ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. SZPIRGLAS
G. MAZZIOTTO

Modèle général de filtrage non linéaire et équations différentielles stochastiques associées

Annales de l'I. H. P., section B, tome 15, nº 2 (1979), p. 147-173
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1979__15_2_147_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XV, n° 2, 1979, p. 147-173 *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Modèle général de filtrage non linéaire et équations différentielles stochastiques associées

par

J. SZPIRGLAS et G. MAZZIOTTO

Centre National d'Études des Télécommunications C. P. M./F. M. I.,
196, rue de Paris, 92220 Bagneux, France

PLAN

1. INTRODUCTION

1. Le problème de filtrage en général.

Dans un problème de filtrage, on se propose d'étudier un système physique défini par un certain nombre de variables internes à partir d'une observation externe et nécessairement incomplète de ce système. Par exemple, un système de communication simple est décrit par deux variables, l'une représentant le message utile envoyé sur la ligne et l'autre le bruit perturbateur. Il s'agit alors d'estimer ce signal utile à partir de la seule observation de la sortie du canal de transmission, c'est-à-dire une combinaison du signal utile et du bruit.

La description probabiliste d'un tel système se ramène à la donnée d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{Q})$ muni d'une famille croissante de sous-tribus $\mathscr{F}_t$ de $\mathscr{A}$ qui rend compte à chaque instant de toutes les évolutions possibles des variables internes du système. Un observateur extérieur n'a accès qu'à une partie de ces évolutions, c'est-à-dire qu'il connaît seulement à chaque instant une sous-tribu $\mathscr{G}_t$ de $\mathscr{F}_t$. Le problème du filtrage consiste alors à évaluer une variable aléatoire X_t mesurable par rapport à $\mathscr{F}_t$ à partir de la tribu $\mathscr{G}_t$: l'estimation $\hat{X}_t$ choisie est naturellement: $\hat{X}_t = E_{\mathbb{Q}}(X_t/\mathscr{G}_t)$.

2. Modèle de filtrage et hypothèse fondamentale.

Le système est décrit par un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{Q})$ muni d'une filtration $\mathscr{F}$ et d'une sous-filtration $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$ qui vérifient les « conditions habituelles » de Dellacherie-Meyer [*4*].

La variable interne du système que l'on veut estimer est un processus intégrable X, adapté à la filtration $\mathscr{F}$. L'estimation choisie est la projection optionnelle au sens de [*5*], du processus X, relativement à la filtration $\mathscr{G}$ et la probabilité $\mathbb{Q}$ notée ${}^{1\mathbb{Q}}X$. Dans la suite, on notera $(\Omega, \mathscr{G}, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$ un tel espace.

L'article est consacré à l'étude de ${}^{1\mathbb{Q}}X$, d'abord comme image de X par un opérateur de projection optionnelle relativement à la filtration $\mathscr{G}$, puis comme solution d'une équation différentielle stochastique dépendant du processus d'observation Z qui engendre $\mathscr{G}$. Ces problèmes ont été étudiés dans de nombreuses situations pratiques qui sont décrites ici par un modèle de filtrage unique reposant sur une seule hypothèse fondamentale (H1). Cette hypothèse, qui nous a été suggérée par N. El Karoui, possède des interprétations physique et mathématique qui éclairent toute la théorie du filtrage.

(H1) *Sur* $(\Omega, \mathscr{G}, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$, *il existe une probabilité* $\mathbb{P}$ *équivalente à* $\mathbb{Q}$ *sur* $\mathscr{F}_\infty$ *telle que l'espace* $(\Omega, \mathscr{G}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *possède la propriété* (K) *suivante :*

(K) *Pour tout* t *de* $\mathbb{R}_+$ *et toute variable aléatoire* $\mathscr{F}_t$*-mesurable* X_t, *on a l'égalité :*

$$E_{\mathbb{P}}(X_t/\mathscr{G}_t) = E_{\mathbb{P}}(X_t/\mathscr{G}_\infty) \qquad \text{p. s.}$$

On désignera par L la $(\mathscr{F}, \mathbb{P})$-martingale continue à droite (c. à. d.) uniformément intégrable, telle que L_∞ soit une variable (v. a.) strictement positive définie comme la densité de Radon-Nikodym de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$.

L'hypothèse (H1) permet de résoudre les problèmes de filtrage, d'abord sous la probabilité $\mathbb{P}$ où la propriété (K) simplifie tout, puis d'exprimer les résultats sous $\mathbb{Q}$ grâce à la relation suivante :

$${}^{1\mathbb{Q}}X = {}^{1\mathbb{P}}(LX)/{}^{1\mathbb{P}}L$$

Cette méthode du changement de probabilité semble due à Zakaï [*23*]. Elle est utilisée notamment par Boel-Varaya-Wong [*2*] pour établir l'équation du filtrage dans un modèle de processus ponctuels, l'extension à des modèles continus se heurtait au problème de projection d'intégrales stochastiques. Ce problème a été résolu par Brémaud-Yor [*3*] sous une hypothèse équivalente à la propriété (K) et avec une application à un modèle particulier de filtrage. On montre ici que cette méthode permet aussi de simplifier la construction de l'opérateur de $(\mathscr{G}, \mathbb{Q})$-projection optionnelle, d'en donner une version régulière très aisément et d'établir des équations du filtrage pour des modèles très généraux.

Le chapitre II est consacré à la définition et au calcul d'une « loi conditionnelle du signal sachant l'observation ». Plus précisément, l'hypothèse (H1) permet d'exprimer l'opération de $(\mathscr{G}, \mathbb{Q})$-projection optionnelle à partir d'une simple opération de $(\mathscr{G}_\infty, \mathbb{P})$-espérance conditionnelle. Si l'espace $(\Omega, \mathscr{G}, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$ est suffisamment régulier, ces opérateurs peuvent s'exprimer grâce à des noyaux markoviens et on obtient la formule dite de Kallianpur-Striebel :

$${}^{1\mathbb{Q}}X_t(\omega) = \int_\Omega X_t(\omega')L_t(\omega')k(\omega, d\omega') \Big/ \int_\Omega L_t(\omega')k(\omega, d\omega')$$

pour $\mathbb{Q}$-presque tout ω. Dans cette formule, k est un noyau markovien de $(\Omega, \mathscr{G}_\infty)$ dans $(\Omega, \mathscr{F}_\infty)$ qui sera précisé dans la suite.

En général cette formule ne permet pas dans la pratique de calculer effectivement ${}^{1\mathbb{Q}}\mathrm{X}$. C'est pour cela que l'on cherchera, au chapitre III, à exprimer ${}^{1\mathbb{Q}}\mathrm{X}$ comme la solution d'une équation différentielle stochastique. L'hypothèse (H1) permet d'établir cette équation sous la probabilité de référence $\mathbb{P}$ par une méthode de projection quasi-géométrique, pour en déduire ensuite, sous la probabilité $\mathbb{Q}$, avec les hypothèses supplémentaires (H2) à (H5), l'équation suivante :

$$
\begin{aligned}
{}^{1\mathbb{Q}}\mathrm{X} = {}^{1\mathbb{Q}}\mathrm{X}_0 + \mathrm{A}'^{3\mathbb{Q}} + (\widehat{(f + z\mathrm{X}_-)}^{\beta,\mathbb{Q}} - {}^{1\mathbb{Q}}\mathrm{X}_- z^{\beta,\mathbb{Q}}).\mathrm{M}'^c \\
+ [(1 + \hat{\mathrm{W}}^{\nu,\mathbb{Q}})^{-1}(\widehat{g + \mathrm{W}g + \mathrm{W}\mathrm{X}_-}^{\nu,\mathbb{Q}} - {}^{1\mathbb{Q}}\mathrm{X}_- \hat{\mathrm{W}}^{\nu,\mathbb{Q}}) + \hat{h}^{\mu,\mathbb{Q}}] * (\mu - \nu')
\end{aligned}
$$

où X est une semi-martingale de processus à variation finie A′ (qui vérifie l'hypothèse (H3) du texte). Le processus M'^c et la mesure aléatoire $(\mu - \nu')$ s'interprètent comme les innovations associées à la semi-martingale Z qui engendre la filtration $\mathcal{G}$. Les processus f, z, W, g, V, h sont définis dans le texte et s'interprètent comme des corrélations entre le signal X, l'observation Z et la martingale L. Cette équation du filtrage est une forme plus générale des équations de Fujisaki-Kallianpur-Kunita [*6*] et Boel-Varaya-Wong [*2*] notamment.

L'interprétation physique de l'hypothèse (H1) est intéressante aussi. La propriété (K) est en fait un critère de « réalisabilité » du filtre optimal en « temps réel » : sous la probabilité $\mathbb{P}$, la meilleure estimation $\mathrm{E}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X}_t \mid \mathcal{G}_\infty)$ de X_t (i. e. celle obtenue après observation du système jusqu'à l'infini) est réalisable à l'instant t : c'est $\mathrm{E}_{\mathbb{P}}(\mathrm{X}_t \mid \mathcal{G}_t)$ (i. e. en n'observant le système que jusqu'à l'instant t). L'hypothèse (H1) affirme alors qu'il existe une probabilité (i. e. une certaine dynamique du système) sous laquelle le filtre optimal est réalisable.

On montrera, dans les derniers paragraphes, que cette hypothèse ainsi que celles conduisant à une équation différentielle explicite, sont réalisées dans les principaux problèmes de filtrage étudiés jusqu'ici. En particulier, les modèles présentés par Fujisaki-Kallianpur-Kunita [*6*], Kunita [*12*], Boel-Varaya-Wong [*2*] peuvent être ramenés au modèle étudié ici.

Ce travail a été réalisé dans le cadre du Centre National d'Études des Télécommunications et sous la direction de Mme Nicole El Karoui de l'Université de Paris VI. Nous tenons ici à la remercier de l'intérêt et de l'aide constante qu'elle nous a prodigués tout au long de cette étude.

3. Notations et préliminaires.

D'une manière générale, la terminologie adoptée dans cet article est celle de Dellacherie [*5*], Dellacherie-Meyer [*4*] et Meyer [*16*] en ce qui concerne la théorie des processus et de l'intégrale stochastique, et celle de Jacod [*8*], Jacod-Mémin [*10*] pour la représentation des semi-martingales et l'intégrale stochastique par rapport à une mesure aléatoire.

a) *Filtrations et tribus usuelles.*

Les processus utilisés sont à valeurs réelles, définis sur un espace mesurable $(\Omega, \mathscr{A})$ muni de deux probabilités équivalentes $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$. Une filtration $\mathscr{F}$ définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est une famille croissante de sous-tribus $\mathscr{F}_t$ de $\mathscr{A}$ qui est continue à droite $\left(\text{i. e. } \mathscr{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathscr{F}_{t+\varepsilon}\right)$ et telle que $\mathscr{F}_0$ contienne tous les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables de $(\Omega, \mathscr{A})$. La sous-filtration $\mathscr{G}$ est aussi une filtration telle que : $\mathscr{G}_t \subset \mathscr{F}_t$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$. Dans la suite on identifie $\mathscr{A}$ et $\mathscr{F}_\infty$.

Étant donnés une filtration $\mathscr{F}$ et une probabilité $\mathbb{P}$ sur un espace mesurable $(\Omega, \mathscr{A})$, on notera $\mathscr{O}(\mathscr{F})$ et $\mathscr{P}(\mathscr{F})$ les tribus optionnelles et prévisibles sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$. Soit l'espace $E = \mathbb{R} - \{0\}$ muni de sa tribu borélienne $\mathscr{E}$, sur l'espace $\tilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}_+ \times E$, on définit les tribus optionnelles et prévisibles suivantes :

$$\tilde{\mathscr{O}}(\mathscr{F}) = \mathscr{O}(\mathrm{F}) \otimes \mathscr{E} \qquad \text{et} \qquad \tilde{\mathscr{P}}(\mathscr{F}) = \mathscr{P}(\mathscr{F}) \otimes \mathscr{E}\,.$$

D'une manière générale, une $(\mathscr{F}, \mathbb{P})$-propriété est une propriété relative à la filtration $\mathscr{F}$ et la probabilité $\mathbb{P}$: soit par exemple Z une $(\mathscr{F}, \mathbb{P})$-semi-martingale.

b) *Normes de semi-martingales.*

Dans [*17*], Meyer définit la norme H^p de la semi-martingale Z pour $1 \leqslant p < \infty$:

$$\| Z \|_{H^p} = \inf_{Z=M+A} j_p(M, A)$$

avec $Z = M + A$ une décomposition de Z en une martingale locale M et un processus à variation finie et $j_p(M, A)$ défini par :

$$j_p(M, A) = \left\| [M, M]_\infty^{1/2} + \int_0^\infty | dA |_s \right\|_p$$

où la norme est celle de l'espace des variables aléatoires $\mathbb{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On note $Z \in H^p(\mathscr{F}, \mathbb{P})$ si $\| Z \|_{H^p} < \infty$ et on montre que cette définition est compatible avec l'espace H^p des martingales. En particulier, toute semi-martingale de $H^p(\mathscr{F}, \mathbb{P})$ admet une décomposition en une martingale locale M telle que $E([M, M]_\infty^{p/2}) < \infty$ et un processus prévisible nul en 0, A, à variation p-intégrable, i. e. à variation dans l'espace $\mathbb{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

c) *Mesures aléatoires et intégrales stochastiques.*

Les caractéristiques locales d'une semi-martingale Z et les intégrales stochastiques associées à des mesures aléatoires sont définies par Jacod-Mémin dans [*10*]. La mesure aléatoire associée aux sauts de Z, μ, est une mesure de transition positive à valeurs entières de $(\Omega, \mathscr{F})$ dans l'espace $E \times \mathbb{R}_+$ muni de sa tribu borélienne $\tilde{\mathscr{E}}$, définie par :

$$\mu(\omega, dt\, dx) = \sum_s \mathbb{1}_{\Delta Z_s \neq 0} \varepsilon_{s, \Delta Z_s}(dt, dx)$$

où ε est la mesure de Dirac qui charge de 1 le point $(s, \Delta Z_s)$. A une mesure aléatoire μ, on associe le processus à variation finie $Y * \mu$ défini par :

$$(Y * \mu)_t = \int_0^t \int_E Y(\omega, s, x)\mu(\omega\,; ds\, dx)$$

pour Y une fonction aléatoire mesurable sur $(\Omega, \mathscr{F}_\infty \otimes \tilde{\mathscr{E}})$ et la mesure $M_\mu^{\mathbb{P}}$ sur cet espace définie par : $M_\mu^{\mathbb{P}}(Y) = E_{\mathbb{P}}(Y * \mu)_\infty$.

On dit que la mesure μ est $\mathscr{F}$-prévisible (resp. optionnelle) si $Y * \mu$ est $\mathscr{P}(\mathscr{F})$-mesurable (resp. $\mathscr{O}(\mathscr{F})$-mesurable) pour toute fonction Y qui est $\tilde{\mathscr{P}}(\mathscr{F})$-mesurable (resp. $\tilde{\mathscr{O}}(\mathscr{F})$). D'après Jacod-Mémin [*10*], à toute mesure aléatoire de sauts d'une semi-martingale, qui est σ-finie sur $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{P}}(\mathscr{F}))$, on peut associer une mesure $\mathscr{F}$-prévisible unique, ν, telle que les restrictions de $M_\mu^{\mathbb{P}}$ et $M_\nu^{\mathbb{P}}$ à $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{P}}(\mathscr{F}))$ coïncident.

On supposera dans la suite, que la semi-martingale Z est quasi-continue-à-gauche, c'est-à-dire que les sauts de Z ont lieu en des temps d'arrêts totalement inaccessibles, cela simplifie en particulier la construction d'une intégrale stochastique relativement aux mesures aléatoires $(\mu - \nu)$ et μ qui est faite par Jacod dans [*8*].

Soit $\mathscr{G}(\mathscr{F}, \nu, \mathbb{P})$ l'ensemble des fonctions U, $\tilde{\mathscr{P}}(\mathscr{F})$-mesurables, de la forme $U = U_1 + U_2$ avec $M_\nu^{\mathbb{P}}(|U_1|) + M_\nu^{\mathbb{P}}(|U_2|^2) < \infty$.

Pour toute classe $\mathscr{L}$ de processus, on note $\mathscr{L}_{\text{loc}}$ la classe des processus X tels que X^{T_n} soit dans $\mathscr{L}$ pour (T_n) une suite de $\mathscr{F}$-temps d'arrêts qui croît $\mathbb{P}$-p. s. vers $+\infty$.

Alors, pour U de $\mathscr{G}_{\text{loc}}(\mathscr{F}, \nu, \mathbb{P})$, on définit une $(\mathscr{F}, \mathbb{P})$-martingale locale $U * (\mu - \nu)$ vérifiant en particulier :

$$\Delta(U * (\mu - \nu))_t = U(\omega, t, \Delta Z_t) . \mathbb{1}_{\Delta Z_t \neq 0}$$

$U * (\mu - \nu)$ n'a pas de partie martingale continue.

Soit $\mathscr{G}'(\mathscr{F}, \mu, \mathbb{P})$ l'ensemble des fonctions V, $\tilde{\mathscr{O}}(\mathscr{F})$-mesurables, de la forme $V = V_1 + V_2$ avec $M_\mu^{\mathbb{P}}(|V_1|) + M_\mu^{\mathbb{P}}(|V_2|^2) < \infty$ et $M_\mu^{\mathbb{P}}(V/\tilde{\mathscr{P}}(\mathscr{F})) = 0$.

Alors, pour V de $\mathcal{G}'_{\mathrm{loc}}(\mathcal{F}, \mu, \mathbb{P})$, on définit une $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-martingale locale $V * \mu$ analogue.

D'après [*11*], une $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-semi-martingale Z admet la décomposition canonique suivante :

$$Z = Z_0 + x \mathbb{1}\{|x| > 1\} * \mu + \alpha + M^c + x \mathbb{1}\{|x| \leqslant 1\} * (\mu - \nu)$$

avec μ la mesure aléatoire des sauts de Z et ν sa projection duale prévisible, avec M^c la partie martingale locale continue de Z, α un processus prévisible localement à variation intégrable et on pose $\beta = \langle M^c, M^c \rangle$.

On appelle caractéristiques locales de Z, le triplet (α, β, ν).

d) *Espaces de processus et projections prévisibles généralisées.*

On notera $\bar{H}^p(\mathcal{F}, \beta, \mathbb{P})$ l'espace des processus $\mathcal{F}$-prévisibles H, tels que $E_{\mathbb{P}}\left(\left(\int_0^\infty H_s^2 d\beta_s\right)^{p/2}\right) < \infty$ pour $1 \leqslant p < \infty$ et $\bar{H}^p(\mathcal{F}, \nu, \mathbb{P})$ l'espace des fonctions $\tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{F})$-mesurables W, telles que $E_{\mathbb{P}}((W^2 * \nu)_\infty^{p/2}) < \infty$.

Pour un processus H (resp. une fonction W) tel que

$$M_\beta^{\mathbb{P}}(|H|) = E_{\mathbb{P}}\int_0^\infty |H_s| d\beta_s < \infty \qquad (\text{resp. } M_\nu^{\mathbb{P}}(|W|) < \infty),$$

on définit sa $\mathcal{G}$-projection prévisible comme dans Brémaud-Yor [*3*], par : $\hat{H}^{\beta,\mathbb{P}}$ (resp. $\hat{W}^{\nu,\mathbb{P}}$) est l'espérance conditionnelle de H (resp. W) par rapport à la tribu $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ (resp. $\tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{G})$) et la mesure $M_\beta^{\mathbb{P}}$ (resp. $M_\nu^{\mathbb{P}}$).

Cette définition prolonge la définition classique de Dellacherie dans la mesure où si H est mesurable borné, alors ${}^{3\mathbb{P}}H$ est dans la $M_\beta^{\mathbb{P}}$-classe d'équivalence de $\hat{H}^{\beta,\mathbb{P}}$. D'autre part, une remarque importante pour la suite est, que si β est $\mathcal{G}$-prévisible et si H est dans $\bar{H}^p(\mathcal{F}, \beta, \mathbb{P})$, alors avec l'inégalité de Fefferman (Meyer [*16*]), on montre que H est $\mathcal{G}$-localement $M_\beta^{\mathbb{P}}$-intégrable ; on construit ensuite, par recollement, la classe des processus $\hat{H}^{\beta,\mathbb{P}}$ dont un représentant est dans $\bar{H}^p(\mathcal{G}, \beta, \mathbb{P})$. De plus, si M^c est une $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$ et $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-martingale continue de processus croissant β, alors l'intégrale stochastique $\hat{H}^{\beta,\mathbb{P}}.M^c$ définit bien un, et un seul processus quel que soit le processus prévisible choisi dans la classe des $\hat{H}^{\beta,\mathbb{P}}$. De même, si ν est $\mathcal{G}$-prévisible et si W est dans $\bar{H}^p(\mathcal{F}, \nu, \mathbb{P})$, alors on peut définir $\hat{W}^{\nu,\mathbb{P}}$ avec des propriétés analogues.

II. LA FORMULE DE KALLIANPUR-STRIEBEL

On peut dire, dans un langage peu rigoureux, que la formule de Kallianpur-Striebel [*11*] donne une expression de la « loi conditionnelle du signal X, connaissant une observation Z du système ». Le modèle de filtrage que nous définissons ici permet de donner un sens rigoureux à la phrase précédente en construisant simplement l'opérateur de $(\mathscr{G}, \mathbb{Q})$-projection optionnelle qui fait passer du processus $\mathscr{F}$-optionnel X borné au processus $\mathscr{G}$-optionnel ${}^{1\mathbb{Q}}X$. La simplicité provient de ce que l'on peut définir cet opérateur à partir d'un simple opérateur d'espérance conditionnelle relativement à la probabilité $\mathbb{P}$ et la tribu $\mathscr{G}_\infty$. Si, de plus, l'espace Ω est suffisamment régulier (espace polonais et $\mathscr{G}_\infty$ séparable), alors les opérateurs précédents s'expriment à partir de noyaux markoviens qui ont effectivement une forme « loi conditionnelle » : c'est la formule énoncée par Meyer dans [*15*] et obtenue ici sans difficulté.

Le modèle de filtrage adopté ici vérifie l'hypothèse (H1) suivante :

(H1) *Sur* $(\Omega, \mathscr{G}, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$, *il existe une probabilité* $\mathbb{P}$ *équivalente à* $\mathbb{Q}$ *sur* $\mathscr{F}_\infty$ *telle que l'espace* $(\Omega, \mathscr{G}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *possède la propriété* (K) *suivante :*

(K) *Pour tout t de* $\mathbb{R}_+$ *et toute variable aléatoire* $\mathscr{F}_t$*-mesurable* X_t, *on a l'égalité :*

$$E_{\mathbb{P}}(X_t/\mathscr{G}_t) = E_{\mathbb{P}}(X_t/\mathscr{G}_\infty) \qquad \text{p. s.}$$

Rappelons aussi que L désigne la $(\mathscr{F}, \mathbb{P})$-martingale c. à. d.-l. à. g., uniformément intégrable telle que L_∞ soit la densité de Radon-Nikodym strictement positive de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$.

Dans le premier paragraphe, on montre comment la propriété (K) permet de construire l'opérateur de $(\mathscr{G}, \mathbb{P})$-projection optionnelle. L'opérateur de $(\mathscr{G}, \mathbb{Q})$-projection optionnelle s'en déduit au paragraphe 2 grâce à l'hypothèse (H1). Dans le paragraphe 3 sont rassemblés des résultats plus généraux liés à la propriété (K) et qui sont démontrés dans [*11*] et [*3*]. Enfin dans le dernier paragraphe, nous rappelons un théorème de projection d'intégrales stochastiques dû à Brémaud-Yor [*3*] qui sera utile pour établir les équations du filtrage du chapitre suivant.

1. **Filtrage et propriété (K).**

Soit $(\Omega, \mathscr{G}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace vérifiant la propriété (K). On commence par définir un opérateur K d'espérance conditionnelle qui, à tout processus $\mathscr{F}_\infty \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+}$-mesurable, associe un processus $\mathscr{G}_\infty \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+}$-mesurable unique. (Ici $\mathscr{B}_{\mathbb{R}_+}$ désigne la tribu borélienne sur $\mathbb{R}_+$). On établira facilement des propriétés de régularité sur cet opérateur car il ne met en jeu qu'une seule tribu $\mathscr{G}_\infty$.

PROPOSITION 2-1. — *Soit* $(\Omega, \mathscr{F}_\infty, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité et* $\mathscr{G}_\infty$ *une sous-tribu de* $\mathscr{F}_\infty$. *A tout processus borné* X, $\mathscr{F}_\infty \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+}$*-mesurable, est* *associé un processus unique, noté* K(X), *borné et* $\mathcal{G}_\infty \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}$*-mesurable, qui vérifie :*

$$K(X)_T . \mathbb{1}\{T < \infty\} = E_{\mathbb{P}}(X_T . \mathbb{1}\{T < \infty\} / \mathcal{G}_\infty)$$

pour toute variable aléatoire, T, *positive et* $\mathcal{G}_\infty$*-mesurable. De plus, si* X *admet des limites à gauche (l. à. g.),* K(X) *est aussi l. à. g. et* $K(X_-) = K(X)_-$. *Si* X *est c. à. d.-l. à. g.,* K(X) *est aussi c. à. d.-l. à. g.*

Démonstration. — L'unicité et les propriétés de régularité de K(X) résultent de théorèmes généraux sur la projection optionnelle de processus (cf. [*4*] et [*5*]). Si on définit la filtration $\mathcal{G}'$ par $\mathcal{G}'_t = \mathcal{G}_\infty$ pour tout t, la tribu $\mathcal{G}'$-optionnelle est identique à la tribu $\mathcal{G}_\infty \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}$ et alors K(X) est la projection $\mathcal{G}'$-optionnelle de X.

Il reste à calculer $K(X)_-$ pour X l. à. g. : pour toute suite (T_n) de v. a. croissant strictement vers une v. a. quelconque T, on a :

$$K(X)_{-T} = \lim_{n\to\infty} K(X)_{T_n} = \lim_{n\to\infty} E(X_{T_n} \mid \mathcal{G}_\infty) = E(\lim_{n\to\infty} X_{T_n} \mid \mathcal{G}_\infty) = K(X_-)_T$$

La propriété (K) entraîne que K est aussi l'opérateur de $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-projection optionnelle :

PROPOSITION 2-2. — *Soit* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace possédant la propriété* (K) *et soit* K *l'opérateur défini à la proposition 2-1. Alors* K(X) *est la* $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$*-projection optionnelle de tout processus borné* X, $\mathcal{F}$*-optionnel : i. e.* $^{1\mathbb{P}}X = K(X)$.

Démonstration. — Soit X un processus borné c. à. d.-l. à. g., alors K(X), qui est $\mathcal{G}_\infty \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}$-mesurable et c. à. d.-l. à. g. est, d'après la propriété (K), $\mathcal{G}$-adapté, donc $\mathcal{G}$-optionnel. La relation de définition de K vérifiée pour des $\mathcal{G}$-t. a. entraîne que $K(X) = {}^{1\mathbb{P}}X$ si X borné c. à. d.-l. à. g.

La propriété s'étend facilement aux $\mathcal{F}$-optionnels par classe monotone du fait de la continuité pour les limites croissante et uniforme des opérateurs K et projection $\mathcal{G}$-optionnelle.

Les deux propositions précédentes concernent des espaces Ω très généraux, mais il est souvent possible dans la pratique, de faire des hypothèses de régularité plus fortes sur Ω : c'est le cas en particulier si Ω est l'espace canonique associé à des processus possédant des trajectoires régulières (c. à. d.-l. à. g. par exemple cf. [*4*]).

La proposition suivante montre qu'alors l'opérateur de projection optionnelle peut être représenté par un noyau markovien.

PROPOSITION 2-3. — *Soit* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace possédant la propriété* (K) *et tel que* Ω *soit un espace topologique lusinien muni de sa tribu borélienne* $\mathcal{F}_\infty$. *Il existe alors un noyau markovien* k *de* $(\Omega, \mathcal{G}_\infty)$ *dans* $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ *qui, à tout processus* $\mathcal{F}$*-optionnel borné* X, *associe sa* $\mathcal{G}$*-projection optionnelle* $^{1\mathbb{P}}X$.

Démonstration. — Par un résultat classique sur l'espérance conditionnelle, le presque-noyau $U \to E_{\mathbb{P}}(U \mid \mathscr{G}_\infty)$ peut être régularisé (cf. Getoor [7] pour des résultats plus généraux). Soit donc k le noyau markovien de $(\Omega, \mathscr{G}_\infty)$ dans $(\Omega, \mathscr{F}_\infty)$ qui, à chaque v. a. X_t associe la v. a. $k(X_t) = E(X_t \mid \mathscr{G}_\infty)$. Par définition, on a :

$$k(X_t)(\omega) = \int_\Omega X_t(\omega')k(\omega, d\omega').$$

Il résulte du théorème de Fubini que si X est mesurable en (t, ω), $k(X_t)(\omega)$ l'est aussi. Par le théorème de Lebesgue, on montre que k transforme un processus c. à. d.-l. à. g. $\mathscr{F}$-adapté borné en un processus c. à. d.-l. à. g. $\mathscr{G}$-adapté borné.

Par unicité, les processus K(X) et k(X) coïncident pour X un processus c. à. d.-l. à. g. $\mathscr{F}$-adapté borné. Le résultat est étendu aux processus $\mathscr{F}$-optionnels bornés par classe monotone.

La construction d'une version régulière de l'opérateur de projection optionnelle n'est en général pas simple : on peut se reporter à la construction générale de Yor dans [*21*]. Le résultat précédent permet d'obtenir rapidement une telle version dans tous les problèmes de filtrage où (H1) est vérifiée.

2. **La formule de Kallianpur-Striebel.**

Cette formule donne explicitement la loi conditionnelle du processus que l'on veut filtrer i. e. le signal X, connaissant le processus d'observation Z, ou plus généralement la sous-filtration $\mathscr{G}$. Dans [*15*], Meyer a établi cette formule de façon rigoureuse, dans un modèle particulier de filtrage et au prix d'une régularisation un peu compliquée. On montre ici que l'hypothèse (H1), qui recouvre l'exemple de [*15*] permet d'établir facilement cette formule.

Nous allons tout d'abord préciser la structure de l'espace Ω : pour parler de la loi d'un processus, il est naturel de se placer sur un espace canonique assez régulier pour qu'on puisse aussi définir des lois conditionnelles. On supposera que Ω est un produit cartésien fini d'espaces de fonctions c. à. d.-l. à. g. de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans un espace polonais. Soit $\mathscr{F}$ la filtration engendrée par les processus coordonnées et $\mathscr{G}$ la filtration engendrée par un des processus Z. L'espace ainsi défini est un espace lusinien (cf. Dellacherie-Meyer [*4*], IV-19), il peut même être muni d'une topologie qui le rende polonais (cf. [*4*] et Maisonneuve [*14*]) et $\mathscr{G}_\infty$ est une tribu borélienne séparable. Ce modèle, relativement général, sert à préciser l'hypothèse faite sur Ω dans la proposition suivante.

PROPOSITION 2-4. — *Soit* (Ω, $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$, $\mathbb{P}$ *et* $\mathbb{Q}$) *vérifiant l'hypothèse* (H1) *avec* $L_t = d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$. *Soit* Ω *un espace polonais et* $\mathcal{G}$ *la filtration borélienne engendrée par le processus* $\mathcal{F}$*-optionnel* Z. *La* ($\mathcal{G}$, $\mathbb{Q}$)*-projection optionnelle d'un processus borné,* $\mathcal{F}$*-optionnel,* X, *est obtenue par un noyau markovien* $k_t^{\mathbb{Q}}$, *de* ($\Omega \times \mathbb{R}_+$, $\mathcal{O}(\mathcal{G})$) *dans* ($\Omega \times \mathbb{R}_+$, $\mathcal{O}(\mathcal{F})$) *dont l'expression est donnée par la formule de Kallianpur-Striebel :*

$$^{1\mathbb{Q}}X_t(\omega) = \int_\Omega X_t(\omega')k_t^{\mathbb{Q}}(\omega, d\omega') = \frac{\displaystyle\int_\Omega X_t(\omega')L_t(\omega')k(\omega, d\omega')}{\displaystyle\int_\Omega L_t(\omega')k(\omega, d\omega')}$$

avec k le noyau markovien défini en 2-3. De plus $k_t^{\mathbb{Q}}(\omega, d\omega')$ *est, pour presque tout* ω, *une mesure sur* Ω *portée par l'ensemble*

$$S_\omega^t = \{\, \omega' \in \Omega \ \textit{tel que}\ Z_s(\omega') = Z_s(\omega) \quad \forall s \leqslant t \,\}$$

Démonstration. — On étend de façon évidente à tout processus X uniformément intégrable $\mathcal{F}$-optionnel, l'égalité $^{1\mathbb{P}}X = k(X)$. Cela permet de définir la ($\mathcal{G}$, $\mathbb{Q}$)-projection optionnelle de X borné, $^{1\mathbb{Q}}X$, par la formule :

$$^{1\mathbb{Q}}X = {}^{1\mathbb{P}}(LX)/{}^{1\mathbb{P}}L = k(LX)/k(L) = k^{\mathbb{Q}}(X)$$

Il reste à montrer que $k^{\mathbb{Q}}$ a bien une forme de « loi conditionnelle sachant l'observation Z », c'est-à-dire qu'il faut que la mesure $k_t^{\mathbb{Q}}(\omega, d\omega')$ définie par $k_t^{\mathbb{Q}}(X) = {}^{1\mathbb{Q}}X_t$ soit portée, pour presque tout ω, par l'ensemble où $\{ Z_s, s \leqslant t \}$ a une valeur donnée i. e. par l'ensemble S_ω^t défini par

$$S_\omega^t = \{\, \omega' \in \Omega \text{ tel que } Z_s(\omega') = Z_s(\omega) \quad \forall s \leqslant t \,\}.$$

Or cela résulte du fait que $k(\omega, d\omega')$ est porté sur Ω par l'ensemble $S_\omega = \{\, \omega' \in \Omega \text{ t. q. } Z.(\omega') = Z.(\omega) \,\}$ d'après Getoor [*7*].

Par exemple, dans le modèle de filtrage de Kunita [*12*] tel qu'il est présenté par Meyer dans [*15*], le noyau k peut être identifié à la loi *à priori* du signal X. Sur $[\![0, 1]\!]$, on se donne les processus X et Z sur leur espace canonique muni de la probabilité $\mathbb{P}$ produit tensoriel d'une probabilité m_x donnée (la loi du signal) et de la mesure de Wiener. La probabilité $\mathbb{Q}$ est définie par la martingale L solution de l'équation :

$$L_t = 1 + \int_0^t L_{s-}h(X_s)dZ_s$$

avec h, par exemple une fonction borélienne bornée. On montre alors, par application du théorème de Girsanov [*16*] que sous $\mathbb{Q}$, le processus Z s'écrit

$$Z_t = \int_0^t h(X_s)ds + W_t$$

avec W un brownien indépendant du processus X dont la loi marginale reste m_x. On vérifie alors directement que le noyau k peut s'identifier à la loi du signal m_x. On a :

$$k((x, z)\,;\,(dx, dz)) = m_x(dx) \otimes \varepsilon_z(dz)\,.$$

Cet exemple montre en particulier, que même dans un cas simple, la formule de Kallianpur-Striebel ne permet pas de déterminer effectivement ${}^{1\mathbb{Q}}X$. En effet, la probabilité m_x désigne la loi du signal dans son aspect global, c'est-à-dire relativement à toute une trajectoire possible $x = \{ x(t), t \in [0, T] \}$ du processus X. Or, si dans la pratique il est relativement aisé d'exprimer la loi d'une variable aléatoire X_t, il n'en est plus du tout de même pour la loi de toute une trajectoire. C'est pour cette raison que, dans le chapitre III, nous essaierons de caractériser ${}^{1\mathbb{Q}}X_t$ comme solution d'une équation différentielle qui, de plus, sera récursive.

Nous allons maintenant énoncer un certain nombre de résultats liés à la propriété (K) et qui seront utiles au chapitre III.

3. Théorie générale et propriété (K).

On a regroupé ici une série de résultats sur les projections et projections duales sur un espace $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ possédant la propriété (K). Ces résultats sont démontrés dans [*1*] et nous nous bornons ici à les énoncer.

PROPOSITION 2-5. — *Soit* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace possédant la propriété* (K). *Si* A *est un processus à variation intégrable* $\mathcal{F}$*-optionnel, alors sa* $\mathcal{G}$*-projection optionnelle coïncide avec sa* $\mathcal{G}$*-projection duale optionnelle : i. e.* ${}^{1\mathbb{P}}A = A^{1\mathbb{P}}$. *Si, de plus,* A *est* $\mathcal{F}$*-prévisible, ses* $\mathcal{G}$*-projections duales optionnelle et prévisible coïncident i. e.* $A^{3\mathbb{P}} = A^{1\mathbb{P}} = {}^{1\mathbb{P}}A$.

PROPOSITION 2-6. — *Soit* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace possédant la propriété* (K). *Si* X *est un processus* $\mathcal{F}$*-prévisible borné, alors ses* $\mathcal{G}$*-projections prévisible et optionnelle coïncident i. e.* ${}^{1\mathbb{P}}X = {}^{3\mathbb{P}}X$. *Si* X *est un processus* $\mathcal{G}$*-optionnel borné, alors ses* $\mathcal{G}$ *et* $\mathcal{F}$*-projections prévisibles coïncident.*

4. Un théorème de projection de Brémaud-Yor

Le résultat suivant, qui sera d'une grande utilité dans l'établissement de l'équation du filtrage, a été démontré par Brémaud-Yor dans [*3*] sous une hypothèse (appelée (H) dans l'article) équivalente à la propriété (K). Ce théorème permet de calculer la $\mathcal{G}$-projection optionnelle d'une $\mathcal{F}$-intégrale stochastique par rapport à une $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ martingale locale définie sur un espace $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ possédant la propriété (H) suivante :

(H) *Toute $\mathcal{G}$-martingale de carré intégrable est aussi une $\mathcal{F}$-martingale.*

PROPOSITION 2-7. — *Sur* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *donné, les propriétés* (H) *et* (K) *sont équivalentes.*

La démonstration est donnée dans [*3*] et nous ne la rappelons ici que pour bien fixer les idées :

1) (K) entraîne (H) : Soit N une $\mathcal{G}$-martingale de carré intégrable; la propriété (K) permet de vérifier directement que $E(N_\infty \mid \mathcal{F}_s) = E(N_\infty \mid \mathcal{G}_s)$, d'où (H) :

2) (H) entraîne (K) : Soit G une v. a. quelconque bornée de $\mathcal{G}_\infty$ et X un processus $\mathcal{F}$-adapté intégrable; d'après (H) :

$$E(G.E(X_t \mid \mathcal{G}_\infty)) = E(E(G \mid \mathcal{F}_t)X_t) = E(E(G \mid \mathcal{G}_t)X_t) = E(G.E(X_t \mid \mathcal{G}_t))$$

Le résultat fondamental de Brémaud-Yor sur la projection d'intégrale stochastique est énoncé dans la Proposition 7 de [*3*]; il est établi d'abord pour les intégrales de processus borné puis étendu par densité et isométrie à une classe plus large de processus. L'énoncé original est :

PROPOSITION 2-8 (extrait de Prop. 7 de [*3*]). — *Soit* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *possédant la propriété* (H). *Alors, si* M *est une $\mathcal{G}$-martingale locale et* H *un processus $\mathcal{F}$-prévisible borné, on a :* ${}^{1\mathbb{P}}(H.M) = {}^{3\mathbb{P}}H.M$.

Ce résultat est étendu dans la proposition suivante par la même méthode que dans [*3*] à une classe de processus légèrement différente de celle étudiée dans la proposition 7 de [*3*] :

PROPOSITION 2-9 (Brémaud-Yor). — *Soit* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace possédant la propriété* (K) (*ou* (H)). *Soit* M^c *une $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$-martingale locale continue de processus croissant $\mathcal{G}$-prévisible continu* $\beta = \langle M^c, M^c \rangle$; *soit* μ *une mesure aléatoire $\mathcal{G}$-optionnelle de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$-projection duale prévisible* ν. *Alors, pour toute $\mathcal{F}$-martingale $\mathcal{G}$-localement dans* $H^1(\mathcal{F}, \mathbb{P})$, *de la forme suivante :*

$$N = H.M^c + W * (\mu - \nu)$$

où H *est $\mathcal{G}$-localement dans* $\bar{H}^1(\mathcal{F}, \beta, \mathbb{P})$ *et* W *est $\mathcal{G}$-localement dans* $\bar{H}^1(\mathcal{F}, \nu, \mathbb{P})$ *on a :*

$${}^{1\mathbb{P}}N = \hat{H}^{\beta,\mathbb{P}}.M^c + \hat{W}^{\nu,\mathbb{P}} * (\mu - \nu)$$

avec les projections $\hat{H}$ *et* $\hat{W}$ *définies au* (I-3).

Démonstration. — On esquisse simplement la démonstration avec $N = H.M^c$ dans $H^1(\mathscr{F}, \mathbb{P})$. D'une part, l'intégration stochastique peut être considérée comme une isométrie de $\bar{H}^1(\mathscr{F}, \beta, \mathbb{P})$ dans $\bar{H}^1(\mathscr{F}, \mathbb{P})$ qui à H associe la martingale $H.M^c$. D'autre part, l'application $H \to {}^3H$ pour des processus bornés, est une contraction de $\bar{H}^1(\mathscr{F}, \beta, \mathbb{P})$ dans $\bar{H}^1(\mathscr{G}, \beta, \mathbb{P})$: cela résulte de la $\mathscr{G}$-prévisibilité du processus croissant continu β. Cette projection peut se prolonger à tout $\bar{H}^1(\mathscr{F}, \beta, \mathbb{P})$ par densité, avec $\hat{H}^{\beta,\mathbb{P}}$ construit au (I-3) et elle est compatible avec l'intégration stochastique relativement à M^c. Il est alors possible de prolonger le résultat de la proposition 2-8 par densité et isométrie.

III. ÉQUATION DU FILTRAGE

Il s'agit maintenant de déterminer, dans le cadre du modèle défini par l'hypothèse (H1), une équation différentielle stochastique admettant le processus ${}^{1\mathbb{Q}}X$ comme solution. Nous avons cherché à nous placer sous les hypothèses les plus générales permettant le calcul d'une équation du filtrage du type de celle obtenue par Fujisaki-Kallianpur-Kunita [*6*] dans le cas continu et Boel-Varaiya-Wong [*2*] dans le cas purement discontinu. La question de savoir si l'équation obtenue présente un intérêt pratique, c'est-à-dire admet une solution unique, ${}^{1\mathbb{Q}}X$, est un problème fort complexe qui ne sera pas abordé ici; signalons cependant qu'il en est ainsi dans les cas particuliers étudiés par Kunita [*12*] et Szpirglas [*19*].

L'équation vérifiée par ${}^{1\mathbb{Q}}X$ est obtenue en appliquant la formule de Ito au rapport

$$(3\text{-}1) \qquad {}^{1\mathbb{Q}}X = {}^{1\mathbb{P}}(LX)/{}^{1\mathbb{P}}L\,.$$

Au préalable, on aura exprimé les processus ${}^{1\mathbb{P}}(LX)$ et ${}^{1\mathbb{P}}L$ sous forme d'intégrales stochastiques. Pour cela, une hypothèse sur L et X (H2) permet de placer LX et L dans un espace de processus où une décomposition quasi-géométrique est possible : LX et L s'écrivent comme sommes d'intégrales stochastiques dépendant d'un processus Z donné par ailleurs (l'observation) et de processus orthogonaux à Z dans un sens précisé au paragraphe 2. La propriété (K) permettra de projeter l'intégrale stochastique en Z grâce au théorème 2-9. On verra que, pour obtenir l'équation du filtrage classique, il est nécessaire que les parties orthogonales à Z aient une $\mathscr{G}$-projection optionnelle nulle : c'est l'hypothèse (H3).

A notre connaissance, presque tous les modèles de filtrage étudiés jusqu'à présent se ramènent à l'une des deux situations particulières présentées au paragraphe 6 et pour lesquelles les hypothèses (H1) et (H4) sont réalisées. Dans le dernier paragraphe on montre comment on peut affaiblir l'hypothèse (H1) pour décrire le modèle de filtrage de Fujisaki-Kallianpur-Kunita [*6*] par exemple.

1. **Le processus d'observation**

Dans le modèle de filtrage étudié ici, on se donne pour processus d'observation, Z, une $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-semi-martingale quasi-continue à gauche. On suppose Z définie par ses $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-caractéristiques locales (α, β, ν) et la décomposition canonique suivante :

$$Z = Z_0 + x \mathbb{1}\{|x| > 1\} * \mu + \alpha + M^c + x \mathbb{1}\{|x| \leqslant 1\} * (\mu - \nu)$$

avec M^c la partie martingale continue de Z, de processus croissant $\mathcal{G}$-prévisible continu β, μ la mesure aléatoire des sauts de Z de projection duale prévisible ν et α le processus prévisible à variation finie associé à Z.

Grâce à la propriété (K), toute $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-semi-martingale est aussi une $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-semi-martingale de même décomposition canonique pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ et de caractéristiques locales $(\alpha, \beta, \nu^{\mathcal{F}})$. La mesure aléatoire $\nu^{\mathcal{F}}$ est la projection duale prévisible de μ relativement à $\mathcal{F}$, elle coïncide avec ν sur la tribu $\tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{G})$ et il n'y aura pas d'ambiguïté dans le résultat final si on les confond dans la même notation ν.

2. **Décomposition de semi-martingales**

Il s'agit ici de décomposer les processus LX et L en sommes d'intégrales stochastiques dépendant des caractéristiques de Z et de processus orthogonaux dans un sens à préciser. Pour pouvoir appliquer les résultats de la théorie de l'intégration stochastique, on se place dans des espaces de semi-martingales. On fait l'hypothèse provisoire suivante (H'2) qui sera remplacée plus loin par une hypothèse plus forte (H2).

(H'2) *Le processus* X *est une* $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-*semi-martingale quasi-continue à gauche, admettant la décomposition canonique* $X = N + A$ *où* N *est une* $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-*martingale locale telle que le processus* $\langle L, N \rangle$ *existe et* A *est un processus à variation finie prévisible.*

Une conséquence immédiate de cette hypothèse est que A est continu car prévisible et q. c. à. g. D'autre part, d'après le théorème de Girsanov [*16*], X est aussi une $(\mathcal{F}, \mathbb{Q})$-semi-martingale qui admet la décomposition

$$X = N' + A'$$

où N' est une $(\mathcal{F}, \mathbb{Q})$-martingale locale et $A' = A + \frac{1}{L_-} . \langle L, N \rangle$ est prévisible.

Avec ces hypothèses, le produit LX est une $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-semi-martingale qui s'exprime comme une somme d'intégrales stochastiques en L, N, A' grâce à la formule de Ito :

$$\text{(3-2)} \qquad LX = X_0 + L_-.A' + L_-.N + X_-.L + [L, N] - \langle L, N \rangle$$

Cette formule permet d'exprimer maintenant le produit LX à partir des décompositions des martingales locales L et N déduites du résultat suivant:

LEMME 3-1 (Jacod [*9*], Yen-Yoeurp [*20*]). — *Sur un espace de probabilité filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *soit* M^c *une* $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$*-martingale locale continue de processus croissant* β *et soit* μ *une mesure aléatoire quasi-continue à gauche de projection duale prévisible* ν*. Alors, toute martingale locale* Y *admet au moins une décomposition du type suivant :*

$$Y = Y_0 + f.M^c + g * (\mu - \nu) + h * \mu + Y^{\perp}$$

où :

. $Y^{\perp}$ *est une martingale locale qui n'a pas de saut commun avec* μ *et telle que* $[Y^{\perp}, M^c] = 0$.

. f *est un processus prévisible de* $\bar{H}^1_{loc}(\mathcal{F}, \beta, \mathbb{P})$*, version prévisible de la densité de Radon-Nikodym* $d\langle Y, M^c \rangle / d\beta$.

. g *est une fonction* $\tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{F})$*-mesurable de* $\mathcal{G}_{loc}(\mathcal{F}, \nu, \mathbb{P})$*, version de* $\mathbb{M}^{\mathbb{P}}_{\mu}(\Delta Y / \tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{F}))$.

. h *est une fonction* $\tilde{\mathcal{O}}(\mathcal{F})$*-mesurable de* $\mathcal{G}'_{loc}(\mathcal{F}, \mu, \mathbb{P})$ *telle que* $h \equiv \Delta Y - g$.

De plus, si Y *est une martingale de* H^1*, quasi-continue à gauche, la décomposition est unique et chaque terme est dans* H^1.

Ce lemme est déduit directement de la combinaison d'un résultat de Jacod [*9*] pour la décomposition relativement à μ et de Yen-Yoeurp [*20*] pour la décomposition relativement à M^c.

En appliquant ce lemme à M^c et μ associées à la semi-martingale Z et aux martingales locales L et N, on exprimera le processus LX comme somme d'intégrales stochastiques par rapport à A', M^c, $\mu - \nu$, μ et d'une martingale locale, notée $Z^{\perp}$, qui n'a pas de saut commun avec Z et telle que $\langle Z^{\perp}, M^c \rangle = 0$.

En effet, soient les décompositions de N et L suivantes

$$\text{(3-3)} \qquad N = N_0 + f.M^c + g * (\mu - \nu) + h * \mu + N^{\perp}$$

$$\text{(3-4)} \qquad L = 1 + L_-z.M^c + L_-W * (\mu - \nu) + L_-V * \mu + L^{\perp}$$

On remarque qu'on a écrit ici L_-z (resp. L_-W, L_-V) le processus intégré par M^c (resp. $\mu - \nu$, μ) car, dans la pratique, L est souvent donnée par une équation de C. Doléans-Dade où z, W, V ont une signification particulière.

Ici la transformation est licite de toute façon car $1/L_-$ existe et est localement borné quand L provient de la densité de Radon-Nikodym de deux probabilités équivalentes (cf. Meyer [*16*], chap. VI).

L'expression de LX est finalement :

$$
\begin{aligned}
(3\text{-}5)\quad LX = X_0 &+ L_-.A' + L_-(f + zX_-).M^c \\
&+ L_-[g + WX_- + Wg + M^{\mu}_{\mathbb{P}}(Vh/\tilde{\mathscr{P}}(\mathscr{F}))] * (\mu - \nu) \\
&+ L_-[h + VX_- + Wh + Vg + Vh - M^{\mu}_{\mathbb{P}}(Vh/\tilde{\mathscr{P}}(\mathscr{F}))] * \mu \\
&+ L_-.N^{\perp} + X_-.L^{\perp} + [L^{\perp}, N^{\perp}] - \langle L^{\perp}, N^{\perp} \rangle
\end{aligned}
$$

On écrira pour alléger (3-5) :

$$(3\text{-}6)\qquad LX = X_0 + L_-.A' + L_-F.M^c + L_-G * (\mu - \nu) + L_-H * \mu + Z^{\perp}$$

On sait seulement pour l'instant, que le processus L_-F (resp. L_-G, L_-H) est localement dans $\bar{H}^1(\mathscr{F}, \beta, \mathbb{P})$ (resp. $\mathscr{G}(\mathscr{F}, \nu, \mathbb{P})$, $\mathscr{G}'(\mathscr{F}, \mu, \mathbb{P})$) et que la martingale locale $Z^{\perp}$ n'a pas de saut commun avec Z et est telle que $\langle Z^{\perp}, M^c \rangle = 0$. C'est ce caractère local (relativement à $\mathscr{F}$) qui nous empêche de projeter les termes de la décomposition précédente. Le premier objectif du paragraphe suivant est la résolution de ce problème.

3. **L'équation simplifiée du filtrage**

Ainsi appelle-t-on l'expression de la $\mathscr{G}$-projection optionnelle du processus LX que l'on obtient en projetant séparément chacun des termes de la décomposition précédente. La première intégrale de la décomposition de LX, soit $L_-.A'$ sera projetée au terme d'un calcul particulier (proposition 3-3). Les deux intégrales suivantes, $L_-F.M^c$ et $L_-G * (\mu - \nu)$ seront projetées grâce au théorème de Brémaud-Yor (proposition 3-4). Pour cela, il suffit que ces intégrales soient des martingales de $H^1(\mathscr{F}, \mathbb{P})$ (proposition 3-2). Les deux derniers termes $L_-H * \mu$ et $Z^{\perp}$ nécessitant une hypothèse supplémentaire, (H3), sont laissés en suspens pour le moment.

L'hypothèse qui nous permettra de définir les projections des trois premières intégrales est la suivante :

(H2) *La martingale* L *est q. c. à. g. et dans l'espace* $H^p(\mathscr{F}, \mathbb{P})$ *pour* $1<p<\infty$ *et* X *est une semi-martingale q.c.à.g. de* $H^q(\mathscr{F}, \mathbb{P})$ *avec* $p^{-1}+q^{-1}=1$.

Les espaces de semi-martingales H^p, H^q, dont la définition figure au (I-3), ont été étudiés par Meyer dans [*17*]. L'intérêt de l'hypothèse (H2) réside dans le lemme suivant qui se déduit directement d'un résultat de Meyer [*17*].

LEMME 3-2. — *Sous l'hypothèse* (H2), *les processus* LX, [L, X], $L_-.X$ *et* $X_-.L$ *sont des semi-martingales de* $H^1(\mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Il est montré d'autre part dans [*17*], qu'une semi-martingale de $H^1(\mathscr{F}, \mathbb{P})$ peut se décomposer de façon unique en la somme d'une martingale de $H^1(\mathscr{F}, \mathbb{P})$ et d'un processus prévisible à variation intégrable. La démonstration repose sur des inégalités de norme entre semi-martingale montrées dans [*17*] et du type :

$$\| L_- . X \|_{H^1} \leqslant C_p \| L \|_{H^p} . \| X \|_{H^q} \qquad \text{pour} \quad 1 < p,\ q < \infty$$

Ce lemme montre en particulier que l'hypothèse (H'2) est satisfaite. Les lemmes 3-1 et 3-2 entraînent que la décomposition (3-6) de LX est dans $H^1(\mathscr{F}, \mathbb{P})$, c'est-à-dire que chaque martingale est dans H^1 ainsi que le terme à variation fini.

Nous allons maintenant calculer les $(\mathscr{G}, \mathbb{P})$-projections optionnelles de chacun des termes de cette décomposition :

$$\text{(3-6)} \qquad LX = X_0 + L_- . A' + L_- F . M^c + L_- G * (\mu - \nu) + L_- H * \mu + Z^\perp$$

LEMME 3-3. — *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2), *le processus à variation finie* A', *de la décomposition canonique de la* $(\mathscr{F}, \mathbb{Q})$*-semi-martingale* X, *admet une* $(\mathscr{G}, \mathbb{Q})$*-projection duale prévisible*, $A'^{3\mathbb{Q}}$ *et*

$$^{1\mathbb{P}}(L_- . A') = {}^{1\mathbb{P}}L_- . A'^{3\mathbb{Q}}$$

Démonstration. — Il est clair que $(L_- . A')^{3\mathbb{P}} = {}^{1\mathbb{P}}L_- . A'^{3\mathbb{Q}}$. Le résultat découle de la proposition 2-6, c'est-à-dire $^{1\mathbb{P}}(L_- . A') = (L_- . A')^{3\mathbb{P}}$ car $L_- . A'$ est $\mathscr{F}$-prévisible.

Pour les deux premières martingales de la décomposition de LX, on applique la proposition (2-9) de Brémaud-Yor.

LEMME 3-4. — *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H2), *les* $(\mathscr{G}, \mathbb{Q})$*-projections* $\hat{F}^{\beta,\mathbb{Q}}$ *et* $\hat{G}^{\nu,\mathbb{Q}}$ *sont bien définies et*

$$^{1\mathbb{P}}(L_- F . M^c) = ({}^{1\mathbb{P}}L_- \hat{F}^{\beta,\mathbb{Q}}) . M^c$$

$$^{1\mathbb{P}}(L_- G * (\mu - \nu)) = ({}^{1\mathbb{P}}L_- \hat{G}^{\nu,\mathbb{Q}}) * (\mu - \nu)$$

Démonstration. — Nous esquissons la démonstration pour $L_- F . M^c$, l'autre serait analogue. Comme $L_- F . M^c$ est une martingale de $H^1(\mathscr{F}, \mathbb{P})$ le processus $L_- F$ est dans $\bar{H}^1(\mathscr{F}, \beta, \mathbb{P})$. Donc, au moins localement, on a $E_{\mathbb{P}}(\, | L_- F | . \beta)_{\mathscr{T}} < \infty$ et on peut construire $\widehat{L_- F}^{\beta,\mathbb{P}}$ par recollement comme indiqué dans les préliminaires. On vérifie ensuite que $^{1\mathbb{P}}L_- \hat{F}^{\beta,\mathbb{Q}}$ est dans la même classe d'équivalence que $\widehat{L_- F}^{\beta,\mathbb{P}}$ ce qui découle de l'équivalence des mesures $d\beta d\mathbb{P}$ et $d\beta d\mathbb{Q}$ sur $\Omega \times \mathbb{R}^+$. D'après la proposition (2-9), on a

$$^{1\mathbb{P}}(L_- F . M^c) = \widehat{L_- F}^{\beta,\mathbb{P}} . M^c$$

d'où le résultat.

Il reste maintenant à exprimer les $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-projections optionnelles des martingales $L_{-}H * \mu$ et $Z^{\perp}$. Nous allons supposer :

(H3) *Les martingales* $L_{-}H * \mu$ *et* $Z^{\perp}$ *ont une* $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$*-projection optionnelle nulle.*

Cette hypothèse brutale est toujours réalisée dans les problèmes classiques de filtrage qui sont décrits par les deux situations présentées au paragraphe 6, on peut l'interpréter de la manière suivante : le processus $Z^{\perp}$ représente la partie du signal X que l'on peut qualifier de complètement inaccessible à un observateur Z : la nullité de la projection de $Z^{\perp}$ semble donc liée à la possibilité même de pouvoir estimer X à partir de Z. Par contre, la nullité de la projection de $H * \mu$ est exigée ici pour des raisons techniques. Il s'agit d'obtenir une équation récursive sous la probabilité $\mathbb{Q}$ qui ait un sens intrinsèque, c'est-à-dire en particulier, indépendante de la martingale L qui représente ici l'artifice mathématique. Ceci ne nous a pas semblé possible en conservant $H * \mu$, les difficultés venant du caractère optionnel de ce terme.

On rassemble les résultats de ce paragraphe dans le théorème suivant:

THÉORÈME 3-5. — *Équation simplifiée du filtrage. Sous les hypothèses* (H1), (H2), (H3), *le processus* LX *possède une* $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$*-projection optionnelle,* ${}^{1\mathbb{P}}(LX)$, *qui vérifie l'équation :*

$$
\begin{aligned}
(3\text{-}7) \quad {}^{1\mathbb{P}}(LX) = E(X_0/\mathcal{G}_0) &+ {}^{1\mathbb{P}}L_{-}\,.\,A'^{3\mathbb{Q}} + {}^{1\mathbb{P}}L_{-}(\widehat{f + zX_{-}})^{\beta,\mathbb{Q}}\,.\,M^c \\
&+ {}^{1\mathbb{P}}L_{-}[\widehat{g + Wg + WX_{-}}^{\nu,\mathbb{Q}} + (1 + \hat{W}^{\nu,\mathbb{Q}})\hat{h}^{\mu,\mathbb{Q}}] * (\mu - \nu)
\end{aligned}
$$

où A′ *est le processus à variation intégrable prévisible de la décomposition canonique de la* $(\mathcal{F}, \mathbb{Q})$*-semi-martingale* X *et où les processus* f, g, h, z, W, V, *sont définis par les formules* (3-3) *et* (3-4).

Ce théorème permet, en particulier, de calculer la $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-projection optionnelle de la martingale L. Il suffit de considérer le cas où X est identiquement 1, ce qui entraîne que les processus A′, f, g, h, sont nuls dans la formule (3-7).

On en déduit l'expression de ${}^{1\mathbb{P}}L$ qui vérifie une équation dite de C. Doléans-Dade [*16*].

$$
(3\text{-}8) \qquad {}^{1\mathbb{P}}L = 1 + {}^{1\mathbb{P}}L_{-}\,\hat{z}^{\beta,\mathbb{Q}}\,.\,M^c + {}^{1\mathbb{P}}L_{-}\hat{W}^{\nu,\mathbb{Q}} * (\mu - \nu)
$$

Le processus Z est d'après (III-1), une $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$-semi-martingale : comme les probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont équivalentes, c'est aussi (cf. Meyer [*16*]) une $(\mathcal{F}, \mathbb{Q})$-semi-martingale. Étant $\mathcal{G}$-adaptée, Z est aussi une $(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$-semi-martingale (cf. Stricker [*18*]) dont la décomposition canonique, au sens de Jacod (cf. III-1) est déduite des $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-caractéristiques locales de Z par le théorème de Girsanov généralisé de [*10*] appliqué au changement de probabilité défini par la formule (3-8).

Cette décomposition de Z relativement à $(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$ est ce qui est connu dans la pratique comme la représentation de l'observation Z en fonction de ses innovations, notées ici M'^c et ν'.

Soient $M'^c = M^c - \hat{z}^{\beta,\mathbb{Q}}.\beta$ et $M'^d = x \mathbb{1}\{|x| \leqslant 1\} * (\mu - \nu')$ avec $\nu' = (1 + \hat{W}^{\nu,\mathbb{Q}}).\nu$. Les processus M'^c et M'^d sont des $(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$-martingales locales et la semi-martingale Z s'écrit :

$$Z = Z_0 + x \mathbb{1}\{|x| > 1\} * \mu + \alpha' + M'^c + M'^d \tag{3-9}$$

avec α' un processus à variation finie $\mathcal{G}$-prévisible.

4. L'équation du filtrage

Pour établir l'équation vérifiée par le processus ${}^{1\mathbb{Q}}X$, on applique la formule de Ito au rapport ${}^{1\mathbb{P}}(LX)/{}^{1\mathbb{P}}L$ avec les expressions calculées au paragraphe précédent. Le calcul est long mais classique (cf. [*3*], [*2*]), il nécessite l'hypothèse technique suivante :

(H4) *Le processus* $(1 + \hat{W}^{\nu,\mathbb{Q}})^{-1}$ *est* $\mathcal{G}$*-localement borné.*

L'équation générale du filtrage est la suivante :

THÉORÈME 3-6. — *Équation du filtrage. Sous les hypothèses* (H1), (H2), (H3), (H4), *la* $(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$*-projection optionnelle* ${}^{1\mathbb{Q}}X$, *de la semi-martingale* X, *vérifie l'équation suivante :*

$$\begin{aligned} {}^{1\mathbb{Q}}X = {}^{1\mathbb{Q}}X_0 + A'^{3\mathbb{Q}} + [\widehat{(f + zX_-)}^{\beta,\mathbb{Q}} - {}^{1\mathbb{Q}}X_- \hat{z}^{\beta,\mathbb{Q}}].M'^c \\ + [(1 + \hat{W}^{\nu,\mathbb{Q}})^{-1}(\widehat{g + Wg + WX_-}^{\nu,\mathbb{Q}} - {}^{1\mathbb{Q}}X_- \hat{W}^{\nu,\mathbb{Q}}) + \hat{h}^{\mu,\mathbb{Q}}] * (\mu - \nu') \end{aligned} \tag{3-10}$$

avec M'^c *et* ν' *les innovations associées au processus d'observation* Z. *Les processus* f, g, h, z, V, W, *sont définis par les formules* (3-3) *et* (3-4) *et représentent les corrélations entre les processus* L *et* X, *et l'observation* Z.

Remarque. — Si X est dans $H^p(\mathcal{F}, \mathbb{P})$ et L dans $H^q(\mathcal{F}, \mathbb{P})$ conformément à (H2), alors on peut montrer que X est dans $H^1(\mathcal{F}, \mathbb{Q})$. Cela entraîne que l'équation du filtrage (3-10) est dans $H^1(\mathcal{F}, \mathbb{Q})$.

Démonstration du théorème. — Il s'agit d'appliquer la formule de Ito de changement de variable à la fonction $F(U, V) = U/V$ avec $U = {}^{1\mathbb{P}}(LX)$ et $V = {}^{1\mathbb{P}}(L)$ dont les expressions sont données par les formules (3-7) et (3-8). On fait le calcul sur le rapport U/V convenablement localisé par des $\mathcal{G}$-t. a. pour que ni V, ni le processus $(1 + \hat{W}^{\nu,\mathbb{Q}})$ ne soient trop proches de 0. La formule de Ito s'écrit :

$$\frac{U}{V} = \frac{U_0}{V_0} + \frac{1}{V_-}.U^c - \frac{U_-}{V_-^2}.V^c + \frac{U_-}{V_-^3}.\langle V^c, V^c\rangle - \frac{1}{V_-^2}.\langle U^c, V^c\rangle$$
$$+ \left(\frac{U_- + \Delta U}{V_- + \Delta V} - \frac{U_-}{V_-}\right) * (\mu - \nu) + \left(\frac{U_- + \Delta U}{V_- + \Delta V} - \frac{U_-}{V_-} - \frac{\Delta U}{V_-} + \frac{U_-}{V_-^2}\Delta V\right)$$
$$* \nu + \frac{1}{V_-}.B$$

où B est le processus à variation finie prévisible de la décomposition canonique de la semi-martingale ${}^{1\mathbb{P}}(LX)$.

En remplaçant chaque terme par son expression calculée, on trouve :

$$\frac{U}{V} = ({}^{1\mathbb{Q}}X)_0 + A'^{3\mathbb{Q}} + (\widehat{f + zX_-})^{\beta,\mathbb{Q}}.M'^c - \frac{U_-}{V} z^{\beta,\mathbb{Q}}.M'^c$$
$$+ \frac{1}{1 + \hat{W}^{\nu,\mathbb{Q}}}(\widehat{g + Wg + WX_- + Vh})^{\nu,\mathbb{Q}} * (\mu - \nu') - \frac{U_-}{V_-}\frac{\hat{W}^{\nu,\mathbb{Q}}}{1 + \hat{W}^{\nu,\mathbb{Q}}}$$
$$* (\mu - \nu').$$

Le théorème en résulte.

5. **Des modèles pratiques de filtrage**

Les paragraphes précédents ont montré que l'obtention d'une équation du filtrage explicite était subordonnée à deux hypothèses principales : l'hypothèse sur le modèle de filtrage (H1) qui permet d'expliciter les projections utiles et l'hypothèse (H3) qui supprime certains termes orthogonaux à l'observation. Les deux autres hypothèses (H2) et (H4) n'ont qu'un caractère technique permettant d'utiliser le formalisme de la théorie de l'intégration stochastique; en particulier, des conditions générales assurant que la martingale L est dans $H^p(\mathcal{F}, \mathbb{P})$ se trouvent dans l'article [*13*] de Lepingle-Mémin.

On présente ici deux situations très générales qui recouvrent, à notre connaissance, tous les modèles étudiés jusqu'ici, pour lesquels une équation du filtrage est dérivée. Dans ces deux situations, les hypothèses (H1) et (H3) sont satisfaites ; elles mettent en évidence le lien étroit unissant le processus « d'observation Z » et la filtration de « l'observation » $\mathcal{G}$ et qui n'apparaissait pas dans les calculs précédents.

Situation de représentation.

Il existe une probabilité $\mathbb{P}$ équivalente à $\mathbb{Q}$, sous laquelle Z est une

$\mathcal{F}$-semi-martingale q. c. à. g. $\mathcal{G}$-adaptée de même décomposition canonique pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ et de $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-caractéristiques locales (α, β, ν)

$$Z = Z_0 + x \mathbb{1}\{|x| > 1\} * \mu + \alpha + M^c + x \mathbb{1}\{|x| \leqslant 1\} * (\mu - \nu)$$

Toute $(\mathcal{G}, \mathbb{P})$-martingale bornée N se représente par

$$N = N_0 + f.M^c + g * (\mu - \nu)$$

avec

$$f \in \bar{H}^1_{\text{loc}}(\mathcal{G}, \beta, \mathbb{P}) \quad \text{et} \quad g \in \mathcal{G}_{\text{loc}}(\mathcal{G}, \nu, \mathbb{P}).$$

PROPOSITION 3-7. — *Les deux hypothèses ci-dessus et* (H2) *entraînent* (H1) *et* (H3).

Démonstration. — Les deux hypothèses précédentes entraînent la propriété (K) sous la probabilité $\mathbb{P}$. Montrons que (H3) est satisfaite. La martingale locale $^{1\mathbb{P}}(H * \mu)$ est orthogonale à toute $\mathcal{G}$-martingale bornée N, donc nulle. En effet, d'une part on a $^{1\mathbb{P}}(H * \mu) = {}^{1\mathbb{P}}H * \mu$; d'autre part $N = f.M^c + g * (\mu - \nu)$ et d'après la proposition (3-1), les espaces stables associés à μ, $(\mu - \nu)$ et M^c sont orthogonaux entre eux deux à deux. Le même raisonnement vaut pour $Z^\perp$.

Cette situation est celle qui rend compte du modèle étudié par Fujisaki-Kallianpur-Kunita [*6*] où la probabilité $\mathbb{P}$ fait de l'observation Z, un mouvement brownien et se déduit de la probabilité $\mathbb{Q}$ par application du théorème de Girsanov.

Situation d'indépendance.

Soient ξ et Z deux processus indépendants (signal et observation) sur un espace $(\Omega, A, \mathbb{P})$. On suppose que Z est défini comme au (III-1). On définit les filtrations $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ par :

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^\xi \vee \mathcal{F}_t^Z \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t^Z$$

où $\mathcal{F}^\xi$ (resp. $\mathcal{F}^Z$) est la filtration naturelle du processus ξ (resp. Z) convenablement complétée pour vérifier les conditions habituelles de [*4*]. La probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$ est telle que la martingale L est donnée comme unique solution de l'équation de C. Doléans-Dade.

$$L = 1 + L_{-}z.M^c + L_{-}W * (\mu - \nu)$$

où z et W sont des processus $\mathcal{F}$-prévisibles donnés tels que L soit bien une martingale (cf. [*13*]).

Soit X une $\mathcal{F}^\xi$-semi-martingale q. c. à. g.

PROPOSITION 3-8. — *Les hypothèses précédentes et* (H2) *entraînent* (H1) *et* (H3).

Démonstration. — L'indépendance des filtrations $\mathscr{F}^{\xi}$ et $\mathscr{F}^{Z}$ entraîne immédiatement que toute $\mathscr{F}^{\xi-}$ (resp. $\mathscr{F}^{Z-}$) martingale est une $\mathscr{F}$-martingale, d'où la propriété (K) sous $\mathbb{P}$. Comme X et Z sont $\mathbb{P}$-indépendants et quasi-continus à gauche, ils n'ont pas de saut commun et $[X, Z]$ est une martingale locale. On en déduit que, dans la décomposition de X (formule (3-3)), les processus f, g, h, sont nuls. D'après la forme de L, les processus V et $L^{\perp}$ de la formule (3-4) sont nuls. On vérifie directement ainsi que (H3) est satisfaite.

Cette situation, qui ne fait pas appel à un quelconque théorème de représentation, décrit le modèle de filtrage de Kunita [*7*]. L'équation du filtrage y prend alors la forme plus classique suivante :

THÉORÈME 3-9. — *Équation du filtrage. Dans la situation d'indépendance et sous les hypothèses* (H2) *et* (H4), *la* $(\mathscr{G}, \mathbb{Q})$*-projection optionnelle de la semi-martingale* X *vérifie l'équation :*

$$(3\text{-}11)\quad {}^{1\mathbb{Q}}X = {}^{1\mathbb{Q}}X_0 + A'^{3\mathbb{Q}} + (\widehat{zX_-^{\beta,\mathbb{Q}}} - {}^{1\mathbb{Q}}X_-\hat{z}^{\beta,\mathbb{Q}}).M'^c + (1 + \hat{W}^{\nu,\mathbb{Q}})^{-1}(\widehat{WX_-^{\nu,\mathbb{Q}}} - {}^{1\mathbb{Q}}X_-\hat{W}^{\nu,\mathbb{Q}})(\mu - \nu')$$

avec les mêmes définitions qu'au théorème (3-7).

6. Application au cas markovien

On donne, à titre d'exemple, les deux types d'équations du filtrage qui résultent de ce modèle général appliqué au cas où le signal est markovien. On suppose que le processus à filtrer X est de la forme $X_t = b(\xi_t)$ sur l'espace $(\Omega, \mathscr{G}, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$ avec ξ un $(\mathscr{F}, \mathbb{Q})$-processus de Markov fellérien, à valeurs dans un espace polonais S, de semi-groupe (P_t) et de générateur infinitésimal $\mathscr{A}$ sur le domaine $\mathscr{D}(\mathscr{A})$.

A un processus de Markov, on peut associer deux familles de martingales auxquelles correspondent deux types d'équations du filtrage, que l'on appellera ici le type « équation de Kunita » (cf. [*12*]) et le type « équation de Fujisaki-Kallianpur-Kunita » (cf. [*6*]).

a) *L'équation du type Kunita.*

Soit b une fonction borélienne bornée sur S. Le processus $(M_s^t, s \in \mathbb{R}^+)$ défini par

$$M_s^t = \text{version c. à. d. de } E[b(\xi_t)/\mathscr{F}_s] = \begin{cases} P_{t-s}b(\xi_s) & \text{si} \quad s \leqslant t \\ b(\xi_t) & \text{si} \quad s \geqslant t \end{cases}$$

est une martingale quasi-continue à gauche (car ξ est fellerien). On obtient l'équation du filtrage :

$$
\begin{aligned}
\text{(3-12)}\quad \mathrm{E}[b(\xi_t)/\mathscr{G}_t] = {} & \mathrm{E}[\mathrm{P}_t b(\xi_0)/\mathscr{G}_0] \\
& + \int_0^t [\widehat{f_s^b + z_s \mathrm{P}_{t-s} b(\xi_s)_-}] - \hat{z}_s \mathrm{E}[\mathrm{P}_{t-s} b(\xi_s)/\mathscr{G}_{s-}] d\mathrm{M}_s'^c \\
& + \int_0^t \int_\mathrm{E} \left[\frac{1}{1+\widehat{\mathrm{W}}} (\widehat{g_s^b + \mathrm{W}_s g_s^b + \mathrm{W}_s \mathrm{P}_{t-s} b(\xi_s)_-^\nu} \right. \\
& \left. - \widehat{\mathrm{W}}_s^\nu \mathrm{E}(\mathrm{P}_{t-s} b(\xi_s)/\mathscr{G}_s)_-) + \hat{h}^\mu \right] d(\mu - \nu')
\end{aligned}
$$

b) *L'équation du type Fusijaki-Kallianpur-Kunita.*

Soit b appartenant au domaine $\mathscr{D}(\mathrm{A})$ et bornée. Alors, le processus

$$
b(\xi_t) - b(\xi_0) - \int_0^t \mathscr{A} b(\xi_s) ds
$$

est une $(\mathscr{F}, \mathbb{Q})$-martingale quasi-continue à gauche. On en déduit que $b(\xi_t)$ est une $(\mathscr{F}, \mathbb{P})$-semi-martingale $\mathscr{G}$-localement dans $\mathrm{H}^2(\mathscr{F}, \mathbb{P})$. L'équation du filtrage est :

$$
\begin{aligned}
\text{(3-13)}\quad & \mathrm{E}[b(\xi_t)/\mathscr{G}_t] = \mathrm{E}[b(\xi_0)/\mathscr{G}_0] + \int_0^t ds \mathrm{E}[\mathscr{A} b(\xi_s)/\mathscr{G}_s] \\
& + \int_0^t [\widehat{f_s^b + z_s b(\xi_s)}_- - z_s \mathrm{E}(b(\xi_s)/\mathscr{G}_s)_-] d\mathrm{M}_s'^c \\
& + \int_0^t \int_\mathrm{E} \left[\frac{1}{1+\widehat{\mathrm{W}}} (\widehat{g_s^b + \mathrm{W}_s g_s^b + \mathrm{W}_s b(\xi_{s-})} - \widehat{\mathrm{W}}_s \mathrm{E}(b(\xi_s)/\mathscr{G}_s)_-) + \hat{h}^\mu \right] d(\mu - \nu')
\end{aligned}
$$

7. **Une extension importante**

L'hypothèse (H1) qui impose l'équivalence des probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ permet d'établir rigoureusement et simplement une équation du filtrage, mais elle est assez restrictive dans la pratique. Dans ce paragraphe, on s'attachera plus particulièrement au modèle étudié par Fujisaki-Kallianpur-Kunita [*6*] où les hypothèses faites permettent seulement de supposer que la probabilité $\mathbb{Q}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$.

On montre, à partir du résultat de Yoeurp [*22*] (théorème 2-7, p. 461) sur une version généralisée du théorème de Girsanov, que le problème de [*6*] peut se définir dans le cadre d'un modèle où l'hypothèse (H11) plus générale que (H1) est vérifiée :

(H11) *Sur l'espace* $(\Omega, \mathscr{G}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *possédant la propriété* (K), *sont définies une probabilité* $\mathbb{Q}$ *et une surmartingale positive* L, *vérifiant la propriété* *suivante : « Il existe une suite de* $\mathcal{F}$*-t. a.* (T_n) *qui croît strictement vers le t. a.* T, $\mathbb{P}$*-p. s. et vers* $+\infty$, $\mathbb{Q}$*-p. s. et pour laquelle les probabilités* $\mathbb{P}$ *et* $\mathbb{Q}$ *restreintes à la tribu* $\mathcal{F}_{T_n}$ *sont équivalentes de densité* L_{T_n}.

On notera que les filtrations $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ sont définies relativement à la probabilité $\mathbb{P}$, c'est-à-dire que $\mathcal{G}_0$ contient tous les $\mathbb{P}$-négligeables, mais pas nécessairement tous les $\mathbb{Q}$-négligeables. On définit la probabilité $\mathbb{Q}^n$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$, coïncidant avec $\mathbb{Q}$ sur $\mathcal{F}_{T_n}$, par la relation :

$$\mathbb{Q}^n(A) = E_{\mathbb{P}}[L_{T_n} . 1_A] \qquad \text{pour tout A de } \mathcal{F}_\infty$$

Il est clair que l'hypothèse (H11) entraîne l'hypothèse (H1) pour le système $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{Q}^n)$.

On fait une hypothèse analogue à (H2) sur les processus Z, X, L, conforme au modèle de [*6*].

(H12) Z *est une* $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$*-martingale continue.* L *est une martingale locale q. c. à. g. telle que* L^{T_n} *est dans* $H^p(\mathcal{F}, \mathbb{P})$ *;* X *est une semi-martingale q. c. à. g. telle que* X^{T_n} *est dans* $H^q(\mathcal{F}, \mathbb{P})$ *avec* (T_n) *la suite de t. a. définie en* (H11).

On notera X^n le processus X arrêté à l'instant T_n. Les processus z^n, f^n, sont définis à partir des formules (3-3) et (3-4) sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ par :

$$X = A + X_0 + f.Z + X^\perp$$
$$L = 1 + L_- z.Z + L^\perp$$

et on pose $f^n = f\,\mathbb{1}\,[\![0, T_n]\!]$, $z^n = z\,\mathbb{1}\,[\![0, T_n]\!]$.

L'équation du filtrage relative à la $(\mathcal{F}, \mathbb{Q}^n)$-semi-martingale X^n est obtenue par le théorème (3-7) appliqué au modèle $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{Q}^n)$. Cette équation demeurant dans $\mathcal{F}_{T_n}$, elle a le même sens relativement à la probabilité $\mathbb{Q}$. On obtient donc :

$$\text{(3-14)} \quad {}^{1\mathbb{Q}}(X^n) = {}^{1\mathbb{Q}}(X^n)_0 + (A'^n)^{3\mathbb{Q}} + \left[(\widehat{f^n + z^n X^n_-})^{\mathbb{Q}} - {}^{1\mathbb{Q}}X^n_- \hat{z}^{n\mathbb{Q}}\right].(Z - \hat{z}^{n\mathbb{Q}}.\beta)$$

Par construction, le processus X^n (resp. z^n, f^n) converge simplement vers le processus X (resp. z, f) $\mathbb{Q}$-presque partout. Pour pouvoir passer à la limite dans l'équation du filtrage, des hypothèses supplémentaires sur X, z, f, sont nécessaires.

(H15) X *est une semi-martingale de* $H^{p'}(\mathbb{Q})$ $(1 < p' < \infty)$.
z *et* f *sont dans* $\bar{H}^{q'}(\mathcal{F}, \beta, \mathbb{Q}) \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1\right)$.

THÉORÈME 3-10. — *Sous les hypothèses* (H11), (H12), (H3), (H4), (H15), *la* $(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$*-projection optionnelle de la semi-martingale* X *vérifie l'équation suivante :*

$$(3\text{-}15) \quad {}^{1\mathbb{Q}}X = {}^{1\mathbb{Q}}(X)_0 + A'^{3\mathbb{Q}} + [\widehat{(f + zX_-)}^{\mathbb{Q}} - {}^{1\mathbb{Q}}X_-\hat{z}^{\mathbb{Q}}].(Z - \hat{z}^{\mathbb{Q}}.\beta)$$

Démonstration. — Il s'agit de passer à la limite dans l'équation (3-14) grâce à l'hypothèse (H15). On montre, à partir de (H15) que les processus $\widehat{Xz}^{\mathbb{Q}}$ et ${}^{1\mathbb{Q}}X_-\hat{z}^{\mathbb{Q}}$ existent et sont dans $\bar{H}^1(\mathcal{G}, \beta, \mathbb{Q})$. Cela entraîne en particulier que le processus défini par le membre de droite de (3-15) est dans $H^1(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$. D'autre part, l'équation (3-14) a lieu dans $H^1(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$ d'après la remarque suivant le théorème (3-7). Ces considérations permettent de passer à la limite dans $H^1(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$ sur l'équation (3-14).

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] A. BAUD, *Thèse de 3e cycle.* Université Paris VIe, 27 mai 1977.

[*2*] R. BOEL, P. VARAIYA, E. WONG, Martingales of jump processes. *Siam J. Control.*, vol. **13**, n° 5, 1975.

[*3*] P. BREMAUD, M. YOR, *Changes of filtration and of probability measures* (à paraître).

[*4*] C. DELLACHERIE, P. A. MEYER, *Probabilité et potentiel.* Hermann, 1975.

[*5*] C. DELLACHERIE, *Capacités et processus stochastiques.* Springer Verlag, 1972.

[*6*] M. FUJISAKI, G. KALLIANPUR, H. KUNITA, Stochastic differential equations for the non linear filtering problem. *Osaka J. Math.*, t. **9**, 1972, p. 19-40.

[*7*] R. K. GETOOR, *On the construction of kernels. Sem. IX.* Université de Strasbourg, n° 465, Springer Verlag, 1975.

[*8*] J. JACOD, Un théorème de représentation sur les martingales discontinues. *Z. Wahr. V. Geb.*, t. **34**, 1976, p. 225-2254.

[*9*] J. JACOD, *Sur la construction des intégrales stochastiques et les sous-espaces stables de martingales. Sem. XI.* Université de Strasbourg, n° 581. Springer Verlag, 1977.

[*10*] J. JACOD, J. MEMIN, Caractéristiques locales et conditions de continuité absolue pour les semi-martingales. *Z. Wahr. V. Geb.*, t. **35**, 1976, p. 1-37.

[*11*] G. KALLIANPUR, C. STRIEBEL, Estimation of stochastic systems. *Ann. Math. Stat.*, t. **39**, 1968, p. 785-801.

[*12*] H. KUNITA, Asymptotic behavior of the non linear filtering errors of Markov processes. *J. of Multiv. Analysis*, vol. **1**, n° 4, december 1971.

[*13*] D. LEPINGLE, J. MEMIN, Sur l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles. *Z. Wahr. V. Geb.*, t. **42**, 1978, p. 175-203.

[*14*] B. MAISONNEUVE, *Topologie du type Skorokhod. Sém. VI.* Université de Strasbourg, n° 258, Springer Verlag, 1972.

[*15*] P. A. MEYER, *Sur un problème de filtration. Sém. VII,* Université de Strasbourg, n° 321, Springer Verlag, 1973.

[*16*] P. A. MEYER, *Cours sur les intégrales stochastiques. Sém. X.* Université de Strasbourg, n° 511, Springer Verlag, 1976.

[*17*] P. A. MEYER, *Inégalités de normes pour les intégrales stochastiques* (à paraître).

[*18*] C. STRICKER, Quasi-martingales, martingales locales, sur-martingales et filtration naturelle. *Z. Wahr. V. Geb.*, t. **39**, 1977, p. 55-63.

[*19*] J. SZPIRGLAS, Sur l'équivalence d'équations différentielles stochastiques à valeurs mesures intervenant dans le filtrage markovien non linéaire. *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. **XIV**, n° 1, 1978.

[*20*] K. A. YEN, C. YOEURP, *Représentation des martingales comme intégrales stochastiques de processus optionnels. Sém. X.* Université de Strasbourg, n° 511, Springer Verlag, 1976.

[*21*] M. YOR, *Sur les théories du filtrage et de la prédiction. Sém.* XI. Université de Strasbourg, n° 581, Springer Verlag, 1977.

[*22*] C. YOEURP, *Décomposition des martingales locales et formules exponentielles. Sém.* X. Université de Strasbourg, n° 511, Springer Verlag, 1976.

[*23*] M. ZAKAI, On the optimal filtering of diffusion processes. *Z. Wahr. V. Geb.*, t. **11**, 1969, p. 230-249.

(Manuscrit reçu le 5 mars 1978)