ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J.-C. LOOTGIETER

Sur la répartition des suites de Kakutani (II)

Annales de l'I. H. P., section B, tome 14, nº 3 (1978), p. 279-302
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1978__14_3_279_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XIV, n° 3, 1978, p. 279-302.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Sur la répartition des suites de Kakutani (II)

par

J.-C. LOOTGIETER (*)
20, rue du Commandant René Mouchotte, G. 201,
75014 Paris, France

SOMMAIRE. — Cet article est la suite d'un article antérieur [9] : nous démontrons essentiellement que toute suite de Kakutani associée à une loi de base possédant une composante absolument continue non nulle est équi-répartie.

SUMMARY. — This paper is the continuation of a precedent paper [9]: it is proved that every Kakutani's sequence based on a law possessing a non-zero absoluty component is uniformly distributed.

INTRODUCTION

Rappelons (cf. [9]) qu'étant donnée une loi de probabilité μ sur l'intervalle [0, 1] la suite de Kakutani associée est définie par : X_1 est choisi suivant la loi μ, X_2 est choisi dans l'intervalle de longueur maximale (situé le plus à gauche) déterminé par la subdivision 0, X_1, 1 de l'intervalle [0, 1] suivant une loi homothétique de μ, ..., X_{n+1} est choisi dans l'intervalle de longueur maximale (situé le plus à gauche) déterminé par la subdivision de l'intervalle [0, 1] qu'induisent les points 0, X_1, X_2, ..., X_n, 1 suivant une loi homothétique de μ, etc.

(*) *Université Paris VI.* Laboratoire de Calcul des Probabilités, Tour 56. 4, Place Jussieu. *75230 Paris Cedex 05.*

Dans [9] et [11] a été indépendamment prouvé que si la loi de base μ est la mesure de Lebesgue sur [0, 1] la suite de Kakutani $\{ X_n, n \geq 1 \}$ est p. s. équi-répartie.

Dans la partie I de [9] une étude générale des suites de Kakutani a été amorcée : il y est démontré que l'espérance mathématique $\theta(x)$ et la variance $v(x)$ du rang aléatoire $\mathscr{T}(x)$ minimum de points de la suite $\{ X_n, n \geq 1 \}$ qui assure que la longueur maximale des intervalles déterminés par la subdivision de l'intervalle [0, 1] qu'induisent les points $0, X_1, X_2, \ldots, X_{\mathscr{T}(x)}, 1$ est strictement inférieure à $1/x$ (pour $0 \leq x < 1$ $\mathscr{T}(x) = 0$) sont solutions d'équations intégrales qui relèvent de la théorie classique du renouvellement telle qu'elle est exposée dans [3] ou [10].

Une étape commune à [9] et [11] pour établir l'équi-répartition p. s. de la suite de Kakutani $\{ X_n, n \geq 1 \}$, quand sa loi de base est la loi uniforme sur [0, 1], est que

$$(1.0) \qquad \lim_{x \uparrow +\infty} \frac{\mathscr{T}(x)}{x} = 2 \qquad \text{p. s.}.$$

Revenant au cas d'une loi de base μ quelconque ($\mu(0) + \mu(1) < 1$) une lecture attentive de [9] montre que s'il existait une constante $C > 0$ finie (dépendant de μ) telle que

$$(2.0) \qquad \lim_{x \uparrow +\infty} \frac{\mathscr{T}(x)}{x} = C \qquad \text{p. s.},$$

la suite de Kakutani associée $\{ X_n, n \geq 1 \}$ serait équi-répartie p. s..

Nous conjecturons en fait, qu'en dehors de cas exceptionnels (cf. assertion *ii*) de la proposition 1.I dans cet article), que la limite p. s. (2.0) a toujours lieu ; nous n'avons pu démontrer en général la limite p. s. (2.0) que dans le cas où la loi de base μ admet une composante absolument continue non nulle (le cas où μ est de la forme δ_α a été étudié dans [9]).

I. PRÉLIMINAIRES

§ 1. Dans toute la suite le cas où la loi de base μ est concentrée en les extrémités 0 et 1 de l'intervalle [0, 1] est écarté.

Comme dans [9] nous posons

$$\sigma = (1 - \mu(0) - \mu(1))^{-1},$$

$$\bar{\mu}(A) = \frac{1}{2}(\mu(A) + \mu(1 - A)) \qquad \text{pour tout borélien A de }]0, 1[,$$

$$m = \sigma \bar{\mu}.$$

Soit $\mu = \mu_a + \mu_s + \mu_d$ (resp. $\bar{\mu} = \bar{\mu}_a + \bar{\mu}_s + \bar{\mu}_d$) (resp. $m = m_a + m_s + m_d$) la décomposition de μ (resp. $\bar{\mu}$) (resp. m) en ses composantes absolument continue, purement singulière et discrète. Il est clair que, pour $i = a$, s ou d,

$$m_i = \sigma \bar{\mu}_i .$$

Quand $\| \bar{\mu}_a + \bar{\mu}_s \| > 0$, soit

$$m_{as} = \bar{\mu}_a + \bar{\mu}_s / \| \bar{\mu}_a + \bar{\mu}_s \|$$

la normalisée de $\bar{\mu}_a + \bar{\mu}_s$. La mesure discrète m_d peut visiblement être explicitée sous la forme

$$m_d = \frac{1}{2} \sum_{k \in S} p_k(\delta_{\alpha_k} + \delta_{1-\alpha_k}), \tag{1.1}$$

avec $p_k > 0$, $\sum_{k \in S} p_k \leq 1$, $0 < \alpha_k \leq \frac{1}{2}$, les α_k étant distincts, S étant dénombrable fini ou non.

Comme les probabilités m et m_{as} sont symétriques par rapport au point $\frac{1}{2}$, il va de soi que

$$\int_0^1 xm(dx) = \int_0^1 xm_{as}(dx) = \frac{1}{2} . \tag{2.1}$$

Soient G et G_{as} les fonctions de répartition respectives de m et m_{as} ; il est clair que $G_{as}(x)$ est continue selon x et que

$$G_{as}(1 - x) = 1 - G_{as}(x) . \tag{3.1}$$

Dans toute la suite G(x) sera prise *continue à gauche*, si bien que la fonction de répartition de la probabilité $\tilde{\eta}$, définie par

$$\tilde{\eta} = \text{image de } m \text{ par l'application } y \to -\operatorname{Log} y , \tag{4.1}$$

prise *continue à droite* a pour expression

$$\int_0^x \tilde{\eta}(dt) = 1 - G(e^{-x}) . \tag{5.1}$$

Enfin posons pour tout $\beta \geq 0$

$$\rho_\beta(dx) = 2(\exp - \beta x)\tilde{\eta}(dx) . \tag{6.1}$$

De (2.1) et (4.1) résulte visiblement que $\| \rho_\beta \| < 1$, $= 1$ ou > 1 suivant que $\beta > 1$, $= 1$ ou < 1.

§ 2. Compte tenu des notations introduites dans le § 1, la proposition 2.I de [9] assure que l'espérance mathématique $\theta(x)$ et la variance $v(x)$ du temps d'arrêt $\mathscr{T}(x)$ vérifient les équations intégrales

$$(7.1)\quad \begin{aligned} \theta(x) &= 2\int_0^1 \theta(xy)m(dy)+\sigma && \text{si} \quad x\geq 1, =0 \quad \text{si} \quad x<1,\\ v(x) &= 2\int_0^1 v(xy)m(dy)+(\sigma-1)+J_1(x) && \text{si} \quad x\geq 1, =0 \quad \text{si} \quad x<1, \end{aligned}$$

où

$$J_1(x)=\int_0^1 (\theta(x)-1-\theta(xy)-\theta(x(1-y)))^2 m(dy).$$

De la définition de la fonction aléatoire $\mathscr{T}$ (cf. [9]) résulte immédiatement que $\theta(x)$ et $v(x)$ sont, selon x, bornées sur tout intervalle fini de $\mathbb{R}_+$ et continues à droite.

Posons

$$(8.1)\qquad T_0(x) = \theta(e^x) \qquad \text{et} \qquad W_0(x) = v(e^x).$$

Compte tenu de (6.1) les équations intégrales (7.1) conduisent aux équations de convolution

$$(9.1)\quad \begin{aligned} T_0(x) &= T_0 * \rho_0(x)+\sigma && \text{si} \quad x\geq 0, =0 \quad \text{si} \quad x<0,\\ W_0(x) &= W_0 * \rho_0(x)+(\sigma-1)+J_1(e^x) && \text{si} \quad x\geq 0, =0 \quad \text{si} \quad x<0. \end{aligned}$$

Rappelons maintenant un résultat élémentaire. Considérons d'une manière générale l'équation de convolution

$$(10.1)\qquad Z(x) = Z * \omega(x) + z(x),$$

où ω est une mesure positive bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ et $z(x)$ une fonction mesurable complexe bornée sur tout intervalle fini de $\mathbb{R}_+$ et nulle pour $x < 0$, nous avons le lemme classique suivant (cf. [3]) :

LEMME 1.I. — *L'équation de convolution* (10.1) *admet une solution unique* $Z(x)$ *qui soit bornée sur tout intervalle fini de* $\mathbb{R}_+$ *et nulle pour* $x < 0$ *; elle est donnée par le produit de convolution*

$$Z(x) = U_\omega * z(x),$$

où $U_\omega = \sum_{n\geq 0} \omega^{*n}$.

Soit $Y_1(x)$ la fonction d'Heaviside égale à 1 pour $x \geq 1$ et à 0 pour $x < 1$.

Pour $\beta \geq 0$ et $0 \leq y \leq 1$ posons

$$F_y(x, \beta) = e^{-\frac{1}{2}\beta x}(\theta(e^x)y - \theta(e^x y)), \tag{11.1}$$

$$E_y(x) = \theta(e^x) - \theta(e^x y) - \theta(e^x(1 - y)) - Y_1(e^x). \tag{12.1}$$

Si ξ est une mesure bornée complexe sur [0, 1] nous posons

$$E_\xi(x) = \int_0^1 E_y(x)\xi(dy), \tag{13.1}$$

ce qui a un sens, car il est clair que, pour x fixé, $E_y(x)$ est bornée selon y.

Il est clair que la fonction $F_y(x, \beta)$ est, uniformément par rapport à $\beta \geq 0$ et $0 \leq y \leq 1$, bornée selon x sur tout intervalle fini de $\mathbb{R}_+$ et nulle pour $x < 0$; de même $E_\xi(x)$ est, pour ξ fixée, bornée selon x sur tout intervalle fini de $\mathbb{R}_+$ et nulle pour $x < 0$.

Posons

$$\begin{aligned} f_y(x, \beta) &= e^{-\frac{1}{2}\beta x}\sigma(Y_1(e^x)y - Y_1(e^x y)), \\ e_y(x) &= (\sigma - 1)Y_1(e^x) + 2(1 - G(e^{-x})) - \sigma(Y_1(e^x y) + Y_1(e^x(1 - y))), \\ e_\xi(x) &= \int_0^1 e_y(x)\xi(dy). \end{aligned} \tag{15.1}$$

Il est clair que

$$\begin{aligned} e_\xi(x) &= ((\sigma - 1)Y_1(e^x) + 2(1 - G(e^{-x}))) \int_0^1 \xi(dt) - \sigma\left(\int_{e^{-x}}^1 \xi(dy) + \int_0^{1-e^{-x}} \xi(dy)\right). \end{aligned} \tag{16.1}$$

Nous avons alors le lemme suivant :

LEMME 2.I. — $F_y(x, \beta)$ *et* $E_\xi(x)$ *sont respectivement les solutions uniques qui soient bornées sur tout intervalle fini de* $\mathbb{R}_+$ *et nulles pour* $x < 0$ *des équations de convolution*

$$Z(x) = Z * \rho_{\beta/2}(x) + f_y(x, \beta), \tag{1}$$

$$Z(x) = Z * \rho_0(x) + e_\xi(x). \tag{2}$$

Démonstration. — De (8.1) et de la première équation de convolution de (9.1) résulte que pour $y \geq 0$

$$\theta(e^x)y = \int_0^x \theta(e^{x-t})y\rho_0(dt) + \sigma Y_1(e^x)y,$$

$$\theta(e^x y) = \int_0^x \theta(e^{x-t} y)\rho_0(dt) + \sigma Y_1(e^x y),$$

d'où visiblement

$$F_y(x, 0) = \int_0^x F_y(x - t, 0)\rho_0(dt) + f_y(x, 0),$$

et de (6.1) déroule que

$$F_y(x, \beta) = \int_0^x F_y(x - t, \beta)\rho_{\beta/2}(dt + f_y(x, \beta).$$

Si de plus on impose $y \leq 1$ il est clair que $f_y(x, \beta) = 0$ pour $x < 0$ et de surcroît $f_y(x, \beta)$ est visiblement bornée selon x sur $\mathbb{R}_+$.

Par suite du lemme 1.I résulte que $F_y(x, \beta)$ satisfait les conditions du lemme 2.I.

De même il est facile de voir que

$$E_y(x) = E_y * \rho_0(x) + e_y(x),$$

puis intégrant les deux membres de l'égalité précédente selon y par rapport à la mesure bornée ξ on vérifie sans difficultés que $E_\xi(x)$ vérifie les conditions du lemme 2.I.

§ 3. Que dire des lois de base μ pour lesquelles $\bar{\mu}$ est portée par une progression géométrique de points de]0, 1[(ce qui est équivalent à dire que l'image η de $\bar{\mu}$ par l'application $y \to -\operatorname{Log} y$ est arithmétique)? Nous conjecturons comme réponse que le support de $\bar{\mu}$ consiste en deux points de la forme c^p et c^q avec p et q entiers ≥ 1, $0 < c < 1$ et $c^p + c^q = 1$; quelle que soit la réponse que l'on puisse donner, désignant en ce cas par γ le *pas* de la mesure η (γ est le plus grand réel > 0 tel que η soit portée par $\gamma.\mathbb{N}$), l'assertion *ii*) de la proposition suivante reste vraie :

PROPOSITION 1.I. — *Si l'on pose*

$$H(\mu) = -\int_0^1 x \operatorname{Log} x + (1 - x)\operatorname{Log}(1 - x)\mu(dx)$$

on a :

i) *Si $\bar{\mu}$ n'est pas portée par une progression géométrique*

$$\lim_{x\uparrow+\infty} \frac{\theta(x)}{x} = \frac{1}{H(\mu)}.$$

ii) *Si $\bar{\mu}$ est portée par une progression géométrique*

$$\liminf_{x\uparrow+\infty} \frac{\theta(x)}{x} = \frac{\gamma e^{-\gamma}}{1 - e^{-\gamma}}\,\frac{1}{H(\mu)}, \qquad \limsup_{x\uparrow+\infty} \frac{\theta(x)}{x} = \frac{\gamma}{1 - e^{-\gamma}}\,\frac{1}{H(\mu)}$$

et

$$\lim_{x\uparrow+\infty} \frac{\theta(xy)}{\theta(x)} = y$$

pourvu que $\bar{\mu}(y) > 0$ ou que $y = 0$ ou 1.

Démonstration. — Posons $T_1(x) = e^{-x}\theta(e^x)$; de la première équation de convolution de (9.1) résulte donc que :

$$T_1(x) = T_1 * \rho_1(x) + \sigma e^{-x}. \tag{17.1}$$

Assertion *i*). ρ_1 étant une probabilité non-arithmétique sur $\mathbb{R}_+^*$, une simple application d'un théorème limite de la théorie classique du renouvellement (cf. [3] ou proposition 3.I de [9]) à l'équation de convolution (17.1) conduit à

$$\lim_{x\uparrow+\infty} T_1(x) = \sigma \Big/ \int_0^{+\infty} y\rho_1(dy). \tag{18.1}$$

Revenant à la loi de base μ on vérifie facilement que

$$\int_0^{+\infty} y\rho_1(dy) = \sigma H(\mu).$$

De (18.1) résulte alors visiblement l'assertion *i*).

Assertion *ii*). La probabilité ρ_1 est donc arithmétique et a pour pas γ ; en ce cas (cf. [3] ou proposition 3.I de [9]) on a

$$\lim_{n\uparrow+\infty} T_1(x+n\gamma) = \gamma\sigma \frac{\displaystyle\sum_{k/x+k\gamma\geq 0} \exp-(x+k\gamma)}{\displaystyle\int_0^{+\infty} y\rho_1(dy)}. \tag{19.1}$$

A partir de (19.1) il est facile d'obtenir les évaluations de $\liminf\limits_{x\uparrow+\infty} \theta(x)/x$ et $\limsup\limits_{x\uparrow+\infty} \theta(x)/x$ de la proposition 1.I.

En répétant les techniques utilisées dans la démonstration de la proposition 2.III de [9] $\left(\text{cf. cas où } \bar{\mu} = \frac{1}{2}(\delta_\alpha + \delta_{1-\alpha}) \text{ avec } \operatorname{Log}(1-\alpha)/\operatorname{Log}\alpha \in \mathbb{Q}\right)$ on obtient sans difficultés que

$$\lim_{x\uparrow+\infty} \frac{\theta(xy)}{\theta(x)} = y \qquad \text{si} \quad \bar{\mu}(y) > 0.$$

Le cas où $y = 0$ ou 1 est trivial.

La proposition suivante donne les propriétés immédiates du comportement asymptotique de $v(x)$ quand $x \uparrow +\infty$.

PROPOSITION 2.I. — *On a :*

i) $v(x) = o(x^2)$ *quand* $x \uparrow +\infty$.

ii) *En dehors du cas où μ est de la forme $a\delta_\alpha + b\delta_{1-\alpha}$ pour lequel $v(x) \equiv 0$ selon x, on a* $\liminf\limits_{x\uparrow+\infty} v(x)/x > 0$.

Démonstration. — Les résultats de la proposition 2.I n'interviendront pas dans la suite; leur seul intérêt réside dans le fait qu'ils fournissent des *bornes asymptotiques* pour $v(x)$ quand $x \uparrow +\infty$ et qu'en particulier l'assertion *i)* assure que $\mathscr{C}(x)/x$ converge *en probabilité* vers $1/\mathrm{H}(\mu)$ quand $x \uparrow +\infty$ dans le cas où $\bar{\mu}$ n'est pas portée par une progression géométrique (cf. remarque 1.I qui suit). Nous nous contenterons de donner la démonstration de l'assertion *i)* et laissons au lecteur le soin de la démonstration de l'assertion *ii)*.

Posons $\mathrm{W}_2(x) = e^{-2x}v(e^x)$. De (6.1), (8.1) et de la seconde équation de convolution de (9.1) résulte que si l'on pose $w_2(x) = (\sigma - 1)e^{-2x} + e^{-2x}\mathrm{J}_1(e^x)$ pour $x \geq 0$, $= 0$ pour $x < 0$, on a

$$\mathrm{W}_2(x) = \mathrm{W}_2 * \rho_2(x) + w_2(x).$$

En s'appuyant sur la proposition 1.I et le théorème de convergence dominée de Lebesgue on vérifie facilement que :

$$\lim_{x \uparrow +\infty} w_2(x) = 0.$$

D'autre part la mesure positive ρ_2 a une variation totale $\| \rho_2 \| < 1$, si bien que la mesure

$$\mathrm{U}_{\rho_2} = \sum_{n \geq 0} \rho_2^{*n}$$

est *bornée*; du lemme 1.I résulte que $\mathrm{W}_2 = \mathrm{U}_{\rho_2} * w_2$ et par suite du théorème de convergence dominée de Lebesgue l'on déduit que $\lim\limits_{x \uparrow +\infty} \mathrm{W}_2(x) = 0$. D'où l'assertion *i)* en revenant à $v(x)$.

Remarque 1.I. — Se donnant $\varepsilon > 0$, l'assertion *i)* de la proposition 2.I et l'inégalité de Biénaymé impliquent

$$\mathrm{P}\left\{ \left| \frac{\mathscr{C}(x)}{x} - \frac{\theta(x)}{x} \right| > \varepsilon \right\} = o(1).$$

De l'assertion *i)* de la proposition 1.I résulte alors que si $\bar{\mu}$ n'est pas portée par une progression géométrique on a :

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \frac{\mathscr{C}(x)}{x} = \frac{1}{\mathrm{H}(\mu)} \quad \text{en } \textit{probabilité}. \tag{20.1}$$

Comme le montre l'étude du cas où μ est la mesure de Lebesgue sur [0, 1] (cf. [9]) (20.1) est insuffisant pour déduire l'équi-répartition p. s. de la suite de Kakutani $\{ \mathrm{X}_n, n \geq 1 \}$: dans la partie II qui suit nous allons obtenir, sous certaines hypothèses, une meilleure majoration asymptotique de $v(x)$ que celle fournie par l'assertion *i*) de la proposition 2.I, puis déduire dans la partie III la convergence p. s. dans (20.1) et par suite l'équi-répartition p. s. de la suite de Kakutani $\{ X_n, n \geq 1 \}$.

II. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA VARIANCE $v(x)$

Le but de cette partie est d'obtenir une meilleure borne asymptotique que celle donnée par l'assertion *i*) de la proposition 2.I. Le point de départ réside dans les équations de convolution (9.1).

§ 1. Dans le cas où $\mu_a + \mu_s \neq 0$ nous considérons l'espace de Hilbert $L^2(m_{as})$ des fonctions complexes de carré m_{as}-intégrables; rappelons que m_{as} est la normalisée de $\bar{\mu}_a + \bar{\mu}_s$ et que nous avions noté par G_{as} sa fonction de répartition. En s'appuyant sur le fait que $G_{as}(x)$ est continue selon x le lecteur démontrera facilement le lemme suivant :

LEMME 1.II. — *La suite* $\{ \exp 2i\pi n G_{as}, n \in \mathbb{Z} \}$ *est une base orthonormale de* $L^2(m_{as})$.

Considérons la transformée de Mellin de la probabilité m (rappelons que $m = \sigma\bar{\mu}$ et que m est portée par $]0, 1[$) définie par

$$(1.2) \qquad \mathcal{M}(z) = \int_0^1 y^z m(dy) \qquad \text{pour } z \text{ complexe, } \operatorname{Re}.z \geq 0,$$

soit en revenant à la loi de base μ, on a

$$2\mathcal{M}(z) = \sigma \int_{0+}^{1-} y^z + (1-y)^z \mu(dy).$$

Il est clair que $\mathcal{M}(z)$ est selon z continue dans le demi-plan $\operatorname{Re}.z \geq 0$ et analytique dans le demi-plan $\operatorname{Re}.z > 0$; il va de soi que $\mathcal{M}(z)$ coïncide avec la transformée de Fourier holomorphe de l'image $\tilde{\eta}$ de la probabilité m par l'application $y \to -\operatorname{Log} y$:

$$(2.2) \qquad \mathcal{M}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zx} \tilde{\eta}(dx).$$

L'équation

$$(3.2) \qquad 1 - 2\mathcal{M}(z) = 0$$

admet visiblement $z = 1$ comme racine *simple* et il est clair que

$$(4.2) \qquad 1 > 2|\mathcal{M}(z)| \qquad \text{pour } \operatorname{Re}.z > 1.$$

Dans le cas où la loi de base μ est discrète, m coïncide avec m_d, et suivant la notation (1.1) du § 1 de la partie I l'équation (3.2) prend la forme explicite

$$\sum_{k\in S} p_k(1 - \alpha_k^z - (1 - \alpha_k)^z) = 0 . \tag{5.2}$$

Le premier membre de l'équation (5.2) est visiblement une fonction analytique presque-périodique au sens de Bohr [2] dans le demi-plan $\text{Re}.z > 0$ et s'annule pour $z = 1$; par suite, compte tenu de (4.2), l'équation (5.2) admet une infinité de solutions dans toute bande $\beta < \text{Re}.z \leq 1$ avec $0 \leq \beta < 1$ (cf. Bohr [2] ou Jessen et Tornehave [4]).

Supposons que la loi de base μ soit discrète et portée par]0, 1[; on peut toujours construire une suite de probabilités $\{ \mu_n, n \geq 1 \}$ sur [0, 1] absolument continues convergeant étroitement vers μ. La suite des transformées de Mellin $\{ \mathcal{M}_n(z), n \geq 1 \}$ définies par

$$\mathcal{M}_n(z) = \int_0^1 y^z \bar{\mu}_n(dy)$$

converge alors uniformément sur toute partie bornée du demi-plan $\text{Re}.z \geq 0$ vers la transformée de Mellin

$$\mathcal{M}(z) = \int_0^1 y^z \bar{\mu}(dy).$$

Il est alors facile de voir que si l'on se donne un voisinage borné quelconque $V(z_0)$ d'une racine $z_0 \neq 1$ de l'équation

$$1 - 2\mathcal{M}(z) = 0 ,$$

pour n assez grand l'équation

$$1 - 2\mathcal{M}_n(z) = 0$$

admettra une racine dans $V(z_0)$: ceci est une conséquence immédiate du théorème de Rouché.

Des considérations précédentes résulte que si l'on se donne $\beta < 1$, arbitrairement proche de 1, on peut toujours trouver des lois de base μ absolument continues sur [0, 1] telles que l'équation (3.2) admette au moins une racine dans la bande $\beta < \text{Re}.z < 1$.

Suite à la proposition 2.I il est raisonnable de se demander s'il est possible que $v(x)$ soit $0(x^\beta)$ quand $x \uparrow +\infty$ pour un β, $1 \leq \beta < 2$; le théorème suivant donne une condition nécessaire que doit satisfaire la loi de base μ pour qu'il en soit ainsi sous l'hypothèse $\mu_a + \mu_s \neq 0$.

THÉORÈME 1.II. — *Supposons que* $\mu_a + \mu_s \neq 0$. *Alors l'assertion* i) *implique l'assertion* ii) :

i) $v(x) = 0(x^\beta)$ *quand* $x \uparrow +\infty$ *pour un* β *fixé,* $1 \leq \beta < 2$.

ii) *L'équation* $1 - 2\mathscr{M}(z) = 0$ *admet* $z = 1$ *comme unique solution dans le demi-plan* $\mathrm{Re}.z > \beta/2$.

Démonstration. — On a vu (cf. (9.1)) que $W_0(x) = v(e^x)$ satisfait l'équation de convolution.

$$W_0(x) = W_0 * \rho_0(x) + (\sigma - 1) + J_1(e^x) \quad \text{si} \quad x \geq 0, \ = 0 \quad \text{si} \quad x < 0 .$$

Introduisant la notation (12.1) du § 2 de la partie I on a

$$J_1(e^x) = \int_0^1 (E_y(x))^2 m(dy) .$$

Il est clair que :

$$J_1(e^x) \geq \| \bar{\mu}_a + \bar{\mu}_s \| \int_0^1 (E_y(x))^2 m_{as}(dy) .$$

Si l'assertion *i*) est réalisée il va de soi que

$$\int_0^1 (E_y(x))^2 m_{as}(dy) = 0 \,(\exp \beta x) . \tag{6.2}$$

Pour x fixé $E_y(x)$ est borné selon y donc appartient à $L^2(m_{as})$; du lemme 1.II résulte qu'au sens de la norme sur $L^2(m_{as})$ on a

$$E_y(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(x) \exp 2i\pi n G_{as}(y) ,$$

les coefficients de Fourier $C_n(x)$ étant donnés par

$$C_n(x) = \int_0^1 E_y(x) (\exp - 2i\pi n G_{as}(y)) m_{as}(dy) , \tag{7.2}$$

et l'égalité de Parseval donnant

$$\int_0^1 (E_y(x))^2 m_{as}(dy) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} | C_n(x) |^2 .$$

De (6.2) résulte alors que

$$C_n(x) = 0 \left(\exp \frac{1}{2} \beta x \right). \tag{8.2}$$

Introduisons les mesures bornées $\xi_n(dy) = (\exp - 2i\pi n G_{as}(y)) m_{as}(dy)$.

Compte tenu de la notation (13.1) on a

$$C_n(x) = E_{\xi_n}(x),$$

et les fonctions $e_{\xi_n}(x)$ définies par (16.1) prennent la forme particulière (rappelons que $G_{as}(1 - y) = 1 - G_{as}(y)$) après calculs :

$$e_{\xi_n}(x) = \begin{cases} (\sigma - 1)Y_1(e^x) + 2(1 - G(e^{-x}) - 2\sigma(1 - G_{as}(e^{-x}))) & \text{si} \quad n = 0, \\ \dfrac{\sigma}{\pi n} \sin 2\pi n G_{as}(e^{-x}) & \text{si} \quad n \neq 0. \end{cases}$$

Appliquant le lemme 2.I, pour $n \neq 0$, les coefficients de Fourier $C_n(x)$ vérifient les équations de convolution

$$(9.2) \quad C_n(x) = C_n * \rho_0(x) + \frac{\sigma}{\pi n} \sin 2\pi n G_{as}(e^{-x}) \qquad \text{si} \quad x \geq 0,\ 0 \text{ si } x < 0.$$

La relation (8.2) permet de prendre la transformée holomorphe de Fourier des deux membres des équations (9.2) pour $\mathrm{Re}.z > \beta/2$; après calculs on obtient

$$(10.2) \quad (1 - 2\mathscr{M}(z)) \int_0^{+\infty} e^{-zx} C_n(x) dx = \frac{\sigma}{\pi n} \int_0^1 x^{z-1} \sin 2\pi n G_{as}(x) dx.$$

Soit z_0, $\mathrm{Re}.z_0 > \beta/2$, tel que $1 - 2\mathscr{M}(z_0) = 0$; de (10.2) résulte que

$$(11.2) \quad \int_0^1 x^{z_0 - 1} \sin 2\pi n G_{as}(x) dx = 0 \qquad \text{quel que soit } n \in \mathbb{Z}.$$

Le théorème de Stone-Weierstrass implique alors que pour toute fonction continue réelle sur [0, 1] telle que $g(1 - x) = -g(x)$ on a

$$\int_0^1 x^{z_0 - 1} g(G_{as}(x)) dx = 0.$$

Mais comme $G_{as}(1 - x) = 1 - G_{as}(x)$, il vient que pour toute fonction continue réelle à support compact dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ on a

$$(12.2) \quad \int_0^{1/2} (x^{z_0 - 1} - (1 - x)^{z_0 - 1}) g(G_{as}(x)) dx = 0.$$

De (12.2) l'on déduit sans peine que $x^{z_0 - 1} - (1 - x)^{z_0 - 1} = 0$ m_{as}-p. s. selon x; la fonction $f(x) = x^{z_0 - 1} - (1 - x)^{z_0 - 1}$ s'annule donc sur une partie de [0, 1] ayant une puissance supérieure à celle du dénombrable; comme $f(x)$ admet visiblement un prolongement analytique dans la bande

$0 < \mathrm{Re}.z < 1$, $f(x)$ est nécessairement constante selon x, ce qui ne peut avoir lieu que si $z_0 = 1$.

La démonstration du théorème 1.II est donc achevée.

Remarque 1.II. — Dans le cas où la loi de base μ est discrète, ce qui revient à dire que $m = m_d$, nous obtenons que l'assertion *i*) de la proposition 1.II implique la condition $(\mathscr{C})$ suivante :

$(\mathscr{C})$ Toute solution z, comptée avec son ordre de multiplicité, de l'équation

$$\sum_{k \in S} p_k(1 - \alpha_k^z - (1 - \alpha_k)^z) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Re}.z > \beta/2$$

est solution du système

$$1 - \alpha_k^z - (1 - \alpha_k)^z = 0 \qquad \text{quel que soit } k \in S.$$

La condition $(\mathscr{C})$ est trivialement vérifiée quand l'ensemble d'indices S se réduit à un point : on se retrouve alors dans la situation où μ est de la forme $a\delta_\alpha + b\delta_{1-\alpha}$ et pour laquelle $v(x) \equiv 0$ selon x (cf. proposition 2.I); sinon nous n'avons pas pu trouver d'autres exemples réalisant la condition $(\mathscr{C})$ pour un $\beta < 2$ alors qu'il est très facile d'en construire pour lesquels la condition $(\mathscr{C})$ ne peut être réalisée pour aucun $\beta < 2$. Il semble que la condition $(\mathscr{C})$ soit impossible en général et que par suite, en dehors du cas $\mu = a\delta_\alpha + b\delta_{1-\alpha}$, pour une loi de base discrète μ on ne puisse avoir $v(x) = 0(x^\beta)$ pour un $\beta < 2$ (dépendant de μ). Nous n'avons pas pu éclaircir cette situation qui semble trancher avec celle où la loi de base μ admet une composante absolument continue non nulle (cf. corollaire 3.II).

Remarque 2.II. — Dans le théorème 1.II il semble difficile d'obtenir davantage que l'assertion *ii*) : ainsi, si l'on suppose que μ est absolument continue, du théorème de Riemann-Lebesgue et de l'assertion *ii*) l'on déduit sans peine que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{\substack{|z| \uparrow +\infty \\ \mathrm{Re}.z \geq (\varepsilon+\beta)/2}} |1 - 2\mathscr{M}(z)| > 0$$

et que par suite l'on déduira (cf. corollaire 2.II qui suit) $v(x) = 0(x^{\varepsilon+\beta})$.

§ 2. Nous allons maintenant donner une réciproque du théorème 1.II essentiellement pour les lois μ possédant une composante absolument continue μ_a non nulle.

Si Λ est une mesure bornée réelle sur $\mathbb{R}$, $\Lambda = \Lambda_a + \Lambda_s + \Lambda_d$ désigne la décomposition de Λ en ses composantes absolument continue, purement singulière et discrète ; $\| \Lambda_s \|$ désigne la variation totale de Λ_s, $\phi(it)$ et $\phi_d(it)$ les transformées de Fourier ($t \in \mathbb{R}$) de Λ et Λ_d

$$\phi(it) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\Lambda(dx), \qquad \phi_d(it) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\Lambda_d(dx).$$

Nous aurons besoin du théorème suivant de Wiener et Pitt [*12*] et de deux lemmes simples :

THÉORÈME 2.II. — *Si l'on a*

i) $$\inf_{t\in\mathbb{R}} |\phi(it)| > 0,$$

ii) $$\| \Lambda_s \| < \inf_{t\in\mathbb{R}} |\phi_d(it)|$$

alors $\phi^{-1}(it)$ *est la transformée de Fourier d'une mesure bornée* Λ^{-1}.

LEMME 2.II. — *Si* $\phi(it)$ *possède un prolongement continue dans le demi-plan complexe* $\mathrm{Re}.z \geq 0$ *borné et analytique dans* $\mathrm{Re}.z > 0$, *alors* $|\Lambda|(\mathbb{R}^*_-) = 0$ *(*$|\Lambda|$ *désigne la valeur absolue de* Λ*).*

Pour la démonstration de ce lemme se reporter à [*6*].

LEMME 3.II. — *Si* $\phi(it)$ *possède un prolongement* $\phi(z)$ *dans la bande* $0 \leq \mathrm{Re}.z \leq \varepsilon$ *borné, continu, analytique dans la bande* $0 < \mathrm{Re}.z < \varepsilon$ *et si* $\phi(it + \varepsilon)$ *est la transformée de Fourier d'une mesure bornée* Λ_ε *sur* $\mathbb{R}$, *alors* $(\exp - \varepsilon x)\Lambda(dx) = \Lambda_\varepsilon(dx)$; *en d'autres termes* Λ *intègre* $\exp - \varepsilon x$ *sur* $\mathbb{R}_-$.

La démonstration du lemme 3.II est basée sur la formule d'inversion de Fourier : nous laissons au lecteur le soin de la démonstration.

Considérons l'hypothèse $\mathscr{H}(\beta)$ définie comme suit :

$\mathscr{H}(\beta)$

a) $$0 \leq \beta < 2.$$

b) La seule solution dans le demi-plan complexe $\mathrm{Re}.z \geq \beta/2$ de l'équation

$$1 - 2\mathscr{M}(z) = 0$$

est $z = 1$.

c) $$\liminf_{\substack{|z| \uparrow +\infty \\ \mathrm{Re}.z \geq \beta/2}} |1 - 2\mathscr{M}(z)| > 0.$$

d) $$2\sigma \int_0^1 x^{\beta/2}\bar{\mu}_s(dx) < \inf_{t\in\mathbb{R}} \left| 1 - 2\sigma \int_0^1 x^{it+\beta/2}\bar{\mu}_d(dx) \right|.$$

LEMME 4.II. — *Si la loi de base* μ *admet une composante absolument continue* μ_a *non nulle il existe* $\beta_0 < 2$ *tel que pour tout* β, $\beta_0 \leq \beta < 2$, *l'hypothèse* $\mathscr{H}(\beta)$ *soit réalisée.*

Démonstration. — Condition *b*). Comme $m = \sigma(\bar{\mu}_a + \bar{\mu}_s + \bar{\mu}_d)$, l'équation $1 - 2\mathcal{M}(z) = 0$ prend la forme explicite

$$(13.2) \qquad 1 = 2\sigma \int_0^1 x^z \bar{\mu}_a(dx) + 2\sigma \int_0^1 x^z(\bar{\mu}_s + \bar{\mu}_d)(dx).$$

Supposons que l'équation (13.2) admette dans toute bande $\beta/2 \leq \mathrm{Re}.\, z < 1$, avec $0 \leq \beta < 2$, une solution ; la fonction $\mathcal{M}(z)$ étant analytique, il existerait une suite de complexes $\{ z_n, n \geq 1 \}$ solutions de l'équation (13.2) telle que $\lim_{n\uparrow+\infty} | z_n | = +\infty$ et $\lim_{n\uparrow+\infty} \mathrm{Re}.\, z_n = 1$. Le théorème de Riemann-Lebesgue implique

$$\lim_{n\uparrow+\infty} \int_0^1 x^{z_n} \bar{\mu}_a(dx) = 0,$$

et de (13.2) résulterait que

$$(14.2) \qquad 1 = \lim_{n\uparrow+\infty} 2\sigma \int_0^1 x^{z_n}(\bar{\mu}_s + \bar{\mu}_d)(dx).$$

Mais d'autre part, comme $\lim_{n\uparrow+\infty} \mathrm{Re}.\, z_n = 1$, il est clair que

$$\begin{aligned} \limsup_{n\uparrow+\infty} 2\sigma \left| \int_0^1 x^{z_n}(\bar{\mu}_s + \bar{\mu}_d)(dx) \right| &\leq 2\sigma \int_0^1 x(\bar{\mu}_s + \bar{\mu}_d)(dx) \\ &\leq 1 - 2\sigma \int_0^1 x\bar{\mu}_a(dx) \\ &< 1, \end{aligned}$$

si l'on suppose que $\bar{\mu}_a \neq 0$. D'où une contradiction avec (14.2).

Condition *c*). La négation pour tout $\beta < 2$ de la condition *c*) conduirait au même type de contradiction.

Condition *d*). Il est clair que

$$(15.2) \quad \lim_{\beta\uparrow 2} 2\sigma\left(\int_0^1 x^{\beta/2}\bar{\mu}_s(dx) + \int_0^1 x^{\beta/2}\bar{\mu}_d(dx) + \int_0^1 x\bar{\mu}_a(dx) \right) = 1.$$

Si l'on suppose que $\bar{\mu}_a \neq 0$ on peut trouver $\beta_0 < 2$ tel que

$$(16.2) \quad 2\sigma \int_0^1 x^{\beta/2}\bar{\mu}_s(dx) < 1 - 2\sigma \int_0^1 x^{\beta/2}\bar{\mu}_d(dx) \qquad \text{pour } \beta_0 \leq \beta \leq 2.$$

Mais il est clair que quel que soit $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (17.2) \quad 1 - 2\sigma \int_0^1 x^{\beta/2}\bar{\mu}_d(dx) & \\ \leq 1 - 2\sigma \left| \int_0^1 x^{it+\beta/2}\bar{\mu}_d(dx) \right| &\leqslant \left| 1 - 2\sigma \int_0^1 x^{it+\beta/2}\bar{\mu}_d(dx) \right| \end{aligned}$$

De (16.2) et (17.2) résulte donc que la condition *d*) est vérifiée dès que $\beta < 2$ est assez proche de 2.

La démonstration du lemme 4.II est donc achevée : n'a essentiellement joué que le fait $2\sigma \int_0^1 x\bar{\mu}(dx) = 1$. Remarquons d'autre part que la condition *b*) ne peut être réalisée pour aucun $\beta < 2$ quand μ est discrète.

THÉORÈME 3.II. — *Sous l'hypothèse* $\mathscr{H}(\beta)$ *on a :*

i) $$\sup_{\substack{x \geq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} x^{-\beta/2} \,|\, \theta(x)y - \theta(xy) \,|\, < +\infty$$

ii) *Pour* $\beta > 0$ $\lim_{x \uparrow +\infty} x^{-\beta/2}(\theta(x)y - \theta(xy)) = 0$ *quel que soit* y *fixé*, $0 \leq y \leq 1$.

iii) *Pour* $\beta = 0$ $\lim_{x \uparrow +\infty} (\theta(x)y - \theta(xy)) = \sigma(1 - y)$ *quel que soit* y *fixé*, $0 < y \leq 1$.

Démonstration. — Cas où $\beta > 0$. Dans le § 2 de la partie I nous avons introduit la fonction $F_y(x, \beta)$, $0 \leq y \leq 1$, définie par

$$F_y(x, \beta) = e^{-\frac{1}{2}\beta x}(\theta(e^x)y - \theta(e^x y))$$

et qui, suite au lemme 2.I, est la solution unique qui soit bornée sur tout intervalle finie de $\mathbb{R}_+$ et nulle pour $x < 0$ de l'équation de convolution

$$Z(x) = Z * \rho_{\beta/2}(x) + f_y(x, \beta), \tag{18.2}$$

avec $f_y(x, \beta) = e^{-\frac{1}{2}\beta x}\sigma(Y_1(e^x)y - Y_1(e^x y))$.

On pourrait, appliquant le lemme 1.I, obtenir une forme explicite de $F_y(x, \beta)$ en fonction de $f_y(x, \beta)$ et $U_{\rho_{\beta/2}}$; mais les théorèmes limites de la théorie classique du renouvellement se révéleraient inefficaces pour étudier la fonction $F_y(x, \beta)$: la raison essentielle étant que la mesure positive $\rho_{\beta/2}$ a une variation totale > 1. Nous allons voir qu'en fait l'on peut exprimer, selon x, $F_y(x, \beta)$ comme le produit de convolution de $f_y(x, \beta)$ et d'une mesure *bornée* sur $\mathbb{R}$.

Prenons *formellement* la transformée de Fourier holomorphe sur $\mathbb{R}$ des deux membres de l'équation (18.2); de simples calculs formels conduisent à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zx} Z(x) dx = \sigma \frac{y - y^{z+\beta/2}}{z + \beta/2} \frac{1}{1 - 2\mathscr{M}(z + \beta/2)}. \tag{19.2}$$

Il est clair que $f_y(x, \beta)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ selon x (nulle pour $x < 0$) et a pour transformée de Fourier

$$\int_0^{+\infty} e^{-itx} f_y(x, \beta) = \frac{y - y^{it+\beta/2}}{it + \beta/2}. \tag{20.2}$$

D'autre part $1 - 2\mathcal{M}(it + \beta/2)$ est la transformée de Fourier de la mesure bornée $\delta_0 - \rho_{\beta/2}$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-itx}(\delta_0 - \rho_{\beta/2})(dx) = 1 - 2\mathcal{M}(it + \beta/2)\,;$$

et $\rho_{\beta/2}$ est l'image de la mesure $2\sigma x^{\beta/2}\bar{\mu}(dx)$ par l'application $y \to -\operatorname{Log} y$.

Ceci dit, il est facile de voir que l'hypothèse $\mathcal{H}(\beta)$ assure que la mesure $\delta_0 - \rho_{\beta/2}$ satisfait les conditions du théorème 2.II de Wiener et Pitt; pour suite il existe une mesure Θ_β bornée sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\int_0^{+\infty} e^{-itx}\Theta_\beta(dx) = \frac{1}{1 - 2\mathcal{M}(it + \beta/2)}. \tag{21.2}$$

De (19.2), (20.2) et (21.2) résulte donc que la fonction $\bar{F}_y(x, \beta)$ définie par

$$\bar{F}_y(x, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_y(x - t)\Theta_\beta(dt) \tag{22.2}$$

est, selon x, une solution de l'équation de convolution (18.2) (l'ambiguïté d'une égalité p. p. par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est levée car en se reportant à (22.2) il est facile de voir que la continuité à droite de $f_y(x, \beta)$, selon x, implique celle de $\bar{F}_y(x, \beta)$). Compte tenu du fait que $z = 1 - \beta/2$ est un zéro simple de $1 - 2\mathcal{M}(z + \beta/2)$ et un zéro de $y - y^{z+\beta/2}$, l'hypothèse $\mathcal{H}(\beta)$ assure que

$$\psi(z) = \frac{y - y^{z+\beta/2}}{z + \beta/2} \cdot \frac{1}{1 - 2\mathcal{M}(z + \beta/2)}$$

constitue un prolongement analytique borné dans le demi-plan $\operatorname{Re}.z > 0$ de la transformée de Fourier

$$\psi(it) = \frac{y - y^{it+\beta/2}}{it + \beta/2} \frac{1}{1 - 2\mathcal{M}(it + \beta/2)}$$

de $\bar{F}_y(x, \beta)$. Du lemme 2.II et de la continuité à droite de $\bar{F}_y(x, \beta)$ selon x résulte que $\bar{F}_y(x, \beta) = 0$ pour $x < 0$. Le lemme 1.I assure sans difficultés que $\bar{F}_y(x, \beta) \equiv F_y(x, \beta)$. Suite à (22.2), des propriétés évidentes de $f_y(x, \beta)$ résulte les assertions *i*) et *ii*).

Cas où $\beta = 0$. Il est immédiat de voir que si l'hypothèse $\mathcal{H}(0)$ est vérifiée, l'hypothèse $\mathcal{H}(\varepsilon)$ l'est également pourvu que $\varepsilon > 0$ soit assez petit. De l'étude précédente du cas $\beta > 0$ résulte donc qu'il existe une mesure bornée Θ_ε sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\Theta_\varepsilon(dx) = \frac{1}{1 - 2\mathscr{M}(it + \varepsilon/2)}$$

$$\text{(23.2)} \qquad F_y(x, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_y(x - t, \varepsilon)\Theta_\varepsilon(dt).$$

D'autre part l'hypothèse $\mathscr{H}(0)$ assure là encore que la mesure $\delta_0 - \rho_0$ satisfait les conditions du théorème 2.II de Wiener et Pitt ; il existe donc une mesure bornée Θ_0 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\Theta_0(dx) = \frac{1}{1 - 2\mathscr{M}(it)}.$$

L'hypothèse $\mathscr{H}(0)$ assure que la transformée de Fourier $1/1 - 2\mathscr{M}(it)$ satisfait les conditions du lemme 3.II dans la bande $0 \leq \mathrm{Re}.z \leq \varepsilon/2$, si bien que

$$\text{(24.2)} \qquad \Theta_\varepsilon(dx) = e^{-\frac{1}{2}\varepsilon x}\Theta_0(dx).$$

Enfin il est clair que

$$\text{(25.2)} \qquad \begin{aligned} F_y(x, \varepsilon) &= e^{-\frac{1}{2}\varepsilon x}F_y(x, 0), \\ f_y(x, \varepsilon) &= e^{-\frac{1}{2}\varepsilon x}f_y(x, 0). \end{aligned}$$

De (23.2), (24.2) et (25.2) résulte alors que

$$\text{(26.2)} \qquad F_y(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_y(x - t, 0)\Theta_0(dx).$$

Notons que la fonction $f_y(x, 0) = \sigma(Y_1(e^x)y - Y_1(e^x y))$, pour $y > 0$, n'est pas intégrable selon x, mais est néanmoins bornée. A partir de (26.2) l'on vérifie immédiatement que l'assertion *i*) est vérifiée ; quant à l'assertion *iii*) elle découle sans difficultés de

$$\lim_{x \uparrow +\infty} f_y(x, 0) = \sigma(y - 1) \qquad \text{pour} \quad y > 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Theta_0(dx) = -1.$$

La démonstration du théorème 3.II est donc achevée.

Remarque 3.II. — Dans le cas où μ est la mesure de Lebesgue sur [0, 1] on voit facilement que $\mathscr{M}(z) = 1/(z + 1)$ et que l'hypothèse $\mathscr{H}(0)$ est vérifiée ; dans (9) nous avons vu que dans ce cas $\theta(x) = 2x - 1$ si $x \geq 1$, $= 0$ si $x < 1$. Il est immédiat de voir que, pour $0 \leq y \leq 1$, $\theta(x)y - \theta(xy) = 0$

si $x < 1$, $= 1 - y$ si $xy \geq 1$, $= 2xy - y$ si $1 \leq x < 1/y$. Pour ce cas particulier la mesure Θ_0 intervenant dans la démonstration du théorème 3. Il est de la forme $\delta_0 - 2e^x . 1_{]-\infty,0]}(x)(dx)$.

Le théorème 3.II a pour corollaire immédiat :

COROLLAIRE 1.II. — *Sous l'hypothèse $\mathscr{H}(\beta)$ on a :*

i) $$\sup_{\substack{x \geq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} x^{-\beta/2} \,|\, \theta(x) - \theta(xy) - \theta(x(1-y)) \,|\, < +\infty .$$

ii) *Pour* $\beta > 0$ $\lim\limits_{x \uparrow +\infty} x^{-\beta/2}(\theta(x) - \theta(xy) - \theta(x(1-y))) = 0$ *quel que soit y fixé,* $0 \leq y \leq 1$.

iii) *Pour* $\beta = 0$ $\lim\limits_{x \uparrow +\infty} (\theta(x) - \theta(xy) - \theta(x(1-y))) = \sigma$ *quel que soit y fixé,* $0 < y < 1$.

Le corollaire suivant donne le comportement asymptotique de la variance $v(x)$ sous l'hypothèse $\mathscr{H}(\beta)$:

COROLLAIRE 2.II. — *Sous l'hypothèse $\mathscr{H}(\beta)$ on a :*

i) *Pour* $0 \leq \beta < 1$ $\lim\limits_{x \uparrow +\infty} \dfrac{v(x)}{x}$ *existe dans* $\mathbb{R}_+^*$.

ii) *Pour* $\beta = 1$ $v(x) = 0(x \operatorname{Log} x)$ *quand* $x \uparrow +\infty$.

iii) *Pour* $1 < \beta < 2$ $v(x) = o(x^\beta)$ *quand* $x \uparrow +\infty$.

Démonstration. — Pour $a \geq 0$ posons

$$W_a(x) = e^{-ax} v(e^x)$$
$$w_a(x) = (\sigma - 1)e^{-ax} + e^{-ax} J_1(e^x) \qquad \text{si} \quad x \leq 0, = 0 \text{ si } x < 0 .$$

De la seconde équation de convolution de (9.1) du § 2 de la partie I résulte que

$$W_a(x) = W_a * \rho_a(x) + w_a(x) . \tag{27.2}$$

Sous l'hypothèse $\mathscr{H}(\beta)$, de l'expression intégrale de $J_1(e^x)$, soit

$$J_1(e^x) = \int_0^1 (\theta(e^x) - 1 - \theta(e^x y) - \theta(e^x(1-y)))^2 m(dy),$$

du corollaire 1.II et du théorème de convergence dominée de Lebesgue résulte visiblement que

$$w_\beta(x) \qquad \text{est bornée selon } x, \tag{28.2}$$

$$\lim_{x \uparrow +\infty} w_\beta(x) = 0 \text{ quand } \beta > 0 . \tag{29.2}$$

Comme $\theta(x)$ est continue à droite et croissante selon x il est également clair que

(30.2) $w_\beta(x)$ n'admet selon x que des discontinuités de première espèce.

Assertion *i*). Il est clair que $w_1(x) = e^{-(1-\beta)x} w_\beta(x)$; de (28.2) et (30.2) résulte que $w_\beta(x)$ est Riemann-intégrable sur tout intervalle fini de $\mathbb{R}_+$. Comme $\beta < 1$ et que l'on a (28.2) il est facile de déduire alors que $w_1(x)$ est *directement intégrable* sur $\mathbb{R}_+$ (cf. [3]). L'hypothèse $\mathscr{H}(\beta)$ implique que la probabilité ρ_1 est non-discrète, donc non-arithmétique; dès lors appliquant un théorème limite de la théorie classique du renouvellement (cf. [3] où proposition 3.I de [9]) à l'équation de convolution (27.2) pour $a = 1$ on obtient que

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \mathrm{W}_1(x) = \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} w_1(x)dx}{\displaystyle\int_0^{+\infty} x\rho_1(dx)}.$$

Comme

$$\int_0^{+\infty} x\rho_1(dx) = -\sigma \int_0^1 x \operatorname{Log} x + (1-x) \operatorname{Log}(1-x)\mu(dx),$$
$$< +\infty,$$

revenant à $v(x)$, l'on déduit l'assertion *i*).

Assertion *ii*). Du lemme 1.I appliqué à l'équation de convolution (27.2) pour $a = 1$ résulte que

(31.2) $$\mathrm{W}_1(x) = \mathrm{U}_{\rho_1} * w_1(x).$$

Mais l'on sait bien (cf. [3]), ρ_1 étant une probabilité, que

(32.2) $$\int_0^x \mathrm{U}_{\rho_1}(dy) = 0(x) \qquad \text{quand} \quad x \uparrow +\infty.$$

(28.2) étant alors réalisée pour $\beta = 1$, il est alors clair que

$$\mathrm{W}_1(x) = 0(x) \qquad \text{quand} \quad x \uparrow +\infty.$$

De là, revenant à $v(x)$, résulte visiblement l'assertion *ii*).

Assertion *iii*). Le lemme 1.I appliquée à l'équation de convolution (27.2) pour $a = \beta$ résulte que

(33.2) $$\mathrm{W}_\beta(x) = \mathrm{U}_{\rho_\beta} * w_\beta(x).$$

Mais, comme $\beta > 1$, la mesure positive ρ_β a une variation totale strictement inférieure à 1 (cf. § 1 de la partie I), si bien que U_{ρ_β} est une mesure *bornée* sur $\mathbb{R}_+$. De (28.2), (29.2), (33.3) et du théorème de convergence dominée de Lebesgue résulte immédiatement que

$$\mathrm{W}_\beta(x) = 0(x^\beta) \qquad \text{quand} \quad x \uparrow +\infty.$$

De là, revenant à $v(x)$, résulte visiblement l'assertion *iii*). La démonstration du corollaire 2.II est donc achevée.

Le lemme 4.II et le corollaire 2.II conduisent immédiatement au corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.II. — *Si la loi de base μ admet une composante absolument continue non nulle il existe un β, $\beta < 2$, tel que :*

$$v(x) = 0(x^{\beta}) \qquad \textit{quand} \quad x \uparrow +\infty .$$

Notons que d'après la proposition 2.I on a nécessairement $\beta \geq 1$.

Remarque 4.II. — Soit $\{ Y_n, n \geq 1 \}$ une suite indépendante de variables aléatoires réelles de loi commune ω; nous désignons par $\omega^{\cdot n}$ la loi du produit $Y_1 . Y_2 \ldots Y_n$. Donnons la définition :

DÉFINITION D.1. — *La loi de probabilité ω est dite géométriquement étalée s'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $\omega^{\cdot n_0}$ admette une composante absolument continue non nulle.*

Il est clair que si $\omega^{\cdot n_0}$ admet une composante absolument continue non nulle il est de même pour ω^n avec $n \geq n_0$. On sait bien (cf. Wintner [*13*]) qu'il existe des probabilités ω de composante absolument continue ω_a nulle et de composante purement singulière ω_s non nulle satisfaisant D.1.

Si la loi de base μ est géométriquement étalée on voit sans peine qu'il en est de même pour la probabilité $m = \sigma\bar{\mu}$; en adaptant comme il convient les arguments développés au cours des démonstrations du théorème 3.II, des corollaires 1.II et 2.II et en utilisant l'identité

$$1 - 2^n \int_0^1 y^z m^{\cdot n}(dy) = \left(1 - 2 \int_0^1 y^z m(dy)\right) \sum_{q=1}^{n-1} 2^q \int_0^1 y^z m^{\cdot q}(dy)$$

le lecteur observera sans peine que le corollaire 3.II reste conservé.

III. RÉPARTITION DES SUITES DE KAKUTANI QUAND LA LOI DE BASE μ ADMET UNE COMPOSANTE ABSOLUMENT CONTINUE NON NULLE

Rappelons (cf. proposition 1.I) que nous avions posé

$$H(\mu) = -\int_0^1 x \operatorname{Log} x + (1 - x) \operatorname{Log} (1 - x)\mu(dx) .$$

Le corollaire suivant donne le comportement asymptotique p. s. de la fonction aléatoire des temps d'arrêt $(\mathcal{T}(x))_{x\geq 0}$ quand la loi de base μ admet une composante absolument continue non nulle :

COROLLAIRE 1.III. — *Si la composante absolument continue μ_a de la loi de base μ est non nulle on a :*

$$\lim_{x\uparrow+\infty} \frac{\mathcal{T}(x)}{x} = \frac{1}{H(\mu)} \qquad p.\,s..$$

Démonstration. — Du corollaire 3.II résulte qu'il existe une constante C finie et un β, $1 \leq \beta < 2$ tel que $v(x) \leq Cx^{\beta}$. L'inégalité de Biénaymé conduit à

$$\text{(1.3)} \qquad P\left\{ \left| \frac{\mathcal{T}(n^p)}{n^p} - \frac{\theta(n^p)}{n^p} \right| \geq \varepsilon \right\} \leq \frac{C}{\varepsilon^2} \frac{1}{n^{p(2-\beta)}}$$

pour $\varepsilon > 0$ et $p \geq 0$. Fixons alors p tel que $p(2 - \beta) > 1$. Du lemme de Borel-Cantelli et de l'assertion *i*) de la proposition 1.I résulte immédiatement que quand n parcourt les entiers on a

$$\text{(2.3)} \qquad \lim_{n\uparrow+\infty} \frac{\mathcal{T}(n^p)}{n^p} = \frac{1}{H(\mu)} \qquad \text{p. s..}$$

A tout $x \geq 0$ associons l'entier n_x tel que

$$n_x^p \leq x < (n_x + 1)^p.$$

Comme la fonction aléatoire $(\mathcal{T}(x))_{x\geq 0}$ est *croissante* selon x il va de soi que

$$\text{(3.3)} \qquad \frac{n_x^p}{(n_x+1)^p} \cdot \frac{\mathcal{T}(n_x^p)}{n_x^p} \leq \frac{\mathcal{T}(x)}{x} \leq \frac{\mathcal{T}((n_x+1)^p)}{(n_x+1)^p} \frac{(n_x+1)^p}{n_x^p}$$

De (2.3) et (3.3) l'on déduit visiblement que

$$\lim_{x\uparrow+\infty} \frac{\mathcal{T}(x)}{x} = \frac{1}{H(\mu)} \qquad \text{p. s..}$$

La démonstration du corollaire 1.III est donc achevée. Le corollaire 1.III étend le corollaire 1.II de [9] concernant le cas d'une loi de base μ uniforme sur [0, 1].

Soit $N(q, I) = \sum_{n=1}^{n=q} 1_I(X_n)$ le nombre de points de la suite $\{ X_n, 1 \leq n \leq q \}$ qui tombent dans un intervalle fixé I de [0, 1]. λ désigne la mesure de Lebesgue sur [0, 1].

Nous avons le théorème de répartition suivant :

THÉORÈME 1.III. — *Si la loi de base μ admet une composante absolument continue μ_a non nulle on a :*

$$\lim_{q \uparrow +\infty} \frac{N(q, I)}{q} = \lambda(I).$$

En d'autres termes la suite $\{ X_n, n \geq 1 \}$ est p. s. équi-répartie.

Démonstration. — Elle s'appuie essentiellement sur le fait que la limite p. s. $1/H(\mu)$ du corollaire 1.III est une constante > 0; nous renvoyons le lecteur à [9] : les techniques utilisées dans la démonstration du théorème 1.II (resp. théorème 1.III) de [9] concernant l'équi-répartition de la suite $\{ X_n, n \geq 1 \}$ associée à une loi de base uniforme sur [0, 1] (resp. uniforme sur]0, 1[et chargeant les extrémités 0 et/ou 1) se transposent dans le cas présent intégralement.

Remarque I.III. — Si la loi de base μ est géométriquement étalée (cf. remarque 4.II) le corollaire 1.III et le théorème 1.III restent inchangés.

IV. CONCLUSION

Dans une large mesure cet article constitue une étude par des voies *détournées* de l'équation en loi :

$$\mathscr{T} \overset{\mathcal{L}}{=} \mathscr{T}^{(0,1)}(.X_1)+\mathscr{T}^{(1,1)}(.(1 - X_1))+1 \qquad \text{si} \quad x \geq 1, = 0 \text{ si } x < 1,$$

où $(\mathscr{T}^{(0,1)}, \mathscr{T}^{(1,1)})$ est un couple indépendant de copies de $\mathscr{T}$, lui-même indépendant de X_1 (cf. proposition 1.I de [9]), $\mathscr{T}(.y)$ désignant *pour* $y \geq 0$ la fonction aléatoire $(\mathscr{T}(xy))_{x \geq 0}$; c'est en se basant sur l'étude des comportements asymptotiques de l'espérance mathématique $\theta(x)$ et de la variance $v(x)$ de $\mathscr{T}(x)$ que nous avons pu déduire le comportement asymptotique p. s. de la fonction aléatoire $(\mathscr{T}(x))_{x \geq 0}$, du moins essentiellement dans le cas où la loi de base μ admet une composante absolument continue non nulle.

Mis à part le cas non-aléatoire où la loi de base μ est de la forme δ_α et qui a été traité dans [9] ainsi que quelques cas voisins qui s'y ramènent, le cas d'une loi de base μ discrète nous échappe : dans le cadre de nos techniques il eût suffit que la variance $v(x)$ soit $0(x^\beta)$ pour un $\beta < 2$ pour que l'on puisse déduire un résultat identique au corollaire 1.III (du moins dans le cas où $\bar{\mu}$ n'est pas portée par une progression géométrique) et par suite le théorème 1.III. Nous n'avons pas pu obtenir un tel résultat (cf.

remarque 1.II). Néanmoins nous conjecturons que si $\bar{\mu}$ n'est pas portée par une progression géométrique le corollaire 1.III et le théorème 1.III restent inchangés (cf. Addendum qui suit).

ADDENDUM. — Nous laissons au lecteur le soin de confronter certains aspects de cet article à l'article de R. BELLMAN et T. E. HARRIS « On age-dependent binary branching processes » (*Ann. of Math.*, t. **55**, 1952, p. 280-295). D'autre part l'utilisation des résultats de P. JAGERS dans « Convergence of general branching processes and functionals thereof » (*J. Appl. Prob.*, t. **11**, 1974, p. 471-478) conduit au corollaire 1.III et, par suite, au théorème 1.III pour une loi de base μ quelconque, $\bar{\mu}$ étant non portée par une progression géométrique; à ce propos on pourra se reporter à une Note de l'auteur (à paraître aux *C. R. Acad. Sci.*, Paris) « Processus généraux de branchements et procédure de Kakutani généralisée » qui donne une extension du théorème 1.III.

REMERCIEMENTS

Je remercie J. NEVEU et A. BRUNEL pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail ainsi que B. BRU et H. HEINICH pour les conversations fructueuses échangées avec eux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. L. ADLER and L. FLATTO, Uniform distribution of Kakutani's interval splitting procedure. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, t. **38**, 1977, p. 253-259.
[2] H. BOHR, *Almost Periodic Functions*. Chelsea, 1947.
[3] W. FELLER, *Introduction to Probability Theory and its Applications*. Vol. **II**. John Wiley and Sons.
[4] B. JESSEN and H. TORNEHAVE, Mean Motions and zeros of almost-periodic functions. *Acta Math.*, t. **77**, 1945, p. 137-259.
[5] S. KAKUTANI, *Lecture Notes*, Vol. **541**, Measure Theory, Proceedings Oberwolfach, 1975.
[6] T. KAWATA, *Fourier Analysis in Probability Theory*. Academic Press, 1972.
[7] J.-C. LOOTGIETER, Sur la répartition des suites de Kakutani. *C. R. Acad. Sci.*, Paris, t. **285**, septembre 1977, p. 403-406.
[8] J.-C. LOOTGIETER, Sur la répartition des suites de Kakutani (II). *C. R. Acad. Sci.*, Paris, t. **286**, mars 1978, p. 459-461.
[9] J.-C. LOOTGIETER, Sur la répartition des suites de Kakutani (I). *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. **XIII**, n° 4, 1977, p. 385-410.
[10] W. L. SMITH, Proceedings of the Royal Society of Edimbourg, 1945, p. 9-48.
[11] W. R. VAN ZWET, A proof of a conjecture of Kakutani, à paraître aux *Ann. of Probability*.
[12] N. WIENER and H. R. PITT, On absoluty convergent Fourier-Stieltjes transforms. *Duke Math. J.*, t. **4**, 1938, p. 420-436.
[13] A. WINTNER, *The Fourier Transforms of Probability Distributions*, Baltimore, 1947.

(Manuscrit reçu le 1er février 1978)