ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

P. JACOB

Convergence uniforme à distance finie de mesures signées

Annales de l'I. H. P., section B, tome 15, nº 4 (1979), p. 355-373
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1979__15_4_355_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XV, n° 4, 1979, p. 355-373 *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Convergence uniforme à distance finie de mesures signées

par

P. JACOB
Université des Sciences et Techniques de Lille 1, 59650 Villeneuve-d'Ascq

I.

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des mesures à signe finies sur la famille $\mathcal{B}_b$ des boréliens bornés d'un espace métrique séparable : la topologie U de la convergence uniforme à distance finie sur $\mathcal{M}$ peut être définie par la famille de semi-normes $\{ \mid \ \mid_B ; B \in \mathcal{B}_b \}$, où, pour tout $\lambda \in \mathcal{M}$, $| \lambda |_B$ est la variation totale de λ sur B. Cette topologie est métrisable par une distance δ; nous montrons que $(\mathcal{M}, \delta)$ est complet, et qu'un sous-ensemble de $\mathcal{M}$ est séparable si et seulement s'il est dominé par une probabilité [(§ III]).

Une mesure aléatoire est, dans cet article, une variable aléatoire à valeurs non dans $(\mathcal{M}, \mathcal{U})$ (où $\mathcal{U}$ est la tribu borélienne associée à δ) mais à valeurs dans $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, (où $\mathcal{F}$ est la tribu borélienne de $\mathcal{M}$, pour la topologie de la convergence faible à distance finie). Nous justifions ce choix dans les paragraphes IV et V.

Ensuite, nous aménagerons pour notre cas particulier la définition générale de la convergence faible sur les espaces métriques non séparables qu'avait introduit R. M. Dudley : Nous envisageons la convergence des lois P_n, définies sur $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ d'une suite de mesures aléatoires, vers une loi P_0 définie sur $(\mathcal{M}, \mathcal{U})$. Pour des raisons de mesurabilité, nous devons remplacer la tribu Θ, engendrée par les ouverts de $(\mathcal{M}, \delta)$ qu'utilisait Dudley, par la tribu $\mathcal{F}$. Tous les résultats de cet auteur sont cependant préservés (§ V et § VI).

Enfin, nous étudions les liens qui existent entre cette notion de convergence faible, et la convergence faible sur $\mathbb{R}^k$ des lois de dimension finie engendrées par les applications $\phi_{B_1,B_2,\ldots,B_k}$, $(B_1 ; B_2 ; \ldots ; B_k) \in \mathscr{B}_b^k$:

$$\forall \mu \in \mathscr{M},\ \phi_{B_1,B_2,\ldots,B_k}(\mu) = (\mu(B_1) ; \mu(B_2) ; \ldots ; \mu(B_k))$$

II. PRÉLIMINAIRES

Soit $(\mathscr{X}, d)$ un espace métrique séparable, $\mathscr{B}$ sa tribu borélienne, et $\mathscr{B}_b$ l'anneau des boréliens bornés. $\mathscr{M}^+$ désigne l'ensemble des mesures positives finies sur $\mathscr{B}_b$.

Nous appellerons mesure à distance finie, ou plus simplement mesure, toute fonction d'ensemble λ définie sur $\mathscr{B}_b$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, σ-additive sur $\mathscr{B}_b$, telle que $\lambda(\phi) = 0$. Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble de ces mesures : comme $\mathscr{B}$ est la classe monotone engendrée par $\mathscr{B}_b$, il est clair que tout élément positif de $\mathscr{M}$ possède un prolongement unique à la tribu $\mathscr{B}$, et peut être identifié à un élément de $\mathscr{M}^+$.

D'autre part, si μ et ν sont des éléments de $\mathscr{M}^+$, leur différence $\lambda = \mu - \nu$ définit un élément de $\mathscr{M}$. Nous allons montrer que, réciproquement, tout élément λ de $\mathscr{M}$ possède une décomposition analogue à celle de Hahn Jordan : $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ avec $(\lambda^+ \in \mathscr{M}^+ ; \lambda^- \in \mathscr{M}^+)$.

Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de boules ouvertes concentriques telle que $\mathscr{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $A_n = B_n - B_{n-1}$ (avec $B_0 = \phi$).

La mesure λ possède sur chaque sous-espace métrique A_n une restriction λ_n qui est une mesure bornée définie sur la tribu borélienne

$$\mathscr{A}_n = \{ B \cap A_n : B \in \mathscr{B} \} :$$

notons $(\lambda_n^+ - \lambda_n^-)$ la décomposition de Hahn-Jordan de λ_n. On vérifie aisément que $\lambda^+ = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \lambda_n^+$ $\left(\text{resp. } \lambda^- = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \lambda_n^+\right)$ est une fonction d'ensemble positive, finie et σ-additive sur $\mathscr{B}_b$. λ^+ (resp. λ^-) se prolonge donc de façon unique en un élément de $\mathscr{M}^+$, et, pour tout borélien borné B :

$$\lambda(B) = \lambda^+(B) - \lambda^-(B)$$

Nous appellerons topologie de la convergence faible à distance finie sur $\mathscr{M}$ la topologie F admettant pour système fondamental de voisinages les ensembles

$$F(\lambda_0, h_1, \ldots, h_n, \varepsilon) = \left\{ \lambda : \left| \int_{\mathscr{X}} h_i d\lambda_0 - \int_{\mathscr{X}} h_i d\lambda \right| < \varepsilon ; i = 1, \ldots, n \right\}$$

où $\lambda_0 \in \mathscr{M}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $(h_1, \ldots, h_n)$ est un n-uple de fonctions numériques continues et bornées sur $\mathscr{X}$, nulles en dehors d'un élément de $\mathscr{B}_b$.

Il est clair que F n'est autre que la topologie faible classique, quand $\mathscr{X}$ est un espace métrique borné; d'autre part, la topologie F^+ induite par F sur $\mathscr{M}^+$ est la topologie métrisable par la métrique ρ définie par M. J. Geffroy, M. P. Quidel et Mme H. Zeboulon dans ([1] et [2]. On notera $\mathscr{F}$ la tribu borélienne de $(\mathscr{M}, F)$ et $\mathscr{F}^+$ celle de $(\mathscr{M}^+, F^+)$.

Nous appellerons topologie de la convergence simple à distance finie sur $\mathscr{M}$ la topologie $\mathscr{S}$ admettant pour système fondamental de voisinages les ensembles $\mathscr{S}(\lambda_0, B_1, \ldots, B_n, \varepsilon) = \{ \lambda : | \lambda_0(B_i) - \lambda(B_i) | < \varepsilon; i = 1, \ldots, n \}$ où $\lambda_0 \in \mathscr{M}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $(B_1, \ldots, B_n) \in \mathscr{B}_b^n$.

Nous appellerons enfin topologie de la convergence uniforme à distance finie sur $\mathscr{M}$ la topologie U définie par la famille de semi-normes $\{ |\ \ |_B ; B \in \mathscr{B}_b \}$, où, pour tout $B \in \mathscr{B}_b$, et tout $\lambda \in \mathscr{M}$, $| \lambda |_B$ est la variation totale de λ sur B. Nous noterons $\mathscr{U}$ la tribu borélienne de $(\mathscr{M}, U)$.

L'objet de notre étude est cette dernière topologie, mais nous serons amenés à utiliser les topologies F et $\mathscr{S}$, ce qui justifie leur introduction.

Soit 0 une origine arbitraire dans $\mathscr{X}$: pour tout $r \in \mathbb{R}^{+*}$, notons B_r la boule ouverte de centre 0 et de rayons r, et $\mathscr{B}_r$ la tribu borélienne du sous-espace métrique $B_r \subseteq \mathscr{X}$. Ces notations seront utilisées dans tout l'article.

Il est clair que les familles de semi-normes $\{ |\ \ |_B ; B \in \mathscr{B}_b \}$ et $\{ |\ \ |_{B_r} ; r \in \mathbb{N}^* \}$ définissent la même topologie et la même structure uniforme; d'autre part, on sait que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, l'espace $\mathscr{M}_r$ des mesures finies sur $(B_r, \mathscr{B}_r)$ est un espace de Banach pour la norme $|\ \ |_{B_r}$: nous noterons δ_r la distance en variation sur $\mathscr{M}_r$.

De façon classique, il existe des métriques uniformément équivalentes à la famille $\{ \delta_r \}_{r \in \mathbb{N}^*}$; par exemple, $\forall (\mu, \nu) \in \mathscr{M} \times \mathscr{M}$:

$$\delta(\mu, \nu) = \sum_{r=1}^{\infty} | \delta_r(\mu, \nu)/1 + \delta_r(\mu, \nu) |$$

ou

$$\delta^*(\mu, \nu) = \sup_{r \geq 0} \frac{\min [\delta_r(\mu, \nu) ; 1]}{2^r}$$

Remarques. — I) Soit $\mathscr{M}_b$ l'ensemble des mesures finies sur $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$. La restriction à $\mathscr{M}_b$ de la topologie U est en général plus faible que la topologie V induite sur $\mathscr{M}_b$ par la distance en variation δ_∞.

II) Soit 0' une autre origine choisie dans $\mathscr{X}$, $\{ \delta'_r \}_{r \in \mathbb{R}^+}$, δ', δ'^* les semi-distances et distances associées à ce choix. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \delta_r \leqslant \delta'_{r+k} \quad \text{et} \quad \delta'_r \leqslant \delta_{r+k}$$

Où k désigne le plus petit entier supérieur à $d(0, 0')$, il en résulte les inégalités

$$2^{-k} \leqslant \frac{\delta}{\delta'} \leqslant 2^k \quad \text{et} \quad 2^{-k} \leqslant \frac{\delta^*}{\delta'^*} \leqslant 2^k$$

III) La topologie faible sur $\mathcal{M}_b$ coïncide évidemment avec la topologie F si $\mathcal{X}$ est un espace métrique borné. On sait ([*3*], p. 193) que F est métrisable si et seulement si $\mathcal{X}$ est un ensemble fini. La topologie F n'est donc pas, en général métrisable.

Comme de plus $(\mathcal{M}_b, \mathrm{F})$ est un espace de Haussdorff complètement régulier, la topologie F n'est pas, en général, à base dénombrable ([*13*], p. 92.)

III. ÉTUDE DE L'ESPACE MÉTRIQUE $(\mathcal{M}, \delta)$

Une partie séparable de $(\mathcal{M}, \delta)$ est dominée : pour établir ce résultat, nous allons démontrer une propriété plus forte, qui est une généralisation d'un résultat de A. Berger [*4*].

THÉORÈME IV. — *Toute partie séparable* E *de* $(\mathcal{M}, \mathcal{S})$ *est dominée par une probabilité* p.

Démonstration. — Soit $\mathrm{D} = \{ d_i \}_{i \in \mathbb{N}^*}$ un sous-ensemble dénombrable dense dans E. Pour tout $i \in \mathrm{N}^*$, soit $d_i = d_i^+ - d_i^-$ la décomposition de Hahn-Jordan de d_i, et $| d_i | = d_i^+ + d_i^-$ sa variation totale.

Soit $\{ \mathrm{C}_n \}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une partition dénombrable de $\mathcal{X}$ par des boréliens bornés et, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathrm{R}_i = \{ \mathrm{C}_n : n \in \mathbb{N}^*; | d_i | (\mathrm{C}_n) > 0 \}$.

Si R_i est dénombrable, on pose $\mathrm{R}_i = \{ \mathrm{C}_k^i \}_{k \in \mathbb{N}^*}$ et on définit une probabilité p_i par :

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{B},\ p_i(\mathrm{A}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} [| d_i | (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}_k^i) / | d_i | (\mathrm{C}_k^i)].$$

Si R_i est fini, on pose $\mathrm{R}_i = \{ \mathrm{C}_k^i \}_{k=1,\dots,t_i}$, et on définit une probabilité p_i par :

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{B},\ p_i(\mathrm{A}) = \sum_{k=1}^{t_i} t_i^{-1} [| d_i | (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}_k^i) / | d_i | (\mathrm{C}_k^i)]$$

Il est clair que la probabilité $p = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} p_i$ domine D. Il reste à démontrer que, si B est un borélien borné de $\mathcal{X}$ tel que $d_i(\mathrm{B})$ soit nul pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, alors $\mu(\mathrm{B})$ est nul pour toute mesure $\mu \in \mathrm{E}$.

Soit B un borélien borné tel que $d_i(\mathrm{B}) = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, et soit μ une mesure fixée dans E. On considère la suite de voisinages :

$$\left\{ \mathrm{V}_{\mathrm{B}, \frac{1}{m}} \right\}_{m \in \mathbb{N}^*} = \left(\left\{ \nu \in \mathcal{M} : | \nu(\mathrm{B}) - \mu(\mathrm{B}) | < \frac{1}{m} \right\} \right)_{m \in \mathbb{N}^*}$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe une mesure $d_{i(m)} \in \mathrm{D}$ dans $\mathrm{V}_{\mathrm{B}, \frac{1}{m}}$: alors,

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \mid d_{i(m)}(\mathrm{B}) - \mu(\mathrm{B}) \mid = \mid \mu(\mathrm{B}) \mid < \frac{1}{m}$$

ce qui implique : $\mu(\mathrm{B}) = 0$.

THÉORÈME V. — *Soit μ une mesure fixée dans $\mathscr{M}$: l'ensemble des éléments de $\mathscr{M}$ dominés par μ est un fermé séparable de $(\mathscr{M}, \delta)$.*

Démonstration. — A) Soit E l'ensemble des mesures dominées par μ et $\{ \mathrm{B}_n \}_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de boules ouvertes de $\mathscr{X}$ utilisées pour construire la métrique δ sur $\mathscr{M}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons E_n l'ensemble des restrictions à B_n des mesures de E : il est clair que E_n peut être considéré comme un sous-ensemble de E, et que la topologie induite sur E par U n'est autre que celle de la distance en variation sur E_n.

Soit μ^n la restriction de μ à $(\mathrm{B}_n, \mathscr{B}_n)$: μ^n est absolument continue par rapport à la probabilité P_n définie par :

$$\forall \mathrm{A} \in \mathscr{B}_n : \mathrm{P}_n(\mathrm{A}) = \frac{\mid \mu^n \mid (\mathrm{A})}{\mid \mu^n \mid (\mathrm{B}_n)}.$$

L'ensemble F_n des mesures bornées sur $(\mathrm{B}_n, \mathscr{B}_n)$ dominées par P_n contient E_n. Or F_n est isométrique à $\mathrm{L}(\mathrm{B}_n, \mathscr{B}_n, \mathrm{P}_n)$, qui est séparable à cause de la séparabilité de $\mathscr{X}$: E_n est donc séparable également, et nous noterons D_n un sous-ensemble dénombrable dense dans E_n. Alors :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathrm{E}_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{\mathrm{D}_n} \subseteq \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathrm{D}_n}$$

Pour montrer que E est séparable, il suffit donc de prouver l'inclusion :

$$\mathrm{E} \subseteq \overline{\bigcup_{n \in \mathrm{N}^*} \mathrm{E}_n}$$

Soit ν une mesure de E, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit ν_n sa restriction au sous-espace B_n : on a :

$$\begin{aligned} \delta(\nu, \nu_n) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} [\sup_{\mathrm{B} \in \mathscr{B}_n} \mid \nu(\mathrm{B}) - \nu_n(\mathrm{B}) \mid / 1 + \sup_{\mathrm{B} \in \mathscr{B}_n} \mid \nu(\mathrm{B}) - \nu_n(\mathrm{B}) \mid] \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} [\sup_{\mathrm{B} \in \mathscr{B}_n} \mid \nu(\mathrm{B}) - \nu_n(\mathrm{B}) \mid / 1 + \sup_{\mathrm{B} \in \mathscr{B}_n} \mid \nu(\mathrm{B}) - \nu_n(\mathrm{B}) \mid] \\ &\leqslant \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\nu_n \in \mathrm{E}_n$, l'inclusion souhaitée est démontrée.

B) Pour démontrer que E est un fermé, il suffit de vérifier que la limite ν d'une suite de mesures $\{ \nu_n \}_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathscr{M}$, dominées par la mesure μ, est dominée elle aussi par μ.

Remarques. — 1) Dans la partie A) de la démonstration, on a donc :

$$E = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} D_n}$$

2) Si E est un sous-ensemble de $\mathscr{M}$ dominé par une mesure $\mu \in \mathscr{M}$, E est une partie séparable de $\mathscr{M}$.

THÉORÈME VI. — *L'espace $\mathscr{M}$, muni de la famille de semi-distances $\{ \delta_r \}_{r\in\mathbb{R}^*}$, est un espace semi-métrique séquentiellement complet; l'espace $\mathscr{M}$, muni de la distance δ (ou δ^*) est un espace métrique complet.*

Démonstration. — 1) On considère la famille dénombrable de semi-distances $\{ \delta_r \}_{r\in\mathbb{N}^*}$, qui est uniformément équivalente à $\{ \delta_r \}_{r\in\mathbb{R}^*}$.

Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, et pour toute mesure μ de $\mathscr{M}$, on note μ^r la restriction de μ au sous-espace métrique B_r; μ^r est un élément de l'ensemble $\mathscr{M}_r$ des mesures bornées sur $(B_r, \mathscr{B}_r)$ mais peut être aussi considérée comme un élément de $\mathscr{M}$. Ainsi, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a évidemment :

$$\forall(\mu, \nu) \in \mathscr{M} \times \mathscr{M} : \delta_r(\mu, \nu) = \delta_r(\mu_r, \nu_r)$$

où δ_r désigne la semi-métrique déjà définie (§ II) sur $\mathscr{M}$, mais aussi la distance en variation sur $\mathscr{M}_r$. On sait que l'espace métrique $(\mathscr{M}_r, \delta_r)$ est complet.

2) On considère une suite $\{ \mu_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{M}$, que l'on suppose être de Cauchy au sens de la structure semi-métrique définie par $\{ \delta_r \}_{r\in\mathbb{N}^*}$: pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$m \geqslant p ; n \geqslant p \Rightarrow \delta_r(\mu_n, \mu_m) < \varepsilon$$

Par définition, la suite $\{ \mu_n^r \}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, une suite de Cauchy dans $(\mathscr{M}_r, \delta_r)$. Il existe donc une mesure $\mu^r \in \mathscr{M}_r$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \delta_r(\mu_n^r ; \mu^r) = 0 \tag{1}$$

Pour tout borélien borné B, la suite $\{ \mu^r(B) \}_{r\in\mathbb{N}^*}$ est constante à partir d'un certain rang. On peut alors définir une fonction d'ensemble μ sur $\mathscr{B}_b$ en posant :

$$\forall B \in \mathscr{B}_b : \mu(B) = \lim_{r\to\infty} \mu^r(B)$$

Il est clair que μ est σ-additive sur $\mathscr{B}_b$; c'est donc un élément de $\mathscr{M}$. Enfin, comme pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, μ^r est la restriction de μ au sous-espace B_r, (1) peut s'écrire :

$$\lim \delta_r(\mu_n ; \mu) = 0$$

Tout de suite de Cauchy au sens de la structure semi-métrique définie par $\{ \delta_r \}_{r \in \mathbb{N}}$ est donc convergente : $\mathscr{M}$ est un espace semi-métrique séquentiellement complet; $\mathscr{M}$ est aussi un espace métrique complet pour les métriques δ et δ^* qui sont uniformément équivalentes à $\{ \delta_r \}_{r \in \mathbb{N}^*}$.

IV. NOTION DE MESURE ALÉATOIRE (A SIGNE)

Pour tout borélien borné $B \in \mathscr{B}_b$, on note ϕ_B l'application :

$$\begin{aligned} &\mathscr{M} \to \mathbb{R} \\ &\mu \to \mu(B) = \phi_B(\mu) \end{aligned}$$

$\mathbb{R}$ étant muni de sa tribu borélienne $\mathscr{R}$, on note $\mathscr{T}$ la tribu engendrée sur $\mathscr{M}$ par la famille d'applications $\{ \phi_B ; B \in \mathscr{B}_b \}$, et $\mathscr{T}^+$ la tribu engendrée sur $\mathscr{M}^+$ par la famille des restrictions : $\{ \phi_B/\mathscr{M}^+ ; B \in \mathscr{B}_b \}$.

D'après un résultat établi par M. J. Geffroy et M. H. Zeboulon [2] les tribus $\mathscr{T}^+$ et $\mathscr{F}^+$ coïncident; cette propriété est due essentiellement au fait que la topologie F^+ est à base dénombrable.

Bien que nous n'ayons pas de contre-exemple précis à proposer, le fait que F ne soit pas à base dénombrable nous fait craindre que la tribu $\mathscr{F}$ ne soit en général différente de la tribu $\mathscr{T}$. Cependant, l'espace mesurable $(\mathscr{M}, \mathscr{F})$ est un espace de mesures adapté à l'espace mesurable $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$.

THÉORÈME I. — *Pour tout borélien* $B \in \mathscr{B}_b$, *l'application* ϕ_B *est* $\mathscr{F}$*-mesurable; autrement dit,* $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{F}$.

Démonstration. — 1) Pour toute fonction numérique g définie sur $\mathscr{X}$, continue, bornée, et à support borné, la fonction ϕ_g :

$$\begin{aligned} &\mathscr{M} \to \mathbb{R} \\ &\mu \to \phi_g(\mu) = \int_{\mathscr{X}} g d\mu \end{aligned}$$

est continue quand $\mathscr{M}$ est muni de la topologie F; elle est donc $\mathscr{F}$-mesurable.

2) Soit G un ouvert borné de $\mathscr{X}$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction f_n continue, à valeurs dans [0, 1], égale à 0 sur G^c et à 1 sur

$$G^{-\frac{1}{n}} = \left\{ x \in \mathscr{X} : d(x, G^c) \geqslant \frac{1}{n} \right\}.$$

En utilisant deux fois le théorème de convergence dominée, on obtient, pour toute mesure $\mu \in \mathscr{M}$:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(f_n) = \lim_{n\to\infty} [\mu^+(f_n) - \mu^-(f_n)] = \mu^+(G) - \mu^-(G) = \mu(G)$$

Par conséquent, la fonction $\phi_G : \mu \to \mu(G)$ est $\mathscr{F}$-mesurable.

3) Soit B un borélien borné quelconque et 0 un ouvert borné qui le contient (par exemple : $B^1 = 0$); B est un élément de la tribu borélienne $\mathscr{O}$ du sous-espace métrique borné $0 \subseteq \mathscr{X}$; nous allons montrer que la classe $\mathscr{C}$ des éléments C de $\mathscr{O}$ pour lesquels ϕ_c est $\mathscr{F}$-mesurable contient la tribu $\mathscr{O}$.

a) Tout ouvert de 0 appartient à $\mathscr{C}$.

b) Le semi-anneau $\mathscr{S}$ de parties de 0, engendré par les ouverts de 0, est contenu dans $\mathscr{C}$. En effet, tout élément A de $\mathscr{S}$ est de la forme $A' - A''$, où A' et A'' sont des ouverts de 0, et par conséquent :

$$\phi_A = \phi_{A' \cup A''} - \phi_{A''}$$

c) Comme, pour tout $A \in \mathscr{C}$, $\phi_{O-A} = \phi_O - \phi_A$, $\mathscr{C}$ est fermée pour la complémentation.

d) $\mathscr{C}$ contient l'anneau $\mathscr{A}$ engendré par $\mathscr{S}$, car tout élément de $\mathscr{A}$ est une réunion finie d'éléments disjoints de $\mathscr{S}$.

e) Enfin, $\mathscr{C}$ est une classe monotone : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite monotone d'éléments de $\mathscr{C}$ telle que : $A = \lim_{n\to\infty} A_n$, on a, pour toute mesure $\mu \in \mathscr{M}$: $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$. C'est-à-dire : $\phi_A = \lim_{n\to\infty} \phi_{A_n}$; A appartient donc à $\mathscr{C}$.

On en déduit : $\mathscr{C} \supset \mathscr{O}$.

THÉORÈME II. — Pour tout borélien borné B, les applications de $(\mathscr{M}, \mathscr{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{R})$:

$$\phi_B^+ : \mu \to \mu^-(B)$$
$$\phi_B^- : \mu \to \mu^-(B)$$
$$|\phi_B| : \mu \to |\mu|(B)$$

sont mesurables.

Démonstration. — Compte tenu du théorème I, il suffit de prouver que $|\phi_B|$ est $\mathscr{F}$-mesurable. Pour cela, nous établissons le résultat dans le cas où B est un ouvert borné de $\mathscr{X}$; un argument identique à celui qui est utilisé dans la fin de la précédente démonstration permet alors de conclure.

Soit G un ouvert borné de $\mathscr{X}$: la fonction $|\phi_G|$ est semi-continue inférieurement.

En effet, $\varepsilon > 0$ et $\mu \in \mathcal{M}$ étant fixés, il existe une fonction continue h à valeurs dans $[0, 1]$, nulle sur $\mathcal{X} - G$, telle que :

$$\int_{\mathcal{X}} hd\,|\,\mu\,| \geqslant |\,\mu\,|\,(G) - \varepsilon/3$$

Soit $\mathcal{X} = D^+ \cup D^-$ la décomposition de Hahn-Jordan associée à μ, et g la fonction mesurable : $g = \min(h; 1_{D^+}) + \max(-h; -1_{D^-})$. Il est clair que g est à valeurs dans $[-1; +1]$, et que, pour tout borélien E :

$$\int_E hd\,|\,\mu\,| = \int_E gd\mu$$

Les mesures positives μ^+ et μ^- sont finies sur le sous-espace métrique $G \subseteq \mathcal{X}$; il existe donc un fermé C de ce sous-espace tel que :

$$\mu^+(G - C) < \varepsilon/12;\ \mu^-(G - C) < \varepsilon/12$$

et tel que la restriction de g au fermé C soit continue ([*12*], p. 30).

La restriction de g au fermé $(\mathcal{X} - G) \cup C$ est elle aussi continue, et, comme $\mathcal{X}$ est normal, elle peut se prolonger en une fonction f continue sur $\mathcal{X}$, à valeurs dans $[-1; +1]$, et nulle en dehors de G. Alors :

$$\left| \int_{\mathcal{X}} fd\mu - \int_{\mathcal{X}} hd\,|\,\mu\,| \right| = \left| \int_{G-C} fd\mu - \int_{G-C} hd\,|\,\mu\,| \right|$$
$$\leqslant \left| \int_{G-C} fd\mu \right| + \left| \int_{G-C} hd\,|\,\mu\,| \right| \leqslant 2\,|\,\mu\,|\,(G - C) < \varepsilon/3$$

Par conséquent :

$$\left| \int_{\mathcal{X}} fd\mu \right| > \int_{\mathcal{X}} hd\,|\,\mu\,| - \varepsilon/3 > |\,\mu\,|\,(G) - 2\varepsilon/3$$

On considère alors le voisinage de la topologie F :

$$V_\mu = \left\{ \nu \in \mathcal{M} : \left| \int_{\mathcal{X}} fd\mu - \int_{\mathcal{X}} fd\nu \right| < \varepsilon/3 \right\}$$

Pour toute mesure ν de V_μ, on a :

$$|\,\nu\,|\,(G) \geqslant \left| \int_{\mathcal{X}} fd\nu \right| > \left| \int_{\mathcal{X}} fd\mu \right| - \varepsilon/3 > |\,\mu\,|\,(G) - \varepsilon$$

c'est-à-dire : $|\,\phi_G\,|\,(\nu) \geqslant |\,\phi_G\,|\,(\mu) - \varepsilon$; $|\,\phi_G\,|$ est semi-continue inférieurement sur $(\mathcal{M}, F)$, donc $|\,\phi_G\,|$ est $\mathcal{F}$-mesurable.

Ces deux théorèmes vont nous permettre de définir une classe assez large de mesures aléatoires; posons d'abord deux définitions très générales :

DÉFINITIONS. — 1) *On appelle mesure aléatoire positive toute application mesurable* $\mu^\bullet$ *d'un espace probabilisable* $(\Omega, \mathcal{A})$ *dans* $(\mathcal{M}^+, \mathcal{C}^+)$ *(ou* $(\mathcal{M}^+, \mathcal{F}^+)$*).*

2) *On appelle mesure aléatoire toute application mesurable $\mu^\bullet$ d'un espace probabilisable* $(\Omega, \mathscr{A})$ *dans* $(\mathscr{M}, \mathscr{C})$.

Ainsi, une application $\mu^\bullet$ de Ω dans $\mathscr{M}$ (resp. : $\mathscr{M}^+$) est une mesure aléatoire (resp. : positive) si et seulement si, pour tout borélien borné B, $\mu^\bullet(B)$ est une variable aléatoire réelle (resp. : positive).

Cette définition d'une mesure aléatoire, satisfaisante d'un point de vue théorique, présente des inconvénients si $\mathscr{C} \neq \mathscr{F}$; par exemple, si $\{ \mu_n^\bullet \}$ est une suite de mesures aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, les lois de probabilité $\{ P_n \}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne sont pas nécessairement définies sur $\mathscr{F}$: on ne peut donc pas étudier l'éventuelle convergence faible de la suite $\{ P_n \}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pour cette raison, nous nous limiterons à l'étude des mesures aléatoires $(\mathscr{A}, \mathscr{F})$-mesurables. Cette restriction n'est pas aussi grave qu'il y paraît : dans les applications, les mesures aléatoires à signe apparaissent souvent un « centrant » des mesures aléatoires, ou, plus généralement, en faisant la différence de deux mesures aléatoires positives. Le théorème suivant montre que ces dernières et celles qui sont $(\mathscr{A}, \mathscr{F})$-mesurables sont identiques.

THÉORÈME III. — 1) *Soit* $(\Omega, \mathscr{A})$ *un espace probabilisable et* $\mu^\bullet$ *une application* $(\mathscr{A}, \mathscr{F})$*-mesurable de* Ω *dans* $\mathscr{M}$; *pour tout* $\omega \in \Omega$, *soit* $\mu^\omega = \mu^{+\omega} - \mu^{-\omega}$ *la décomposition de Hahn-Jordan de* μ^ω : *les applications* $\mu^{+\bullet}$ *et* $\mu^{-\bullet}$ *sont des mesures aléatoires positives.*

2) *Soient* $\mu^\bullet$ *et* $\nu^\bullet$ *deux mesures aléatoires positives définies sur un espace probabilisable* $(\Omega, \mathscr{A})$. *L'application* $\theta^\bullet = \mu^\bullet - \nu^\bullet$ *est* $(\mathscr{A}, \mathscr{F})$*-mesurable.*

Démonstration. — 1) Pour tout borélien borné B, on peut décomposer ϕ_B^+ de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccc} (\mathscr{M}, \mathscr{F}) & \xrightarrow{\;i\;} & (\mathscr{M}^+, \mathscr{F}^+) & \xrightarrow{\phi_{B/\mathscr{M}^+}} & (\mathbb{R}^+, \mathscr{R}^+) \\ \mu & \longrightarrow & \mu^+ & \longrightarrow & \phi_B^+(\mu) \end{array}$$

On sait que $\mathscr{F}^+$ coïncide avec la tribu $\mathscr{C}^+$ engendrée par les applications $\phi_{B/\mathscr{M}^+}$; de plus, d'après le théorème II, les applications ϕ_B^+ sont $(\mathscr{F}, \mathscr{R}^+)$-mesurables; on en déduit que i est $(\mathscr{F}, \mathscr{F}^+)$-mesurable ([*11*], p. 270).

Alors, comme $\mu^\bullet$ est $(\mathscr{A}, \mathscr{F})$-mesurable, $i \circ \mu^\bullet = \mu^{+\bullet}$ est $(\mathscr{M}, \mathscr{F}^+)$-mesurable : c'est donc une mesure aléatoire positive. On peut faire la même démonstration pour $\mu^{-\bullet}$. Ainsi, toute mesure aléatoire $(\mathscr{A}, \mathscr{F})$-mesurable est la différence de deux mesures aléatoires positives.

2) Soient $\mu^\bullet$ et $\nu^\bullet$ deux applications $(\mathscr{A}, \mathscr{F}^+)$-mesurables de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{M}^+$. Munissons $(\mathscr{M}^+ \times \mathscr{M}^+)$ de la topologie produit $F^+ \times F^+$ et de la tribu $\mathscr{F}^+ \otimes \mathscr{F}^+$: comme $\mathscr{M}^+$ est un espace métrisable séparable, $\mathscr{F}^+ \otimes \mathscr{F}^+$

est la tribu borélienne de $\mathscr{M}^+ \times \mathscr{M}^+$. L'application $\Pi : (\mathscr{M}^+ \times \mathscr{M}^+, \mathscr{F}^+ \otimes \mathscr{F}^+) \to (\mathscr{M}, \mathscr{F})$

$$\mu, \nu \to \mu - \nu$$

est continue, donc mesurable. D'autre part, l'application :

$$(\mu^\bullet, \nu^\bullet) : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathscr{M}^+ \times \mathscr{M}^+, \mathscr{F}^+ \oplus \mathscr{F}^+)$$

est elle aussi mesurable, puisque $\mu^\bullet$ et $\nu^\bullet$ le sont.

Il en résulte que $\theta^\bullet = \Pi_0(\mu^\bullet, \nu^\bullet)$ est $(\mathscr{A}, \mathscr{F})$-mesurable.

CONCLUSION

L'ensemble de ces résultats montre qu'il est raisonnable de ne considérer que les mesures aléatoires $\mathscr{F}$-mesurables, ce que nous ferons toujours tacitement par la suite.

V. CHOIX D'UNE TRIBU $(\mathscr{M}, \delta)$

Comme la topologie U est plus fine que la topologie F, la tribu $\mathscr{U}$ contient la tribu $\mathscr{F}$, et donc la tribu $\mathscr{C}$. Pour tout $B \in \mathscr{B}$. L'application ϕ_B est donc $\mathscr{U}$-mesurable.

Supposons que la loi de probabilité P d'une mesure aléatoire soit définie sur $(\mathscr{M}, \mathscr{U})$. D'après E. Marczewski et R. Sikorski [5], P est concentrée, dans la plupart des cas usuels, sur un borélien séparable E de $\mathscr{M}$, ou encore, ici, sur un sous-ensemble dominé E de $\mathscr{M}$. Une telle mesure aléatoire est très particulière, et il est souhaitable de pouvoir envisager la convergence faible vers P de suites de probabilités $\{ P_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ qui ne soient pas concentrées sur un sous-espace séparable de $\mathscr{M}$. R. M. Dudley [6] et [7] a introduit dans ce dessein une théorie de la convergence faible de probabilités définies sur la tribu Θ engendrée par les boules ouvertes d'un espace métrique non séparable : Θ n'est pas la tribu borélienne de l'espace considéré et de telles probalités ne sont pas nécessairement concentrées sur une partie séparable de cet espace. Cependant, comme Dudley lui-même le signale, de telles tribus ont peu de propriétés intéressantes.

L'inconvénient essentiel, pour le cas particulier que nous étudions est que les applications $\phi_B(B \in \mathscr{B}_b)$ ne sont pas, en général, Θ-mesurables.

LEMME. — *La tribu Θ, engendrée par les boules ouvertes de l'espace métrique $(\mathscr{M}, \delta)$ est incluse dans la tribu Θ', engendrée par les semi-boules ouvertes de l'espace semi-métrique $(\mathscr{M}, \{ \delta_r \}_{r \in \mathbb{N}^*})$.*

Démonstration. — Soit $\mu \in \mathscr{M}$; pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, l'application :

$$\nu \to \delta_r(\mu, \nu)$$

est Θ'-mesurable, puisque pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble $\{ \nu \in \mathscr{M} : \delta_r(\mu, \nu) < \alpha \}$ est une semi-boule ouverte.

On en déduit aisément que l'application :

$$\nu \to \delta(\mu, \nu)$$

est Θ'-mesurable, ce qui permet de conclure.

THÉORÈME VI. — *La tribu Θ, engendrée par les boules ouvertes de l'espace métrique $(\mathscr{M}, \delta)$ est incluse dans la tribu $\mathscr{C}$, engendrée par les applications $\phi_B(B \in \mathscr{B}_b)$.*

Démonstration. — 1) Comme $\mathscr{X}$ est séparable, il existe une suite $\{ \mathscr{D}_k \}_{k \in \mathbb{N}^*}$ des partitions de $\mathscr{X}$, où chaque $\mathscr{D}_k$ est formé de boréliens de diamètres inférieurs à $\frac{1}{k}$, que nous noterons $A_{n_1, n_2, \ldots, n_k} (k \in \mathbb{N}^*; (n_1, n_k, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^{*k})$. Nous supposerons en outre que les partitions $\mathscr{D}_k (k \in \mathbb{N}^*)$ sont emboîtées de façon que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall (n_1, n_2, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^{*k}$

$$\bigcup_{n_{k+1}=1}^{\infty} A_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}} = A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

On peut vérifier aisément que tout ouvert de $\mathscr{X}$ est une union finie ou dénombrable d'éléments de $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathscr{D}_k$.

Soit $\{ \mathscr{B}_r \}_{r \in \mathbb{N}^*} \}$ la suite de boules ouvertes qui sert à définir la famille de semi-distances $\{ \delta_r \}_{r \in \mathbb{N}^*}$: Pour tout $(r, k) \in \mathrm{N}^{*2}$, notons $\mathscr{D}_k^r$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{D}_k$ inclus dans B_r, ensuite, pour tout $r \in \mathrm{N}^*$, notons $\mathscr{A}_r$ l'ensemble des unions finies d'éléments de $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathscr{D}_k^r$.

Nous allons montrer que, si μ et ν sont deux mesures telles que :

$$\forall A \in \mathscr{A}_r : | \mu(A) - \nu(A) | \leqslant \varepsilon$$

alors

$$\forall B \in \mathscr{B}_r : | \mu(B) - \nu(B) | \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, toute semi-boule de la forme $\{ \mu : \delta_r(\mu, \nu) < \varepsilon \}$ pourra s'écrire $\{ \mu : \sup_{A \in \mathscr{A}_r} | \mu(A) - \nu(A) | < \varepsilon \}$, ce qui montrera sa $\mathscr{C}$-mesurabilité. Enfin le lemme permettra de conclure : $\Theta \subseteq \Theta' \subseteq \mathscr{C}$.

2) r étant fixé, supposons donc que : $\forall A \in \mathscr{A}_r : | \mu(A) - \nu(A) | \leqslant \varepsilon$.

3) Soit 0 un ouvert quelconque de $\mathscr{X}$, inclus dans B_r, pour tout $s > 0$, il existe un élément $A_{s;\mu}$ de $\mathscr{A}_r$ tel que :

$$A_{s;\mu} \subseteq 0 \quad \text{et} \quad - s < \mu(0 - A_{s,\nu}) < + s$$

de même, il existe un élément $A_{s,\nu}$ de $\mathscr{A}_r$ tel que :

$$A_{s,\nu} \subseteq 0 \quad \text{et} \quad - s < \mu(0 - A_{s,\nu}) < + s$$

Posons $A_s = A_{s,\nu} \cup A_{s,\mu}$. On a :

$$| \mu(0) - \nu(0) | \leqslant | \mu(0) - \mu(A_s) | + | \mu(A_s) - \nu(A_s) | + | \nu(A_s) - \nu(0) | < \varepsilon + 2s$$

et comme s est arbitraire : $| \mu(0) - \nu(0) | \leqslant \varepsilon$.

b) Comme le sous-espace métrique B_r est borné, les restrictions de μ et ν à la tribu $\mathscr{B}_r$ sont des mesures finies, donc régulières. Soit B un élément quelconque de $\mathscr{B}_r$: pour tout $s > 0$, il existe deux ouverts $0_{s,\mu}$ et $0_{s,\nu}$ inclus dans B_r, et contenant B tels que :

$$- s < \mu(0_{s,\mu} - B) < + s \quad \text{et} \quad - s < \nu(0_{s,\nu} - B) < + s$$

Posons : $0_s = 0_{s,\mu} \cap 0_{s,\nu}$, on a :

$$| \mu(B) - \nu(B) | \leqslant | \mu(B) - \mu(0_s) | + | \mu(0_s) - \nu(0_s) | + | \nu(0_s) - \nu(B) | < \varepsilon + 2s$$

et, comme s est arbitraire : $| \mu(B) - \nu(B) | \leqslant \varepsilon$.

Remarque. — L'inclusion Θ dans $\mathscr{T}$ est stricte en général : Posons par exemple $\mathscr{X} = [0, 1]$ et considérons le sous-ensemble $\mathscr{D}$ des mesures de Dirac sur $[0, 1]$. La tribu Θ est engendrée par les points de $\mathscr{D}$; comme $\mathscr{D}$ est un ensemble de mesures positives, $\mathscr{T}$ et $\mathscr{F}$ coïncident. De plus, comme $[0, 1]$ muni de sa topologie naturelle est homéomorphe à $\mathscr{D}$ muni de la topologie faible, $\mathscr{T}$ est isomorphe à la tribu borélienne de $[0, 1]$. Enfin, la tribu $\mathscr{U}$ est la tribu des parties de $\mathscr{D}$.

THÉORÈME VII. — *La tribu Θ contient les éléments séparables de la tribu $\mathscr{U}$.*

Démonstration. — Soit F^ε un fermé de la topologie U contenant un sous-ensemble D dénombrable et dense. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$F^\varepsilon = \{ \mu \in \mathscr{M} : \delta(\mu, F) < \varepsilon \} = \{ \mu \in \mathscr{M} : \inf_{\nu \in F} \delta(\mu, \nu) < \varepsilon \} = \{ \mu \in \mathscr{M} : \inf_{\nu \in D} \delta(\mu, \nu) < \varepsilon \}$$

F^ε est donc Θ mesurable, ainsi que $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F^{1/k}$.

A présent, soit B un borélien séparable de U, $\overline{B}$ est fermé et séparable, et B appartient à la tribu borélienne du sous-espace métrique $\overline{B} \subseteq (\mathcal{M}, \delta)$. Comme $\overline{B}$ est séparable, cette tribu borélienne est engendrée par les boules ouvertes de $\overline{B}$, qui sont les intersections avec B des boules ouvertes de $\mathcal{M}$ dont le centre est dans $\overline{B}$. Ces boules ouvertes et $\overline{B}$ étant Θ mesurables, les boréliens du sous-espace $\overline{B}$ le sont aussi; en particulier, $\overline{B}$ est Θ mesurable.

COROLLAIRE. — *Soit* $\mu \in \mathcal{M}$ une mesure quelconque et E l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}$ dominés par μ : E est Θ mesurable.

Démonstration. — D'après le théorème V, E est un fermé séparable de la topologie U.

Remarque. — 1) Ce corollaire est une extension d'un résultat de K. Lange [*8*] :

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des probabilités sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, muni de la topologie faible et de sa tribu borélienne $\mathcal{F}_p$; l'ensemble $\mathcal{P}_0$ des probabilités, dominée par une probabilité fixée $p_0 \in \mathcal{P}$ est $\mathcal{F}_p$-mesurable.

2) D'autres conséquences immédiates du théorème VII sont les suivantes :

— Soit $\mathcal{D}$ un sous-espace séparable de $(\mathcal{M}, \delta)$. Soient $\Theta_{\mathcal{D}}$ [resp. : $\Theta'_{\mathcal{D}}, \mathcal{T}_{\mathcal{D}}, \mathcal{F}_{\mathcal{D}}, \mathcal{U}_{\mathcal{D}}$] la tribu trace de Θ [resp. : $\Theta', \mathcal{T}, \mathcal{F}, \mathcal{U}$] sur $\mathcal{D}$. Si $\mathcal{D} \in \mathcal{U}$, on a :

$$\Theta_{\mathcal{D}} = \Theta'_{\mathcal{D}} = \mathcal{T}_{\mathcal{D}} = \mathcal{F}_{\mathcal{D}} = \mathcal{U}_{\mathcal{D}}$$

— Toute mesure de probabilité P définie au moins sur $(\mathcal{M}, \Theta)$, concentrée sur un élément séparable de Θ, possède une extension unique P* à la tribu $\mathcal{U}$.

VI. CONVERGENCE FAIBLE DE PROBABILITÉS DÉFINIES SUR $(\mathcal{M}, \delta)$

Les définitions et les théorèmes exposés dans ce paragraphe sont presque semblables à ceux de R. M. Dudley, la seule différence étant l'utilisation de la tribu $\mathcal{F}$ à la place de la tribu Θ. Ce choix différent est justifié par le contenu des paragraphes III et V de cet article. Comme $\Theta \subseteq \mathcal{F}$, les démonstrations des théorèmes de Dudley subsistent, moyennant de très légères modifications. Nous ne les exposerons donc pas ici.

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{M}$, et P une probabilité définie sur la tribu $\mathcal{F}$. On pose :

$$\int^* f dP = \inf \left\{ \int h dP : h \geqslant f ; h \in L(\mathcal{M}, \mathcal{F}, P) \right\}$$

$$\int_* f dP = \sup \left\{ \int h dP : h \leqslant f ; h \in L(\mathcal{M}, \mathcal{F}, P) \right\}$$

DÉFINITION II. — Une suite $\{ P_n \}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de probabilités définies sur $\mathscr{F}$ converge (u)-faiblement vers une probabilité P_0 définie sur $\mathscr{U}$ si et seulement si :

$$\lim_{n \to \infty} \int^* f dP_n = \lim_{n \to \infty} \int_* f dP_n = \int f dP_0$$

Pour toute fonction numérique f définie sur $(\mathscr{M}, \delta)$, continue et bornée. Pour distinguer cette notion de celle de convergence faible classique, nous la noterons : $P_n \overset{(v)}{\Rightarrow} P_0$.

DÉFINITION III. — Un ensemble Γ de probabilités sur $\mathscr{F}$ est faiblement (u)-précompact si toute suite d'éléments distincts de Γ contient une sous-suite faiblement (u)-convergente vers une probabilité définie sur $\mathscr{U}$.

THÉORÈME VIII. — Un ensemble Γ de probabilités sur $\mathscr{F}$ est faiblement (u)-précompact si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de $(\mathscr{M}, \delta)$ tel que, pour tout $s > 0$,

$$P(K^s) \geqslant 1 - \varepsilon$$

sauf peut être pour un nombre fini d'éléments de Γ.

THÉORÈME IX. — Une suite $\{ P_n \}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de probabilités définies sur $\mathscr{F}$ converge faiblement (u) vers une probabilité P_0 définie sur $\mathscr{U}$ si et seulement si, pour toute fonction f numérique continue définie sur $(\mathscr{M}, \delta)$, bornée et $\mathscr{F}$-mesurable :

$$\lim_{n \to \infty} \int f dP_n = \int f dP_0$$

Remarque. — Ce théorème, qui utilise le fait que $(\mathscr{M}, \delta)$ est un espace métrique complet, fournit une définition plus maniable que la définition II.

VII. CONVERGENCE DES LOIS DE DIMENSION FINIE

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout k-uple de boréliens bornés $(B_1, \ldots, B_k)$, on note $\phi_{B_1, \ldots, B_k}$, le vecteur $(\phi_{B_1} \ldots, \phi_{B_k})$.

Pour toute probabilité P définie au moins sur $\mathscr{F}$, on note $P_{B_1, \ldots, B_k}$ la loi de probabilité de $\phi_{B_1, \ldots, B_k}$ sur $\mathbb{R}^k$ muni de sa tribu borélienne $\mathscr{R}^k$: ces lois seront appelées lois de dimension finie de P.

Rappelons que dans le cas où $\mathscr{M}^+$ est muni de la topologie F^+ et de la tribu borélienne $\mathscr{F}^+$, M. J. Geffroy, M. P. Quidel et Mme H. Zeboulon ont obtenu les résultats suivants :

a) Soit $\mu^\bullet$ une mesure aléatoire positive de loi P, la connaissance des lois de dimension finie $P_{B_1,\ldots,B_k}$ pour tout k-uple de boréliens bornés deux à deux disjoints suffit à déterminer P sur $\mathscr{F}^+$.

b) Soit $\{ \mu_n^\bullet \}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures aléatoires de lois $\{ P_n \}_{n\in\mathbb{N}}$. Pour que la suite $\{ P_n \}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge faiblement vers P_0, il faut et il suffit que les lois de dimension finie de P_n convergent faiblement sur $(\mathbb{R}^k, \mathscr{R}^k)$ vers celles de P_0, pour tout k-uple de boréliens bornés $(B_1, \ldots, B_k)$ tel que :

$$\forall i = 1, \ldots, k : \mu_0^\bullet(\partial B_i) = 0 \text{ p. s.}$$

Supposons à présent que $\mathscr{M}$ soit muni de la topologie U de la convergence uniforme à distance finie, et, suivant les cas, les tribus $\mathscr{U}$, $\mathscr{F}$ ou $\mathscr{C}$.

a) On peut vérifier qu'une probabilité P sur $\mathscr{C}$ est entièrement définie par ses lois de dimension finie pour tout k-uple $(B_1, \ldots, B_k)$ de boréliens deux à deux disjoints. En effet, ces lois déterminent P sur le semi-anneau $\mathscr{S}$ engendré par les ensembles $\{ \phi_B^{-1}[a, b]; (a, b) \in \mathbb{R}^2, B \in \mathscr{B} \}$, et $\mathscr{C}$ est engendrée par $\mathscr{S}$.

Cependant, si $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$, et si P est définie sur $\mathscr{F}$, rien n'indique que la connaissance de P sur $\mathscr{C}$ soit suffisante pour déterminer entièrement P sur $\mathscr{F}$.

b) Par contre, si P est une probabilité définie sur $\mathscr{U}$, la connaissance de P sur $\mathscr{C}$ suffit à la déterminer entièrement. En effet, d'après la remarque suivant le théorème VII, P est concentrée sur un sous-espace séparable $\mathscr{D}$ de $(\mathscr{M}, \delta)$, où les tribus traces $\mathscr{U}/\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}/\mathscr{D}$ coïncident.

c) Comme nous allons le voir, si la convergence faible (u) d'une suite de probabilités $\{ P_n \}_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathscr{F}$ vers une probabilité P_0 définie sur $\mathscr{U}$ implique la convergence faible des lois de dimension finie de $\{ P_n \}_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers celles de P_0, la réciproque est fausse en général.

THÉORÈME X. — *Soit* $\{ P_n \}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de probabilités sur* $\mathscr{F}$ *qui converge* (u)*-faiblement vers une probabilité* P_0 *définie sur* $\mathscr{U}$. *Alors, pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$ *et pour tout système de boréliens bornés* $(B_1, \ldots, B_k)$:

$$P_{n,B_1,\ldots,B_R} \Rightarrow P_{0,B_1,\ldots,B_k}$$

Démonstration. — Les applications $\phi_{B_1,\ldots,B_k}$ sont uniformément continues sur $(\mathscr{M}, \delta)$ et $\mathscr{F}$-mesurables; fixons $k \in \mathbb{N}^*$ et un k-uple $(B_1, \ldots B_k)$.

Soit g une fonction continue et bornée sur $(\mathbb{R}^k, \mathscr{R}^k)$: la fonction $g \circ \phi_{B_1,\ldots,B_k}$

est continue et bornée sur $(\mathscr{M}, \delta)$, et $\mathscr{F}$-mesurable. Il suffit de remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\mathscr{M}} g \circ \phi_{B_1,\ldots,B_k} dP_n = \int_{\mathbb{R}^k} g dP_{n,B_1,\ldots,B_k}$$

PROPOSITION. — *La convergence faible des lois de dimension finie d'une suite de probabilités* $\{ P_n \}_{n \in \mathbb{N}^*}$ *vers les lois de dimension finie d'une probabilité* P_0 *n'entraîne pas, en général, la convergence faible* (u) *de cette suite.*

DÉMONSTRATION. — 2) Pour construire un contre-exemple simple, nous poserons $\mathscr{X} = [0, 1]$: la métrique δ est alors uniformément équivalente à la distance en variation δ_∞. On considère une suite $\{ \mu_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ de mesures de $\mathscr{M}^+$ qui converge vers μ_0 au sens de la topologie $\mathscr{S}$, mais qui ne converge pas en variation vers μ_0. H. Robbins a fourni un exemple d'une telle suite [9]. L'application $g : \mu \to g(\mu) = \delta(\mu, \mu_0)$ est continue sur $(\mathscr{M}, \delta)$ et Θ-mesurable, donc $\mathscr{F}$-mesurable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n la mesure de Dirac au point μ_n. Il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $\{ \mu_k \}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $\{ \mu_n \}_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \delta(\mu_0, \mu_k) > \varepsilon$$

Il en résulte que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_{\mathscr{M}} g dP_k > \varepsilon$, tandis que : $\int_{\mathscr{M}} g dP_0 = 0$.

La suite $\{ P_n \}_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge donc pas (u)-faiblement vers P_0.

Fixons à présent un k-uple $(B_1, \ldots, B_k)$ de boréliens de $\mathscr{X}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité $P_{n,B_1,\ldots,B_k}$ définit une fonction de répartition F_n dans $\mathbb{R}^{+k}$:

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \quad \text{et} \quad]-\infty, x[= \{ y : y_i < x_i ; i = 1, \ldots, k \},$$
$$F_n(x) = P_{n,B_1,\ldots,B_k}]-\infty, x[= P_n \{ \mu : \mu(B_i) < x_i ; i = 1, \ldots, k \}$$

Soit x un point de continuité de F_0; on a

soit : $\mu_0(B_i) < x_i ; \forall i = 1, \ldots, k$, c'est-à-dire : $F_0(x) = 1$
soit : $\exists l : \mu_0(B_l) > x_l$, c'est-à-dire : $F_0(x) = 0$

Comme pour tout $i = 1, \ldots, k$ la suite $\{ \mu_n(B_i) \}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\mu_0(B_i)$, on a, pour tout $n > N$ assez grand :

soit : $\mu_n(B_i) < x_i, \forall i = 1, 2, \ldots, k$, c'est-à-dire : $F_n(x) = 1$
soit : $\mu_n(B_l) > x_l$, c'est-à-dire : $F_n(x) = 0$

Ce qui permet de conclure : $P_{n,B_1,\ldots,k} \Rightarrow P_{0,B_1,\ldots,B_k}$.

THÉORÈME XI. — *Soit* $\{ P_n \}_{n \in \mathbb{N}^*}$ *une suite de probabilités définies sur* $\mathscr{F}$, *faiblement* (u)-*précompacte ; supposons que, pour tout système de boréliens bornés*

$(B_1, \ldots, B_k)$ *les lois de dimension finie de* $\{ P_n \}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *convergent faiblement vers une probabilité* $P_{0,B_1,\ldots,B_k}$. *Alors, les probabilités* $P_{0,B_1,\ldots,B_k}$ *définissent une probabilité* P_0 *sur* $\mathcal{U}$ *et la suite* $\{ P_n \}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge faiblement* (u) *vers* P_0.

Démonstration. — Ce type de démonstration est classique [*10*], mais nous croyons utile de l'exposer dans notre cas particulier.

a) Supposons d'abord que les lois de dimension finie $P_{n,B_1,\ldots,B_k}$ convergent vers les lois de dimension finie d'une probabilité bien précise P_0 définie sur $\mathcal{U}$.

Comme $\{ P_n \}$ est faiblement (u)-précompacte, une sous-suite $\{ P_{n'} \}$ converge faiblement (u) vers une certaine probabilité $\mathcal{Q}$ définie sur $\mathcal{U}$; les lois de dimension finie de $\{ P_{n'} \}$ convergent alors vers celles de $\mathcal{Q}$, qui coïncident donc avec celles de P_0 : P_0 et $\mathcal{Q}$ coïncident donc sur $\mathcal{C}$, et, comme P_0 et $\mathcal{Q}$ sont définies sur $\mathcal{U}$, elles coïncident sur $\mathcal{U}$. Supposons que : $P_n \overset{(u)}{\not\Rightarrow} P_0$; il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $\{ P_m \}$, une fonction numérique f continue, bornée, et $\mathcal{F}$-mesurable telle que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \left| \int f dP_m - f dP_0 \right| > \varepsilon$$

Mais, comme $\{ P_n \}$ est faiblement (u)-précompacte, il existe une sous-suite $\{ P_k \}$ de $\{ P_m \}$ qui converge faiblement (u) vers P_0, en contradiction avec :

$$\forall_k \in \mathbb{N}^* : \left| \int f dP_k - \int f dP_0 \right| > \varepsilon$$

b) Prenons cette fois les hypothèses de l'énoncé du théorème. Toute sous-suite $\{ P_m \}$ de $\{ P_n \}$ contient une sous-suite $\{ P_k \}$ qui converge (u)-faiblement vers une limite définie sur $\mathcal{U}$; comme cette limite a des lois de dimension finie $P_{0,B_1,\ldots,B_k}$ bien connues, elle est entièrement déterminée par ces lois. Donc $\{ P_n \}$ converge faiblement (u) vers une probabilité P_0.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] M. J. Geffroy et M. P. Quidel, Convergences stochastiques des répartitions ponctuelles aléatoires. *Revista da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra*, vol. **XLIX**, 1974.

[*2*] M. J. Geffroy et H. Zeboulon, Sur certaines convergences stochastiques des mesures aléatoires et des processus ponctuels. *C. R. A. S. P.*, 280, série A, 1975, p. 291.

[*3*] V. S. Varadarajan, Measures on topological spaces. *Amer. Math. Soc. Transl.*, Series 2, t. **48**, 1961, p. 161-228.

[*4*] A. Berger, Remark on separable spaces of probability measures. *Annals of Mathematical Statistics*, t. **19**, 1948, p. 72-76.

[5] E. MARCZEWSKI et R. SIKORSKI, Measures in non separable metric spaces. *Colloq. Math.*, vol. **1**, 1948, p. 133-139.
[6] R. M. DUDLEY, Weak convergence of probability measures on non separable metric spaces and empirical measures on Euclidean spaces. *Illinois J. M.*, vol. **10**, 1966, p. 109-126.
[7] R. M. DUDLEY, Measures on non separable metric spaces. *Illinois J. M.*, vol. **11**, 1967, p. 449-453.
[8] K. LANGE, Borel sets of probability measures. *Pacific J. M.*, vol. **48**, 1973, p. 401.
[9] H. ROBBINS, Convergence of distributions. *Annals of Math. Stat.*, vol. **19**, 1948, p. 72-76.
[10] P. BILLINGSLEY, *Convergence of probability measures*. Wiley ed., 1968.
[11] M. METIVIER, *Notions fondamentales de la théorie des probabilités*. Dunod éd., 1972.
[12] K. R. PARTHASARATHY, *Probability measures on metricspaces*. Academic Press, 1967.
[13] G. CHOQUET, *Lectures on Analysis*, vol. I. W. A. Benjamin, Inc., 1969.

(Manuscrit reçu le 21 mai 1979),