ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MICHEL VALADIER

Sur le plongement d'un champ mesurable d'espaces métriques dans un champ trivial

Annales de l'I. H. P., section B, tome 14, nº 2 (1978), p. 165-168

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1978__14_2_165_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XIV, n° 2, 1978, p. 165-168. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Sur le plongement d'un champ mesurable d'espaces métriques dans un champ trivial

par

Michel VALADIER

Université II, place Eugène-Bataillon, 30460 Montpellier Cedex

SUMMARY. — We use a metric space defined by Urysohn to prove an embedding theorem.

RÉSUMÉ. — Nous utilisons un espace métrique introduit par Urysohn pour démontrer un théorème de plongement.

1. INTRODUCTION

Rappelons ce qu'est un champ au sens de Delode-Arino-Penot [*3*] :

DÉFINITION. — *Un champ mesurable séparable d'espaces métriques est la donnée d'un espace mesurable* $(T, \mathscr{T})$, *d'une famille* $(E_t, d_t)_{t \in T}$ *d'espaces métriques (qu'on suppose disjoints, et* $E = \cup E_t$ *servira à désigner le champ) et d'une partie* X *de* ΠE_t *satisfaisant :*

(CM1) X *est stable par limite simple.*

(CM2) X *est stable par recollement mesurable.*

(CM3) $\forall x_1, x_2 \in X$, *la fonction* $t \mapsto d_t(x_1(t), x_2(t))$ *est mesurable.*

(CM4) $\exists X_0 \subset X$ *dénombrable tel que* $\forall t$, $\overline{X_0(t)} = E_t$.

On peut alors se poser la question suivante : existe-t-il un espace métrique séparable F et un graphe Γ dans T × F tel que E soit isomorphe (en un sens qui sera précisé ci-dessous) à Γ muni de l'ensemble de ses sections mesurables ?

Delode-Arino-Penot répondent positivement à cette question (prop. 1.19, page 22). Cependant l'espace F qu'ils prennent ne convient pas. En effet, c'est l'espace $c_0(\mathrm{I})$ (où I est l'ensemble des parties finies d'un ensemble dénombrable) défini de la façon suivante :

$f \in c_0(\mathrm{I})$ si f est une fonction réelle sur I telle que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \mathrm{Z} \in \mathrm{I}$ tel que $\forall \mathrm{W} \in \mathrm{I}$, $\mathrm{W} \supset \mathrm{Z}$, on ait $| f(\mathrm{W}) | < \varepsilon$.

La distance est définie par la norme

$$\| f \| = \sup_{\mathrm{Z} \in \mathrm{I}} | f(\mathrm{Z}) | .$$

Or il suffit de préciser I, en prenant l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, pour voir que $c_0(\mathrm{I})$ contient des f de norme égale à $+\infty$, par exemple $f(\mathrm{Z}) = \inf \{ n \mid n \in \mathrm{Z} \}$.

J'ai mis longtemps à trouver cette objection. J'ai pensé ensuite que l'espace plus classique $c_0(\mathbb{N})$ conviendrait, mais il n'en est rien : cela tient au fait qu'il n'est pas universel (au sens du § 2). Il se trouve que l'espace décrit par Urysohn en 1927 convient parfaitement.

L'intérêt du plongement est double : d'une part certains résultats deviennent des corollaires de résultats plus classiques (cf. la remarque 2.9 page 32 de [*3*]), d'autre part l'esprit est rassuré. Il faut dire que l'article [*3*] n'est pas trivialisé pour autant et que Delode [*2*] a défini les champs sous-liniens que l'on ne sait pas (pour l'instant) plonger dans un champ trivial.

Je remercie J. P. Penot pour ses observations sur la première mouture de ce texte.

2. ESPACES MÉTRIQUES UNIVERSELS

Fréchet [*4*] (cf. [*1*], p. 187) a montré que tout métrique séparable est isométrique à une partie de l'espace des suites bornées, qui est un Banach non séparable. Urysohn [*5*] a construit un espace métrique complet séparable U *universel* en ce sens que tout métrique séparable est isométrique à une partie de U. Banach [*1*] (théorème 10, p. 187) a montré que $\mathscr{C}([0, 1])$ et $\mathscr{C}(\mathrm{K})$, où K est le triadique de Cantor, sont universels. Mais l'espace d'Urysohn a l'avantage d'avoir la propriété suivante ([*5*], § 12, page 58).

Quels que soient $x_1, \ldots, x_s$ *appartenant à* U *et les nombres* $\geq 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ *vérifiant*

$$\forall i, j \leq s, \qquad | \alpha_i - \alpha_j | \leq d(x_i, x_j) \leq \alpha_i + \alpha_j$$

il existe x_{s+1} *appartenant à* U *tel que*

$$\forall i \leq s, \qquad d(x_{s+1}, x_i) = \alpha_i .$$

REMARQUE. — D'après le résultat de Banach, $\mathscr{C}([0, 1])$ contient une partie isométrique à U. Mais $\mathscr{C}([0, 1])$ n'a pas cette belle propriété : il suffit de prendre $s = 3$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 1$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$ pour voir qu'on ne peut pas trouver x_4.

Nous nous servirons de la technique d'Urysohn (pages 61, 62 notamment relations (27, k) (28, k)) pour définir x_{s+1} :

Il existe une partie dénombrable dense U_0 *dans* U *telle que, en supposant* $\alpha = \min_{i \leq s} \alpha_i > 0$ *et en posant*

$$(C_k) \begin{cases} \forall i \leq s, \quad | d(y_k, x_i) - \alpha_i | < \alpha 2^{-k} \\ d(y_k, y_{k-1}) < 3\alpha 2^{-k} (\textit{à ne considérer que pour } k \geq 2) \end{cases}$$

il existe y_1 *appartenant à* U_0 *satisfaisant* (C_1) *et si* $y_k \in U_0$ *satisfait* (C_k) *il existe* $y_{k+1} \in U_0$ *satisfaisant* (C_{k+1}). *De plus la suite* (y_k) *converge vers* x_{s+1} *tel que* $\forall i \leq s$, $d(x_{s+1}, x_i) = \alpha_i$.

3. THÉORÈME DE PLONGEMENT

THÉORÈME. — *Pour tout espace métrique universel* F, *le champ* E *est isomorphe à un sous-champ du champ trivial* T × F : *de facon précise, il existe* $h : E \to T \times F$ *tel que*

a) $\forall t$, $h|_{E_t}$ *est une isométrie de* E_t *sur une partie* $\Gamma(t)$ *de* $\{ t \} \times F$.

b) $\forall x \in \Pi E_t$, *on a* $x \in X \Leftrightarrow h \circ x$ *est mesurable (de* T *dans* T × F*)*.

Preuve. — Il suffit de la faire lorsque F est l'espace U d'Urysohn.

1) Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ les éléments de X_0. Soit $(u_p)_{p \geq 1}$ les éléments de U_0. On va construire par récurrence une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions mesurables de T dans U telles que

$$\forall i, j, \forall t, \qquad d_t(a_i(t), a_j(t)) = d(f_i(t), f_j(t)) .$$

On prend pour f_1 une fonction constante. Supposons obtenues $f_1, \dots, f_n$ telles que

$$\forall i, j \leq n, \forall t, \qquad d_t(a_i(t), a_j(t)) = d(f_i(t), f_j(t)) .$$

Posons $\alpha(t) = \min_{i \leq n} d_t(a_{n+1}(t), a_i(t))$. C'est une fonction mesurable.

Sur l'ensemble $T_0 = \{ t \mid \alpha(t) > 0 \}$ on construit des fonctions $g_k : T_0 \to U_0$ par récurrence : $g_k(t)$ est le premier des u_p satisfaisant (C'_k) :

$$(C'_k) \begin{cases} \forall i \leq n, \qquad | d(u_p, f_i(t)) - d_t(a_{n+1}(t), a_i(t)) | < \alpha(t) 2^{-k} \\ d(u_p, g_{k-1}(t)) < 3\alpha(t) 2^{-k} \qquad (\text{à ne considérer que pour } k \geq 2) \end{cases}$$

A chaque étape, l'ensemble des p satisfaisant (C'_k) est non vide d'après la propriété de U rappelée au § 2. Et en prenant pour $g_k(t)$ le premier des u_p on obtient une fonction mesurable. Il suffit alors de poser pour $t \in T_0$

$$f_{n+1}(t) = \lim g_k(t).$$

Si $t \in T - T_0 = \{ t \mid \alpha(t) = 0 \}$ on prend pour $f_{n+1}(t)$ le premier des $f_i(t)$ $(i \leq n)$ tel que $a_i(t) = a_{n+1}(t)$. Là encore ce choix donne une fonction mesurable.

2) D'après 1), on a pour chaque t une isométrie de $X_0(t)$ dans U qui se prolonge en une isométrie de E_t dans U, h_t. Posons $\bar{\Gamma}(t) = h_t(E_t)$ et $\Gamma(t) = \{ t \} \times \bar{\Gamma}(t)$. On définit $h : E \to T \times U$ par $h(e) = (t, h_t(e))$ si $e \in E_t$.

D'après [3], lemme 1.6, on sait que si $x \in X$, x est limite d'une suite d'éléments de X qui sont recollements mesurables dénombrables d'éléments de X_0. Cela prouve que $h \circ x$ est mesurable. Inversement si $x \in \Pi E_t$ et si $h \circ x$ est mesurable, on a $\forall n \geq 1$

$$d_t(x(t), a_n(t)) = d(h_t \circ x(t), f_n(t))$$

qui est mesurable puisque f_n l'est. Il résulte alors de [3] page 14 (cf. la remarque qui suit l'énoncé du corollaire 1.7) que x appartient à X.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. BANACH, *Théorie des opérations linéaires*. Chelsea Publishing Company, New York, 1955.

[2] C. DELODE, Champs mesurables d'espaces sousliniens. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Sect. B, t. **XIII-2**, 1977, p. 181-191.

[3] C. DELODE, O. ARINO, J. P. PENOT, Champs mesurables et multisections. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Sect. B, t. **XII-1**, 1976, p. 11-42.

[4] M. FRECHET, *Les dimensions d'un espace abstrait. Math. Annalen*, t. **68**, 1910, p. 161.

[5] P. URYSOHN, *Sur un espace métrique universel. Bull. des Sci. Math.*, t. **51**, 1927, p. 43-64 et 74-90.

(Manuscrit reçu le 18 novembre 1977)