_0^t b(X_s)ds\right] - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t a(X_s)ds\right\}$$

est une P_x-martingale (voir [*11*]) car a est bornée.

Donc $E_x[N_t^\lambda] = e^{\lambda x}$ et on a :

$$e^{\lambda x} = E_x[N_t^\lambda] \geq E_x\left[e^{\lambda(X_t+t) - \lambda^2\frac{\alpha t}{2}}\right]$$

d'où $E_x[e^{\lambda X_t}] \leq \exp \lambda(x - t) + \lambda^2 \frac{\alpha t}{2}$.

On a alors

$$\int(\mu S)e^{\lambda x} = \int \mu(dx)E_x[e^{\lambda X_{t\wedge T}}] \leq 1 + \int \mu(dx)E_x[e^{\lambda X_t}]$$

$$\leq 1 + \left[\int \mu(dx)e^{\lambda x}\right] \exp \lambda t\left(\frac{\alpha\lambda}{2} - 1\right) \text{ d'où le lemme} \quad \blacksquare$$

Fixons alors $\varepsilon > 0$ et $\lambda > 0$ tels que $\lambda E_{Q_1}[\sigma] + \varepsilon < E_{Q_1}[\tau] \times \lambda\left(1 - \frac{\alpha\lambda}{2}\right)$ en vertu du lemme on a :

$$\int e^{\lambda x} d(Z_{n+1} \circ \widehat{\theta}) \leq \left[1 + \int e^{\lambda x} dZ_n \times e^{\lambda\tau_0\left(\frac{\alpha\lambda}{2} - 1\right)}\right] e^{\lambda\sigma_1}$$

d'où

$$Y_{n+1} \circ \widehat{\theta} \leq \operatorname{Log}\left[1 + \int e^{\lambda x} dZ_n \times e^{\lambda\tau_0\left(\frac{\alpha\lambda}{2} - 1\right)}\right] + \lambda\sigma_1$$

or il existe $B > 0$ tel que $\operatorname{Log}(1 + x)\left(= \operatorname{Log} x + \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$ soit inférieur à $(\operatorname{Log} x \vee B)$ donc $Y_{n+1} \circ \widehat{\theta} \leq (\lambda\sigma_1 + \varepsilon) + \left[Y_n + \lambda\tau_0\left(\frac{\alpha\lambda}{2} - 1\right)\right] \vee B$ d'où en posant : $\sigma'_0 = \lambda\sigma_0 + \varepsilon$ et $\tau'_0 = \lambda\tau_0\left(\frac{\alpha\lambda}{2} - 1\right)$ qui vérifient $E_{Q_1}[\sigma'_0] < E_{Q_1}[\tau'_0]$ on obtient $Y_{n+1} \circ \widehat{\theta} \leq \sigma'_1 + (Y_n - \tau'_0) \vee B$ (avec $\sigma'_p = \sigma'_0 \circ \widehat{\theta}_p$ et $\tau'_p = \tau'_0 \circ \widehat{\theta}_p$).

On a alors pour $n \geq 0$

$$Y_{n+1} \leq \sigma'_0 + \sup(B, \sigma'_{-1} - \tau'_{-1} + B, \ldots, \sigma'_{-1} - \tau'_{-1} + \ldots + \sigma'_{-n} - \tau'_{-n} + B)$$

en posant $Y = \sigma'_0 + \sup_{n\geq 0}(B, \ldots, \sigma'_{-1} - \tau'_{-1} + \ldots \sigma'_{-n} - \tau'_{-n} + B, \ldots)$

on obtient une variable positive, p. s. finie en vertu du théorème ergodique, dominant les Y_n d'où le résultat. ■

DEUXIÈME EXEMPLE

Le deuxième exemple est inspiré d'un modèle de chocs de particules dans lequel une petite particule marquée se déplace sur le tore à deux dimensions $S^1 \times S^1$, au milieu d'autres petites particules et rentre en collision aux temps T_n avec celles-ci.

Si p est la vitesse de la particule marquée avant le choc, p' celle de la particule heurtant la particule marquée et ω un vecteur centré sur la droite passant par les « centres » des particules, la vitesse après le choc de la particule marquée est $p - \omega \langle \omega, p' - p \rangle$ (voir [7]) (notons que le vecteur unité $\overline{\omega}$ pointant de la particule marquée vers la particule incidente doit vérifier $\langle \overline{\omega}, p - p' \rangle \geq 0$).

Notons $e = ((z_1, z_2), p)$ un élément de $E = S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}_2$ et (p', ω) un élément de $D = \mathbb{R}_2 \times S^1$; soit S le semi-groupe continu sur E qui à (t, e) associe $S_t(e) = (z_1 e^{ip_1 t} z_2 e^{ip_2 t})$ et A l'application continue de $\mathbb{R}_2 \times S^1 \times E$ à valeurs dans E qui à $(p', \omega, (z, p))$ associe $(z, p - \omega \langle \omega, p - p' \rangle)$, et comme précédemment, considérons Π_1 partie fermée stable par le flot de $M \times D^Z$ telle que $\Omega_1 = p(\Pi_1)$ soit polonais dans $M_+ \times D^{N^*}$, nous allons étudier la question suivante :

Étant donné une probabilité stationnaire P_1 *sur* Π_1 *admettant* Q_1 *pour probabilité de Palm, peut-on trouver un modèle stationnaire à l'évolution* S *perturbée par* A *aux temps* T_n.

On a alors le résultat :

PROPOSITION. — Supposons que sur $(\widehat{\Pi}_1, Q_1)$ les $\tau_n = \tau_0 \circ \widehat{\theta}_n, p_n' = p_0' \circ \widehat{\theta}_n$, $\omega_n = \omega_0 \circ \widehat{\theta}_n$, $n \in Z$ soient indépendantes telles que la loi de p' admette un second moment et que ω soit distribué suivant la mesure de Lebesgue sur S^1, alors le problème précédent a une solution.

Démonstration. — En vertu de la proposition 5, il nous suffit de vérifier que la suite de v. a. $(Z_n, n \in Z)$ sur $\widehat{\Pi}_1$ définie par

$$Z_0 = ((1, 1), 0) Z_{n+1} \circ \widehat{\theta} = A(p_1', \omega_1, Z_n)$$

est étroitement relativement compacte en loi, et il suffit clairement de le montrer pour les $(p_n, n \in \mathbb{N})$ projections des $(Z_n, n \in \mathbb{N})$ sur $\mathbb{R}^2$.

Or
$$p_{n+1}^2 = \left[\frac{p_n \circ \theta_{-1} + p_0'}{2} + \sigma_{\omega_0}\left(\frac{p_n \circ \theta_{-1} - p_0'}{2}\right)\right]^2$$

où σ_{ω_0} est la symétrie par rapport à la droite orthogonale à ω_0.

Donc
$$p_{n+1}^2 = A_n^2 + B_n^2 + 2A \cdot {}_n\sigma_{\omega_0}(B_n)$$
si
$$A_n = \frac{p_n \circ \theta_{-1} + p_0'}{2} \quad \text{et} \quad B_n = \frac{p_n \circ \theta_{-1} - p_0'}{2}.$$

ω_0 étant indépendant de A_n et B_n et sa loi étant la mesure de Lebesgue sur S^1, on a $E_{Q_1}[A_n \sigma_{\omega_0}(B_n)] = 0$ donc $E_{Q_1}[p_{n+1}^2] = E_{Q_1}\left[\frac{p_n^2}{2}\right] + E_{Q_1}\left[\frac{p_0'^2}{2}\right]$ d'où par récurrence : $E_{Q_1}[p_{n+1}^2] = E_{Q_1}[p_0'^2] \times (1 - 2^{-n})$ ce qui prouve l'étroite compacité relative en loi cherchée. ■

TROISIÈME PARTIE

UNE FILE A RYTHME VARIABLE

Commençons par considérer le cas de la file classique de renouvellement, pour laquelle on a indépendance de la famille de v. a. $(\tau_k, k \in Z; \sigma_l, l \in Z)$ relativement à la probabilité de Palm de ce modèle. Si on note B_n la tribu engendrée par les $(\tau_k k \in Z)$ et les $(\sigma_p, W_p; p \leq n)$ (où $W_p = W_{T_P}$ est la charge du serveur après l'entrée du $p$ième client), σ_{n+1} est indépendant de la tribu B_n, pour $n \in Z$.

Dans cette partie, nous allons construire un modèle stationnaire, dans lequel on n'aura plus cette propriété d'indépendance, mais simplement une indépendance conditionnelle de σ_{n+1} par rapport à B_n, si l'on se donne $W_{n+1}^- = S_{\tau_n} \circ W_n$.

Pour cela considérons A_s partie fermée stable par le flot de M, telle que $A_e = q(A_s)$ (où q est le transport canonique de M dans M_+) soit polonais dans M_+. On choisit $D = E = \mathbb{R}_+$; on note $\Pi_1 = A_s \times \mathbb{R}_+^Z$ et $\Omega_1 = p(\Pi_1) = A_e \times \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}^*}$. Soit S un semi-groupe continu sur $\mathbb{R}_+ = E$ vérifiant la condition de majoration $\exists \alpha > 0 : S_t(x) \leq (x - t) \vee \alpha$, si $t \geq 0$ et $x \geq 0$, et A l'application continue de $D \times E$ à valeurs dans E qui a (σ, x) associe $\sigma + x$, ce qui permet en vertu de la proposition 3 d'avoir une extension θ^e du semi-flot θ sur Ω_1 à $\Omega_e = \Omega_1 \times E$. Enfin considérons R un noyau markovien de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ tel que $R(C_b(\mathbb{R}_+)) \subseteq C_b(\mathbb{R}_+)$.

Nous allons alors étudier le problème suivant :

Soit P_s *une probabilité stationnaire ergodique sur* A_s *admettant la probabilité de Palm* Q_s, *on cherche un triplet* $(\Pi, \psi, (W_t, t \in \mathbb{R}))$ où Π *est un espace* *probabilisé de type* S, ψ *un transport de* Π *vers* Π_1, $(W_t, t \in \mathbb{R})$ *un processus stationnaire sur* Π *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$, *solution de la perturbation de l'évolution* S, *par* A *aux temps* $T_n n \in Z$, *vérifiant les deux conditions :*

Le processus ponctuel N *sur* Π *(qui est à valeurs dans* A_s*) a pour loi* P_s.

Si Q *est la probabilité de Palm de l'espace* Π *de type* S *probabilisé et si* B_n *est la tribu :* $\sigma(\tau_k k \in Z;\ \sigma_p,\ W_p,\ p \leq n)$ on a :

sur $\widehat{\Pi} E_Q[g \circ \sigma_{n+1} \mid B_n] = R(W_{n+1}^-, g)$ si g est borélienne bornée sur $\mathbb{R}_+$ (*où l'on a posé :* $W_p = W_{T_P}$ *et* $W_{n+1}^- = W_{T_{n+1}}^- = S_{\tau_n} \circ W_n$).

Remarque. — Si on choisit $S_t : x \to (x - t)_+$ comme semi-groupe d'évolution, et qu'on interprète W plutôt comme un temps de travail que comme une quantité de travail, on peut par exemple se donner une application v de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^*$, représentant une vitesse d'exécution choisie par le serveur, et prendre $R(x\ dy)$ comme l'image d'une loi sur $\mathbb{R}_+$ par l'application : $y \to y_{/v(x)}$ sur $\mathbb{R}_+$ ainsi on peut prendre

$$R(x\ dy) = \mu_0 v(x) \times 1(y > 0) e^{-\mu_0 v(x) y} dy.$$

On a alors le résultat :

PROPOSITION 7. — Supposons que :

i) Il existe $\delta > 0$ tel que $K = \sup_x \left(\int y^{1+\delta} R(x, dy), x \in \mathbb{R}_+ \right) < \infty$.

ii) Il existe μ probabilité sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

Si h est croissante positive sur $\mathbb{R}_+$ et $x \geq \alpha$ (on peut supposer qu'il s'agit du même α intervenant dans la condition de domination du semi-groupe S) alors : $R(x, h) \leq \mu(h)$.

Et μ a une espérance strictement inférieure à $1/\lambda$ où λ est l'intensité du processus ponctuel (A_s, P_s).

Alors le problème précédent a une solution.

Démonstration. — Nous allons commencer par construire une probabilité Q sur $\widehat{\Pi}_1$:

Pour cela soit $\widehat{\Pi}_1^n = \widehat{A}_s \times \mathbb{R}_+^{]-\infty, n]}$, on définit D'_n sur $\widehat{\Pi}_1^n$ pour $n \geq 0$ par : $D'_0 = S_{\tau_0}(0)$ et $D'_{n+1} = S_{\tau_{n+1}}(D'_n + \sigma_{n+1})$. Si on note p_n la projection de $\widehat{\Pi}_1$ vers $\widehat{\Pi}_1^n$ alors $D_n = D'_n \circ p_n = S_{\tau_n} \circ Z_n \circ \widehat{\theta}_n$ où Z_n sur $\widehat{\Pi}_1$ est définie par :

$$Z_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad Z_{n+1} \circ \widehat{\theta} = S_{\tau_0} \circ Z_n + \sigma_1.$$

On définit alors Q_n sur $\widehat{\Pi}_1^n$ par $Q_0 = Q_s \otimes \bigotimes_{k \leq 0} \varepsilon_0$ et

$$Q_{n+1} = \int Q_n(d\omega_n) R(D'_n, d\sigma_{n+1})$$

Le théorème de Kolmogorov nous permet de prouver l'existence d'une unique probabilité Q sur $\widehat{\Pi}_1$ telle que $p_n \circ Q = Q_n n \in \mathbb{N}$. La démonstration de la proposition 5 permet à nouveau d'obtenir le lemme 1 :

Si ϕ_n est l'application mesurable de $\widehat{\Pi}_1$ dans $\Omega_1 \times \mathbb{R}_+ = \Omega_e$ qui à ω associe $(p(\omega)\ \ Z_n(\omega))$, on a :

$$\phi_n \circ \widehat{\theta}_n \circ Q = \widehat{\theta}^e_n \circ \phi_0 \circ Q \qquad \text{et on note} \qquad Q_e = \phi_0 \circ Q.$$

On a alors le lemme 2 :

Si les $\widehat{\theta}^e_n(Q_e)$ sont étroitement relativement compactes, le problème a une solution :

Démonstration. — $\widehat{\theta}^e$ étant continue sur Ω_e, on a l'existenc de

$$M = \lim_{h \to \infty} \frac{1}{N_k} \sum_1^{N_k} \widehat{\theta}^e_n \circ Q_e$$

invariante; si p_s est la projection de Π_1 vers A_s et p_e de Ω_e vers A_e on a $q \circ p_s = p_e \circ \phi_n$, On en déduit que l'image de M sur A_e n'est autre que celle de Q_s sur A_e (car $p_e \circ \widehat{\theta}^e_n \circ Q_e = p_e \circ \phi_n \circ \widehat{\theta}_n \circ Q = q \circ p_s \circ \widehat{\theta}_n \circ Q = q \circ Q_s$). On applique la proposition 2 ce qui permet d'avoir l'existence d'une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Π_s modèle stationnaire canonique qui admette une probabilité de Palm Q dont l'image par le transport p sur Ω_e soit M. Il nous reste alors à démontrer que sur $\widehat{\Pi}_s$:

si $\quad H \in b\mathscr{B}_0 \quad$ et $\quad v \in b\mathscr{B}(\mathbb{R}_+) E_Q[H \times v \circ \sigma_1] = E_Q[H \times R(W_1^-, v)]$ (*).

En utilisant les relations entre W_n et W_l pour $l \geq n$, la stationnarité et un argument de classe monotone, pour démontrer (*) il nous suffit de vérifier :

(**) $E_Q[H \times v \circ \sigma_{n+1}] = E[H \times R(S_{\tau_n} \circ W_n, v)] \qquad$ pour $\qquad n \geq 0$

où $H = f \circ \tau_0 \times \ldots f_q \circ \tau_q \times g_1 \circ \sigma_1 \times \ldots \times g_n \circ \sigma_n \times h \circ W_0$,

où f_i, g_j, h sont des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Or $\bar{p} \circ Q = M$ et on est ramené à prouver (**) sur (Ω_e, M) mais (**) est stable par limite étroite puisque R envoie $C_b(\mathbb{R}_+)$ dans $C_b(\mathbb{R}_+)$. Il nous suffit donc de prouver (**) pour les $\widehat{\theta}^e_p \circ Q_e = \phi_p \circ \widehat{\theta}_p \circ Q$, $p \geq 0$.

On fait alors la remarque suivante :

sur $\widehat{\Pi}_1 \quad$ on a $\quad W_0 \circ \phi_p \circ \widehat{\theta}_p = Z_p \circ \widehat{\theta}_p \quad$ et $\quad S_{\tau_0} \circ W_n \circ \phi_p \circ \widehat{\theta}_p = D_{n+p}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$.

Il nous faut donc vérifier que

$$E_Q[H \circ \phi_p \circ \widehat{\theta}_p \times v \circ \sigma_{n+p+1}] = E_Q[H \circ \phi_p \circ \widehat{\theta}_p \times R(D_{n+p}, v)]$$

Comme $Z_p \circ \widehat{\theta}_p$ est mesurable par rapport à $\sigma(\tau_i i \in [0, p-1], \sigma_l l \in [1, p])$ $H \circ \phi_p \circ \widehat{\theta}_p$ est mesurable par rapport à $\sigma(\tau_i i \in \mathbb{N}, \sigma_l l \in [1, n+p])$ et d'après la construction de Q on a l'égalité annoncée d'où le lemme.

Montrons maintenant la compacité étroite des $\widehat{\theta}_n^e \circ Q_e$:

Pour cela il nous suffit de vérifier que les variables aléatoires $(W_n = \text{proj}_E \circ \widehat{\theta}_n^e, n \in \mathbb{N})$ sur Ω_e sont étroitement relativement compactes en loi puisque : pour $\varepsilon > 0$ il existe K compact de A_e et K' compact de $\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}*}$ vérifiant :

$$\widehat{\theta}_n^e(Q_e)(K \times \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}*} \times E) \geq 1 - \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \widehat{\theta}_n^e \circ Q_e(A_e \times K' \times E) \geq 1 - \varepsilon$$

car la projection des $\widehat{\theta}_n^e \circ Q_e$ sur A_e est constante, par stationnarité (et A_e polonais dans M_+) et d'autre part on a une suite (s_n) d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$R(x, [s_n, \infty[) \leq \frac{K}{s_n} \leq \frac{\varepsilon}{2^n} \text{ (d'après } i))$$

d'où l'on déduit que

$$\widehat{\theta}_n^e \circ Q_e\left[\bigcap_1^\infty \{\sigma_l \in [0, s_l]\}\right] = Q_e\left[\bigcap_1^\infty \{\sigma_{n+l} \in [0, s_l]\}\right]$$
$$\geq 1 - \sum_{l \geq 1} Q_e[\{\sigma_{n+l} \in]s_l, \infty[\}] \geq 1 - \sum_{l \geq 1} E_{Q_e}[R(S_{\tau_{n+l-1}} \circ W_{n+l-1},]s_l, \infty[)]$$
$$\geq 1 - \varepsilon.$$

Choisissons $\rho > 0$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon + \int y\mu(dy) < 1/\lambda$ pour la probabilité μ dont l'existence est affirmée dans l'énoncé de la proposition que nous démontrons. D'après i), nous pouvons trouver n_0 tel que :

$$\text{si} \qquad n \in \mathbb{N}^* \sum_{1 \leq k \leq n - n_0} Q_e(\sigma_k > 1 + (n - k - 1)\varepsilon) \leq \rho/2, \tag{1}$$

soit alors $\beta \geq 1 + \alpha$ tel que

$$\sum_{1 \leq n - n_0 \leq k < n} Q_e(\sigma_k > \beta - \alpha) \leq \frac{n_0 \times K}{(\beta - \alpha)^{1+\delta}} \leq \rho/2 \tag{2}$$

Définissons la suite $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ de v. a. sur Ω_e par :

$$Y_1 = \beta \qquad \text{et} \qquad Y_{n+1} = \sup(Y_n + (\sigma_n + \varepsilon) \times 1(W_n^- > \alpha) - \tau_n, \beta)$$
$$= \beta + (Y_n - \beta + (\sigma_n + \varepsilon)1(W_n^- > \alpha) - \tau_n)_+$$

On a alors la propriété suivante :

LEMME. —

si $n \geq 1 \{ W_n^- > Y_n \} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n-1} \{ \sigma_k > \beta - \alpha + (n-k-1)\varepsilon \} \, Q_e$ p. s.

Démonstration. — Soit $n \geq 1$ et soit $T = \sup \{ k : 1 \leq k \leq n \text{ et } W_k^- \leq Y_k \}$ notons que l'ensemble dont on prend le sup est Q_e p. s. non vide puisque Q_e p. s. $W_1^- = S_{\tau_0}(0) \leq (0 - \tau_0) \vee \alpha < \beta$. Donc sur $\{ W_n^- > Y_n^- \}$, on a Q_e p. s. $\{ 1 \leq T < n \}$ et pour $k \in [T+1, n]$, on a $W_k^- > Y_k$. Sur $\{ 1 \leq T < n \}$ on a

$$W_{T+1}^- \leq \alpha \vee (W_T^- + \sigma_T - \tau_T)$$

et

$$W_{T+1}^- \geq Y_{T+1} \geq \beta \vee (Y_T + (\sigma_T + \varepsilon) 1(W_T^- > \alpha) - \tau_T)$$

d'où l'on déduit que $W_T^- \leq \alpha$ et $\sigma_T \geq \beta - \alpha$.

On écrit alors

$$\{ 1 \leq T < n \} = \bigcup_{k=1}^{n-1} \{ T = n - k \},$$

on a déjà $\{ T = n-1 \} \subseteq \{ \sigma_{n-1} \geq \beta - \alpha \}$ et sur $\{ T \leq n-2 \}$ pour $l \in [T+1, n[$

$$W_{l+1}^- \leq W_-^l + \sigma_l - \tau_l \; (\text{car } W_{l+1}^- \geq \beta > \alpha \quad \text{et} \quad S_t(x) \leq (x-t) \vee a)$$

et $Y_{l+1} \leq Y_l + \sigma_l - \tau_l + \varepsilon$.

Donc :

$$W_{l+1}^- - Y_{l+1} \leq W_l^- - Y_l - \varepsilon \quad \text{d'où} \quad W_l^- - Y_l \geq (W_{l+1}^- - Y_{l+1}) + \varepsilon$$

pour $l \in [T+1, n[$ sur $\{ 1 \leq T \leq n-2 \}$. On en déduit que :

$$W_{T+1}^- - Y_{T+1} \geq (n - T - 1)\varepsilon \quad \text{donc} \quad W_{T+1}^- \geq (n - T - 1)\varepsilon + \beta,$$

et comme $W_{T+1}^- = S_{\tau_T}(W_T^- + \sigma_T) \leq W_T^- + \sigma_T$ (car $W_{T+1}^- \geq \alpha$) et $W_T^- \leq \alpha$ on a : $\sigma_T \geq (n - T - 1)\varepsilon + (\beta - \alpha)$, ce qui démontre le lemme. ■

Le lemme précédent et les conditions (1) et (2) permettent d'affirmer que $\forall_n \geq 1$, $Q_e(W_n^- > Y_n) \leq \rho$.

Donc si l'on prouve que les $(Y_n, n \in \mathbb{N}^*)$ sont étroitement relativement compactes en loi, on en déduira que l'on peut prouver la même propriété pour les $(W_n^- n \in \mathbb{N}^*)$ et donc pour les $(W_n, n \in \mathbb{N}^*)$.

Or on a en posant $Y_n' = Y_n - \beta$: $Y_1' = 0$ et $Y_{n+1}' = (Y_n' + \sigma_n' - \tau_n)_+$ avec

$$\sigma_n' = \sigma_n \times 1(W_n^- > \alpha).$$

On en déduit que
$$\begin{aligned} Y'_{n+1} &= \sup (0, \sigma'_n - \tau_n, \ldots, \sigma'_n + \ldots + \sigma'_1 - \tau_n - \ldots - \tau_1) \\ &= H(\sigma'_1, \ldots, \sigma'_n, \tau_1, \ldots, \tau_n) \end{aligned}$$

où H est une fonction positive croissante des n premières variables. Si $B \in \mathbb{R}_+$ $L = 1(H > B)$ est une fonction bornée positive qui a la même propriété de croissance que H. De plus $Q_e[L(\sigma'_1, \ldots, \sigma'_n, \tau_1, \ldots, \tau_n)] = Q_e(Y'_{n+1} > B)$. Or on a le lemme suivant :

LEMME. — Soit L : mesurable de $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^p_+$ à valeurs dans [0, 1], croissante dans les n premières variables, alors $E_{Q_e}[L(\sigma'_1, \ldots, \sigma'_n, \tau_1, \ldots, \tau_p)] \leq E_{Q_e}[\psi(\tau_1, \ldots, \tau_p)]$ où

$$\psi(x_1, \ldots, x_p) = \int L(y_1 + \varepsilon, \ldots, y_n + \varepsilon, x_1, \ldots, x_p) d\mu(y_1) \ldots d\mu(y_n)$$

Démonstration. — Si $n = 0$ le résultat est vrai, supposons le vrai au rang n, alors :

$$\begin{aligned} E_{Q_e}[L(\sigma'_1, -, \sigma'_{n+1}, \tau_1 \ldots \tau_p)] &= E_{Q_e}[1(W^-_{n+1} > \alpha) L(-, \sigma_{n+1} + \varepsilon, -)] \\ &\quad + E_{Q_e}[1(W^-_{n+1} \leq \alpha) L(-, 0, -)] \end{aligned}$$

or

$$L(-, 0, -) \leq \int L(-, y + \varepsilon, -) d\mu$$

et

$$\begin{aligned} &E[1(W^-_{n+1} > \alpha) L(-, \sigma_{n+1} + \varepsilon, -)] \\ &\qquad = E\left[1(W^-_{n+1} > \alpha) \int R(W^-_{n+1}, dy) L(-, y + \varepsilon, -)\right] \\ &\qquad \leqq E\left[1(W^-_{n+1} > \alpha) \int L(-, y + \varepsilon, -) d\mu(y)\right] \end{aligned}$$

Or comme la fonction $L' = \int L(\, , \ldots, y + \varepsilon, \ldots) d\mu(y)$ est croissante des n premières variables, et mesurable, par la récurrence on a

$$E_{Q_e}[L(\sigma'_1, \ldots, \sigma'_{n+1}, \tau_1 \ldots \tau_p)] \leq E_{Q_e}[\psi(\tau_1, -, \tau_p)]$$

Revenons à la démonstration de la proposition, on a pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} Q_e(Y'_{n+1} > B) &\leq \int L(Y_1, \ldots, Y_n, \tau_1, \ldots, \tau_n) \otimes d\mu(Y_i) \otimes dQ_e \\ &= P[\sup (0, \sigma_n - \tau_n, \ldots, \sigma_n - \tau_{n^+} + \sigma_1 - \tau_1) > B] \end{aligned}$$

où P est la probabilité $Q_S \otimes \underset{Z}{\otimes}(\tau_{-\varepsilon} \circ \mu)$ sur $\widehat{A}_S \times \mathbb{R}^Z_+$

$$= P[\sup (0, \sigma_{-1} - \tau_{-1}, \ldots, \sigma_{-1} - \tau_{-1} + \ldots + \sigma_{-n} - \tau_{-n}) > B]$$

par stationnarité de P. Or $(P, \widehat{\theta})$ étant le produit direct d'une composante ergodique et d'une composante mélangeante est faiblement mélangeante donc ergodique (voir [3]) et comme $\varepsilon + \int y d\mu(y) < 1/\lambda$ on a le fait que

$$\sup (0, \xi_{-1}, \ldots, \xi_{-1} + \ldots + \xi_{-n}, \ldots)$$

est positive P p. s. finie d'où l'on déduit la compacité étroite relative des $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ et la proposition 7. ■

QUATRIÈME PARTIE

PERTURBATION D'UNE ÉQUATION D'ÉVOLUTION PAR UN PROCESSUS PONCTUEL

Nous allons présenter ici un type d'application possible aux résultats de la seconde partie :

Considérons E un Banach réel séparable, B un opérateur m-accrétif sur E (c'est-à-dire le domaine de B est dense dans E et pour $\lambda > 0$ $I + \lambda B$ est inversible et son inverse est de norme inférieure à 1, voir [*1 bis*] et [*9 bis*]), et S le semi-groupe de contraction associé à B; alors si F est une application lipschizienne sur les bornés on a un semi-groupe H continu de $R_+ \times E \to E$ qui vérifie : pour $x \in E$ et $T > 0$ $H(., x)$ est l'unique fonction continue à valeurs dans E qui vérifie $H_t = S_t x + \int_0^t S(t-s)F(H_s)ds$ sur $[0, T]$. $H(., x)$ est la solution généralisée de l'équation $\frac{du}{dt} + Bu = F(u)$ de condition initiale $u(0) = x$.

(Dans le cas où E est réflexif ou F de classe C^1, si $x \in \operatorname{dom}(B)$, on peut montrer que cette solution est classique.)

Soit alors D un ensemble polonais et A application continue de $D \times E$ dans E, on définit sur Π_1 partie fermée stable par le flot de $M \times D^{Z}$ telle que $p(\Pi_1) = \Omega_1$ soit polonais dans $M_+ \times D^{\mathbb{N}^*}$, la suite $(Z_n, n \in \mathbb{N})$ de variables aléatoires sur $\widehat{\Pi}_1$ à valeurs dans E par $Z_0 = 0$ et

$$Z_{n+1} \circ \widehat{\theta} = A(d, H(\tau, Z_n))$$

les résultats de la deuxième partie (proposition 5) permettent alors d'affirmer que

PROPRIÉTÉ. — Si on munit Π_1 d'une probabilité stationnaire P_1 admettant la probabilité de Palm Q_1.

Si la suite $(Z_n, n \in \mathbb{N})$ est étroitement relativement compacte en loi, il existe un triplet $(\Pi, \psi, (X_t, t \in \mathbb{R}))$ où Π est un espace type S probabilisé ψ un transport de Π vers Π_1 et $(X_t, t \in \mathbb{R})$ est une solution stationnaire à la perturbation de H par A aux temps T_n.

En fait la proposition 5 est plus précise et affirme que la solution stationnaire construite dépend du passé quand on se donne la perturbation, d'autre part remarquons que la condition d'étroite compacité relative en loi des $(Z_n, n \in \mathbb{N})$ est vérifiée si les $(Z_n, n \in \mathbb{N})$ convergent Q_1 presque sûrement vers une variable Z sur $\widehat{\Pi}_0$ (Dans ce dernier cas on peut choisir comme modèle stationnaire une partie pleine de Π_0).

Nous allons maintenant donner deux exemples dans lesquels la suite $(Z_n, n \in \mathbb{N})$ sera Q_0 p. s. convergente, pour illustrer le type de situation auquel s'applique le résultat précédent.

EXEMPLE 1. — Le problème du volcan (perturbation de l'équation de la chaleur). On choisit $E = C_0(\mathbb{R}^n)$, $B = -\Delta$ avec dom(B) ensemble des fonctions u de $C_0(\mathbb{R}^n)$ telles que la distribution Δu soit dans $C_0(\mathbb{R}^n)$. Le semi-groupe S associé à B est donné par :

$$(t, f) \to S_t f = \rho_t * f \quad \text{où} \quad \rho_t = \frac{1}{(4\Pi t)^{n/2}} \exp - \frac{x^2}{4t} \quad \text{et} \quad \rho_0 = \delta_0$$

(masse de Dirac en 0).

D est un sous-ensemble polonais de $C_0(\mathbb{R}^n)$ et A l'application $(d, x) \to x + d$ de $D \times E$ dans E.

On a alors la propriété :

PROPRIÉTÉ. — Supposons que les éléments de D aient un support de mesure de Lebesgue uniformément bornée, que Q_1 soit ergodique, si $\| d_0 \|$ est intégrable pour Q_1 et $n \geq 3$, alors la suite $(Z_m, m \in \mathbb{N})$ est Q_1 p. s. convergente.

Démonstration. — On va utiliser le lemme :

LEMME. — Si $u \in C_0(\mathbb{R}^n)$ a un support K de mesure de Lebesgue inférieure à C alors

$$\| S_t u \|_\infty \leq C \times \frac{m(K)}{t^{n/2}} \| u \|_\infty .$$

Démonstration. —

$$\begin{aligned} S_t u &= \int_K \rho_t(x-y)u(y)dy \leq \|u\|_\infty \int_K \rho_t(x-y)dy \\ &= \|u\|_\infty \int \rho_1\left(\frac{x-y}{\sqrt{t}}\right) 1_K(y) \frac{dy}{t^{n/2}} = \|u\|_\infty \int \rho_1\left(\frac{x-y}{\sqrt{t}}\right) \frac{1_K}{\sqrt{t}} dy \leq \frac{\|u\|_\infty}{t^{n/2}} \frac{m(K)}{(4\pi)^{n/2}} \end{aligned}$$

poursuivons alors la démonstration, comme S est un semi-groupe linéaire $(Z_p, p \in \mathbb{N})$ est en fait la série de terme général : $S_{-T_{-p}} d_{-p}$, dont la norme d'après le lemme précédent est inférieur à

$$C \times \frac{\| d_{-p} \|}{(-T_{-p})^{n/2}} \sim C \frac{\| d_{-p} \|}{(E[\tau]p)^{n/2}} = K \frac{\| d_{-p} \|}{p^{n/2}} Q \text{ p. s.}$$

(en vertu du théorème ergodique) si on introduit alors $(\Sigma_p, n \in \mathbb{N})$ défini par $\Sigma_0 = 0$ et $\| d_{-p} \|_\infty = \Sigma_p - \Sigma_{p-1}$ pour $p \geq 1$, on est amené à étudier la convergence de la série de terme général

$$\begin{aligned} \Sigma_p \times \left(\frac{1}{p^{n/2}} - \frac{1}{(p+1)^{n/2}} \right) &\sim \frac{\Sigma_p}{p} \left(p^{-\frac{(n-2)}{2}} - (p+1)^{-\frac{(n-2)}{2}} + (p+1)^{-\frac{n}{2}} \right) \\ &\sim E(\| d_0 \|_\infty) \times \left(p^{-\frac{(n-2)}{2}} - (p+1)^{-\frac{(n-2)}{2}} + (p+1)^{-\frac{n}{2}} \right) \end{aligned}$$

d'où la sommabilité absolue presque sûre de la série définissant $(Z_p, p \in \mathbb{N})$. ■

Nous allons maintenant préciser ces résultats dans le cas où la probabilité de Palm Q_1 sur $\widehat{\Pi}_1$ est un renouvellement (les variables $(\tau_n, n \in Z, d_p, p \in Z)$ sont indépendantes), et les fonctions de D sont positives.

Pour cela soit β de $\mathbb{R}_n$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $\beta(x) = E[d_0(x)]$ fonction continue bornée, car $\| d_0 \|$ est Q_1 intégrable.

Soit μ la loi de la variable τ d'interarrivée et F de $\mathbb{R}^n$ dans $[0, \infty]$ défini par

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} d\mu(t) \rho_t(x) = \int d\mu(t) \frac{1}{(4\Pi t)^{n/2}} \exp - \frac{x^2}{4t}$$

alors si $x \neq 0$, $p_t(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $F(x) < \infty$, de plus F décroît en fonction de $\| x \|$, et est éventuellement infinie en 0.

On a alors la proposition :

PROPOSITION. — La fonction α de $\mathbb{R}^n$ dans $[0, \infty]$ définie par $\alpha(x) = E[Z(x)]$ est bornée et est la plus petite fonction positive mesurable solution de l'équation $\alpha = \alpha * F + \beta$ (posée dans le cône des fonctions mesurables positives).

Démonstration. — L'application $(\phi, x) \to \phi(x)$ de $E \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ étant mesurable (en fait continue), par Fubini on obtient que α est mesurable. D'autre part Z_n croît vers Z et converge en norme vers Z (sur I invariant de mesure pleine) d'après la propriété précédente donc $\alpha(x) = \lim \uparrow \alpha_n(x)$ où $\alpha_n(x) = E[Z_n(x)]$ or $(\alpha_n, n \in \mathbb{N})$ vérifie $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_{n+1} = \alpha_n * F + \beta$.

(Ce parce que $E[\rho_\tau * Z_n(x)] = \int_{\mathbb{R}_+^*} d\mu(t) \int_{E_+} d\nu_n(e)\rho_t * e(x)$ où ν_n est la loi de d sur E_+

$$= \int d\mu(t) \int d\nu_n(e) \int \rho_t(x-y)e(y)dy$$

$$= \int d\mu(t) \int \rho_t(x-y)\alpha_n(y)dy = \int F(x-y)\alpha_n(y)dy = F * \alpha_n(y),$$

par application de Fubini à la fonction mesurable positive

$$(t, x, y, e) \to \rho_t(x-y)e(y))$$

par limite monotone on a $\alpha = \alpha * F + \beta$.

On a d'autre part $\| \alpha \|_\infty \leq E(\| Z \|_\infty)$ et $\| Z \|_\infty \leq \sum_1^\infty \| S_{-T_{-p}} d_{-p} \|_\infty$ avec

$$\| S_{-T_{-p}} d_{-p} \|_\infty \leq \left[C \times \frac{\| d_{-p} \|_\infty}{(-T_{-p})^{n/2}} \right] \wedge \| d_{-p} \|_\infty$$

(car $\| \rho_t * u \|_\infty \leq \| u \|_\infty$) donc

$$\leq 1(-T_{-p} \geq 1) \frac{\| d_{-p} \|_\infty}{(-T_{-p})^{n/2}} \times C + 1(T_{-p} \leq 1) \| d_{-p} \|_\infty.$$

Montrons que les deux termes précédents définissent des séries intégrables pour Q_1.

L'intégrale du second terme vaut

$$E[\| d_\infty \|] \times E\left[\sum_1^\infty 1(T_p \leq 1) \right] = K \times U(]0, 1])$$

où U est la mesure sur $\mathbb{R}_+$: $\sum_{p=0}^\infty \mu^{p*}$, or U est de Radon car

$$U(e^{-\alpha t}) = \sum \left[\int e^{-\alpha t} d\mu(t) \right]^n < \infty.$$

On a donc obtenu le fait que

$$\sum_1^\infty E[1(T_{-p} \leq 1) \| d \|_\infty] < \infty.$$

Pour l'intégrale du premier terme on a :

$$\sum_1^\infty E\left[1(-T_{-p} \geq 1) \frac{\| d \|_\infty}{(-T_{-p})^{n/2}} \right] = K \times U\left(\frac{1(x \geq 1)}{x^{n/2}} \right)$$

or la fonction $\dfrac{1(x \geq 1)}{x^{n/2}}$ est intégrable pour U car pour K compact de $\mathbb{R}_+$ on a $\sup\limits_{t \geq 0} \mathrm{U}(t + \mathrm{K}) < \infty$ (voir [7 *bis*]) d'où

$$\mathrm{U}\left(\frac{1(x \geq 1)}{x^{n/2}}\right) \leq \sum_1^\infty \mathrm{U}\left(\frac{1[p, p+1[(x)}{x^{n/2}}\right) \leq \sum_1^\infty \frac{1}{p^{n/2}} \mathrm{U}(p + [0, 1[) < \infty$$

d'où la bornitude de α. ■

EXEMPLE 2. — Dans cet exemple on va considérer un opérateur m-accrétif B, dont le semi-groupe de contraction associé, S_t vérifie $\| \mathrm{S}_t u \| \leq e^{-\gamma t} u$ sur $u \in \mathrm{E}$, avec γ constante strictement positive.

Ainsi si θ est un ouvert *borné* régulier de $\mathbb{R}^n$ (voir [*6 bis*], si $\mathrm{E} = \mathrm{H}_0^1(\theta)$ et $\mathrm{B} = \Delta$ avec $\operatorname{dom} \mathrm{B} = \mathrm{H}_0^1(\theta) \cap \mathrm{H}^2(\theta)$, c'est le cas.

On considère D partie polonaise de E et A l'application de $\mathrm{D} \times \mathrm{E}$ dans E qui à (d, x) associe $d + x$.

Alors on a la propriété :

PROPRIÉTÉ. — Si F est lipschitzienne sur E de rapport $\mathrm{C} < \gamma$, si Q_1 est ergodique et $\| d_0 \|$, intégrable pour Q_1, alors les $(\mathrm{Z}_n, n \in \mathbb{N})$ associés à la perturbation par A du semi-groupe H (en général non linéaire) associé à l'équation $\dfrac{du}{dt} + \mathrm{B}u = \mathrm{F}(u)$ convergent Q_1 presque sûrement vers une variable Z.

Démonstration. — On a si u_0 et u_0' sont des éléments de E,

$$\| \mathrm{H}(t, u_0) - \mathrm{H}(t, u_0') \| \leq \| u_0 - u_0' \| e^{-(\gamma - \mathrm{C})t}$$

(en effet si $u_t = \mathrm{H}(t, u_0)$ et $u_t' = \mathrm{H}(t, u_0')$ alors $d_t = u_t - u_t'$ vérifie :

$$d_t = \mathrm{S}_t(u_0 - u_0') + \int_0^t \mathrm{S}(t - s)[\mathrm{F}(u(s)) - \mathrm{F}(u'(s))] ds$$

d'où $\| d_t \| \leq e^{-\gamma t} \| d_0 \| + \mathrm{C} \displaystyle\int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \| d_s \| ds$ et on conclut par le lemme de Gronwall).

On a alors :

$$\mathrm{X}_{n+1} = d_0 + \mathrm{H}_{\tau_{-1}}(d_{-1} + \dots (d_{-n+1} + \mathrm{H}_{\tau_{-n}}(d_{-n} + \mathrm{H}_{\tau_{-(n+1)}}(0))) \dots)$$
$$\mathrm{Z}_n = d_0 + \mathrm{H}_{\tau_{-1}}(d_{-1} + \dots (d_{-n+1} + \mathrm{H}_{\tau_{-n}}(0)) \dots)$$

donc $\| \mathrm{Z}_{n+1} - \mathrm{Z}_n \| \leq \| d_{-n} + \mathrm{H}_{\tau_{-(n+1)}}(0) \| e^{\alpha \mathrm{T}_{-n}}$ si $\alpha = \gamma - \mathrm{C} > 0$.

Or pour chaque x $\mathrm{H}(t, x)$ est borné sur $\mathbb{R}_+$ (en utilisant Gronwall et une majoration affine de $\| F \|$) donc $a_n = \| Z_{n+1} - Z_n \|$ est inférieure à $(\| d_{-n} \| + K)e^{\alpha T - n}$ donc a_n est p. s. sommable car

$$\operatorname{Log} \sqrt[n]{a_n} = \alpha \frac{T - n}{n} + \frac{1}{n} \operatorname{Log} (\| d_{-n} \| + K)$$

tend vers $- \alpha E[\tau]Q_1$ p. s., ce qui permet d'obtenir le résultat annoncé. ■

APPENDICE

A. — L'espace M_+ :

Soit M^+ l'ensemble des mesures ponctuelles simples infinies sur $\mathbb{R}_+$ ne changeant pas 0 et D l'ensemble des suites $(\tau_n, n \geq 1)$ d'éléments $\tau_n > 0$, tels que $\sum_1^\infty \tau_n = \infty$.

Soit ϕ la bijection naturelle de D sur M_+ qui à $(\tau_n, n \geq 1)$ associe $m = \sum_{n \geq 1} \varepsilon_{\tau_1} + \ldots + \tau_n$, on définit alors sur M_+ la topologie $\mathscr{C}_1$ engendrée par les applications $T_n(m) = \inf \{ t > 0, m(]0, t]) = n \}$ et la topologie $\mathscr{C}_2$ engendrée par les applications $m \to m(f)$ f continue à support compact sur $\mathbb{R}_+$ (topologie vague).

On a le résultat suivant :

PROPRIÉTÉ. — On a $\mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_2$ et cette topologie est l'image par Φ de la topologie induite sur D par la topologie produit sur $\left(\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}^*}\right)$ (et donc fait de M_+ un espace polonais).

Remarquons immédiatement que la tribu borélienne associée à la topologie précédente n'est autre que la tribu engendrée par les $(T_n, n \geq 1)$ ce en vertu du fait que si sur un ensemble on a une famille dénombrable d'applications à valeurs dans des espaces métriques séparables munis de leurs tribus boréliennes, alors la tribu qu'elles engendrent n'est autre que la tribu borélienne de la topologie qu'elles engendrent.

Démonstration de la propriété. — Montrons que $\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}_2$, c'est-à-dire $T_n n \geq 1$ ess vaguement continue. Pour cela soit $m_0 \in M_+$ et $\alpha > 0$, alors si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux fonctionȷ continues sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans [0, 1], telles que

$$\phi_1 = \begin{cases} 1 \text{ sur } [0, T_{n-1}(m_0) \vee T_n(m_0) - \alpha] \\ 0 \text{ sur } [T_n(m_0), \infty[\end{cases} \quad \text{et} \quad \phi_2 = \begin{cases} 1 \text{ sur } [0, T_n(m_0)] \\ 0 \text{ sur } [T_n(m_0) + \alpha \wedge T_{n+1}(m_0), \infty[\end{cases}$$

où par convention $T_0 = 0$.

Alors

$$| m(\phi_1) - m_0(\phi_1) | < 1 \Rightarrow T_n(m) > T_n(m_0) - \alpha,$$

et

$$| m(\phi_2) - m_0(\phi_2) | < 1 \Rightarrow T_n(m) < T_n(m_0) + \alpha$$

d'où la continuité cherchée.

Réciproquement pour montrer que $\mathscr{C}_2 \subset \mathscr{C}_1$ c'est-à-dire que $m \to m(f)$ est continue pour $\mathscr{C}_1$, si f est continue à support compact, il suffit de remarquer que si supp $f \subset [0, A]$, alors M_+ est réunion des $\mathscr{C}_1$ ouverts $\{ T_n > A \}$ $n \geq 1$ sur lesquels l'application est continue.

Le fait que $\phi_{\mathbb{N}_*}$ est un homéomorphisme est immédiat et comme D est un G_δ de $\mathbb{R}_+^*$ on obtient que M_+ est polonais pour $\mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_2$.

B. — L'espace M :

Soit M l'espace des mesures simples doublement infinies sur $\mathbb{R}$ et G l'ensemble des suites $(\tau_n, n \in \mathrm{Z})$ d'éléments $\tau_n > 0$ si $n \neq 0$ et $\tau_0 \geqslant 0$, tels que $\sum_{n \geq 1} \tau_n = \infty$ et $\sum_{n \leq 0} \tau_n = \infty$.
Soit ψ la bijection naturelle de G sur M qui à $(\tau_n, n \in \mathrm{Z})$ associe

$$m = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{(\tau_1 + \ldots + \tau_n)} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{-(\tau_0 + \ldots + \tau_{-n})},$$

alors si τ_1 est la topologie engendrée par les applications $\mathrm{T}_n(= \inf \{ t > 0 : m(]0, t]) = n \}$ si $n \geq 1$ et $\inf \{ t \geq 0, m([-t, 0]) = (-n+1) \}$ si $n \leq 0)$ et $\mathscr{C}_2$ la topologie vague sur M on a le résultat suivant :

Propriété. — $\mathscr{C}_1 \supset \mathscr{C}_2$, et ϕ est un homéomorphisme de G muni de la topologie induite, par la topologie produit sur $\mathbb{R}_+^{\mathrm{Z}}$, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ coïncident sur $\widehat{\mathrm{M}} = \{ m \in \mathrm{M} m(\{ 0 \}) = 1 \}$ et enfin $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont des topologies polonaises qui ont même tribu borélienne.

Démonstration. — On a $\mathscr{C}_1 \supset \mathscr{C}_2$: comme pour le paragraphe précédent, soit f continue à support compact sur $\mathbb{R}$, alors M est réunion d'ouverts pour $\mathscr{C}_1$ sur lesquels $m \to m(f)$ est continue. Comme précédemment on peut aussi prouver que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ coïncident sur $\widehat{\mathrm{M}}$. L'homéomorphisme que définit ψ de G muni de la topologie induite par $(\mathbb{R}_+)^{\mathrm{Z}}$ muni de la topologie produit sur $(\mathrm{M}, \mathscr{C}_1)$ prouve que $(\mathrm{M}, \mathscr{C}_1)$ est polonais. Enfin le fait que $(\mathrm{M}, \mathscr{C}_2)$ est polonais est classique voir [*6*]. ■

C. — Un lemme :

Lemme. — Soit D métrique séparable et Π_1 partie fermée stable par le flot de $\mathrm{M} \times \mathrm{D}^{\mathrm{Z}}$ (on a muni M de $\mathscr{C}_1 \supset \mathscr{C}_2$ et $\mathrm{M} \times \mathrm{D}^{\mathrm{Z}}$ de la topologie produit). Soit p le transport canonique de $\mathrm{M} \times \mathrm{D}^{\mathrm{Z}}$ vers $\mathrm{M}_+ \times \mathrm{D}^{\mathbb{N}^*}$, et soit $\Omega_1 = p(\Pi_1)$, on a le fait que si $\omega \in \mathrm{M} \times \mathrm{D}^{\mathrm{Z}}$ et pour $t \in \mathbb{R}$ $p \circ \theta_t \omega \in \Omega_1$ alors on a $\omega \in \Pi_1$.

Démonstration. — Soit $\omega \in \Pi$ tel que pour $t \in \mathbb{R}$ $p \circ \theta t \omega \in \Omega_1$ alors : pour $n \in \mathbb{N}$ il existe $\omega_n \in \Pi_1$ $p \circ \theta_{-n}(\omega_n) = p \circ \theta_{-n}(\omega)$. On en déduit que pour $m \in \mathrm{Z}$: $\mathrm{T}_m(\omega_n)$ tend vers $\mathrm{T}_m(\omega)$ et $\mathrm{D}_m(\omega_n)$ tend $\mathrm{D}_m(\omega)$ (si D_m est la $m$ième coordonnée à valeur dans D sur $\mathrm{M} \times \mathrm{D}^{\mathrm{Z}}$). On en déduit que ω_n converge vers ω_1 dans $\mathrm{M} \times \mathrm{D}^{\mathrm{Z}}$, Π_1 étant fermé $\omega \in \Pi_1$ (l'hypothèse D métrique séparable ne sert pas dans la démonstration, simplement pour notre cadre elle permet d'assurer que la tribu produit sur $\mathrm{M} \times \mathrm{D}^{\mathrm{Z}}$ n'est autre que la tribu borélienne de la topologie produit sur $\mathrm{M} \times \mathrm{D}^{\mathrm{Z}}$). ■

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, t. **1**, Hermann.

[*2*] Borovkov, Stochastic Processes in queueing theory. *Applications of Mathematics*, Springer.

[*3*] Conze, Cours de Théorie Ergodique de Saint-Flour. *Lecture Notes in Math.*, t. **480**, 1974, Springer.

[*4*] Fayolle, Iasnogorovski, Two coupled Processors: The reduction to a Riemann Hilbert Problem. *Z. F. W.*, Band **47**, Heft 3, 1979.

[*5*] Feller, *An introduction to probability theory*, t. **2**, Wiley.

[6] KRICKEBERG, Cours de troisième Cycle sur les processus ponctuels, Paris VI, 1977.
[7] E. OSCAR, LANFORD III, Time evolution of large classical systems. *Lecture Notes in Physics*, t. **38**, p. 1111, Springer.
[8] NEVEU, Cours sur les processus ponctuels de Saint-Four. *Lecture Notes in Math.*, t. **598**, 1976, Springer.
[9] NEVEU, Cours de troisième Cycle sur les processus ponctuels, Paris VI, 1976.
[10] PARTHASARATY, *Probability measures in metric spaces*, Academic Press.
[11] PRIOURET, Cours sur les diffusions de Saint-Flour. *Lectures Notes in Math.*, t. **390**, 1973, Springer.
[12] V. A. ROCKLIN, On the fundamental ideas of measure theory. *Transact of Am. Math. Soc.*, t. **71**, 1952.
[13] H. TOTOKI, Ergodic theory Aarhus Universitet, 1969.
[14] FRANKEN, Einige Anwendungen der theorie zufälliger punktprozesse in der bedienungs theorie. *Mathematische Nachrichten*, t. **70**, 1975.
[1 bis] H. BREZIS, Opérateurs maximaux monotones. *North Holland mathematics studies*, n° 5.
[2 bis] CHARLOT, GHIDOUCHE. HAMAMI, *Irréductibilité et récurrence au sens de Harris des « temps d'attente » des GI/G/q*. Laboratoire de probabilités de l'Université de Rouen, 1976.
[3 bis] DALEY, Inqualities for moments of tails of random variables, with a queueing applications. *Z. F. W.*, t. **41**, 1977, p. 139-143.
[4 bis] KIEFER et WOLFOWITZ, On the theory of queues with many servers. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **78**, janvier 1955, p. 1-18.
[5 bis] KINGMAN, Some inequalities for the queue GI/G/1. *Biometrika*, t. **49**, 3 et 4 1962, p. 315.
[6 bis] J. L. LIONS, *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles.* Presses de l'Université de Montréal.
[7 bis] Cours de troisième Cycle sur les files d'attente, Paris VI, 1978.
[8 bis] F. SPITZER, A combinatorial identity and its applications to probability theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **82**, 1956, p. 323-339.
[9 bis] YOSIDA, *Functional analysis*, Springer.

(Manuscrit reçu le 10 juin 1980).