ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. BRUNEL
D. REVUZ

# Marches de Harris sur les groupes localement compacts V

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 15, nº 3 (1979), p. 205-234
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1979__15_3_205_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,*
Vol. XV, n° 3, 1979, p. 205-234.

Section B :
*Calcul des Probabilités et Statistique.*

# Marches de Harris sur les groupes localement compacts V

par

A. BRUNEL

Université de Paris VI

et

D. REVUZ

Université de Paris VII

Laboratoire de Probabilités,
Tour 56, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05

SUMMARY. — In a previous paper we had proved Kesten's conjecture for recurrent random walks on countable groups. The main step of the proof was to show that the fundamental solution of the Poisson equation exhibited earlier was either extremal in the set of all solutions or was the sum of exactly two extremal solutions. In the present paper we carry over this result to the case of general locally compact groups.

Dans [5] nous avions démontré la conjecture de Kesten sur la frontière de Martin des promenades récurrentes sur les groupes dénombrables. Plus précisément nous avons démontré un théorème de renouvellement pour le noyau potentiel récurrent qui, compte tenu du résultat de Baldi [1] décrit complètement l'ensemble des solutions bornées inférieurement de l'équation de Poisson

$$(P - I)f = g$$

où $g$ est à support fini ou plus généralement spéciale. A l'addition d'une constante près il n'existe qu'une telle solution ou il en existe tout un segment ce qui peut se traduire en disant que la frontière de Martin a un ou deux points.

(*) Membre du Laboratoire Associé au C. N. R. S., n° 224, Processus stochastiques et Applications.

Dans [2] nous avons exhibé des solutions de cette équation lorsque le groupe G est localement compact métrisable, P est de Harris et $g$ est une fonction à support compact et plus généralement spéciale. Il se pose alors de la même manière le problème de l'unicité de ces solutions et c'est ce problème que nous allons aborder dans le présent article.

Nous n'allons d'ailleurs pas mener ce programme jusqu'à son terme et ceci pour la raison suivante. La démonstration de [5] comporte essentiellement deux étapes. La première étudie les propriétés d'extrémalité de la solution fondamentale exhibée dans [2], dans le cône de toutes les solutions. Cette étape suffit d'ailleurs dans de nombreux cas comme celui important des marches symétriques. Mais pour obtenir le résultat en toute généralité il est ensuite nécessaire de démontrer le théorème du renouvellement en distinguant de nombreux cas suivant la structure du groupe sous-jacent.

C'est cette deuxième étape que nous n'avons pas mené jusqu'au bout dans le cas des groupes généraux ; il y a en effet beaucoup plus de cas à considérer mais à la différence du cas dénombrable il n'y a aucune certitude que tous ces cas existent réellement et on peut penser qu'ils s'élimineront d'eux-mêmes ou du moins que beaucoup de démonstrations se simplifieront lorsqu'on aura mieux compris la structure des groupes récurrents (voir [7]).

Ce qui suit va donc être essentiellement consacré à généraliser la première étape de [5]. Cela nous permettra d'une part d'obtenir la description complète des solutions de l'équation de Poisson dans des cas importants comme celui des marches symétriques et celui des groupes connexes, d'autre part de compléter la démonstration de [3] sur les potentiels des sous-groupes comme cela a été fait dans [5] pour les groupes dénombrables. Un autre intérêt de cette étude est que pour résoudre les difficultés techniques plus grandes que dans le cas dénombrable nous allons utiliser des isomorphismes entre cônes de fonctions qui sont apparemment nouveaux. Nous allons aussi obtenir la représentation intégrale des fonctions surharmoniques sous la seule hypothèse d'étalement, alors que bien souvent on suppose l'absolue continuité et nous pensons que nos méthodes pourraient être utiles dans d'autres contextes.

## I. NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES

Dans tout ce qui suit G est donc un groupe localement compact métrisable d'élément neutre $e$ et l'on note $\Delta$ le point à l'infini dans sa compactification d'Alexandroff. L'opération dans G est notée multiplicativement et $x^{-1}$ est l'inverse de $x$ dans G. On considère une probabilité $\mu$ sur G étalée, dont le support engendre G et telle que la marche M de probabilité de transition $P(x, \circ) = \mu * \varepsilon_x$ soit récurrente. On sait ([7]) que ceci entraîne que G est unimodulaire et nous appelons $m$ sa mesure de Haar.

Si $\hat{\mu}$ est l'image de $\mu$ par l'application $x \to x^{-1}$ on appelle marche duale la marche $\hat{M}$ de probabilité de transition $\hat{P}(x, \circ) = \hat{\mu} * \varepsilon_x$. Tout ce qui a trait à $\hat{M}$ est noté du signe $\hat{}$ ou procédé du préfixe co. Les deux marches jouent des rôles totalement symétriques, en particulier $\hat{M}$ est aussi une marche de Harris.

Comme on l'a vu en [2], une fonction positive à support compact ($f \in C_K^+$) est spéciale et cospéciale et l'on peut ([9], [10]) lui associer un opérateur potentiel $W_h$ ([10] chapitre VI paragraphe 5). Nous allons maintenant définir un opérateur qui va tenir le rôle joué dans le cas dénombrable par le noyau $G^e$.

I.1. Théorème. — On peut trouver une fonction $h$ positive continue symétrique à support compact telle que, en posant $h' = m(h)^{-1}h$ le noyau

$$\Gamma = I + W_h - h' \otimes m - 1 \otimes h'm$$

soit positif. Le noyau $\Gamma$ transforme les fonctions intégrables en fonctions localement intégrables, donc finies presque partout et pour $f \in \mathscr{L}^1_+(m)$ on a :

$$P\Gamma f = \Gamma f + m(f)h' - f \qquad m - \text{presque partout.}$$

Si $f$ spéciale, $\Gamma f$ est bornée et l'égalité précédente a lieu partout.

Le noyau $\hat{\Gamma} = I + \hat{W}_h - h' \otimes m - 1 \otimes h'm$ est en dualité avec $\Gamma$ par rapport à $m$ et jouit des mêmes propriétés relativement à la marche duale $\hat{M}$ que $\Gamma$ par rapport à M. Enfin les fonctions $\Gamma h'$ et $\hat{\Gamma} h'$ sont identiquement égales à la constante :

$$C = m(h)^{-2}(1 - m(h) - m(h^2))$$

qui est la constante de Robin du support H de $h$ par rapport à $\Gamma$.

*Démonstration.* — Il suffit de trouver une fonction $h$ appartenant à $C_K^+$ telle que $\| h \| < 1$, $h < m(h)$ et $W_h > 2 \otimes m$. Comme le premier terme du développement de $W_h$ est $U_h - 1 \otimes m$ ([10] chapitre VI, § 5) il suffit de trouver $h$ telle que $\| h \| < 1$, $h < m(h)$ et $U_h > 3 \otimes m$.

D'après ([10] chapitre 8, § 1) on peut trouver une fonction symétrique $g \in C_K^+$ telle que $\| g \| < 1$, $m(g) < 1$ et $U_g > 1 \otimes m$, $\hat{U}_g > 1 \otimes m$. Soit $\theta$ un nombre réel $< 1$ ; d'après l'équation résolvante ([10], II.2.9) on a :

$$U_{\theta g} = U_g + U_g(1 - \theta)I_g U_{\theta g} \geq 1 \otimes m + (1 - \theta) \otimes (gm)U_{\theta g},$$

et comme $(gm)U_g = m$, on obtient :

$$U_{\theta g} \geq 1 \otimes m + (1 - \theta) \otimes m + (1 - \theta)^2 \otimes (gm)U_g$$

et par récurrence on a donc finalement $U_{\theta g} \geq \theta^{-1} \otimes m$. Il suffit donc de choisir $h = g/4$ pour obtenir une fonction telle que les noyaux $\Gamma$ et $\hat{\Gamma}$ correspondants soient positifs.

Si $\phi$ est spéciale, en particulier si $\phi \in C_K^+$, il est clair que $\Gamma\phi$ et $\hat{\Gamma}\phi$ sont des fonctions bornées. Si $f \in \mathscr{L}_+^1(m)$, on a, en utilisant la dualité entre $\Gamma$ et $\hat{\Gamma}$ ([*10*], p. 235),

$$\langle \Gamma f, \phi \rangle = \langle f, \hat{\Gamma}\phi \rangle \leq m(f) \| \hat{\Gamma}\phi \|$$

pour tout $\phi \in C_K^+$. Il en résulte que $\Gamma f$ est localement intégrable donc finie presque partout. De la relation $P + PW = W + Ph' \otimes m$ (voir [*10*], chap. 6, § 5) on déduit alors facilement que

$$P\Gamma f = \Gamma f - f + m(f)h' \qquad m - pp.$$

Comme $W_h(h) = \hat{W}_h(h) = (1 - m(h))/m(h)$ on voit que :

$$\Gamma h' = \hat{\Gamma} h' = (1 - m(h))/m(h)^2 - m(h^2)/m(h)^2 = c.$$

Le fait que $c$ soit la constante de Robin de H par rapport à $\Gamma$ résulte immédiatement de la définition de celle-ci (cf. [*10*], p. 236).

I.2. Remarque. — La dernière propriété de l'énoncé précédent est assez remarquable. En fait on a plus que cela; la fonction $h'$ et la mesure $h'm$ sont les fonction et mesure d'équilibre de H dans la théorie du potentiel liée à $\Gamma$. Il en résulte en particulier, en suivant le théorème (2.1) du chapitre 8 de [*10*] et utilisant les mêmes notations, que

$$P_H = \Gamma(I_H - \Pi_H) + 1 \otimes (h'm)\Gamma,$$

et

$$P_H\Gamma = \Gamma - G^H.$$

Ces formules seront utiles dans la suite.

Dans la suite la fonction $h$, de support H, jouissant des propriétés ci-dessus est fixée une fois pour toutes. Nous allons maintenant introduire une nouvelle fonction qui va jouer pour une part le rôle joué par $\gamma$ dans [*2*] et [*3*] et par $a$ dans [*5*].

I.3. Proposition. — La fonction $\bar{\gamma} = \gamma_h - h'$ est une fonction positive qui jouit des propriétés suivantes :

*i*) $\bar{\gamma} = \lim_n \Gamma P_n \phi$ où $\phi \in C_K^+$ et $m(\phi) = 1$;

*ii*) $P\bar{\gamma} = \bar{\gamma} + h'$ ;
*iii*) les fonctions $(I - \tau)\bar{\gamma}$ et $(I - \sigma)\bar{\gamma}$ sont bornées pour tout $\tau$ et tout $\sigma \in G$;
*iv*) $\int \bar{\gamma} h' dm = C$.

*Démonstration.* — La fonction $\gamma_h$ est définie par :

$$\gamma_h = \lim_n W_h P_n \phi$$

et on voit facilement qu'elle a toutes les propriétés de la fonction $\gamma$ de [*2*]. Il suffit pour cela d'utiliser la relation entre noyaux W du corollaire 5.5 du chapitre VI de [*10*]. On a alors :

$$\begin{aligned} \lim_n \Gamma P_n \phi &= \lim P_n \phi + \gamma_h - h' - 1 \otimes \lim_n \langle h'm, P_n \phi \rangle \\ &= \gamma_h - h' \end{aligned}$$

grâce au théorème de Jain ([*10*], p. 170). Ceci entraîne immédiatement que $\bar{\gamma}$ est positive et les autres propriétés découlent immédiatement de celles de $\gamma_h$.

Nous allons maintenant faire de même pour la fonction $\gamma'$ de [*2*].

I.4. — Proposition. — La fonction $\bar{\gamma}'$ définie par l'égalité

$$\bar{\gamma}'(a) = \int h' \tau_a \bar{\gamma}^d m$$

jouit des propriétés suivantes :

*i*) $\bar{\gamma} - \bar{\gamma}'$ est une fonction bornée ;
*ii*) $\Gamma(\tau_a h')(x) = \bar{\gamma}(x) - \bar{\gamma}(xa) + \bar{\gamma}'(a)$ ;
*iii*) $\bar{\gamma}(xa) \leq \bar{\gamma}(x) + \bar{\gamma}'(a)$ ;
*iv*) $\bar{\gamma}'(xa) \leq \bar{\gamma}'(x) + \bar{\gamma}'(a)$.

*Démonstration.* — Ici encore ces propriétés découlent facilement des propriétés des fonctions $\gamma$ et $\gamma'$ de [*2*], on a évidemment

$$\bar{\gamma}'(a) = \gamma'(a) - \int h' \tau_a h' dm$$

et du lemme III.1.4 de [*2*] on déduit facilement que

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau_a h')(x) &= \tau_a h'(x) + W(\tau_a h')(x) - h'(x) - \int h' \tau_a h' dm \\ &= \tau_a h'(x) + \gamma(x) - \gamma(xa) + \gamma'(a) - h'(x) - \int h' \tau_a h' dm \\ &= \bar{\gamma}(x) - \bar{\gamma}(xa) + \bar{\gamma}'(a) . \end{aligned}$$

Les autres propriétés en découlent comme dans [*2*].

I.5. PROPOSITION. — On a $\bar{\gamma}'(x) = \bar{\gamma}'(x^{-1})$.

*Démonstration.* — Cela résulte immédiatement de ce que $\gamma'(x) = \hat{\gamma}'(x^{-1})$.

Dans la suite nous ne nous servirons que des fonctions $\bar{\gamma}$ et $\bar{\gamma}'$ et nous oublierons les fonctions $\gamma$ et $\gamma'$. Mais il est clair que l'on passe facilement des unes aux autres. Pour alléger l'écriture nous supprimerons les barres et écrirons $\gamma$ au lieu de $\bar{\gamma}$ et $\gamma'$ au lieu de $\bar{\gamma}'$. Continuons à rappeler des propriétés de ces fonctions qui seront utiles plus loin.

I.6. PROPOSITION. — On a :

$$\lim_{x\to\Delta} (\gamma + \hat{\gamma})(x) = \lim_{x\to\Delta} (\gamma' + \hat{\gamma}')(x) = +\infty .$$

Ceci est démontré dans la proposition II.6 de [*3*]. Dans cet article on a aussi démontré la

I.7. PROPOSITION. — Lorsque $n \to \infty$, $P_n\gamma(x)$ est un infiniment grand équivalent à

$$\sum_0^{n-1} P_n h' .$$

Si $f \in \mathscr{L}^1_+(m)$ alors :

$$\lim_{n\to\infty} P_n\Gamma f/P_n\gamma = 0 \qquad m - pp$$

et si $f$ est spéciale la limite est identiquement nulle.

I.8. PROPOSITION. — Si $f \in \mathscr{L}^+_1$, $m(f) > 0$ et $\phi$ est une fonction positive telle que $P\phi \leq \phi + f$ alors $g = \phi - P\phi + f$ est intégrable et

$$\int g dm \leq \int f dm .$$

I.9. PROPOSITION. — Il existe une constante L telle que pour tout $g \in \mathscr{L}^1_+(m)$ on ait

$$\Gamma g \leq (\gamma' + \hat{\gamma}' + L) m(g) .$$

De plus,

$$\lim_{x\to\Delta} \Gamma g(x)/(\gamma' + \hat{\gamma}')(x) = 0 .$$

*Démonstration.* — De (I.3) *i*) et *ii*) il résulte qu'il existe une constante L telle que pour tout a :

$$\Gamma(\tau_a h')(x) \leq \gamma'(x) - \gamma'(xa) + \gamma'(a) + L,$$

et comme
$$\gamma'(a) \leq \gamma'(x^{-1}) + \gamma'(xa)$$
on a bien
$$\Gamma(\tau_a h')(x) \leq \gamma'(x) + \gamma'(x) + \mathrm{L}$$
pour tout $x$ de G. Comme $m(\tau_a h') = 1$ nous avons le résultat pour les fonctions $\tau_a h'$, $a \in \mathrm{G}$.

Soit alors $\phi \in \mathscr{L}^1_+(m)$ et définissons une fonction $f$ par :
$$f(x) = \int \phi(\xi) h'(x\xi^{-1}) m(d\xi) .$$
La fonction $f$ est clairement dans $\mathscr{L}^1_+$ et l'on a :
$$\begin{aligned} \Gamma f(x) &= \int \Gamma(x, dz) \int \phi(\xi) h'(z\xi^{-1}) m(d\xi) \\ &= \int \phi(\xi) \Gamma(\tau_{\xi^{-1}} h')(x) m(d\xi) \\ &\leq (\gamma'(x) + \hat{\gamma}'(x) + \mathrm{L}) \int \phi(\xi) m(d\xi) \end{aligned}$$
ce qui donne le résultat pour $f$ car $m(f) = m(\phi)$. Maintenant lorsque $\phi$ décrit $\mathscr{L}^1_+(m)$ l'ensemble des fonctions $f$ est total dans $\mathscr{L}^1(m)$. En effet si $g$ est une fonction bornée telle que pour tout $\phi \in \mathscr{L}^1_+(m)$ on ait
$$\int g(x) \int \phi(\xi) h'(x\xi^{-1}) d\xi dx = 0,$$
il en résulte que l'application $\xi \to \int g(x) h'(x\xi^{-1}) dx$ est nulle presque partout donc que $g$ est nulle presque partout. On obtient donc la première phrase de l'énoncé en toute généralité. La seconde se démontre facilement en utilisant la méthode du cas discret (cf. [5]) et (I.5).

Dans [5] nous nous sommes servis de deux importantes inégalités dues à Spitzer et concernant les fonctions potentiels. Il nous faut maintenant les étendre au cas général. Rappelons tout d'abord le principe du minimum suivant : si $f$ est bornée inférieurement, $\mathrm{P}f \leq f$ sur $\mathrm{A}^c$ et la probabilité d'atteinte de A est identiquement 1 alors :
$$f \geq \inf \{ f(x) ,\ x \in \mathrm{A} \} .$$

I.10. Proposition. — Il existe une constante L telle que pour tout couple $(x, y)$ de points de G on ait :
$$(\gamma(yx) + \mathrm{L})\gamma(x^{-1}) + (\gamma(y) + \mathrm{L})\gamma(x) \geq \gamma(x)\gamma(x^{-1}) .$$

*Démonstration.* — On pose $\phi(\cdot) = \gamma(\cdot\, x)\gamma(x^{-1}) + \gamma(x)\gamma(\cdot)$. On a :

$$\begin{aligned}
P\phi(y) &= \gamma(x^{-1}) \int \gamma(zyx)\mu(dz) + \gamma(x) \int \gamma(zy)\mu(dz) \\
&= \gamma(x^{-1})P\gamma(yx) + \gamma(x)P\gamma(y) \\
&= \gamma(x^{-1})(\gamma(yx) + h'(yx)) + \gamma(x)(\gamma(y) + h'(y))
\end{aligned}$$

d'où finalement :

$$P\phi(y) - \phi(y) = \gamma(x^{-1})h'(yx) + \gamma(x)h'(y).$$

Comme l'ensemble H est récurrent, donc atteint avec probabilité 1, on déduit du principe du minimum que $\phi \geq \inf(A, B)$, ou :

$$\begin{aligned}
A &= \inf_{\eta \in H} (\gamma(\eta x)\gamma(x^{-1}) + \gamma(x)\gamma(\eta)), \\
B &= \inf_{\eta \in H} (\gamma(\eta)\gamma(x^{-1}) + \gamma(x)\gamma(\eta x^{-1})).
\end{aligned}$$

Les fonctions $(I - \sigma_\eta)\gamma$ étant uniformément bornée par une constante L lorsque $\eta$ décrit H on a :

$$\begin{aligned}
A &\geq (\gamma(x) - L)\gamma(x^{-1}); \\
B &\geq (\gamma(x^{-1}) - L)\gamma(x).
\end{aligned}$$

On a donc toujours au moins l'une des deux inégalités :

$$\begin{aligned}
(\gamma(yx) + L)\gamma(x^{-1}) + \gamma(x)\gamma(y) &\geq \gamma(x)\gamma(x^{-1}), \\
\gamma(yx)\gamma(x^{-1}) + \gamma(x)(\gamma(y) + L) &\geq \gamma(x)\gamma(x^{-1}),
\end{aligned}$$

et l'inégalité de l'énoncé en résulte immédiatement.

I.11. Corollaire. — Il existe une constante J telle que pour tout couple $(x, y)$ de points de G on ait :

$$(\gamma'(yx) + J)\gamma'(x^{-1}) + (\gamma'(y) + J)\gamma'(x) \geq \gamma'(x)\gamma'(x^{-1})$$

et :

$$(\gamma(xy) + J)\gamma'(x^{-1}) + (\gamma'(y) + J)\gamma'(x) \geq \gamma'(x)\gamma'(x^{-1})$$

*Démonstration.* — Comme $\gamma - \gamma'$ est bornée il existe une constante $R \geq 0$ telle que :

$$\gamma' - R \leq \gamma \leq \gamma' + R.$$

En remplaçant $\gamma$ par $\gamma' + R$ à gauche et $\gamma' - R$ à droite dans l'inégalité de la proposition précédente on trouve :

$$(\gamma'(yx) + R + L)(\gamma'(x^{-1}) + R) + (\gamma'(y) + R + L)(\gamma'(x) + R) \\ \geq (\gamma'(x) - R)(\gamma'(x^{-1}) - R)$$

soit encore :

$$(\gamma'(yx) + \mathrm{J})\gamma'(x^{-1}) + (\gamma'(y) + \mathrm{J})\gamma'(x) \geq \gamma'(x)\gamma'(x^{-1})$$

avec

$$\mathrm{J} = \mathrm{L} + 2\mathrm{R}\,.$$

La deuxième inégalité résulte de ce que la fonction $\gamma'$ est la même pour les marches à droite et à gauche ([*2*]).

## II. ÉTUDE D'UN CÔNE DE SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE POISSON

Comme dans [*5*] nous allons devoir étudier un cône de solutions de l'équation de Poisson. Nous introduisons à cet effet les définitions suivantes.

II.1. Définition. — On appellera $\mathscr{C}$ le cône des fonctions $f$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

*i)* $f$ est localement intégrable et bornée inférieurement $m$-presque partout par une constante ce qui permet de poser :

$$t(f) = \frac{1}{c}\int fh'dm\,;$$

*ii)* $\mathrm{P}f \leq f + t(f)h'$ $m$-presque partout avec égalité sur H. On appelle $\mathscr{H}$ le sous-cône des fonctions pour lesquelles l'inégalité en *ii)* est une égalité.

Dans la suite toutes les égalités sont à prendre à un ensemble de mesure nulle près, mais nous ne le rappellerons pas.

On remarque que $\gamma \in \mathscr{H}$ et que $t(\gamma) = 1$. Nous allons montrer que ces cônes sont isomorphes à des cônes de fonctions surharmoniques pour la chaine de probabilité de transition $\mathrm{Q} = \mathrm{I}_{\mathrm{H}^c}\mathrm{P}\mathrm{I}_{\mathrm{H}^c}$, c'est-à-dire la chaine obtenue en tuant la marche à l'entrée dans H, dont le noyau potentiel sera comme d'habitude noté $\mathrm{G}^{\mathrm{H}}$. Nous aurons besoin pour cela des résultats préliminaires suivants. Le premier est un « théorème de décomposition de Riesz ».

A cet effet remarquons que si $\psi \in \mathscr{L}^1_+$ et si $\psi$ est nulle sur H alors $f = \Gamma\psi$ est dans $\mathscr{C}$ et $t(f) = m(\psi)$. On a en effet :

$$\mathrm{P}\Gamma\psi = \Gamma\psi - \psi + m(\psi)h'$$

et

$$\int h'\Gamma\psi dm = \int \hat{\Gamma}h'\psi dm = cm(\psi)\,.$$

II.2. PROPOSITION. — Toute fonction $f \in \mathscr{C}$ peut s'écrire de manière unique

$$f = \phi + \Gamma\psi$$

où $\phi$ est dans $\mathscr{H}$ et $\psi$ est une fonction de $\mathscr{L}^1_+$ s'annulant sur H. On a :

$$\psi = \mathrm{f} - \mathrm{P}f + t(f)h' \quad \text{et} \quad m(\psi) \leq t(f).$$

*Démonstration.* — Démontrons d'abord l'unicité. Si il existe deux décompositions $\phi + \Gamma\psi$ et $\phi' + \Gamma\psi'$ on a :

$$t(\phi) - t(\phi') = m(\psi') - m(\psi),$$

et

$$\phi - \phi' = \Gamma\psi' - \Gamma\psi .$$

Appliquant P aux deux membres de la deuxième égalité il vient :

$$\phi - \phi' + (t(\phi) - t(\phi'))h' = \Gamma\psi' - \Gamma\psi\psi' + \psi + (m(\psi') - m(\psi))h',$$

ce qui après simplification donne $\psi = \psi'$ et donc $\phi = \phi'$.

Maintenant si on pose $\psi = f - \mathrm{P}f + t(f)\mathrm{h}'$ on obtient une fonction satisfaisant aux conditions de l'énoncé et $m(\psi) \leq t(f)$ grâce à la proposition (I.9). Si on pose $\phi = f - \Gamma\psi$ on a évidemment :

$$\mathrm{P}\phi = \phi + (t(f) - m(\psi))h', \quad \int \phi h' dm = c(t(f) - m(\psi))$$

et il suffit pour terminer la démonstration de prouver que $\phi$ est bornée inférieurement.

Posons $k = t(f) - m(\psi)$; de l'égalité ci-dessus il résulte qu'il existe une fonction $u \geq 0$ telle que :

$$\mathrm{P}\phi^+ = \phi^+ + u, \ \mathrm{P}\phi^- = \phi^- - kh' + u .$$

La première de ces relations entraîne que $u$ est intégrable. En effet de la relation

$$\mathrm{P}_n f = f + t(f) \sum_0^{n-1} \mathrm{P}_k h' - \sum_0^{n-1} \mathrm{P}_k \psi$$

on obtient après division par $\mathrm{P}_n\gamma$ et passage à la limite que $\lim_n \mathrm{P}_n f/\mathrm{P}_n\gamma$ est finie. Donc $\lim_n \mathrm{P}_n\phi^+/\mathrm{P}_n\gamma$ est aussi finie ce qui entraîne que $u$ est intégrable.

Comme par définition de $\phi$ on a $\phi^- \leq \Gamma\psi$ on a donc

$$\lim_n \mathrm{P}_n(\phi^- + \Gamma u)/\mathrm{P}_n\gamma = 0 .$$

Mais comme d'après la seconde relation on a :

$$P_n(\phi^- + \Gamma u) = \phi^- + \Gamma u - (k - m(u)) \sum_0^{n-1} P_k h'$$

on en déduit que $k = m(u)$, donc que $P(\phi^- + \Gamma u) = \phi^- + \Gamma u$. La fonction $\phi^- + \Gamma u$ est donc constante et par suite $\phi$ est bien minorée par une constante.

II.3. LEMME. — Si B est un ensemble tel que $m(B) > 0$ on a :

$$\lim_n (I_{B^c}P)^n 1 = 0 .$$

*Démonstration.* — La suite considérée étant clairement décroissante on peut poser $\psi = \lim_n (I_{B^c}P)^n 1$. On a $P\psi = 1_B P\psi + \psi$ donc $P\psi \geq \psi$. Comme $\psi$ est bornée supérieurement par 1, le raisonnement habituel utilisant la récurrence et le théorème de convergence des sous-martingales entraîne que $\psi$ est égale $m$-presque partout à une constante $k$ et inférieure à cette constante partout. Sur B on a donc :

$$P\psi = P\psi + k \quad m\text{-}pp$$

et comme $m(B) > 0$ cela entraîne $k = 0$ donc $\psi = 0$.

II.4. PROPOSITION. — Si $\phi$ est une fonction bornée inférieurement et telle que $P\phi = \phi + f$ $m$-$pp$ où $f \in \mathscr{L}^1(m)$ et $m(f) = 0$ alors $\phi + \Gamma f$ est presque partout constante.

*Démonstration.* — On peut évidemment supposer $\phi \geq 0$ ce que nous ferons dans la suite.

Pour tout $n$ on peut écrire :

$$0 = \sum_0^n P_k(\phi - P\phi + f) = \phi - P_{n+1}\phi + \sum_0^n P_k f \qquad m\text{-pp}.$$

En utilisant le théorème de Chacon-Ornstein et la proposition (I.5) il résulte de ce que $m(f) = 0$ que

$$\lim_n \sum_0^n P_k f / P_n \gamma = 0$$

et par suite que

$$\lim_n P_n \phi / P_n \gamma = 0 \qquad m\text{-pp}.$$

Maintenant d'après le théorème (I.1) on a :

$$P(\phi + \Gamma f) = \phi + \Gamma f \qquad m\text{-pp}.$$

Il existe donc une fonction $\psi \geq 0$ telle que

$$P((\phi + \Gamma f)^+) = (\phi + \Gamma f)^+ + \psi, \ P((\phi + \Gamma f)^-) = (\phi + \Gamma f)^- + \psi.$$

Mais comme $(\phi + \Gamma f)^+ \leq \phi + \Gamma f^+$ il résulte de ce qui précède et de la proposition (I.5) que

$$\lim_n P_n((\phi + \Gamma f)^+)/P_n\gamma = 0 \qquad m\text{-pp}.$$

Comme

$$P_n((\phi + \Gamma f)^+) = (\phi + \Gamma f)^+ + \sum_0^{n-1} P_k\psi$$

il en résulte que $\psi$ doit être nulle $m$-pp. Les fonctions $(\phi + \Gamma f)^+$ et $(\phi + \Gamma f)^-$ sont donc constantes $m$-pp ce qui démontre la proposition.

II.5. Définition. — On appellera $\tilde{\mathscr{C}}$ le cône des fonctions $\tilde{f}$ satisfaisant aux trois conditions suivantes :

*i*) $\tilde{f} \geq 0$ $m$-pp, $\tilde{f}$ est localement intégrable et nulle sur H ;

*ii*) le nombre $t(\tilde{f}) = \int_H P\tilde{f}dm$ est fini ;

*iii*) on a $1_{H^c}P\tilde{f} \leq \tilde{f}$ $m$-pp.

On appellera $\tilde{\mathscr{H}}$ le sous-cône des fonctions pour lesquelles l'inégalité dans *iii*) est une égalité.

Aux « $m$-presque partout » près ces cônes sont donc des cônes de fonctions Q-surharmoniques et Q-harmoniques. Ces cônes sont donc réticulés pour leur ordre propre et admettent le théorème de décomposition de Riesz, c'est-à-dire que $\tilde{f} \in \tilde{\mathscr{C}}$ s'écrit de manière unique $\tilde{\phi} + G^H\tilde{\psi}$ où $\tilde{\phi} \in \tilde{\mathscr{H}}$ et où $\tilde{\psi}$ est intégrable ce qui se montre en utilisant une fois de plus la proposition (I.8). On notera $\wedge$ et $\vee$ les opérations de borne inférieure et supérieure pour l'ordre propre de ces cônes. Nous aurons besoin dans la suite de la proposition suivante.

II.6. Proposition. — Si $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ sont deux éléments de $\tilde{\mathscr{H}}$ on a

$$\tilde{f} \vee \tilde{f}' = \inf(\tilde{f}, \tilde{f}') - G^H g$$

où $g = \inf(\tilde{f}, \tilde{f}') - Q(\inf(\tilde{f}, \tilde{f}')$ est intégrable et $m(g) \leq \inf(t(\tilde{f}), t(\tilde{f}'))$.

*Démonstration.* — Le raisonnement est le même que dans [5] p. 370 (voir aussi [10] p. 44). Comme $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ sont nulles sur H, on a

$$\begin{aligned} g &= \inf(\tilde{f}, \tilde{f}') - 1_{H^c}P(\inf(\tilde{f}, \tilde{f}')) \\ &= \inf(\tilde{f}, \tilde{f}') - P(\inf(\tilde{f}, \tilde{f}')) + 1_H P(\inf(\tilde{f}, \tilde{f}')) . \end{aligned}$$

Toujours grâce à la proposition (I.8) on voit donc que $g$ est intégrable et que

$$m(g) \leq \int_H P(\inf(\tilde{f}, \tilde{f}'))dm \leq \int_H \inf(P\tilde{f}, \tilde{f}')dm \leq \inf(t(\tilde{f}), t(\tilde{f}')) .$$

Nous allons maintenant énoncer le résultat principal de ce paragraphe.

II.7. THÉORÈME. — L'application $U : f \to \tilde{f} = f - P_H f$ est une bijection affine de $\mathscr{C}$ sur $\tilde{\mathscr{C}}$ qui envoie $\mathscr{H}$ sur $\tilde{\mathscr{H}}$. De plus si $f$ et $\tilde{f}$ se correspondent dans cette bijection on a $t(f) = t(\tilde{f})$.

*Démonstration.* — Rappelons une fois de plus que toutes les égalités sont des égalités $m$-presque partout même si on ne le spécifie pas. Pour passer d'une égalité à l'autre on remarque que si $g = g'$ $m$-pp alors $Pg = Pg'$ $m$-pp à cause de l'invariance de $m$.

Supposons d'abord $f \geq 0$. Par restriction à $H^c$ on a $(I_{H^c}P)f \leq I_{H^c}f$ et donc

$$(I_{H^c}P)f + I_H f \leq f.$$

Si on fait $n - 1$ fois l'opération consistant à multiplier à gauche par $I_{H^c}P$ puis ajouter $I_H f$ on obtient :

$$(*) \qquad (I_{H^c}P)^n f + \sum_0^{n-1} (I_{H^c}P)^k I_H f \leq f.$$

Il en résulte en passant à la limite que $P_H f \leq f$. La fonction $U(f) = f - P_H f$ est donc positive, localement intégrable et nulle sur H. Si $f$ n'est pas positive, il existe une constante $\lambda$ telle que $f + \lambda$ soit positive et telle que

$$P(f + \lambda) \leq (f + \lambda) + t(f)h'$$

on peut refaire le même raisonnement et comme

$$(f + \lambda) - P_H(f + \lambda) = f - P_H f$$

on a encore le même résultat.

De plus, en utilisant l'équation résolvante, on voit que :

$$\int_H P(U(f))dm = \int_H P(f - P_H f)dm = \int_H (Pf - U_H I_H f)dm$$

et comme sur H on a :

$$Pf = f + t(f)h' \text{ et que } m(I_H U_H I_H f) = m(f) < \infty,$$

on voit que

$$\int_H P(U(f))dm = \int t(f)h'dm = t(f)$$

soit :

$$t(U(f)) = t(f).$$

Enfin et de la même façon,

$$\begin{aligned} I_{H^c}P(U(f)) &= I_{H^c}Pf - I_{H^c}U_H I_H f \\ &\leq I_{H^c}(f + t(f)h') - I_{H^c}P_H f \leq f - P_H f = U(f). \end{aligned}$$

L'application U est donc bien une application affine de $\mathscr{C}$ dans $\tilde{\mathscr{C}}$. Elle applique $\mathscr{H}$ dans $\tilde{\mathscr{H}}$, car si $f \in \mathscr{H}$ l'inégalité (*) est une égalité et en passant à la limite on trouve $U(f) = \lim_n (I_{H^c}P)^n f$, ce qui est clairement dans $\tilde{\mathscr{H}}$.

Pour montrer que U est bijective nous allons exhiber l'application inverse. L'application V définie par $V(\tilde{f}) = \tilde{f} + \Gamma(I_H P\tilde{f})$ applique $\tilde{\mathscr{C}}$ dans $\mathscr{C}$ et $\tilde{\mathscr{H}}$ dans $\mathscr{H}$. En effet comme $1_H P\tilde{f}$ est intégrable, $V(\tilde{f})$ est localement intégrable positive et de plus il est facile de voir que :

$$P(V(\tilde{f})) \leq V(\tilde{f}) + t(\tilde{f})h' \quad (\text{resp} = V(\tilde{f}) + t(\tilde{f})h')$$

si $\tilde{f} \in \tilde{\mathscr{C}}$ (resp $\tilde{\mathscr{H}}$) et que comme $\tilde{f}$ est nulle sur H,

$$\int V(\tilde{f})h'dm = \int \Gamma(1_H \cdot P\tilde{f})h'dm = \int_H P\tilde{f} \cdot \tilde{\Gamma}h'dm = c \cdot t(\tilde{f}).$$

Nous allons maintenant montrer que $V \circ U$ est l'identité sur $\mathscr{C}$. Commençons par supposer $f \in \mathscr{H}$ et posons $\tilde{f} = U(f)$; des relations

$$Pf = f + t(f)h', \quad P\tilde{f} = \tilde{f} + 1_H P\tilde{f}$$

il résulte que

$$P(f - \tilde{f}) = f - \tilde{f} + t(f)h' - 1_H P\tilde{f},$$

et comme $f - \tilde{f} = P_H f$ est bornée inférieurement la proposition (II.4) entraîne l'existence d'une constante $\rho$ telle que

$$f - \tilde{f} + \Gamma(t(f)h' - 1_H P\tilde{f}) = \rho,$$

soit encore :

$$f = V(\tilde{f}) + \rho - ct(f).$$

Mais comme $\int h' f dm = ct(f) = \int V(f)h'dm$ on a $\rho - ct(f) = 0$, ce qui démontre le résultat dans ce cas. Pour terminer la démonstration de ce point, il suffit, d'après le théorème de décomposition de Riesz (II.2) de démontrer que $V \circ U(\Gamma\psi) = \Gamma\psi$. On a :

$$\begin{aligned} V(U(\Gamma\psi)) &= \Gamma\psi - P_H\Gamma\psi + \Gamma(I_H P(\Gamma\psi - P_H\Gamma\psi)) \\ &= \Gamma\psi - P_H\Gamma\psi + \Gamma(I_H P\Gamma\psi) - \Gamma(\Pi_H\Gamma\psi) \end{aligned}$$

et en utilisant la remarque sous le théorème (I.1),

$$\begin{aligned} V(U(\Gamma\psi)) &= \Gamma\psi - P_H\Gamma\psi + \Gamma(I_H P\Gamma\psi) - (I_H\Gamma\psi) + P_H\Gamma\psi - 1 \otimes (h'm)\Gamma\psi \\ &= \Gamma\psi + \Gamma(I_H(\Gamma\psi + m(\psi)h' - \psi)) - \Gamma(I_H\Gamma\psi) - 1 \otimes m(\psi)\hat{\Gamma}h' \\ &= \Gamma\psi. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant pour terminer montrer que $U \circ V$ est l'identité sur $\tilde{\mathscr{C}}$. Soit $\tilde{f} \in \tilde{\mathscr{C}}$ et $f = V(\tilde{f})$ ; on a :

$$\begin{aligned} U(f) &= V(\tilde{f}) - P_H V(\tilde{f}) \\ &= \tilde{f} + \Gamma(I_H P\tilde{f}) - P_G f - P_H\Gamma(I_H P\tilde{f}), \end{aligned}$$

mais en utilisant la formule $P_H\Gamma = \Gamma - G^H$ (remarque suivant (I.1)) et le fait que $\tilde{f}$ est nulle sur H on obtient $U(f) = \tilde{f}$ ce qu'il fallait démontrer.

II.8. Corollaire. — Les fonctions de $\mathscr{C}$ sont positives ou nulles $m$-presque partout.

*Démonstration.* — Ce sont les images par V des fonctions de $\tilde{\mathscr{C}}$ qui sont positives ou nulles.

Vu les théorèmes de décomposition de Riesz dans les cônes $\mathscr{C}$ et $\tilde{\mathscr{C}}$ on voit qu'une fonction $\Gamma\psi$ correspond à une fonction $G^H\tilde{\psi}$ dans l'isomorphisme entre ces cônes. On a :

II.9. Proposition. — Si $G^H\tilde{\psi} = U(\Gamma\psi)$ alors $m(\tilde{\psi}) = m(\psi)$.

*Démonstration.* — Si $\Gamma\psi = V(G^H\tilde{\psi})$ on a

$$\int \Gamma\psi \circ h' dm = \int \hat{\Gamma}h' \circ \psi dm = cm(\psi),$$

donc $m(\psi) = t(G^H\tilde{\psi})$, d'après le théorème (II.7), mais par ailleurs :

$$\begin{aligned} t(G^H\tilde{\psi}) &= \int_H PG^H\psi\, \tilde{d}m = \int \tilde{\psi} \circ \hat{G}^H\hat{P}1_H dm \\ &= \int \tilde{\psi}\, 1_{H^c} U_H(1_H) dm \end{aligned}$$

et comme $\tilde{\psi}$ est nulle sur H et $U_H(1_H)1 = 1$ on obtient $t(G^H\tilde{\psi}) = m(\tilde{\psi})$ ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons enfin et ceci sera important pour la suite que l'isomorphisme U respecte l'ordre propre des cônes et donc que si $f$, $f'$ sont dans $\mathscr{H}$ on a :

$$U(f) \wedge U(f') = U(f \wedge f')$$

et de même :

$$V(\tilde{f}) \wedge V(\tilde{f}') = V(\tilde{f} \wedge \tilde{f}').$$

Nous allons encore introduire quelques notations liées à l'isomorphisme précédent. On posera :

$$\gamma^H = U(\gamma) = \gamma - P_H\gamma .$$

Comme pour $f \in C_K^+$ avec $m(f) = 1$, on a $\gamma = \lim_n \Gamma P_n f$ uniformément sur tout compact et que $G^H = \Gamma - P_H\Gamma$, on aussi :

$$\gamma^H = \lim G^H P_n f .$$

La fonction $\gamma^H$ est nulle sur H mais ne diffère de $\gamma$ que par au plus une constante. D'autre part si $f \geq 0$ on a $G^H f \leq \Gamma f$. Les propriétés de $\gamma$ se traduisent donc en propriétés de $\gamma^H$.

II.10. **Proposition.** — 1) On a $\lim_{x\to\Delta} (\gamma^H + \hat{\gamma}^H)(x) = +\infty$.

2) Il existe une constante L' telle que $\forall f \in L^1_+$

$$G^H f \leq (\gamma^H + \hat{\gamma}^H + L')m(f)$$

et :

$$\lim_{x\to\Delta} (G^H f/(\gamma^H + \hat{\gamma}^H))(x) = 0 .$$

II.11. **Proposition.** — Si $\tilde{f} \in \tilde{\mathscr{H}}$ on a :

$$\lim_n \frac{P_n\tilde{f}}{P_n\gamma^H} = t(f) .$$

*Démonstration.* — Si $f = V(\tilde{f})$ on a

$$P_n\tilde{f} = P_n f - P_n P_H f ,$$

et

$$P_n\gamma^H = P_n\gamma - P_n P_H\gamma .$$

Or $P_H f$ et $P_H\gamma$ sont bornées, tandis que

$$P_n f = f + t(f)\sum_0^{n-1} P_k h' , \quad P_n\gamma = \gamma + \sum_0^{n-1} P_k h'$$

tendent vers l'infini, on a donc clairement

$$\lim_n (P_n\tilde{f}/P_n\gamma^H) = \lim_n (P_n f/P_n\gamma)$$

et cette limite vaut $t(f)$ d'après le théorème de Chacon-Ornstein. Nous allons terminer ce paragraphe en introduisant la représentation affine de G dans $\mathscr{H}$ qui sera utilisé aux mêmes fins que celles de [5]. Si $a \in G$ et $f \in \mathscr{H}$ nous poserons :

$$T_a f = \tau_a f + t(f)\Gamma(\tau_a h') - \int \tau_{a^{-1}} h' \circ f dm .$$

II.12. PROPOSITION. — Les applications $\{ T_a, a \in G \}$ forment une représentation de G dans l'ensemble des applications affines de $\mathscr{H}$ dans lui-même. Pour tout $f \in \mathscr{H}$ et tout $a$ de G on a $t(T_a f) = t(f)$. Enfin la fonction $\gamma$ est invariante par ce groupe de transformation et pour toute fonction invariante $f$, les fonctions $(I - \tau_a)f$ sont bornées pour tout $a \in G$.

*Démonstration.* — On a :

$$P(T_a f) = P(\tau_a f) + t(f)P(\Gamma(\tau_a h')) - \int \tau_{a^{-1}} h' dm ,$$

et vu que $P(\tau_a f) = \tau_a P f = \tau_a(f + t(f)h')$ et que $P\Gamma$ est donné par la proposition (I.1), ceci est égal à :

$$\begin{aligned} &\tau_a f + t(f)\tau_a h' + t(f)\Gamma(\tau_a h') + t(f)h' - t(f)\tau_a h' - \int \tau_{a^{-1}} h' f dm \\ &\quad = T_a f + t(f)h' ; \end{aligned}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} \int T_a f h' dm &= \int \tau_a f h' dm + t(f) \int \Gamma(\tau_a h')h' dm - \int \tau_a f h' dm \\ &= t(f) \int \tau_a h' \hat{\Gamma} h' dm = ct(f) . \end{aligned}$$

Comme il est clair que pour $a$ fixé, la fonction $T_a f$ est borné inférieurement l'application $T_a$ est bien une application affine de $\mathscr{H}$ dans lui-même et $t(T_a f) = t(f)$.

Pour montrer que l'on obtient ainsi une représentation de G calculons $T_a(T_b f)$. En utilisant l'expression de $\Gamma$ en fonction de $W_h$ on obtient après simplification

$$\begin{aligned} T_a(T_b f) &= \tau_{ab} f + t(f)\tau_{ab} h' + t(f)\tau_a W_h(\tau_b h') + t(f)W_h(\tau_a h') - t(f)h' \\ &\quad - t(f) \int h' \tau_a h' dm - \int \tau_{a^{-1}} h'(\tau_b f + t(f)\tau_b h' + t(f)W_h(\tau_b h') - t(f)h')dm . \end{aligned}$$

En utilisant les égalités $m(\tau_{a^{-1}}h') = 1$, $\tau_a W_h = W_{\tau_a h}\tau_a$ et

$$W_{\tau_a h} = W_h - W_h(\tau_a h') \otimes \mathrm{m} + 1 \otimes (h'm)W_{\tau_a h};$$

on transforme ceci, après simplification, en :

$$\begin{aligned} T_a(T_b f) &= \tau_{ab} f + t(f)\tau_{ab}h' + t(f)W_h(\tau_{ab}h') + t(f)\int h'W_{\tau_a h}(\tau_{ab}h')dm \\ &\quad - t(f)h' - h'\tau_{ab} f dm - t(f)\int h'\tau_{ab}h'dm - t(f)\int \tau_{a^{-1}}h'W_h(\tau_b h')dm \\ &= T_{ab} f + t(f)\left(\int h'W_{\tau_a h}(\tau_{ab}h')dm - \int \tau_{a^{-1}}h'W_h(\tau_b h')dm\right) \\ &= T_{ab} f, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. Pour démontrer que $\gamma$ est invariante par $T_a$ écrivons que :

$$T_a\gamma = \tau_a\gamma + \Gamma(\tau_a h') - \int \tau_{a^{-1}}h' \circ \gamma dm .$$

Or si $\phi \in C_K^+$ et $m(\phi) = 1$,

$$\tau_a\gamma = \lim_n \tau_a\Gamma P_n\phi = \lim_n \left(\tau_a P_n\phi + \tau_a W_h P_n\phi - \tau_a h' - \int h'P_n\phi dm\right)$$

et comme d'après le théorème de Jain $\lim_n P_n\phi = 0$, ceci est encore égal à

$$\begin{aligned} &\lim_n (W_{\tau_a h}\tau_a P_n\phi) - \tau_a h' = \lim_n \left(W_h P_n(\tau_a\phi) - W_h(\tau_a h') + \int h'W_{\tau_a h}(\tau_a P_n\phi)dm\right) - \tau_a h' \\ &= \gamma - h' - W_h(\tau_a h') - \tau_a h' + \lim_n \int \tau_{a^{-1}}h'W_h P_n f dm \\ &= \gamma - h' - W_h(\tau_a h') - \tau_a h' + \int \tau_{a^{-1}}h'(\gamma - h')dm = \gamma - \Gamma(\tau_a h') + \int \tau_{a^{-1}}h'\gamma dm \end{aligned}$$

car la limite de $W_h P_n f$ vers $\gamma - h$ est uniforme sur tout compact. On a donc finalement $T_a\gamma = \gamma$ ce qu'il fallait démontrer.

Enfin si $f$ est invariante par $T_a$,

$$f - \tau_a f = t(f)\Gamma(\tau_a h') - \int \tau_{a^{-1}}h' f dm$$

et ceci est clairement borné pour $a$ fixé.

*Remarque.* — Si $\tilde{f} \in \tilde{\mathscr{H}}$ en posant $\tilde{T}_a\tilde{f} = U(T_a(V\tilde{f}))$ on obtient une représentation de $\tilde{\mathscr{H}}$ qui jouit de toutes les propriétés parallèles à celles de $T_a$. On a en particulier $\tilde{T}_a\gamma^H = \gamma^H$.

## III. REPRÉSENTATION INTÉGRALE

Comme dans [5] nous voulons obtenir une représentation intégrale de $\gamma$ à partir de fonctions extrémales dans $\mathcal{H}$. Comme il est classique nous allons être obligés pour cela de faire un détour par les mesures et d'utiliser la marche duale. Il va falloir faire pour les mesures une étude comparable à celle qui a été faite pour les fonctions dans le paragraphe précédent. Les démonstrations étant très semblables nous ne les répéterons pas toujours. La différence majeure est qu'il faudra utiliser au lieu du théorème de Chacon-Ornstein le théorème limite-quotient pour les chaînes de Harris ([*10*] chap. 6, § 6).

III.1. Lemme. — Si $\xi$ est une mesure de Radon positive telle que

$$\xi P \leq \xi + th'm, \quad t \in R_+ ,$$

la mesure $\alpha = \xi + th'm - \xi P$ est bornée et de masse totale inférieure à $t$.

*Démonstration.* — Pour tout $n$ on a :

$$\xi P_n = \xi + t \sum_0^{n-1} (h'm)P_k - \sum_0^{n-1} \alpha P_k .$$

si $\phi \in C_K^+$ et $m(\phi) > 0$ on a donc pour tout $n$ :

$$0 \leq \left( \xi(\phi) / \sum_0^{n-1} (h'm)P_k\phi \right) + t - \left( \sum_0^{n-1} \alpha P_k \phi \Big\backslash \sum_0^{n-1} (h'm)P_k\phi \right).$$

Si l'on fait tendre $n$ vers l'infini, le premier quotient tend vers zéro et d'après le théorème limite-quotient le second tend vers $\alpha(1)$ si $\alpha$ est borné et vers $+ \infty$ sinon. Le résultat en découle immédiatement.

Dans la suite nous poserons $\eta = \hat{\gamma} m$. Comme $\hat{P}\hat{\gamma} = \hat{\gamma} + h'$ on a $\eta P = \eta + h'm$. Les deux résultats qui suivent se démontrent comme pour les fonctions.

III.2. Proposition. — Pour tout $\phi \in C_K^+$ avec $m(\phi) > 0$ la quantité $\eta P_n \phi$ est infiniment grand équivalent à $\sum_0^{n-1} (h'm)P_n\phi$.

III.3. Proposition. — Si $\xi$ est une mesure de Radon bornée inférieurement par un multiple de la mesure de Haar et si

$$\xi P = \xi + \alpha$$

où $\alpha$ est une mesure bornée de masse nulle alors $\xi + \alpha\Gamma$ est un multiple de la mesure de Haar.

III.4. DÉFINITION. — On appelle $\mathscr{K}$ le cône des mesures telles que :

*i)* $\xi$ est une mesure de Radon qui domine un multiple de la mesure de Haar,

*ii)* $\xi P = \xi + t(\xi)h'm$ où $t(\xi)$ est un nombre positif ou nul,

*iii)* $\int h' d\xi = ct(\xi)$.

Comme dans le cas des fonctions on a :

III.5. PROPOSITION. — Le cône $\mathscr{K}$ est isomorphe au cône $\tilde{\mathscr{K}}$ des mesures $\tilde{\xi}$ telles que :

*i)* $\tilde{\xi}$ est une mesure de Radon positive,

*ii)* $\tilde{\xi} P I_{H^c} = \tilde{\xi}$.

On posera $t(\tilde{\xi}) = \int P 1_H d\tilde{\xi}$. Si $\tilde{\xi}$ est l'image de $\xi$ dans l'isomorphisme on a $t(\tilde{\xi}) = t(\xi)$.

*Démonstration.* — Elle suit exactement les mêmes chemins que pour les fonctions. On définit l'isomorphisme par :

$$\tilde{\xi} = \lim_n \xi (P I_{H^c})^n$$

et l'isomorphisme réciproque par :

$$\xi = \tilde{\xi} + \tilde{\xi}(P I_H \Gamma).$$

Le résultat suivant est le résultat essentiel pour la représentation intégrale.

III.6. THÉORÈME. — L'application $f \to fm$ est un isomorphisme des cônes $\hat{\mathscr{H}}$ et $\mathscr{K}$.

*Démonstration.* — Il est clair que l'application ci-dessus est une application affine injective de $\hat{\mathscr{H}}$ dans $\mathscr{K}$ à condition de considérer $\hat{\mathscr{H}}$ comme un cône de classes d'équivalence modulo $m$. Réciproquement il faut montrer que tout élément $\xi$ de $\mathscr{K}$ peut s'écrire $fm$ avec $f \in \hat{\mathscr{H}}$.

Les mesures $\hat{\xi}$ de $\tilde{\mathscr{K}}$ sont excessives pour la chaîne de probabilité de transition $Q = I_{H^c} P I_{H^c}$ dont le noyau potentiel est $G^H = I_{H^c} + I_{H^c} U_H I_{H^c}$. D'après les résultats bien connus liés à la décomposition de Riesz ([*10*] chap. II, § 3) une telle mesure est limite croissante de potentiels $\alpha_n G^H$, où les mesures $\alpha_n$ sont portées par $H^c$. En utilisant l'équation résolvante on a :

$$t(\tilde{\xi}) \geq \int P1_H d(\alpha_n G^H) = \int P1_H d\alpha_n + \int (U_H I_{H^c} P1_H) d\alpha_n$$
$$= \alpha_n(H^c)\,.$$

La masse totale des $\alpha_n$ est donc bornée par un même nombre $t$. Soit $\beta$ la masse totale finie de la mesure $\sum_0^\infty \mu_1^n$ qui est telle que $\left(\sum_0^\infty \mu_1^n\right) * \varepsilon_x$ soit la partie singulière des noyaux A, W et donc $\Gamma$ ([*2*]). D'après les formules reliant $G^H$ et $\Gamma$ ([*10*] p. 236) la partie singulière de $\alpha_n G^H$ a une masse totale inférieure à $t\beta$ et par suite $\tilde{\xi}$ a aussi une partie singulière de masse totale inférieure à $t\beta$. La mesure $\tilde{\xi} + \tilde{\xi}(PI_H)$ a donc une partie singulière de masse totale inférieure à $t\beta + t\beta^2$. Donc finalement toute mesure $\xi$ de $\mathcal{K}$ a une partie singulière de masse totale finie, mais ceci est incompatible avec le fait que $\mu$ est étalée. En effet si $\xi'$ est la partie singulière de $\xi$ on devrait avoir pour tout $n$ :

$$\xi' * \mu_n = \xi'$$

ce qui est clairement impossible lorsque $\mu^n$ a une partie absolument continue. Les mesures de $\mathcal{K}$ sont donc absolument continues par rapport à $m$ et le résultat est alors clair.

III.7. Proposition. — L'ensemble K des mesures de Radon positives $\xi$ telles que :

*i)* $\xi P \leq \xi + h'm$,

*ii)* $\int h' d\xi \leq c$,

est un ensemble convexe compact métrisable pour la topologie de la convergence vague.

En d'autres termes K est un chapeau du cône des mesures de Radon $\xi$ positives telles que $\xi P \leq \xi + t(\xi)h'm$ et $\int h' d\xi \leq ct(\xi)$.

*Démonstration.* — Pour $\phi \in C_K^+$ on sait que $\Gamma\phi$ est bornée et que

$$P\Gamma\phi = \Gamma\phi + h'm(\phi) - \phi\,.$$

Pour $\xi$ dans K on a donc :

$$\int \phi d\xi = \int \Gamma\phi d(\xi - \xi P) + m(\phi) \int h' d\xi\ ;$$

mais d'après le lemme (III.1), la mesure $\xi - \xi P$ est égale à $\alpha - h'm$ avec $\alpha(1) < 1$, et par suite :

$$\int \phi d\xi = \int \Gamma\phi d\alpha - \int (\Gamma\phi)h'dm + m(\phi)\int h'd\xi$$
$$= \int \Gamma\phi d\alpha + m(\phi)\left(\int h'd\xi - c\right) \leq \| \Gamma\phi \|$$

puisque $\hat{\Gamma}h' = c$. Comme le dernier terme ne dépend plus de $\xi$ l'ensemble K est vaguement relativement compact.

Comme G est à base dénombrable la topologie vague est métrisable. De toute suite d'éléments de K on peut extraire une suite $\{ \xi_n \}$ convergeant vaguement vers une mesure $\xi$. On a clairement $\xi P \leq \xi + h'm$ et $\int h'd\xi \leq c$ ce qui prouve que K est compact.

La mesure $\eta = \hat{\gamma}m$ est une mesure de K. D'après le théorème de Choquet il existe donc une mesure $\nu$ portée par les points extrémaux $\xi_\theta$ de K telle que :

$$\eta = \int \xi_\theta \nu(d\theta),$$

l'égalité signifiant que pour tout $\phi \in C_K^+$ on a :

$$\int \phi d\eta = \int \left( \int_G \phi d\xi_\theta \right) \nu(d\theta).$$

Comme $\eta P = \eta + h'm$ et $\eta(h') = c$ les mesures $\xi_\theta$ vérifient $\nu - ps$

$$\xi_\theta P = \xi_\theta + h'm, \int h'd\xi_\theta = 1.$$

Nous pouvons négliger les $\xi_\theta$ pour lesquels cela ne serait pas vrai et donc considérer que cette représentation intégrale ne met en jeu que des éléments du cône $\mathscr{K}$. Comme ce cône est isomorphe à $\mathscr{H}$, il existe des fonctions $f_\theta$ extrémales dans $\hat{\mathscr{H}}$ telles que $\xi_\theta = f_\theta m$ et l'on pourra écrire

$$\hat{\gamma} = \int f_\theta \nu(d\theta)$$

en se rappelant que cela signifie que

$$\int \hat{\gamma}\phi dm = \int (f_\theta \phi dm)\nu(d\theta)$$

pour tout $\phi \in C_K^+$. Les fonctions $f_\theta$ (ou plutôt leurs classes d'équivalence modulo $m$) vérifient $\hat{P} f_\theta = f_\theta + h'$, $m$-pp, et $\int f_\theta h' dm = c$.

Nous avons donc finalement quatre cônes qui sont isomorphes : les cônes $\mathscr{K}$, $\tilde{\mathscr{K}}$, $\hat{\mathscr{H}}$, $\tilde{\mathscr{H}}$. Le chapeau K et la représentation intégrale se transportent donc de l'un à l'autre et dans la suite nous n'utiliserons que la lettre K, pour désigner indifféremment K ou ses images dans les isomorphismes canoniques.

## IV. LE RÉSULTAT PRINCIPAL

Nous allons maintenant utiliser comme dans [*5*] la représentation intégrale du paragraphe précédent. Vu le rôle symétrique joué par les deux marches nous travaillons sur $\gamma$ et $\gamma^H$ pour éviter les chapeaux et supposons donc que nous avons écrit :

$$\gamma^H = \int f_\theta \nu(d\theta)$$

avec la signification indiquée précédemment.

Lorsque $\gamma$ (et donc $\hat{\gamma}$) ne s'annulent pas hors d'un compact nous poserons $\psi = \gamma / \hat{\gamma}$ en dehors de ce compact et $\psi = 1$ sur ce compact.

IV.1. Proposition. — Il existe toujours dans la représentation de $\gamma^H$ au moins une fonction $f_\theta$ qui n'est pas étrangère à $\gamma$ pour l'ordre propre de $\tilde{\mathscr{H}}$. Si $\psi$ est bornée aucun élément de $\tilde{\mathscr{H}}$ n'est étranger à $\gamma^H$ pour l'ordre propre de $\tilde{\mathscr{H}}$.

*Démonstration.* — Si $f \in \tilde{\mathscr{H}}$, $t(f) \leq 1$ et $f$ est étrangère à $\gamma^H$, il existe d'après la proposition (II.6) une fonction $g$ avec $m(g) \leq 1$ telle que

$$\inf(f, \gamma^H) = G^H g .$$

Supposons d'abord que $\psi$ soit bornée. Si $f$ est étrangère à $\gamma^H$ il résulte de la proposition (II.10) que :

$$\lim_{x \to \Delta} \inf(f/\gamma^H, 1)(x) = \lim_{x \to \Delta} (G^H g/\gamma^H)(x) = 0$$

et ceci est incompatible avec la proposition (II.11). Nous avons donc démontré la deuxième phrase de l'énoncé.

Pour démontrer le cas général nous prenons une fonction $f$ extrémale telle que $\gamma^H \wedge f = 0$. On a aussi $n\gamma^H \wedge nf = 0$ donc $n\gamma^H \wedge f = 0$ ; il en résulte que inf $(f, n\gamma^H) = G^H g_n$ avec $m(g_n) \leq t(f) = 1$ pour tout $n$ d'après (II.9). On a donc :

$$\inf(f, n\gamma^H) \leq \gamma^H + \hat{\gamma}^H + L' .$$

Supposons que $\mu$ charge tous les ouverts de G ce qui entraîne que tout élément non nul de $\tilde{\mathscr{H}}$ soit strictement positif sur $H^c$. Faisant tendre $n$ vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente on obtient :

$$f \leq \gamma^H + \hat{\gamma}^H + L' \quad \text{sur } H^c.$$

D'autre part la relation $f + \gamma^H = f \vee \gamma^H = \sup(f, \gamma^H) + G^H g_1$ et l'inégalité ci-dessus donnent

$$f + \gamma^H \leq \gamma^H + \hat{\gamma}^H + L' + G^H g_1 \quad \text{sur } H^c,$$

soit encore :

$$f \leq \hat{\gamma}^H + L' + G^H g_1 \quad \text{sur } H^c.$$

Si l'on applique ceci aux fonctions $f_\theta$ que l'on suppose toutes étrangères à $\gamma^H$, il existe pour chacune d'elles une fonction intégrable $g_\theta \geq 0$ avec $m(g_\theta) \leq 1$ et telle que :

$$f_\theta \leq \hat{\gamma}^H + L' + G^H g_\theta \quad \text{sur } H^c$$

et l'on a donc :

$$\gamma^H = \int f_\theta \nu(d\theta) \leq \hat{\gamma}^H + L' + G^H g \quad \text{sur } H^c,$$

avec $g \in L^1_+$ et $m(g) \leq 1$. Il s'ensuit que sur $H^c$

$$\gamma^H/(\gamma^H + \hat{\gamma}^H) \leq \hat{\gamma}^H/(\gamma^H + \hat{\gamma}^H) + (L' + G^H g)/(\gamma^H + \hat{\gamma}^H)$$

et si l'on prend la limite à l'infini en supposant que $\psi = \gamma^H/\gamma^H$ tende vers l'infini on obtient une contradiction. Donc $\psi$ est bornée ce qui est incompatible avec la première partie.

Il reste à nous débarrasser de l'hypothèse superflue : $\mu$ charge tous les ouverts. Posons alors comme dans [5]

$$\tilde{\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)} \mu_n .$$

La marche aléatoire $\tilde{M}$ sur G, de loi $\tilde{\mu}$, est toujours récurrente et $\tilde{\mu}$ charge évidemment tous les ouverts de G. Soit $\tilde{P}$ la probabilité de transition de $\tilde{M}$. Si $f \in \mathscr{H}$, il est facile de calculer que

$$\tilde{P}f = f + t(f)\tilde{P}h',$$

qui peut s'écrire :

$$\tilde{P}(f + t(f)(D - h')) = (f + t(f)(D - h')) + t(f)h',$$

et nous allons expliquer comment choisir la constante D. Si l'on applique à $\tilde{P}$ la méthode suivie dans I pour construire le noyau positif $\tilde{\Gamma}$ à partir de la fonction $sh$, $0 < s < 1$, la constante de Robin correspondante est $\tilde{c} = m(h)^{-2}s^{-2}(1 - sm(h) - s^2m(h^2))$ et l'on choisit $s$ suffisamment petit pour que $\tilde{c}$ soit assez grande. D'autre part $\tilde{h}' = h'$ et si l'on pose

$$\tilde{f} = f + t(f)(D - h'),$$

on a :

$$\int \tilde{f} h' dm = t(f)(c + D - m(h'^2)) = \tilde{c}t(\tilde{f})$$

si $D = \tilde{c} - c + m(h'^2) > \| h' \|_{\mathscr{C}_K}$ ce qui est le cas si $\tilde{c}$ est assez grand. Alors $f \geq 0$ implique $\tilde{f} > 0$ et les égalités

$$\tilde{P}\tilde{f} = \tilde{f} + t(\tilde{f})h', \; t(\tilde{f}) = \frac{1}{\tilde{c}} \int \tilde{f}h' dm$$

montrent que $\tilde{f} \in \tilde{\mathscr{H}}$ (l'analogue de $\mathscr{H}$ pour P).

Inversement si $\tilde{f} \in \tilde{\mathscr{H}}$ et si l'on pose $f = \tilde{f} - t(\tilde{f})(D - h')$, on vérifie que $f$ est bornée inférieurement et que $t(f) = t(\tilde{f})$. D'autre part la relation évidente $I + P\tilde{P} = I + \tilde{P}P = 2\tilde{P}$ permet d'obtenir la relation :

$$2\tilde{P}\tilde{f} = \tilde{f} + P\tilde{P}\tilde{f} = P\tilde{f} + \tilde{f} + t(f)Ph',$$

qui donne, en éliminant $\tilde{P}\tilde{f}$,

$$Pf = f + t(f)h',$$

soit $f \in \mathscr{H}$ (et donc $f \geq 0$). L'application linéaire $f \to \tilde{f}$ est donc une bijection de $\mathscr{H}$ sur $\tilde{\mathscr{H}}$ qui transporte des extrémales de $\mathscr{H}$ sur des extrémales de $\tilde{\mathscr{H}}$. On est ainsi ramené au cas où $\mu$ charge tous les ouverts de G. Nous sommes maintenant à pied d'oeuvre pour démontrer l'analogue du théorème (III.6) qui est la clef de [5]. Notre démonstration sera exactement la même dans son principe, la seule difficulté nouvelle étant qu'il faudrait constamment dans la rédaction passer d'un cône dans l'autre, certains raisonnements de [5] ne pouvant se généraliser que dans $\mathscr{H}$ et d'autres dans $\tilde{\mathscr{H}}$. Pour éviter d'alourdir encore la rédaction nous travaillerons sur $\tilde{\mathscr{H}}$ et il sera entendu que certains raisonnements sont faits en utilisant l'isomorphisme avec $\mathscr{H}$.

IV.2. THÉORÈME. — Si la marche est de type I, ou bien $\gamma^H$ est portée par une génératrice extrémale de $\mathscr{H}$ ou bien il existe deux fonctions $f_1$ et $f_2$ extrémales dans K telles que $\gamma^H = (f_1 + f_2)/2$.

*Démonstration.* — Soit $f$ la fonction extrémale de la proposition précédente qui n'est pas étrangère à $\gamma^H$. Il existe une constante $k > 0$ telle que $f \wedge \gamma^H = kf$ puisque $f$ est extrémale et donc $f \leq k^{-1}\gamma^H$.

Pour tout $x$ de G on a aussi $T_x f \leq k^{-1}\gamma^H$ et comme le cône $\tilde{\mathscr{H}}$ (ou du moins le cône des classes d'équivalence d'éléments de $\tilde{\mathscr{H}}$) est complètement réticulé, il existe une borne supérieure $\Phi$ pour la famille $\{ T_x f \}$, $x \in G$. Cette fonction $\Phi$ est évidemment invariante par le groupe des $T_x$ et $(I - \tau_x)\Phi$ est donc bornée pour tout $x$. Comme on a supposé la marche de type I il en résulte qu'il existe deux constantes L et $c$ telles que $\Phi = U(L(\gamma + c)) = L\gamma^H$.

En raisonnement comme dans [5] on voit alors qu'il existe un nombre $n$ et des points $x_1, \ldots, x_n$ dans G tels que :

$$\begin{aligned}(n + 1)\gamma^H &= f \vee T_{x_1}f \ldots \vee T_{x_n}f \\ &= \sup(f, \ldots, T_{x_n}f) + G^H\psi\end{aligned}$$

avec $\psi \in \mathscr{L}^1_+$.

Nous supposons alors que $\mu$ charge tous les ouverts de G. Il en résulte que tout élément non nul de $\tilde{\mathscr{H}}$ est strictement positif à l'extérieur de H. Supposons que $\gamma^H$ ne soit pas extrémale dans K. Il existe alors au moins deux fonctions extrémales différentes. Soient $f$ et $g$ deux telles fonctions ; en raisonnement comme précédemment on a $f \wedge ng = 0$ pour tout $n$ et donc :

$$\inf(f, ng) = G^H\Phi_n \text{ avec } m(\Phi_n) \leq 1$$

ce qui entraîne $\inf(f, ng) \leq \gamma^H + \hat{\gamma}^H$ et finalement, comme $g$ est $> 0$ sur $H^c$, $f \leq \gamma^H + \hat{\gamma}^H$ sur $H^c$.

Il en résulte que sur $H^c$

$$(n + 1)\gamma^H \leq \gamma^H + \hat{\gamma}^H + G^H\psi$$

soit encore :

$$(n + 1)\frac{\gamma^H}{\gamma^H + \hat{\gamma}^H} \leq 1 + \frac{G^H\psi}{\hat{\gamma} + \hat{\gamma}^H}.$$

En raisonnement comme dans [5] on obtient alors $n \leq 1$ ce qui termine la démonstration dans ce cas.

Pour le cas général on procède comme dans [5] en utilisant la marche de loi $\tilde{\mu} = \sum_0^\infty 2^{-(n+1)}\mu^n$ qui satisfait à l'hypothèse précédente. Comme dans [5] on montre alors :

IV.3. THÉORÈME. — Si $\gamma^H$ n'est pas extrémale il existe un sous-groupe ouvert distingué $G_0$ d'indice 2 telle que la marche induite sur $G_0$ soit de type II.

*Démonstration.* — C'est la même que dans le cas dénombrable avec les changements évidents. Il faut toutefois montrer que $G_0$ est ouvert. Mais on voit facilement que $a \to T_a f$ est continue pour les topologies de G et K. Le sous-groupe $G_0$ est donc fermé distingué d'indice 2 donc aussi ouvert.

Les marches du théorème précédent sont les marches de type I′ dont l'étude a été faite dans [*3*] avec celle des marches de type II. Dans la suite nous ne considérerons donc plus que des marches de type I. Observons toutefois que la démonstration incomplète de [*3*] peut maintenant se conclure exactement comme dans [*5*] grâce à l'étude qui vient d'être faite. Nous n'allons pas reprendre cette démonstration mais nous contenter d'énoncer.

IV.4. Théorème. — Si $G_0$ est un sous-groupe ouvert (non compact) de G le potentiel de la marche induite sur $G_0$ est la trace du potentiel de la marche sur G.

## V. APPLICATIONS

Dans ce paragraphe nous considérons donc uniquement des marches de type I qui ne soient pas de type I′ et nous allons leur appliquer le résultat du théorème (IV.2) précédent. Nous avons besoin auparavant du résultat suivant.

V.1. Proposition. — Si $f \in \mathscr{L}^1_+((\hat{\gamma} + 1)m)$ il existe une constante J telle que :

$$\Gamma f(x) \leq (1 + \psi(x)) \int (\hat{\gamma} + J) f dm ,$$

pour $m$-presque tout $x$.

*Démonstration.* — On commence par $f = \tau_a h'$ ; l'inégalité à montrer s'écrit alors, compte tenu de (I.4)

$$\gamma(x) - \gamma(xa) + \gamma'(a) \leq \frac{\gamma(x) + \hat{\gamma}(x)}{\hat{\gamma}(x)} (\gamma'(a) + J)$$

soit

$$\gamma(x)\hat{\gamma}(x) \leq (\gamma(xa) + J)\hat{\gamma}(x) + (\gamma'(a) + J)\gamma(x) ;$$

comme $\gamma - \gamma'$ est bornée ceci résulte donc de la proposition (I.10). Remarquons que l'inégalité a lieu partout. Soit alors $f$ la fonction définie par :

$$f(x) = \int \phi(\xi) h'(x\xi^{-1}) m(d\xi)$$

avec $\phi \in \mathscr{L}^1_+((\hat{\gamma} + 1)m)$ ; on a :

$$\begin{aligned}\Gamma f(x) &= \int \Gamma(x, dz) \int \phi(\xi) h'(z\xi^{-1}) m(d\xi) \\ &= \int \phi(\xi) \Gamma(\tau_{\xi^{-1}} h')(x) m(d\xi) \\ &\leq \left(1 + \frac{\gamma(x)}{\hat{\gamma}(x)}\right) \int \phi(\xi)(\gamma'(\xi) + \mathrm{J}) m(d\xi) .\end{aligned}$$

Mais par ailleurs :

$$\begin{aligned}\int \hat{\gamma}(x) f(x) dx &= \iint \hat{\gamma}(x)\phi(\xi) h'(x\xi^{-1}) m(dx) m(d\xi) \\ &= \int \hat{\gamma}'(\xi^{-1})\phi(\xi) m(d\xi) \\ &= \int \hat{\gamma}'(\xi)\phi(\xi) m(d\xi)\end{aligned}$$

et l'on a donc bien le résultat pour les fonctions $f$ de ce type. Mais l'espace de ces fonctions est total dans $\mathscr{L}^1((\hat{\gamma} + 1)m)$. En effet si $g$ est une fonction bornée telle que pour tout $\phi \in \mathscr{L}^1_+((\hat{\gamma} + 1)m)$ on ait

$$\int g(x) \int \phi(\xi) h'(x\xi^{-1}) m(d\xi) m(dx) = 0 ,$$

l'application $\xi \to \int g(x) h'(x\xi^{-1}) m(dx)$ est nulle presque partout et donc $g$ est nulle presque partout.

Soit alors $k$ une fonction à support compact et positive. La fonction bornée $\hat{\Gamma} k$ définit sur $\mathscr{L}^1((\hat{\gamma} + 1)m)$ une forme linéaire et positive et pour toute fonction $f$ on a donc :

$$\int \hat{\Gamma} k . f dm \leq \left( \int (1 + \psi) k dm \right) \left( \int (\hat{\gamma} + \mathrm{J}) f dm \right) .$$

Il en résulte que $\hat{\Gamma} k \leq \left( \int (1 + \psi) k dm \right) (\hat{\gamma} + \mathrm{J})$ et donc finalement par dualité puisque ceci est vrai quel que soit $k$, on a :

$$\Gamma f \leq (1 + \psi) \int (\hat{\gamma} + \mathrm{J}) f dm \qquad m\text{-presque partout} .$$

V.2. COROLLAIRE. — Si $f$ est dans $C_0^+$ et spéciale l'inégalité

$$\Gamma f \leq (1 + \psi) \int (\hat{\gamma} + J) f dm$$

a lieu partout.

*Démonstration.* — Ceci résulte de la continuité des deux membres. On peut alors démontrer le résultat que nous avions en vue.

V.3. THÉORÈME. — Si la fonction $\psi$ est bornée, en particulier si la marche est symétrique, la fonction $\gamma$ est, à l'addition d'une constante près, la seule solution bornée inférieurement de l'équation de Poisson $(P - I)f = h'$. De plus $\lim_{x \to \Delta} \gamma(x) = +\infty$ et pour toute fonction $f$ spéciale et continue

$$\lim_{x \to \Delta} \Gamma f(x) = \int \hat{\gamma} f dm .$$

*Démonstration.* — Comme $\gamma + \hat{\gamma}$ tend vers l'infini en $\Delta$, si $\psi$ est bornée, la fonction $\gamma$ ne peut avoir de valeur d'adhérence finie.

L'espace B des fonctions continues de $\mathscr{L}_1^+((\hat{\gamma} + 1)m)$ est un cône adapté ([*6*]), donc toute forme linéaire positive sur B est donné par une mesure de Radon. L'espace B est d'autre part stable par P. Enfin si $f \in B$ on a $\Gamma f \leq (1 + \psi) \int (\hat{\gamma} + J) f dm$ partout.

Soit $\mathscr{U}$ un ultra-filtre plus fin que le filtre de voisinages de $\Delta$. Pour tout $f \in B$ on a :

$$\lim \Gamma f \leq (1 + L) \int (\hat{\gamma} + J) f dm$$

pour une constante L finie. Il existe donc une mesure de Radon $\nu$ majorée par un multiple de $(\hat{\gamma} + J)m$ et telle que :

$$\lim \Gamma f = \nu(f) .$$

On a d'autre part ; pour $f \in C_K^+$,

$$\nu(Pf) = \lim \Gamma(Pf) = \lim \left( \Gamma f - f + \int h' dm \right) = \nu(f) + \int h' f dm .$$

Il en résulte que $\nu$ est une mesure de Radon positive majorée par un multiple de $(\hat{\gamma} + J)m$ et telle que $\nu P = \nu + h'm$. On a d'autre part $\nu(h') = c$ de manière évidente. Il résulte alors du paragraphe précédent, puisque $\psi$ est bornée, que $\nu = \hat{\gamma} m$. Ceci démontre la propriété de limite de l'énoncé. La propriété d'unicité est alors un corollaire du résultat de Baldi [*1*].

Le résultat précédent peut comme dans [3] et [5] se généraliser en :

V.4. THÉORÈME. — Si $\psi$ est bornée, pour toute fonction spéciale telle que $Pf$ tende vers zéro à l'infini on a :

$$\lim_{x \to \Delta} \Gamma f(x) = \int \hat{\gamma} f dm .$$

Ceci est en particulier le cas lorsque G est le groupe des déplacements de $R^2$. Les symétries par rapport à un point de $R^2$ appartiennent à G et il est clair que G contient une courbe L issue de $e$ et s'éloignant vers $\Delta$. Pour tout $x \in L$ on a $x^{-1} = x$ et donc $\psi(x) = 1$ pour toute marche de Harris sur G. On peut manifestement trouver une suite $x_n \in L$ telle que $x_n = \xi_1 \xi_2, \ldots, \xi_n$, les $\xi_k$ appartenant à un voisinage V de $e$ dans G. Supposons que $\psi$ ne soit pas borné et qu'il existe donc une suite $(y_n)$ dans G pour laquelle $\psi(y_n) \to 0$, ce qui implique $y_n \to \Delta$. La proposition (I.4) et le corollaire (I.11) montrent que les propriétés asymptotiques de $\psi$ établies dans [5] s'appliquent au cas des groupes continus que nous considérons maintenant. La proposition (I.2) de [5] montre que, pour tout $n$, il existe $j_n \in \mathbb{N}$ tel que $\psi(y_{j_n} x_n) \to \frac{1}{2}$ et $y_{j_n} x_n \to \Delta$ mais cela est contradictoire avec la proposition (II.2) de [5].

## BIBLIOGRAPHIE

[1] P. BALDI, Sur l'équation de Poisson. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. **X**, n° 4, 1974, p. 423-443.

[2] A. BRUNEL et D. REVUZ, Marches de Harris sur les groupes localement compacts I, *Ann. Sci. École Normale Supérieure*, t. **7**, 1974, p. 273-310.

[3] A. BRUNEL et D. REVUZ, Marches de Harris sur les groupes localement compacts II. *Bulletin de la S. M. F.*, t. **104**, 1976, p. 3-31.

[4] A. BRUNEL et D. REVUZ. Marches de Harris sur les groupes localement compacts III, Istituto Nazionale di Alto Matematica. *Symposia Mathematica*, **XXI**, 1977, p. 55-63.

[5] A. BRUNEL et D. REVUZ, Marches de Harris sur les groupes localement compacts IV. *Annals of Mathematics*, t. **105**, 1977, p. 361-396.

[6] G. CHOQUET, *Lectures in Analysis*, Benjamin, 1969.

[7] Y. GUIVARC'H, M. KEANE et B. ROYNETTE, Marches aléatoires sur les groupes de Lie. *Lectures Notes in Mathematics*, p. 624.

[8] H KESTEN, The Martin boundary of recurrent random walks on countable groups, Proc 5th Berkeley. *Symp. Math. Stat.* and *Prob.*, vol. **II**. Univ. of California Press Berkeley, 1967, p. 51-75.

[9] J. NEVEU, Potentiel Markovien récurrent des chaînes de Harris. *Ann. Inst. Fourier*, t. **22**, 2, 1972, p. 85-130.

[10] D. REVUZ, *Markov Chains*, North Holland, 1975.

*(Manuscrit reçu le 8 mai 1979)*