J. C. LOOTGIETER

Sur la répartition des suites de Kakutani (I)

Annales de l'I. H. P., section B, tome 13, nº 4 (1977), p. 385-410
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1977__13_4_385_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XIII, n° 4, 1977, p. 385-410.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Sur la répartition des suites de Kakutani (I)

par

J. C. LOOTGIETER

Université Paris VI, Laboratoire de calcul des probabilités,
4, place Jussieu, Tour 56, Paris V^e

SOMMAIRE. — Considérons l'intervalle [0, 1]; choisissons d'abord un point X_1 de [0, 1] suivant une loi uniforme, puis un point X_2 dans le plus grand des intervalles $[0, X_1]$ et $[X_1, 1]$ suivant une loi uniforme, puis un point X_3 dans le plus grand des intervalles, déterminés par les points 0, X_1, X_2 et 1, suivant une loi uniforme, etc. La suite $\{ X_n, n \geqslant 1 \}$ est-elle presque-sûrement équi-répartie? Cette question, originellement posée par Araki, est restée, à notre connaissance, sans réponse [1]. S. Kakutani posa et résolut le problème similaire dans le cas où les points X_n sont choisis, à chaque étape, dans le ou les intervalles de longueur maximale suivant un rapport fixe α distinct de 0 et 1 [*3*]; résultat également redémontré par R. L. Adler et L. Flatto [*1*].

Nous donnons une réponse positive à la question ci-dessus (théorème 1.II) et nous généralisons le résultat à un cas légèrement différent (quand la loi de base est uniforme sur]0, 1[et charge les extrémités de l'intervalle [0, 1]) (théorème 1.III).

Nous donnons également une nouvelle démonstration du résultat de S. Kakutani [*3*] (théorème 2.III). Enfin nous établissons les liens entre l'entropie d'une subdivision discrète de [0, 1] et la procédure précédente convenablement généralisée (proposition 2.IV) et nous généralisons le théorème 2.III (théorème 1.IV).

Les méthodes utilisées s'inscrivent dans le cadre de la théorie classique du

(1) Après avoir reçu un manuscrit de notre travail, R. L. Adler nous a envoyé un preprint de W. R. Van Zwet, *A proof of a conjecture of Kakutani*, donnant une réponse positive.

renouvellement et sont susceptibles d'élucider la répartition des suites de Kakutani pour une loi de base quelconque : ceci sera l'objet d'un prochain article à paraître [*6*] (voir [*5*] également).

SUMMARY. — Choose a point X_1 on the unit interval [0, 1] according to the uniform law, then a point X_2 on the greatest of the intervals $[0, X_1]$ and $[X_1, 1]$ according to a uniform law, then a point X_3 on the greatest interval determined by the points 0, X_1, X_2 et 1 according to a uniform law, and so on... Is it true that almost surely the sequence $\{ X_n, n \geqslant 1 \}$ is uniformly distributed on the unit interval?

We give a positive answer to this question (²) (theorem 1.II) and we generalize the result to a slightly different case (when the law is uniform on]0, 1[and has points masses on the extremities 0 and 1) (theorem 1.III).

We also give an alternate proof to Kakutani's [*3*], which has been proved by R. L. Adler and L. Flatto [*1*] (theorem 2.III). At least we establish the relations between the entropy of a discrete subdivision of [0,1] and the above procedure suitabily generalized (proposition 2.IV) and we generalize the theorem 2.III (theorem 1.IV).

The methods we have used generally, belong to the frame-work of the classical renewal theory and may help to find out the distribution problem of Kakutani's sequences in any basic law : it will be the subject of a next paper [*6*] (see also [*5*]).

---

0. INTRODUCTION

Soit μ une loi de probabilité sur l'intervalle [0, 1]; pour tout intervalle fermé I de [0, 1], μ_I désigne la probabilité sur I homothétique de μ dans le rapport $\lambda(I)$, λ désignant la mesure de Lebesgue.

Nous choisissons d'abord un point X_1 de [0, 1] suivant la loi μ, puis un point X_2 dans le plus grand intervalle fermé I_1, situé le plus à gauche, déterminé par les points 0, X_1 et 1, suivant la loi μ_{I_1}, puis un point X_3 dans le plus grand intervalle fermé I_2, situé le plus à gauche, déterminé par les points 0, X_1, X_2 et 1, suivant la loi μ_{I_2}, etc.

(²) After taking note of a manuscript about our work, R. L. Adler sent us a preprint of W. R. Van Zwet, *A proof of a conjecture of Kakutani*, in which there is also a positive answer.

DÉFINITION. — *La procédure de construction de la suite* $\{ X_n, n \geqslant 1 \}$ *est appelée procédure de Kakutani, la suite obtenue, suite de Kakutani, et la loi* μ, *base de ladite suite.*

Au lieu de se placer initialement sur l'intervalle [0, 1], nous pourrions nous placer sur un intervalle J fermé borné de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels et envisager une procédure analogue à la procédure de Kakutani opérant sur J ; pour signifier ce fait nous noterons par $\{ X_n^J, n \geqslant 1 \}$ la suite (de Kakutani) obtenue et par μ^J sa base.

Dans les préliminaires, qui suivent, à une suite de Kakutani de loi de base μ quelconque nous associons une famille de temps d'arrêt qui jouera un rôle crucial dans tout cet article : l'étude de ces temps d'arrêt nous fournira des équations aléatoires et des équations intégrales caractéristiques de la structure stochastique des suites de Kakutani.

I. PRÉLIMINAIRES

On suppose dans toute la suite que la base μ de la suite de Kakutani $\{ X_n, n \geqslant 1 \}$ n'est pas concentrée dans les extrémités de l'intervalle [0, 1], sans quoi l'étude de ladite suite est visiblement triviale.

A. Notations

A la suite finie $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ nous associons une permutation $(Y_1(n), Y_2(n), \ldots, Y_n(n))$ *croissante* de celle-ci, et nous désignons par $I(0, n), I(1, n), I(2, n), \ldots, I(n, n)$ les intervalles fermés définis par

$$I(0, n) = [0, Y_1(n)] \quad \text{et} \quad I(n, n) = [Y_n(n), 1],$$
$$I(p, n) = [Y_p(n), Y_{p+1}(n)], \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant p \leqslant n - 1.$$

Pour une loi de base μ, un intervalle de la forme $I(p, n)$ est appelé μ-adique, uni-adique si μ est la loi uniforme, α-adique si $\mu = \delta_\alpha$ et, bien entendu, dyadique si $\mu = \delta_{\frac{1}{2}}$. Les intervalles $I(p, n)$ sont en général aléatoires et dans le cas où μ charge les extrémités de l'intervalle [0, 1] sont susceptibles de se réduire à un point.

Nous posons

$$L(0) = 1 \quad \text{et} \quad L(n) = \sup_{0 \leqslant p \leqslant n} \lambda(I(p, n)) \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 1.$$

A partir de la suite $\{ L(n), n \geqslant 0 \}$ nous définissons la famille de temps d'arrêt [3] :

$$\mathscr{T}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \mathscr{T}(x) = \inf \left\{ n / L(n) < \frac{1}{x} \right\} \quad \text{pour} \quad x > 0.$$

[3] Dans [*8*] W. R. Van Zwet introduit également ces temps d'arrêt.

Le lemme suivant assure que la fonction aléatoire $\{ \mathscr{C}(x), x \geqslant 0 \}$ est p. s. (p. s. = presque-sûrement) définie :

LEMME 1.I. — *On a : a)* $\lim\limits_{n \uparrow +\infty} L(n) = 0$ *p. s.* .

b) $P\{ \mathscr{C}(x) > n \} \leqslant c^n(n+2)^x$ *pour tout* $n > 0$, *c désignant une constante* < 1 *dépendant de la loi de base* μ.

Démonstration. Soient $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_n, \ldots$, les rapports en lesquels sont divisés successivement les intervalles de longueur maximale :

$$R_n = \frac{X_n - G_{n-1}}{L(n-1)}$$

où G_{n-1} désigne l'extrémité gauche du plus grand intervalle, situé le plus à gauche, parmi les intervalles μ-adiques $I(p, n-1)$. La définition même de la procédure de Kakutani implique que les variables aléatoires R_n sont indépendantes et ont pour loi commune la loi de base μ.

Soient $h(n)$ et $H(n)$ les entropies respectives des partitions de l'intervalle $[0, 1]$ définies, d'une part par les points $0, R_n$ et 1, d'autre part par les points $0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ et 1 :

$$h(n) = - R_n.(\operatorname{Log} R_n) - (1 - R_n).\operatorname{Log}(1 - R_n),$$

$$H(n) = - \sum_{p=0}^{n} \lambda(I(p, n)).\operatorname{Log} \lambda(I(p, n)).$$

On observe sans difficultés que

$$H(n+1) = H(n) + L(n).h(n+1),$$

d'où

$$H(n+1) = h(1) + L(1).h(2) + L(2).h(3) + \ldots + L(n).h(n+1).$$

Comme $L(1) \geqslant L(2) \geqslant L(3) \geqslant \ldots \geqslant L(n) \geqslant \ldots$, et que l'on sait bien que $H(n+1) \leqslant \operatorname{Log}(n+2)$, il va de soi que

$$(1.1) \quad \left\{ L(n) \geqslant \frac{1}{x} \right\} \subset \{ h(1) + h(2) + \ldots + h(n+1) \leqslant x.\operatorname{Log}(n+2) \}.$$

Posons (E = espérance mathématique) :

$$c = E(\exp - h(n)).$$

Comme les variables aléatoires R_n ont même loi, c ne dépend pas de n, et puisque μ n'est pas concentrée dans les extrémités de l'intervalle $[0, 1]$ il va de soi que $c < 1$. De l'inclusion (1.1), de l'inégalité de Bienaymé et de l'indépendance des variables aléatoires $h(n)$ résulte que

$$(2.1) \qquad P\left\{ L(n) \geqslant \frac{1}{x} \right\} \leqslant c^n(n+2)^x.$$

Comme L(n) décroît selon n, de (2.1) l'on déduit sans peine que $\lim_{n \uparrow +\infty} \mathrm{L}(n) = 0$ p. s.; de plus

$$\left\{ \mathrm{L}(n) \geqslant \frac{1}{x} \right\} = \{ \mathscr{C}(x) > n \}, \tag{3.1}$$

d'où l'assertion (b).

Il est clair que la fonction aléatoire $\{ \mathscr{C}(x), x \geqslant 0 \}$ est continue à droite, croît selon x et que $\lim_{n \uparrow +\infty} \mathscr{C}(x) = +\infty$ p. s.; p. s. $\mathscr{C}(x) = 0$ pour $x < 1$, $\mathscr{C}(x) \geqslant 1$ pour $x \geqslant 1$, et $\mathscr{C}(x) = 1$ pour $x = 1$ dans le cas où la loi de base μ ne charge pas les extrémités de l'intervalle [0, 1].

Si au lieu de se placer sur [0, 1], nous nous plaçons sur un intervalle fermé borné J de $\mathbb{R}$, nous notons par $\mathrm{L}^{\mathrm{J}}(n)$ et $\mathscr{C}^{\mathrm{J}}(x)$ les analogues de L(n) et $\mathscr{C}(x)$. Nous posons

$$\mathscr{C} = \{ \mathscr{C}(x), x \geqslant 0 \}, \qquad \mathscr{C}^{\mathrm{J}} = \{ \mathscr{C}^{\mathrm{J}}(x), x \geqslant 0 \},$$
$$\mathscr{C}(.y) = \{ \mathscr{C}(xy), x \geqslant 0 \} \quad \text{et} \quad \mathscr{C}^{\mathrm{J}}(.y) = \{ \mathscr{C}^{\mathrm{J}}(xy), x \geqslant 0 \}$$

pour tout $y \geqslant 0$.

Le lemme suivant est alors immédiat :

LEMME 2.I. — *Si la loi de base μ^{J} est homothétique de μ dans le rapport $\lambda(\mathrm{J})$ la fonction aléatoire* $\{ \mathrm{L}^{\mathrm{J}}(n), n \geqslant 0 \}$ *a même loi que la fonction aléatoire* $\{ \lambda(\mathrm{J}).\mathrm{L}(n), n \geqslant 0 \}$, *la fonction aléatoire $\mathscr{C}^{\mathrm{J}}$ a même loi que la fonction aléatoire* $\mathscr{C}(.\lambda(\mathrm{J}))$.

B. Équations aléatoires et intégrales fondamentales

Désignons par N(n, I) le nombre de points X_i, $i \leqslant 1 \leqslant n$, qui tombent dans un intervalle I de [0, 1] :

$$\mathrm{N}(n, \mathrm{I}) = \sum_{i=1}^{n} 1_{\mathrm{I}}(\mathrm{X}_i). \tag{4.1}$$

Mais nous devons prendre certaines précautions pour tenir compte du cas où la base μ charge les extrémités de l'intervalle [0, 1]; nous introduisons les variables aléatoires définies à partir des intervalles (aléatoires) μ-adiques I(p, n) :

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}^*(n, \mathrm{I}(p, m)) = 0 \qquad \text{pour} \qquad n \leqslant m, \\ &\mathrm{N}^*(n, \mathrm{I}(p, m)) = \text{nombre de points } \mathrm{X}_i,\ m < i \leqslant n, \end{aligned} \tag{5.1}$$

effectivement choisis dans l'intervalle μ-adique I(p, m) *suivant la procédure de Kakutani,* pour $n > m$.

Bien sûr, N*(n, I(p, m)) ne coïncide pas avec N(n, I(p, m)); néanmoins, si la loi de base μ ne charge pas les extrémités de l'intervalle $[0, 1]$ $N^*(n, I(p, m))$ ne diffère p. s. de $N(n, I(p, m))$ que de 1 ou 2 suivant que p égale 0 ou m, ou que p diffère de 0 et m.

Pour $m \geqslant p \geqslant 0$, nous désignons par $\{ T^k_{p,m}, k \geqslant 1 \}$ les durées consécutives de séjour *ininterrompu* de la suite $\{ X_n, n > m \}$ dans l'intervalle μ-adique $I(p, m)$ *suivant la procédure de Kakutani :* si nous insistons, à savoir « *suivant la procédure de Kakutani* », c'est pour éviter l'ambiguïté qui résulterait du cas où un point $X_n, n > m$, coïnciderait avec l'extrémité droite et avec l'extrémité gauche de deux intervalles μ-adiques $I(p, m)$ et $I(p + 1, m)$; ceci, bien sûr, n'étant possible que quand la loi de base μ charge les extrémités de l'intervalle $[0, 1]$.

Ces précautions prises, le lemme suivant est alors immédiat :

LEMME 3.I. — *Quel que soit $x \geqslant 0$:*

a) $\mathscr{E}(x) = 1 + N^*(\mathscr{E}(x), I(0, 1)) + N^*(\mathscr{E}(x), I(1, 1))$ *si* $x \geqslant 1$, $= 0$ *si* $x < 1$.

b) $$\mathscr{E}(x) = n + \sum_{p=0}^{n} N^*(\mathscr{E}(x), I(p, n)) \quad si \quad \sup_{0 \leqslant p \leqslant n} \lambda(I(p, n)) \geqslant \frac{1}{x},$$ $\mathscr{E}(x) \leqslant n$ *sinon.*

Que dire, pour n fixé, de la loi de la suite finie (en p) de fonctions aléatoires $\{ N^*(\mathscr{E}, I(p, n)), 0 \leqslant p \leqslant n \}$ conditionnellement en $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$? Plus particulièrement, que dire de la loi du couple de fonctions aléatoires $\{ N^*(\mathscr{E}, I(p, 1)), 0 \leqslant p \leqslant 1 \}$ conditionnellement en X_1 ?

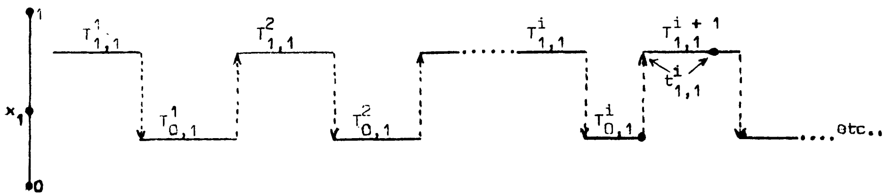
La réponse à cette dernière question s'étend sans difficultés au cas de la première question; elle s'appuie sur trois remarques :

REMARQUE 1. — *Conditionnellement* en $X_1 = x_1$, tant que la suite $\{ X_n, n \geqslant 2 \}$ séjourne dans l'intervalle $[0, x_1]$ suivant la *procédure de Kakutani*, la distribution des points X_n est *indépendante* de la distribution passée ou à venir des points de la suite $\{ X_n, n \geqslant 2 \}$ dans l'intervalle $[x_1, 1]$ suivant la procédure de Kakutani. Observons ensuite qu'en revenant dans l'intervalle $[0, x_1]$ à un moment donné, la suite $\{ X_n, n \geqslant 2 \}$ va reprendre une *procédure de Kakutani*, opérant sur l'intervalle $[0, x_1]$, interrompue au moment précédent où la suite $\{ X_n, n \geqslant 2 \}$ quittait l'intervalle $[0, x_1]$ pour sauter dans l'intervalle $[x_1, 1]$. Et *vice versa* pour $[x_1, 1]$.

REMARQUE 2. — Si $x < 1$, $\mathscr{E}(x) = 0$. Supposons que $x \geqslant 1$: quand pour la première fois, à un instant donné $q \geqslant 1$, *suivant la procédure de Kakutani*, conditionnellement en $X_1 = x_1$, la longueur maximale des intervalles

μ-adiques $I(p, q)$ situés dans l'un des intervalles $[0, x_1]$ et $[x_1, 1]$ devient strictement inférieure à $\frac{1}{x}$, la suite $\{ X_n, n > q \}$ séjournera dans l'autre intervalle durant un temps supérieur ou égal au temps nécessaire pour que dans cet intervalle la longueur maximale des intervalles μ-adiques qui s'y trouvent devienne strictement inférieure à $\frac{1}{x}$ avant de revenir dans l'intervalle précédemment quitté.

Le dessin suivant illustre cette deuxième remarque :



Les quantités $T^i_{0,1}$ désignent les durées de séjour ininterrompu de la suite $\{ X_n, n \geqslant 2 \}$ dans l'intervalle $[0, x_1]$ $\left(\text{sur le dessin } x_1 < \frac{1}{2}\right)$ *suivant la procédure de Kakutani*, les quantités $T^i_{1,1}$, les durées de séjour ininterrompu de la même suite dans l'intervalle $[x_1, 1]$ *suivant la procédure de Kakutani*; pour fixer les idées, pour la première fois dans l'intervalle $[0, x_1]$ la longueur maximale des intervalles μ-adiques devient inférieure à $\frac{1}{x}$ à l'époque

$$1 + T^1_{0,1} + T^1_{1,1} + T^2_{0,1} + T^2_{1,1} + \dots + T^i_{0,1} + T^i_{1,1},$$

puis la longueur maximale des intervalles μ-adiques situés dans l'intervalle $[x_1, 1]$ devient strictement inférieure à $\frac{1}{x}$ à l'époque

$$1 + T^1_{0,1} + T^1_{1,1} + T^2_{0,1} + T^2_{1,1} + \dots + T^i_{0,1} + T^i_{1,1} + t^i_{1,1}$$

avec $t^i_{1,1} \leqslant T^{i+1}_{1,1}$.

REMARQUE 3. — Toujours conditionnellement en $X_1 = x_1$, entre l'instant 1 et l'instant $\mathscr{C}(x)$ inclus, combien de points ont été choisis dans l'intervalle $[0, x_1]$ (resp. dans l'intervalle $[x_1, 1]$) *suivant la procédure de Kakutani*, excepté le point x_1, pour $x \geqslant 1$? $N^*(\mathscr{C}(x), I(0, 1))$ points (resp. $N^*(\mathscr{C}(x), I(1, 1))$) d'après le lemme 3.I; mais on a mieux : soient $\{ X_{n_i}, i \geqslant 1 \}$ et $\{ X_{p_i}, i \geqslant 1 \}$ les suites respectives des points de la suite $\{ X_n, n \geqslant 2 \}$ rangés dans l'ordre où ils apparaissent dans les intervalles $[0, x_1]$ et $[x_1, 1]$ *suivant la procédure de Kakutani*. De la remarque 1 résulte que les suites $\{ X_{n_i}, i \geqslant 1 \}$ et $\{ X_{p_i}, i \geqslant 1 \}$ sont des suites de Kakutani *indépendantes conditionnellement* en $X_1 = x_1$, la première opérant sur l'intervalle $[0, x_1]$ avec pour base la loi $\mu^{I(0,1)}$ homothétique de μ dans le rapport x_1, la seconde opérant sur l'intervalle $[x_1, 1]$ avec pour loi de base la loi $\mu^{I(1,1)}$ homothétique de μ dans le rapport $1 - x_1$. Conformément aux notations précédentes, nous notons par $\{ X_i^{I(0,1)}, i \geqslant 1 \}$ et $\{ X_i^{I(1,1)}, i \geqslant 1 \}$ les suites $\{ X_{n_i}, i \geqslant 1 \}$ et $\{ X_{p_i}, i \geqslant 1 \}$; ces deux suites sont assujetties, quant à leur loi de base, aux conditions du lemme 2.I. Considérons les fonctions aléatoires $\mathscr{T}^{I(0,1)}$ et $\mathscr{T}^{I(1,1)}$ de temps d'arrêt associées à ces deux suites de Kakutani; des remarques 1 et 2 résulte donc que

$$\mathscr{T}(x) = 1 + \mathscr{T}^{I(0,1)}(x) + \mathscr{T}^{I(1,1)}(x) \qquad \text{pour tout } x \geqslant 1,$$

les fonctions aléatoires $\mathscr{T}^{I(0,1)}$ et $\mathscr{T}^{I(1,1)}$ étant conditionnellement indépendantes en X_1.

Le lecteur saura étendre les remarques 1, 2 et 3 au cas de l'étude de la répartition des points de la suite $\{ X_n, n \geqslant 1 \}$ entre les instants 1 et $\mathscr{T}(x)$ inclus dans les intervalles μ-adiques $I(p, n)$ conditionnellement en $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

En résumé, nous avons la proposition suivante :

PROPOSITION 1.I. — *Soit* $\{ \mathscr{T}^{(n)}, n \geqslant 1 \}$ *une suite de copies de* $\mathscr{T}$ *mutuellement indépendantes, et indépendante de la suite* $\{ X_n, n \geqslant 1 \}$. *Pour tout n fixé on a :*

a) La suite finie des fonctions aléatoires $\{ N^*(\mathscr{T}, I(p, n)), n \geqslant p \geqslant 0 \}$ *a même loi que la suite finie des fonctions aléatoires* $\{ \mathscr{T}^{(p)}(.\lambda(I(p, n))), n \geqslant p \geqslant 0 \}$ (resp. conditionnellement en $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$).

b) Si $x < 1$, $\mathscr{T}(x) = 0$, *et si* $x \geqslant 1$ *on a l'égalité en loi* (*en abrégé* $\overset{\mathscr{L}}{=}$) :

$$\mathscr{T}(x) \overset{\mathscr{L}}{=} n + \sum_{0 \leqslant p \leqslant n} \mathscr{T}^{(p)}(x.\lambda(I(p, n))) \quad si \quad \frac{1}{x} \leqslant \sup_{0 \leqslant p \leqslant n} \lambda(I(p, n)), \mathscr{T}(x) \leqslant n \ sinon.$$

c) En particulier, si $x \geqslant 1$ *on a :*

$$\mathscr{T}(x) \overset{\mathscr{L}}{=} 1 + \mathscr{T}^{(0)}(x.X_1) + \mathscr{T}^{(1)}(x.(1 - X_1)).$$

Soient $g(x, s) = E(s^{\mathscr{T}(x)})$ pour $0 \leqslant s \leqslant 1$, $\theta(x) = E(\mathscr{T}(x))$, $v(x) = \text{var}(\mathscr{T}(x))$ (var = variance) et $J(x) = \text{var}(E(\mathscr{T}(x)/X_1))$, $(E(./X_1)$ = espérance conditionnelle en X_1). La proposition 1.I conduit aux équations de Poisson :

PROPOSITION 2.I. — *Si* μ *est la loi de base de la suite* $\{ X_n, n \geqslant 1 \}$ *de Kakutani on a :*

a) $$g(x, s) = s.\int_0^1 g(xy, s).g(x(1 - y)), s\mu(dy) \quad si \quad x \geqslant 1, = 1 \quad si \quad x < 1.$$

b) $$\theta(x) = \int_0^1 \theta(xy) + \theta(x(1 - y))\mu(dy) + 1 \quad si \quad x \geqslant 1, = 0 \quad si \quad x < 1.$$

c) $\quad v(x) = \int_0^1 v(xy) + v(x(1-y))\mu(dy) + \mathrm{J}(x) \quad si \quad x \geqslant 1, = 0 \quad si \quad x < 1.$

Démonstration. — Les assertions *a*), *b*) et *c*) sont des conséquences immédiates de l'assertion *c*) de la proposition 1.I et des propriétés classiques des espérances conditionnelles : pour $x \geqslant 1$ on a

i) $\quad \mathrm{E}(s^{\mathscr{C}(x)}/\mathrm{X}_1 = y) = s.\mathrm{E}(s^{\mathscr{C}^{(0)}(xy)+\mathscr{C}^{(1)}(x(1-y))})$

ii) $\quad \mathrm{E}(\mathscr{C}(x)/\mathrm{X}_1 = y) = \mathrm{E}(\mathscr{C}(xy)) + \mathrm{E}(\mathscr{C}(x(1-y))) + 1$

iii) $\quad \mathrm{E}((\mathscr{C}(x) - \theta(x))^2/\mathrm{X}_1 = y) = \operatorname{var}(\mathscr{C}^{(0)}(yx) + \mathscr{C}^{(1)}(x(1-y))) + (\theta(x) - 1 - \theta(xy) - \theta(x(1-y)))^2$

et comme $\mathscr{C}^{(0)}$ et $\mathscr{C}^{(1)}$ sont des fonctions aléatoires indépendantes et de loi commune identique à celle de $\mathscr{C}$ on a

iv) $\quad \mathrm{E}(s^{\mathscr{C}^{(0)}(xy)+\mathscr{C}^{(1)}(x(1-y))}) = \mathrm{E}(s^{\mathscr{C}(xy)}).\mathrm{E}(s^{(\mathscr{C}x(1-y))})$

v) $\quad \operatorname{var}(\mathscr{C}^{(0)}(xy) + \mathscr{C}^{(1)}(x(1-y))) = \operatorname{var}(\mathscr{C}(xy)) + \operatorname{var}(\mathscr{C}(x(1-y))).$

En intégrant les égalités *i*), *ii*) et *iii*) selon la loi μ de X_1 et compte tenu des égalités *iv*) et *v*) on obtient visiblement les assertions *a*), *b*) et *c*) de la proposition 2.I pour $x \geqslant 1$; le cas où $x < 1$ est trivial. Le lecteur aura remarqué que

$$\mathrm{J}(x) = \int_0^1 (\theta(x) - 1 - \theta(xy) - \theta(x(1-y)))^2 \mu(dy).$$

Les équations *b*) et *c*) de la proposition 2.I sont en fait des équations de renouvellement (cf. Feller [*2*]). Soit $\sigma = (1 - \mu(0) - \mu(1))^{-1}$ et $\bar{\mu}$ la mesure sur $]0, 1[$ définie pour $\bar{\mu}(\mathrm{A}) = \frac{1}{2}(\mu(\mathrm{A}) + \mu(1 - \mathrm{A}))$ pour toute partie borélienne A de $]0, 1[$. Posons $\rho(dy) = 2.\sigma.(\exp\text{-}y).\eta(dy)$ où η désigne l'image de $\bar{\mu}$ par l'application $y \to -\operatorname{Log} y$.

Soient $\mathrm{Z}_1(x) = e^{-x}.\theta(e^x)$ et $\mathrm{Z}_2(x) = e^{-x}.v(e^x)$; on a le corollaire suivant immédiat :

COROLLAIRE 1.I. — *Les assertions b) et c) de la proposition 2.I sont équivalentes aux équations de convolution* ($*$ = *produit de convolution usuel*) :

a) $\mathrm{Z}_1(x) = \mathrm{Z}_1 * \rho(x) + \sigma.e^{-x}$ pour $x \geqslant 0$, $= 0$ pour $x < 0$.

b) $\mathrm{Z}_2(x) = \mathrm{Z}_2 * \rho(x) + \sigma.e^{-x}.\mathrm{J}(e^x)$ pour $x \geqslant 0$, $= 0$ pour $x < 0$.

Pour $\mu = \lambda$ (λ = mesure de Lebesgue), un simple changement de variable dans l'équation intégrale de l'assertion *a*) de la proposition 2.I donne :

$$(6.1) \qquad \begin{aligned} x.g(x, s) &= s.\int_0^x g(x-y, s).g(y, s)\mu(dy) \qquad \text{si} \qquad x \geqslant 1 \\ g(x, s) &= 1 \qquad \text{si} \qquad x < 1. \end{aligned}$$

Pour $\mu = \delta_\alpha\,(0 < \alpha < 1)$, les variables aléatoires $\mathscr{C}(x)$ sont évidemment constantes; l'équation intégrale *b*) de la proposition 2.I se réduit à la simple équation

$$(7.1)\qquad \begin{array}{ll} \mathscr{C}(x) = 1 + \mathscr{C}(x\alpha) + \mathscr{C}(x(1-\alpha)) & \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ \mathscr{C}(x) = 0 \quad \text{si} \quad x < 1. & \end{array}$$

En itérant l'équation (7.1) on obtient sans difficultés une expression explicite de $\mathscr{C}(x)$:

$$(8.1)\qquad \mathscr{C}(x) = \sum_{k\geqslant 0} \sum_{i/x.\alpha^i(1-\alpha)^{k-i}\geqslant 1} \mathrm{C}_k^i$$

où C_k^i désigne les combinaisons de k objets pris i à i.

La mesure ρ citée dans le corollaire 1.I prend la forme simple :

$$\rho = \alpha.\delta_{-\mathrm{Log}\,\alpha} + (1-\alpha).\delta_{-\mathrm{Log}\,(1-\alpha)}.$$

Nous n'avons pas cherché à résoudre l'équation intégrale *a*) de la proposition 2.I; l'exemple $\mu = \delta_\alpha$ laisse soupçonner qu'une forme explicite de ses solutions serait relativement complexe.

Dans la suite de cet article nous aurons besoin de deux résultats classiques de la théorie du renouvellement (cf. Feller [*2*]).

C. Deux résultats classiques de la théorie du renouvellement

Si ω est une mesure positive bornée sur R_+, U_ω désigne la mesure potentielle associée à ω :

$$\mathrm{U}_\omega = \sum_{n\geqslant 0} \omega^{*n}$$

où $\omega^{*0} = \delta_0$ et ω^{*n} = convolée *n-ième* de ω pour $n \geqslant 1$, et nous posons

$$m_1(\omega) = \int_0^{+\infty} x\omega(dx),$$

Si ω est portée par une progression arithmétique, nous désignons par γ le plus grand réel $\geqslant 0$ tel que ω soit portée par $\gamma.\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ = ensemble des entiers naturels); γ est appelée le *pas* de ω; et ω est dite arithmétique (non-arithmétique sinon).

Considérons sur R_+ l'équation de convolution :

$$(9.1)\qquad \mathrm{Z}(x) = \int_0^x \mathrm{Z}(x-y)\omega(dy + z(x)$$

ω étant une *probabilité* sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\omega(0) = 0$, et $z(x)$ une fonction connue *directement intégrable* sur $\mathbb{R}_+$. On a alors les deux propositions classiques suivantes :

PROPOSITION 3.I (Feller [2]).

a) L'unique solution $Z(x)$ *bornée sur tout intervalle borné de* $\mathbb{R}_+$ *de l'équation* (9.1) *est donnée par*

$$Z(x) = \int_0^x z(x-y)U_\omega(dy).$$

b) Si ω *est non-arithmétique, on a*

$$\lim_{x \uparrow +\infty} Z(x) = \frac{1}{m_1(\omega)} \int_0^{+\infty} z(y)dy.$$

c) Si ω *est arithmétique avec pour pas* γ, *on a*

$$\lim_{n \uparrow +\infty} Z(x+n.\gamma) = \frac{\gamma}{m_1(\omega)} \sum_{x+k.\gamma \geqslant 0} z(x+k.\gamma)$$

PROPOSITION 4.I (Erdös-Feller-Pollard). — *Si* ω *est arithmétique avec pour pas* γ, *on a*

$$\lim_{n \uparrow +\infty} U(n.\gamma) = \frac{\gamma}{m_1(\omega)}.$$

REMARQUE 1.I. — Soit $\mathscr{H}(x) = H(\mathscr{C}(x))$ l'entropie (pour la mesure de Lebesgue) de la partition de [0, 1] induite par les points $0, X_1, X_2, \ldots, X_{\mathscr{C}(x)}$ et 1 (cf. démonstration du lemme 1.I) et

$$\mathscr{S}(x) = L(0) + L(1) + L(2) + \ldots + L(\mathscr{C}(x));$$

nous laissons au lecteur le soin d'écrire les équations aléatoires que vérifient $\mathscr{H}(x)$ et $\mathscr{S}(x)$ ainsi que les équations intégrales dont sont solutions les espérances mathématiques et variances de $\mathscr{H}(x)$ et $\mathscr{S}(x)$.

Dans la partie II qui suit nous traitons le problème de la répartition de la suite de Kakutani $\{X_n, n \geqslant 1\}$ quand sa loi de base est la loi uniforme sur [0, 1] : pour cela nous allons résoudre explicitement les équations intégrales *b*) et *c*) de la proposition 2.I, en déduire le comportement asymptotique de la fonction aléatoire $\{\mathscr{C}(x), x \geqslant 0\}$ quand $x \to +\infty$, puis l'équirépartition de la suite $\{X_n, n \geqslant 1\}$. Le cas d'une loi de base uniforme sur l'intervalle]0, 1[et chargeant les extrémités de l'intervalle [0, 1] est traité dans la partie III en s'appuyant sur l'assertion *b*) de la proposition 3.I, bien que cela ne soit pas nécessaire; par contre le cas d'une loi de base $\mu = \delta_\alpha$ nécessite pour son étude les propositions 3.I et 4.I (cf. partie III).

II. RÉPARTITION DE LA SUITE DE KAKUTANI $\{ X_n, n \geqslant 1 \}$ POUR UNE LOI DE BASE UNIFORME SUR [0, 1].

A. Comportement asymptotique de la fonction aléatoire $\{ \mathscr{T}(x), x \geqslant 0 \}$.

PROPOSITION 1.II. — *On a :*

a) $E(\mathscr{T}(x)) = 0$ *et* $\operatorname{var}(\mathscr{T}(x)) = 0$ *pour* $x < 1$.

b) $E(\mathscr{T}(x)) = 2x - 1$ *pour* $x \geqslant 1$.

c) $\operatorname{var}(\mathscr{T}(x)) = \begin{cases} (8(\operatorname{Log} 2) - 5)x & \textit{pour} \quad x \geqslant 2, \\ 2 + 2x + 8x(\operatorname{Log} x) - 4x^2 & \textit{pour} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

Démonstration. — L'assertion *a*) est triviale. Pour $x \geqslant 1$ les équations intégrales *b*) et *c*) de la proposition 2.I, après un simple changement de variable, prennent la forme

$$x.\theta(x) = x + 2\int_1^x \theta(y)dy, \tag{1.2}$$

$$x.v(x) = x.J(x) + 2\int_1^x v(y)dy, \tag{2.2}$$

où

$$J(x) = \int_0^1 (\theta(x) - 1 - \theta(xy) - \theta(x(1-y)))^2 dy.$$

L'équation intégrale (1.2) implique que $\theta(x)$ est continûment dérivable sur $[1, +\infty[$ et conduit à l'équation différentielle

$$x.\theta'(x) - \theta(x) = 1 \qquad (\text{pour } x \geqslant 1). \tag{3.2}$$

L'équation différentielle (3.2) a pour solution générale $\theta(x) = Cx - 1$; comme $\mathscr{T}(1) = 1$ p. s., $\theta(1) = 1$ et, par suite, $C = 2$. D'où l'assertion *b*).

Décomposons l'intégrale $J(x)$ en la somme de quatre intégrales sur [0, 1] en tenant compte de la forme explicite de $\theta(x)$ précédemment obtenue :

$$J_1(x) = \int_{\{xy \geqslant 1 \text{ et } x(1-y) \geqslant 1\}} (2x - 2xy - 2x(1-y))^2 dy$$

$$J_2(x) = \int_{\{xy < 1 \text{ et } x(1-y) < 1\}} (2x - 2)^2 dy$$

$$J_3(x) = \int_{\{xy \geqslant 1 \text{ et } x(1-y) < 1\}} (2x - 1 - 2xy)^2 dy$$

$$J_4(x) = \int_{\{xy < 1 \text{ et } x(1-y) \geqslant 1\}} (2x - 1 - 2x(1-y))^2 dy.$$

Il est clair que $J_1(x) = 0$ et que $J_3(x) = J_4(x)$. Suivant la position de x par rapport à 2, on obtient sans difficultés :

$$J(x) = \frac{2}{3x} \quad \text{pour} \quad x \geqslant 2,$$

$$J(x) = \frac{2}{3x} + \frac{1}{x}((8-4x)(x-1)^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(2x-3)^3) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2.$$

Et l'on remarque que $J(x)$ est continue sur $[1, +\infty[$; mais on observe une discontinuité de la dérivée $J'(x)$ de $J(x)$: ce fait n'est pas surprenant, car si l'on regarde par exemple la probabilité $P\{\mathscr{C}(x) = 1\}$, on a

$$P\{\mathscr{C}(x) = 1\} = \begin{cases} \frac{2}{x} - 1 & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0 & \text{si} \quad x > 2. \end{cases}$$

Il est alors visible que $P\{\mathscr{C}(x) = 1\}$ a une dérivée discontinue au point 2. Compte tenu de (3.2) l'équation intégrale conduit aux équations différentielles

$$\text{(4.2)} \quad \begin{aligned} &xv'(x) - v(x) = 0 && \text{pour} \quad x \geqslant 2, \\ &xv'(x) - v(x) = -2 + 8x - 4x^2 && \text{pour} \quad 1 \leqslant x < 2. \end{aligned}$$

Les équations différentielles (4.2) ont pour solution générale

$$\text{(5.2)} \quad \begin{aligned} &v(x) = C_1 x && \text{pour} \quad x \geqslant 2, \\ &v(x) = 2x + C_2 x + 8x(\operatorname{Log} x) - 4x^2 && \text{pour} \quad 1 \leqslant x < 2. \end{aligned}$$

Les constantes C_1 et C_2 sont déterminées en observant que la continuité de $J(x)$ sur $[1, +\infty[$ implique celle de $v(x)$ sur $[1, +\infty[$; de (5.2) résulte sans peine que

$$C_1 = 8(\operatorname{Log} 2) - 5,$$
$$C_2 = 2.$$

D'où l'assertion *c*).

Une conséquence de la proposition 1.II est le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.II. — *On a :*

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \frac{\mathscr{C}(x)}{x} = 2 \text{ p. s.}.$$

Démonstration. — De l'assertion *b*) de la proposition 1.II et de l'inégalité de Bienaymé résulte que

$$\text{(6.2)} \qquad P\left\{\left|\frac{\mathscr{C}(xn)}{n} - \frac{2xn-1}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant (8(\operatorname{Log} 2) - 5)\frac{x}{\varepsilon^2 . n}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ dès que $xn \geqslant 2$. De (6.2) et du lemme de Borel-Cantelli résulte sans difficultés que

$$\lim_{n \uparrow +\infty} \frac{\mathscr{C}(x.n^2)}{n^2} = 2x \text{ p. s.}. \tag{7.2}$$

A tout $x \geqslant 0$ nous associons l'entier n_x tel que $n_x^2 \leqslant x < (n_x + 1)^2$. Comme la fonction aléatoire $\{ \mathscr{C}(x), x \geqslant 0 \}$ croît selon x, il est clair que

$$\frac{n_x^2}{(n_x+1)^2} \frac{\mathscr{C}(n_x^2)}{n_x^2} \leqslant \frac{\mathscr{C}(x)}{x} \leqslant \frac{\mathscr{C}((n_x+1)^2)}{(n_x+1)^2} \frac{(n_x^2+1)^2}{n_x^2}. \tag{8.2}$$

Faisant tendre x vers $+\infty$ dans la double inégalité (8.2), (7.2) entraîne que

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \frac{\mathscr{C}(x)}{x} = 2 \text{ p. s.}.$$

B. Répartition de la suite $\{ X_n, n \geqslant 1 \}$

Du corollaire 1.II découle le corollaire suivant déjà proche de l'équirépartition de la suite $\{ X_n, n \geqslant 1 \}$:

Corollaire 2.II. — *Pour tout intervalle uni-adique* $I(p, n)$ *on a*

$$\lim_{q \uparrow +\infty} \frac{N^*(q, I(p, n))}{q} = \lambda(I(p, n)) \; p. \; s. \, .$$

Démonstration. — De l'assertion *a*) de la proposition 1.I et du corollaire 1.II résulte visiblement que

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \frac{N^*(\mathscr{C}(x), I(p, n))}{\mathscr{C}(x)} = \lambda(I(p, n)) \text{ p. s.}$$

conditionnellement en $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$; par suite il est facile d'en déduire que

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \frac{N^*(\mathscr{C}(x), I(p, n))}{\mathscr{C}(x)} = \lambda(I(p, n)) \text{ p. s.}. \tag{9.2}$$

Comme $\lim\limits_{x \uparrow +\infty} \mathscr{C}(x) = +\infty$ et que $\mathscr{C}(0) = 0$, on peut définir la suite aléatoire d'entiers $\{ n(q), q \geqslant 1 \}$:

$$n(q) = \inf \{ m / \mathscr{C}(m) \leqslant q \leqslant \mathscr{C}(m+1) \}.$$

Comme $\mathscr{C}(x)$ croît selon x, il va de soi que $n(q)$ croît selon q; et il est clair que $\lim_{q \uparrow +\infty} n(q) = +\infty$. D'une part, nous avons alors pour tout $\varepsilon > 0$, $y \geqslant 0$ et r entier $\geqslant 1$:

$$(10.2)\quad \begin{aligned} \mathrm{P}\left\{ \sup_{q \geqslant r} \left| \frac{\mathrm{N}^*(\mathscr{C}(n(q)), \mathrm{I}(p, n))}{\mathscr{C}(n(q))} - \lambda(\mathrm{I}(p, n)) \right| \geqslant \varepsilon \right\} &\leqslant \mathrm{P}\{ n(r) < y \} \\ &+ \mathrm{P}\left\{ \sup_{x \geqslant y} \left| \frac{\mathrm{N}^*(\mathscr{C}(x), \mathrm{I}(p, n))}{\mathscr{C}(x)} - \lambda(\mathrm{I}(p, n)) \right| \geqslant \varepsilon \right\} \end{aligned}$$

$$(11.2)\quad \begin{aligned} \mathrm{P}\left\{ \sup_{q \geqslant r} \left| \frac{\mathscr{C}(n(q) + 1)}{\mathscr{C}(n(q))} - 1 \right| \geqslant \varepsilon \right\} &\leqslant \mathrm{P}\{ n((r) < y \} \\ &+ \mathrm{P}\left\{ \sup_{x \geqslant y} \left| \frac{\mathscr{C}(x + 1)}{\mathscr{C}(x)} - 1 \right| \geqslant \varepsilon \right\}, \end{aligned}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{\mathscr{C}(n(q))}{\mathscr{C}(n(q) + 1)} \frac{\mathrm{N}^*(\mathscr{C}(n(q)), \mathrm{I}(p, n))}{\mathscr{C}(n(q))} &\leqslant \frac{\mathrm{N}^*(q, \mathrm{I}(p, n))}{q} \\ &\leqslant \frac{\mathrm{N}^*(\mathscr{C}(n(q)+1), \mathrm{I}(p, n))}{\mathscr{C}(n(q) + 1)} \frac{\mathscr{C}(n(q) + 1)}{\mathscr{C}(n(q))}. \end{aligned}$$

De cette dernière double inégalité, de (9.2), (10.2), (11.2) et du corollaire 1.II le lecteur déduira sans difficultés que

$$\lim_{q \uparrow +\infty} \frac{\mathrm{N}^*(q, \mathrm{I}(p, n))}{q} = \lambda(\mathrm{I}(p, n)) \text{ p. s.}\,.$$

Le théorème qui suit donne la répartition de la suite $\{ \mathrm{X}_n, n \geqslant 1 \}$:

THÉORÈME 1.II. — *Pour tout intervalle fixé* I *de* [0, 1] *on a*

$$\lim_{q \uparrow +\infty} \frac{\mathrm{N}(q, \mathrm{I})}{q} = \lambda(\mathrm{I}) \; p.\, s.\,.$$

En d'autres termes, la suite $\{ \mathrm{X}_n, n \geqslant 1 \}$ *est p. s. équi-répartie.*

Démonstration. — Soit I un intervalle de [0, 1] fixé; pour tout $n \geqslant 1$, nous désignons par $\mathrm{I}^*(n)$ l'intervalle (aléatoire) égal à la réunion des intervalles uni-adiques $\mathrm{I}(p, n)$ dont l'intersection avec I est non vide, et par $\mathrm{I}_*(n)$, l'intervalle égal à la réunion des intervalles uni-adiques $\mathrm{I}(p, n)$ contenus dans I.

De la définition (5.1) des variables aléatoires $\mathrm{N}^*(q, \mathrm{I}(p, n))$ résulte que pour *n fixé :*

$$(12.2)\quad \sum_{\mathrm{I}(p,n) \subset \mathrm{I}_*(n)} \mathrm{N}^*(q, \mathrm{I}(p, n)) \leqslant \mathrm{N}(q, \mathrm{I}) \leqslant \sum_{\mathrm{I}(p,n) \subset \mathrm{I}^*(n)} \mathrm{N}^*(q, \mathrm{I}(p, n)) + n.$$

De (12.2) et du corollaire 2.II s'ensuit visiblement que pour n fixé :

$$(13.2)\quad \lambda(\mathrm{I}_*(n)) \leqslant \liminf_q \frac{\mathrm{N}(q, \mathrm{I})}{q} \leqslant \limsup_q \frac{\mathrm{N}(q, \mathrm{I})}{q} \leqslant \lambda(\mathrm{I}^*(n)) \text{ p. s.}.$$

Comme $\lim_{q \uparrow +\infty} \mathrm{L}(q) = 0$ p. s, il va de soi que la suite $\{ \mathrm{X}_n, n \geqslant 1 \}$ est dense dans $[0, 1]$; $\lambda(\mathrm{I}_*(n))$ et $\lambda(\mathrm{I}^*(n))$ convergent donc p. s. vers $\lambda(\mathrm{I})$ quand n tend vers $+\infty$. De (13.2) résulte donc que

$$\lim_{q \uparrow +\infty} \frac{\mathrm{N}(q, \mathrm{I})}{q} = \lambda(\mathrm{I}) \text{ p. s.}.$$

III. RÉPARTITION DES SUITES DE KAKUTANI $\{ \mathrm{X}_n, n \geqslant 1 \}$ DANS LE CAS D'UNE LOI DE BASE DE LA FORME $(1 - p_0 - p_1)\lambda + \delta_0 . p_0 + \delta_1 . p_1$ OU DE LA FORME $\delta_0 . p_0 + \delta_1 . p_1 + \delta_\alpha . a + \delta_{1-\alpha} . b$.

A. Cas d'une loi de base de la forme $(1 - p_0 - p_1)\lambda + \delta_0 . p_0 + \delta_1 . p_1$.

Nous avons donc p_0 et $p_1 \geqslant 0$, et $p_0 + p_1 < 1$. Le cas où $p_0 = p_1 = 0$ a été précédemment étudié dans la partie II. Nous supposons donc que $p_0 + p_1 > 0$.

Nous avons le théorème suivant analogue au théorème 1.II :

THÉORÈME 1.III. — *Pour tout intervalle* I *de* [0, 1] *on a*

$$\lim_{q \uparrow +\infty} \frac{\mathrm{N}(q. \mathrm{I})}{q} = \lambda(\mathrm{I}) \textit{ p. s.}.$$

En d'autres termes, la suite $\{ \mathrm{X}_n, n \geqslant 1 \}$ *est p. s. équi-répartie.*

Démonstration. — *i*) Comportement asymptotique de $\mathrm{E}(\mathscr{C}(x))$ quand x tend vers $+\infty$. Rappelons que $\sigma = (1 - p_0 - p_1)^{-1}$; l'équation intégrale *b*) de la proposition 2.I conduit sans difficultés à l'équation intégrale $(\theta(x) = \mathrm{E}(\mathscr{C}(x)))$:

$$(1.3)\quad \theta(x) = \sigma + 2\int_0^1 \theta(xy)dy \quad \text{si} \quad x \geqslant 1, = 0 \quad \text{si} \quad x < 1.$$

De (1.3) l'on déduit facilement (cf. démonstration de la proposition 1.II) que

$$(2.3)\quad \theta(x) = \sigma(2x - 1) \quad \text{si} \quad x \geqslant 1, = 0 \quad \text{si} \quad x < 1.$$

Par suite il est clair que

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \frac{E(\mathscr{C}(x))}{x} = 2\sigma. \tag{3.3}$$

C'est *à dessein* que nous donnons une autre démonstration de (3.3) : nous obtenons en même temps une *interprétation de la valeur limite dans* (3.3) : en se reportant au corollaire 1.I le lecteur observera que l'équation intégrale (1.3) prend la forme équivalente ($Z_1(x) = e^{-x}.\theta(e^x)$) :

$$Z_1(x) = Z_1 * \rho(x) + \sigma.e^{-x} \quad \text{sur} \quad R_+ \quad \text{avec} \quad \rho(dy) = 2.e^{-2y}.dy.$$

Appliquant l'assertion *b*) de la proposition 3.I, les conditions étant visiblement réalisées, on obtient :

$$\lim_{x \uparrow +\infty} Z_1(x) = \frac{\sigma}{m_1(\rho)} \tag{4.3}$$

d'où (3.3).

On vérifie bien que $m_1(\rho) = \frac{1}{2}$; mais si l'on suppose que ρ correspond à une loi de base μ quelconque, on vérifie sans difficultés que

$$m_1(\rho) = -\sigma \int_0^1 x(\text{Log } x) + (1 - x)(\text{Log } (1 - x))\mu(dx), \tag{5.3}$$

et si de plus ρ est non-arithmétique la limite dans (4.3) est manifestement maintenue. Revenant au cas présent, la limite dans (3.3) est donc égale à *l'inverse de l'entropie moyenne des partitions binaires induites par la subdivision* 0, X_1 et 1.

ii) Comportement asymptotique de var ($\mathscr{C}(x)$) quand x tend vers $+\infty$. Au lieu de résoudre l'équation intégrale *c*) de la proposition 2.I comme nous l'avons fait précédemment (cf. démonstration de la proposition 1.II), puisque seul nous est essentiel le comportement asymptotique de var ($\mathscr{C}(x)$) quand x tend vers $+\infty$, nous utilisons directement la proposition 3.I : en se reportant au corollaire 1.I le lecteur observera que

$$(Z_2(x) = e^{-x}.\text{var}(\mathscr{C}(e^x)))$$

est solution de l'équation de convolution sur $\mathbb{R}_+$

$$Z_2(x) = Z_2 * \rho(x) + \sigma.e^{-x}.J(e^x) \qquad \text{avec} \qquad \rho(dy) = 2.e^{-2y}.dy \tag{6.3}$$

et

$$J(e^x) = (p_0 + p_1) + \int_0^1 (\theta(e^x) - 1 - \theta(e^x(1 - y)) - \theta(e^x y))^2 dy.$$

Il n'est pas difficile de déduire de l'expression de $\theta(x)$ (cf. relation (2.3)) que la fonction $\theta(x) - 1 - \theta(x(1 - y)) - \theta(xy)$ est bornée selon le couple (x, y) pour $x \geqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$ et n'admet que des discontinuités de première espèce selon x aux points $(1-y)^{-1}$ et y^{-1}; de là il en résulte sans peine que $J(e^x)$ est bornée selon x sur $\mathbb{R}_+$ et Riemann-intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}_+$: par suite $e^{-x}.J(e^x)$ est directement intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Les conditions de l'assertion b) sont donc assurées, par suite

$$\lim_{x\uparrow+\infty} Z_2(x) = 2\int_0^{+\infty} \sigma.e^{-x}.J(e^x)dx. \tag{7.3}$$

Revenant à var $(\mathscr{T}(x))$, si l'on désigne par C_1 la valeur finie du second membre de (7.3), il va de soi que

$$\lim_{x\uparrow+\infty} \frac{\operatorname{var}(\mathscr{T}(x))}{x} = C_1.$$

iii) Comportement asymptotique de la fonction aléatoire $\{ \mathscr{T}(x), x \geqslant 0 \}$. Les arguments développés dans la démonstration du corollaire 1.II se maintiennent ici intégralement et impliquent de manière similaire :

$$\lim_{x\uparrow+\infty} \frac{\mathscr{T}(x)}{x} = 2\sigma \text{ p. s. .}$$

iv) Répartition de la suite $\{ X_n, n \geqslant 1 \}$.

Les arguments développés successivement dans les démonstrations du corollaire 2.II et du théorème 1.II se conservent ici et conduisent à :

$$\lim_{q\uparrow+\infty} \frac{N(q, I)}{q} = \lambda(I) \text{ p. s.}$$

pour tout intervalle I de [0, 1] (considérer d'abord I ouvert dans [0, 1]).

Nous allons maintenant étudier le cas d'une loi de base de la forme $\delta_0.p_0 + \delta_1.p_1 + \delta_\alpha.a + \delta_{(1-\alpha)}.b$; comme nous le verrons, dans la suite, ce cas se ramène pratiquement au cas d'une loi de base de la forme δ_α.

B*a*. Cas d'une loi de base de la forme δ_α

En ce cas la fonction aléatoire $\mathscr{T}$ est constante : l'équation intégrale b) de la proposition 2.I se réduit à :

$$\begin{aligned} &\mathscr{T}(x) = 1 + \mathscr{T}(x\alpha) + \mathscr{T}(x(1-\alpha)) \quad \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ &\mathscr{T}(x) = 0 \quad \text{si} \quad x < 1. \end{aligned} \tag{8.3}$$

L'équation de convolution sur $\mathbb{R}_+$ équivalente à (8.3) $(Z_1(x) = e^{-x}.\mathscr{T}(e^x))$ est :

$$Z_1(x) = Z_1 * \rho(x) + e^{-x} \quad \text{avec} \quad \rho = \alpha\delta_{-\operatorname{Log}\alpha} + (1-\alpha)\delta_{-\operatorname{Log}(1-\alpha)}. \tag{9.3}$$

L'étude du comportement asymptotique de $\mathscr{T}(x)$ quand x tend vers $+\infty$

est plus délicat : la probabilité ρ est susceptible d'être arithmétique, ce qui est équivalent à $\dfrac{\operatorname{Log}(1-\alpha)}{\operatorname{Log}\alpha} \in \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ = corps des rationnels). Nous nous limitons à la proposition suivante :

PROPOSITION 2.III. — *On a :*

a) $\displaystyle\lim_{x\uparrow+\infty} \frac{\mathscr{C}(x\alpha)}{\mathscr{C}(x)} = \alpha$ *et* $\displaystyle\lim_{x\uparrow+\infty} \frac{\mathscr{C}(x(1-\alpha))}{\mathscr{C}(x)} = 1-\alpha.$

b) Si $\dfrac{\operatorname{Log}(1-\alpha)}{\operatorname{Log}\alpha} \notin \mathbb{Q}$, $\displaystyle\lim_{x\uparrow+\infty} \frac{\mathscr{C}(x)}{x} = \frac{-1}{\alpha(\operatorname{Log}\alpha)+(1-\alpha)\operatorname{Log}(1-\alpha)}.$

Démonstration. — *i*) ρ est non-arithmétique.

Il est clair que $m_1(\rho) = -\alpha(\operatorname{Log}\alpha) - (1-\alpha)\operatorname{Log}(1-\alpha)$; l'assertion *b*) résulte immédiatement de l'assertion *b*) de la proposition 3.I appliquée à l'équation de convolution (9.3). Par suite, il est clair que l'assertion *b*) implique l'assertion *a*).

ii) ρ est arithmétique.

Soit γ le pas de la probabilité ρ. Soient p et q les entiers $\geqslant 1$ tels que

$$\frac{\operatorname{Log}(1-\alpha)}{q} = \frac{\operatorname{Log}\alpha}{p} = -\gamma. \tag{10.3}$$

Posons

$$C(x) = \frac{-\gamma}{\alpha(\operatorname{Log}\alpha)+(1-\alpha)\operatorname{Log}(1-\alpha)} \sum_{k/x+k.\gamma\geqslant 0} e^{-(x+k.\gamma)}.$$

L'assertion *c*) de la proposition 3.I implique

$$\lim_{n\uparrow+\infty} Z_1(x+n.\gamma) = C(x) \qquad \text{pour tout} \qquad x\in\mathbb{R} \tag{11.3}$$

Revenant à $\mathscr{C}(x)$, de (10.3) et (11.3) résulte que pour tout $x > 0$

$$\lim_{n\uparrow+\infty} \mathscr{C}\left(x.\alpha^{-\frac{n}{p}}\right) \Big/ x.\alpha^{-\frac{n}{p}} = C(\operatorname{Log} x). \tag{12.3}$$

On remarque que $C(\operatorname{Log} x\alpha) = C(\operatorname{Log} x)$ et que $C(\operatorname{Log} x)$ est *continue* en tout point x_0 tel que $\dfrac{\operatorname{Log} x_0}{\gamma} \notin \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ = ensemble des entiers relatifs).

Étudions d'abord le comportement du rapport

$$r_n(x_0) = \mathscr{C}\left(x_0(1+\varepsilon_n)\alpha^{-\frac{n}{p}}\right) \Big/ x_0(1+\varepsilon_n)\alpha^{-\frac{n}{p}} \tag{13.3}$$

quand n tend vers $+\infty$, $\{\varepsilon_n, n \geqslant 1\}$ désignant une suite de réels convergeant vers 0; pour cela nous distinguons deux cas :

1er CAS : $\dfrac{\operatorname{Log} x_0}{\gamma} \notin \mathbb{Z}$.

En utilisant le fait que $\mathscr{C}(x)$ croît selon x, de la relation (12.3) et de la *continuité* de $\mathrm{C}(\operatorname{Log} x)$ au point x_0, résulte sans difficultés que

$$\lim_{n \uparrow +\infty} r_n(x_0) = \mathrm{C}(\operatorname{Log} x_0). \tag{14.3}$$

2e CAS : $\dfrac{\operatorname{Log} x_0}{\lambda} \in \mathbb{Z}$.

En ce cas il existe un entier n_0 tel que $x_0 = \alpha^{-n_0/p}$; de (9.3) et de l'assertion *a*) de la proposition 3.I résulte que

$$\mathrm{Z}_1(x) = \int_0^x e^{-(x-y)}\mathrm{U}_\rho(dy) \tag{15.3}$$

d'où

$$\mathscr{C}(x) = \int_0^{\operatorname{Log} x} e^y \mathrm{U}_\rho(dy). \tag{16.3}$$

De (16.3) découle immédiatement que

$$\mathscr{C}(x_0(1+\varepsilon_n)\alpha^{-n/p}) = \mathscr{C}(x_0 . \alpha^{-n/p}) + \mathscr{E}(n),$$

avec

$$\begin{aligned} \mathscr{E}(n) &= \int_{((n_0+n)\gamma)+}^{(n_0+n)\gamma+\operatorname{Log}(1+\varepsilon_n)} e^y \mathrm{U}_\rho(dy) \qquad \text{si} \quad \varepsilon_n \geqslant 0 \\ \mathscr{E}(n) &= -\int_{((n_0+n)\gamma+\operatorname{Log}(1+\varepsilon_n))+}^{(n_0+n)\gamma} e^y \mathrm{U}_\rho(dy) \qquad \text{si} \quad \varepsilon_n < 0. \end{aligned} \tag{17.3}$$

Les intégrales définissant $\mathscr{E}(n)$ portent sur des intervalles de longueur strictement inférieure à γ dès que ε_n est assez petit; par suite, et de manière précise, comme U_ρ est portée par $\gamma . \mathrm{N}$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathscr{E}(n) &= 0 \qquad \text{si} \quad 0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant \alpha^{-1/p} - 1 \\ \mathscr{E}(n) &= -\alpha^{-(n_0+n)/p} . \mathrm{U}((n_0+n)\gamma) \qquad \text{si} \quad \alpha^{1/p} - 1 \leqslant \varepsilon_n < 0. \end{aligned} \tag{18.3}$$

De la proposition 4.I, de (12.3), de (17.3) et de (18.3) résulte donc que

$$\begin{aligned} &\lim_{n \uparrow +\infty/\varepsilon_n \geqslant 0} r_n(x_0) = \mathrm{C}(\operatorname{Log} x_0) \\ &\lim_{n \uparrow +\infty/\varepsilon_n < 0} r_n(x_0) = \mathrm{C}(\operatorname{Log} x_0) + \frac{\gamma}{\alpha(\operatorname{Log}\alpha) + (1-\alpha)\operatorname{Log}(1-\alpha)}. \end{aligned} \tag{19.3}$$

Comme $\mathrm{C}(\operatorname{Log} x\alpha) = \mathrm{C}(\operatorname{Log} x)$, de (14.3) et (19.3) résulte que

$$\lim_{n \uparrow +\infty} \frac{\mathscr{C}(x\alpha(1+\varepsilon_n)\alpha^{-n/p})}{\mathscr{C}(x(1+\varepsilon_n)\alpha^{-n/p}} = \alpha. \tag{20.3}$$

En comparant toute suite $\{ y_n, n \geqslant 1 \}$ convergeant vers $+\infty$ à la suite

$\{ \alpha^{-n/p}, n \geqslant 1 \}$, une simple application du théorème de Bolzano-Weierstrass permet de conclure à partir de (20.3) que

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \frac{\mathscr{C}(x\alpha)}{\mathscr{C}(x)} = \alpha.$$

La démonstration précédente reste inchangée si l'on remplace α par $1 - \alpha$ et p par q; en définitive la démonstration de l'assertion *a*) est achevée.

Désignons par $\{ m_n, n \geqslant 1 \}$ la suite des instants tels qu'à l'instant $m_n - 1$ ne subsiste qu'un intervalle de longueur maximale; les intervalles α-adiques ont des longueurs de la forme $\alpha^i(1 - \alpha)^j$ et les valeurs prises par la fonction $\mathscr{C}(x)$ sont visiblement celles de la suite $\{ m_n, n \geqslant 1 \}$:

$$\mathscr{C}(x) = m_n \qquad \text{pour} \qquad \mathrm{L}(m_n) < \frac{1}{x} \leqslant \mathrm{L}(m_{n-1}).$$

La répartition de la suite $\{ \mathrm{X}_n, n \geqslant 1 \}$ pour une loi de base δ_α est donnée par:

THÉORÈME 2.III. — (S. Kakutani [*3*], R. L. Adler et L. Flatto [*1*]).
Pour tout intervalle I *fixé de* 0,1 *on a :*

$$\lim_{q \uparrow +\infty} \frac{\mathrm{N}(m_q, \mathrm{I})}{m_q} = \lambda(\mathrm{I}), \quad \textit{et si} \quad \frac{\mathrm{Log}\,(1 - \alpha)}{\mathrm{Log}\,\alpha} \notin \mathbb{Q} \ \lim_{q \uparrow +\infty} \frac{\mathrm{N}(q, \mathrm{I})}{q} = \lambda(\mathrm{I}).$$

Démonstration. — De l'assertion *a*) de la proposition 2.III résulte clairement que

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \frac{\mathscr{C}(x(\alpha^i(1 - \alpha)^j))}{(x)} = \alpha^i(1 - \alpha)^j \tag{21.3}$$

d'où, pour tout intervalle α-adique $\mathrm{I}(p, n)$, compte tenu des considérations qui précèdent l'énoncé du théorème 2.III et du fait qu'à l'instant $\mathscr{C}(x)$ il y a précisément $\mathscr{C}(x\lambda(\mathrm{I}(p, n)))$ points de la suite $\{ \mathrm{X}_n, n \geqslant 1 \}$, à 1 ou 2 près, dans l'intervalle $\mathrm{I}(p, n)$ (cf. proposition 1.I), on a

$$\lim_{q \uparrow +\infty} \frac{\mathrm{N}(m_q, \mathrm{I}(p, n))}{m_q} = \lambda(\mathrm{I}(p, n)). \tag{22.3}$$

A partir de (22.3), des arguments similaires à ceux utilisés dans les démonstrations des corollaire 2.II et théorème 1.II conduisent au théorème 2-III.

B*b*. Cas d'une loi de base de la forme $\delta_0.p_0 + \delta_1.p_1 + \delta_\alpha.a + \delta_{(1-\alpha)}.b$.

1° CAS où $\mu = \delta_\alpha.a + \delta_{(1-\alpha)}.(1 - a)$.

Le lecteur remarquera facilement que la fonction aléatoire $\mathscr{C}$ est constante et ne dépend pas de a; les propositions 2.III et théorème 2.III restent inchangés.

2° Cas où $\mu = \delta_0.p_0 + \delta_1.p_1 + \delta_\alpha.a + \delta_{(1-\alpha)}.b$ avec $p_0 + p_1 > 0$. Les équations *b*) et *c*) de la proposition 2.I prennent la forme

$$(23.3)\quad \begin{aligned} \theta(x) &= \sigma + \theta(x\alpha) + \theta(x(1-\alpha)) && \text{si} \quad x \geqslant 1, = 0 \quad \text{si} \quad x < 1, \\ \nu(x) &= \sigma(\sigma-1) + \nu(x\alpha) + \nu(x(1-\alpha)) && \text{si} \quad x \geqslant 1, = 0 \quad \text{si} \quad x < 1. \end{aligned}$$

Le système (23.3) est équivalent à (cf. corollaire 1.I) :

$$(24.3)\quad \begin{aligned} Z_1(x) &= Z_1 * \rho(x) + \sigma.e^{-x} && \text{sur} \quad \mathbb{R}_+, \\ Z_2(x) &= Z_2 * \rho(x) + \sigma(\sigma-1).e^{-x} && \text{sur} \quad \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

où $\rho = \alpha\delta_{-\operatorname{Log}\alpha} + (1-\alpha)\delta_{-\operatorname{Log}(1-\alpha)}$.

En s'appuyant sur la proposition 3.I le lecteur déduira de (24.3) le comportement asymptotique de $E(\mathscr{C}(x))$ et de var $(\mathscr{C}(x))$, puis celui de la fonction aléatoire $\{ \mathscr{C}(x), x \geqslant 0 \}$ quand x tend vers $+\infty$ [4] :

$$\lim_{x\uparrow+\infty} \frac{\mathscr{C}(\alpha x)}{\mathscr{C}(x)} = \alpha \quad \text{et} \quad \lim_{x\uparrow+\infty} \frac{\mathscr{C}(x(1-\alpha))}{\mathscr{C}(x)} = 1-\alpha \text{ p. s.,}$$

$$\lim_{x\uparrow+\infty} \frac{\mathscr{C}(x)}{x} = \frac{-\sigma}{\alpha(\operatorname{Log}\alpha) + (1-\alpha)\operatorname{Log}(1-\alpha)} \text{ p. s.}$$

si ρ est non-arithmétique.

Si ρ est non-arithmétique, *i. e.* $\dfrac{\operatorname{Log}(1-\alpha)}{\operatorname{Log}\alpha} \notin \mathbb{Q}$, des arguments similaires à ceux utilisés dans les démonstrations du corollaire 2.II et du théorème 1.II assurent que p. s. la suite $\{ X_n, n \geqslant 1 \}$ est équi-répartie.

Si $\dfrac{\operatorname{Log}(1-\alpha)}{\operatorname{Log}\alpha} \in \mathbb{Q}$, des arguments analogues à ceux utilisés dans la démonstration du théorème 2.III assurent que pour tout intervalle fixé I de [0, 1]

$$\lim_{x\uparrow+\infty} \frac{N(\mathscr{C}(x), I)}{\mathscr{C}(x)} = \lambda(I) \text{ p. s.}.$$

IV. ENTROPIE D'UNE SUBDIVISION DISCRÈTE DE [0, 1] ET PROCÉDURE DE KAKUTANI CONVENABLEMENT GÉNÉRALISÉE

Soit S une subdivision discrète finie ou infinie de [0, 1] :
$S = \{ a_i, i \in \mathbb{D} / 0 < a_i < a_{i+1} < 1 \}$ où $\mathbb{D} = \{ 1, 2, \ldots, m \}$, ou $\mathbb{Z}$, ou $\mathbb{N}_1$ ($\mathbb{N}_1 = \{ 1, 2, \ldots, n, \ldots \}$), ou $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$; les seuls points *d'accumulation* éventuels de S_1 dans [0, 1] étant 0 ou 1.

(4) Si ρ est arithmétique remarquer que $\mathscr{C}(x) = \mathscr{C}'(x) + \sum_{n=1}^{\mathscr{C}'(x)} Y_n$, où $\mathscr{C}'(x)$ est solution de (8.3) et les Y_n, $n \geqslant 1$, sont indépendantes de loi binomiale $(1, p_0 + p_1)$, puis appliquer la loi forte des grands nombres et la proposition 2.III.

Si $\mathbb{D} = \{ 1, 2, \ldots, m \}$ nous posons $l_0 = a_1, l_i = a_i - a_{i-1}, l_m = 1 - a_m$ et $\overline{\mathbb{D}} = \{ 0, 1, 2, \ldots, m \}$; si $\mathbb{D} = \mathbb{N}_1$, $l_0 = a_1$, $l_i = a_i - a_{i-1}$ et $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{N}$; si $\mathbb{D} = \mathbb{Z} - \mathbb{N}$, $l_0 = 1 - a_{-1}$, $l_i = a_i - a_{i-1}$ et $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{Z} - \mathbb{N}_1$. Il est clair que $\sum_{i \in \overline{\mathbb{D}}} l_i = 1$.

Deux subdivisions $S = \{a_i, i \in \mathbb{D}\}$ et $S' = \{a'_i, i \in \mathbb{D}'\}$ sont dites *équivalentes* si les suites $\{ l_i, i \in \overline{\mathbb{D}} \}$ et $\{ l'_i, i \in \overline{\mathbb{D}'} \}$ sont *identiques à une bijection près* de $\overline{\mathbb{D}}$ sur $\overline{\mathbb{D}}'$.

Une subdivision S est dite logarithment-arithmétique (en abrégé l. a.) si la probabilité $\sum_{i \in \overline{\mathbb{D}}} l_i . \delta_{-\mathrm{Log}\, l_i}$ est arithmétique, logarithment-non-arithmétique (= l. n. *a*) sinon. Nous notons par H(S) l'entropie, pour la mesure de Lebesgue, de la subdivision S :

$$H(S) = \sum_{i \in \overline{\mathbb{D}}} - l_i . \mathrm{Log}\, l_i .$$

Partons d'une subdivision S_1 discrète, finie ou infinie, de [0, 1]; on partage [0, 1] suivant la subdivision S_1, puis l'on partage le plus grand intervalle situé le plus à gauche, déterminé par la subdivision S_1, suivant une subdivision S_2 homothétique de S_1, puis l'on partage le plus grand intervalle situé le plus à gauche, déterminé par la subdivision $S_1 \cup S_2$, suivant une subdivision S_3 homothétique de S_1, etc. Pour $n \geqslant 2$ les subdivisions $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$ ne sont pas nécessairement discrètes; néanmoins elles n'admettent dans [0, 1] qu'un nombre fini (nul si S_1 est fini) de points d'accumulation, ce qui donne un sens à la procédure ci-dessus. Soit $\overline{\mathscr{T}}(x)$ l'instant minimum auquel la longueur maximale des intervalles déterminés par la subdivision $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{\overline{\mathscr{T}}(x)}$ devient strictement inférieure à $\frac{1}{x}$ ($\overline{\mathscr{T}}(0) = 0$).

DÉFINITION 1.IV. — *Partant d'une subdivision discrète* S *de* 0,1 *la fonction* $\overline{\mathscr{T}}$ *associée à la procédure ci-dessus est appelée fonction-temps de* S.

Le lecteur n'aura pas de difficultés à transposer dans le cas présent les remarques 2 et 3 qui précèdent l'énoncé de la proposition 1.I; par suite on obtient :

PROPOSITION 1.IV. — *On a :*

$$\overline{\mathscr{T}}(x) = 1 + \sum_{i \in \overline{\mathbb{D}}} \overline{\mathscr{T}}(x . l_i) \qquad si \qquad x \geqslant 1,$$

$$\overline{\mathscr{T}}(x) = 0 \qquad\qquad si \qquad x < 1.$$

Posons $\overline{Z}_1(x) = e^{-x}.\,\overline{\mathscr{C}}(e^x)$. Le corollaire suivant est immédiat :

COROLLAIRE 1.IV. — *On a l'équation de convolution sur* $\mathbb{R}_+$:

$$\overline{Z}_1(x) = \overline{Z}_1 * \rho(x) + e^{-x} \qquad \textit{avec} \qquad \rho = \sum_{i \in \overline{\mathbb{D}}} -\, l_i . \delta_{-\operatorname{Log} l_i}.$$

De la proposition (3.I) et du corollaire 1.IV résulte que

$$\overline{\mathscr{C}}(e^x) = \int_0^x e^y \mathrm{U}_\rho(dy) \tag{2.4}$$

La connaissance de $\overline{\mathscr{C}}$ implique donc celle de la mesure potentielle U_ρ et par suite celle de ρ; compte tenu de la forme particulière de ρ le corollaire suivant est alors quasi-immédiat :

COROLLAIRE 2.IV. — *Deux subdivisions discrètes* S *et* S′ *sont équivalentes si et seulement si leurs fonctions-temps sont identiques.*

Les propositions 3.1 et 4.1 et des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration de la proposition 2.III conduisent à :

PROPOSITION 2.IV. — *Pour toute subdivision* S *discrète de* [0, 1] :

a) Si H(S) $< +\infty$, *quel que soit* l_i, $\displaystyle\lim_{x \uparrow +\infty} \frac{\overline{\mathscr{C}}(x.l_i)}{\overline{\mathscr{C}}(x)} = l_i$.

b) Si S *est l. n. a,* $\displaystyle\lim_{x \uparrow +\infty} \frac{\overline{\mathscr{C}}(x)}{x} = \frac{1}{\mathrm{H(S)}}$.

Nous n'avons pas pu démontrer l'assertion *a*) quand H(S) $= +\infty$. Nous laissons au lecteur le soin de modifier comme il convient l'assertion *b*) dans le cas où la subdivision S est l. a.

Pour tout intervalle I de [0, 1], nous posons $\mathrm{N}(n, \mathrm{I}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1_{\mathrm{I}}(\mathrm{S}_i)$. Soit $\{ m_n,\ n \geqslant 1 \}$ la suite des instants tels qu'à l'instant $m_n - 1$ ne subsiste qu'un intervalle de longueur maximale.

Le théorème suivant généralise le théorème 2.III :

THÉORÈME 1.IV. — *Pour tout intervalle* I *de* [0, 1] *sous l'hypothèse que* $\mathrm{H}(\mathrm{S}_1) < +\infty$:

$$\lim_{n \uparrow +\infty} \frac{\mathrm{N}(m_n, \mathrm{I})}{m_n} = \lambda(\mathrm{I}). \quad \textit{et si } \mathrm{S}_1 \textit{ est l. n. a} \quad \lim_{n \uparrow +\infty} \frac{\mathrm{N}(n, \mathrm{I})}{n} = \lambda(\mathrm{I}).$$

Démonstration. — Il est clair que tout intervalle I(*n*) fermé déterminé par la subdivision $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$ a une longueur de la forme $\prod_{i \in \overline{\mathbb{D}}} l_i^{p(i,n)}$, les $p(i, n)$ étant des entiers nuls en dehors d'un nombre fini. De la proposition 2.IV résulte donc que

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \frac{\overline{\mathscr{C}}(x, \lambda(\mathrm{I}(n)))}{\mathscr{C}(x)} = \lambda(\mathrm{I}(n)).$$

Mais $\overline{\mathscr{C}}(x . \lambda(\mathrm{I}(n)))$ est précisément égal à $\mathrm{N}(\overline{\mathscr{C}}(x), \mathrm{I}(n))$, à 1 ou 2 près (cf. aux arguments qui précèdent la proposition 1.I et que le lecteur étendra sans difficultés au cas présent); comme pour la démonstration du théorème 2.III les arguments utilisés dans les démonstrations du corollaire 2.II et du théorème 1.II s'étendent au cas présent et conduisent facilement au théorème 1.IV.

V. CONCLUSION

1° Les méthodes utilisées dans cet article sont susceptibles d'élucider le problème de la répartition des suites de Kakutani pour une loi de base μ quelconque; pour cela, il suffirait que

$$\mathrm{J}(x) = \int_0^1 (\theta(x) - 1 - \theta(xy) - \theta(x(1 - y)))^2 \mu(dy)$$

soit $0(x^\beta)$ pour un $\beta < 2$ quand $x \uparrow +\infty$; ceci impliquerait alors que

$$(1.5) \quad \lim_{x \uparrow +\infty} \frac{\mathscr{C}(x)}{x} = \frac{-1}{\int_0^1 x(\operatorname{Log} x) + (1 - x) \operatorname{Log}(1 - x)\mu(dy)} \text{ p. s.}$$

(mis à part le cas des lois de base μ dont la symétrisée $\bar{\mu}$ (cf. partie I) est portée sur $]0, 1[$ par une progression *géométrique*). Nous n'avons pu obtenir en général que la convergence en *probabilité* dans (1.5). Nous posons alors les questions :

Question a. — Quel est le comportement asymptotique de $\mathrm{J}(x)$ quand $x \uparrow +\infty$ pour une loi de base μ quelconque ([5]) ?

Question b. — Quelles sont les mesures sur $]0, 1[$ symétriques par rapport au point $\frac{1}{2}$ et portées par une progression géométrique ?

([5]) Dans un article à paraître [*6*] (ou voir [*5*]) nous donnons une réponse essentiellement quand μ admet une composante absolument continue non nulle, en déduisons (1.5) et l'équi-répartition de la suite de Kakutani associée.

Il conviendrait ensuite de généraliser le théorème 1.IV au cas d'une subdivision de base S_1 aléatoire.

2° La partie IV suggère d'associer à toute probabilité $\{p_i, i \in \mathbb{Z}\}$ sur $\mathbb{Z}$ la fonction-temps $\overline{\mathscr{C}}(x)$ définie par

$$\overline{\mathscr{C}}(x) = 1 + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \overline{\mathscr{C}}(x . p_i) \quad \text{si} \quad x \geqslant 1, = 0 \quad \text{si} \quad x < 1.$$

Quel intérêt peut avoir dans le cadre de la théorie ergodique la fonction-temps $\overline{\mathscr{C}}(x)$?

REMERCIEMENTS

Je remercie J.-P. Thouvenot qui m'a communiqué une prépublication de [*1*], J. Neveu pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail, O. Adelmann, B. Bru, H. Heinich et J. F. Ledrappier pour les conversations échangées avec eux.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] B. L. ADLER et L. FLATTO, Uniform distribution of Kakutani's interval splitting procedure. *Z. Wahrscheinlichkeistheorie verw. Gebiete*, t. **38**, 1977, p. 253-259.
[*2*] W. FELLER, *Introduction to Probability Theory and its applications*, vol. II.
[*3*] S. KAKUTANI, dans *Lectures Notes*, vol. **541**, Measure Theory, Oberwolfach, 1975, Proceedings.
[*4*] J. C. LOOTGIETER, Sur la répartition des suites de Kakutani. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **285** (19 septembre 1977), p. 403-406.
[*5*] J. C. LOOTGIETER, Sur la répartition des suites de Kakutani (II). *C. R. Acad. Sci.* Paris (à paraître).
[*6*] J. C. LOOTGIETER, Sur la répartition des suites de Kakutani (II). *Ann. Inst. Henri Poincaré* (à paraître).
[*7*] W. L. SMITH, Proceedings of The Royal Society of Edinburgh, 1954, p. 9-48.
[*8*] W. R. VAN ZWET, A proof of a conjecture of Kakutani, 1977. *Ann. of Probability* (à paraître).

(Manuscrit reçu le 8 septembre 1977)