

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MICHEL DELASNERIE

## **Flot mélangeant et mesures de Palm**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 13, n° 4 (1977), p. 357-369

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1977\\_\\_13\\_4\\_357\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1977__13_4_357_0)

© Gauthier-Villars, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section B* » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

## Flot mélangeant et mesures de Palm

par

**Michel DELASNERIE**

Laboratoire de Calcul des Probabilités (\*),  
Université Pierre-et-Marie-Curie (Paris VI),  
4, place Jussieu, Tour 56, 75230 Paris Cedex 05

---

**RÉSUMÉ.** — On considère un flot mélangeant  $(\Omega, \mathcal{A}, P, (\theta_t; t \in \mathbb{R}))$ . Soit  $\widehat{P}$  la mesure de Palm associée à une mesure aléatoire définie sur le flot. L'objet de ce travail est l'étude du comportement asymptotique des translates  $\theta_x \widehat{P}$  de  $\widehat{P}$ , compte tenu de la propriété de mélange. Si  $\widehat{P}$  est en particulier une probabilité, on montre que  $\theta_x \widehat{P}$  tend vers  $P$  lorsque  $x \rightarrow \pm \infty$ .

**SUMMARY.** — Let  $(\Omega, \mathcal{A}, P, (\theta_t; t \in \mathbb{R}))$  be a mixing flow and  $\widehat{P}$  be the Palm measure of a random measure defined on the flow. The aim of this paper is to study the asymptotic behaviour of the translates  $\theta_x \widehat{P}$  of  $\widehat{P}$ , taking into account the mixing property. If, in particular,  $\widehat{P}$  is a probability measure we show that  $\theta_x \widehat{P}$  tends to  $P$  when  $x \rightarrow \pm \infty$ .

---

### 1. DÉFINITIONS, NOTATIONS ET QUELQUES RAPPELS

Sur un espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{A})$ , un *flot mesurable* est un groupe à un paramètre  $(\theta_t; t \in \mathbb{R})$  de bijections bimesurables de  $\Omega$  sur lui-même, tel que l'application  $(t, \omega) \rightarrow \theta_t \omega$  de  $\mathbb{R} \times \Omega$  dans  $\Omega$  soit mesurable, la droite réelle  $\mathbb{R}$  étant munie de sa tribu borélienne  $\mathcal{B}$ .

Pour nous, l'exemple fondamental de flot mesurable est le flot des transla-

---

(\*) Laboratoire associé au C. N. R. S., n° 224. « Processus stochastiques et Applications ».

tions sur le cône  $M$  des mesures de Radon positives sur  $\mathbb{R}$ . Ce cône  $M$  est muni de la tribu borélienne  $\mathcal{M}$ , correspondant à la topologie vague. Le flot des translations sur  $(M, \mathcal{M})$ , noté  $(\tau_t; t \in \mathbb{R})$ , est défini pour  $x \in \mathbb{R}$  par

$$\tau_x m(a) = \int a(t) \tau_x m(dt) = \int a(t - x) m(dt) = m(a(\cdot - x)),$$

pour toute mesure  $m \in M$  et toute fonction  $a \in C_k$ , l'espace des fonctions réelles définies sur  $\mathbb{R}$ , continues et à support compact. On sait ([4], p. 58 ; [5], p. 55) que ce flot possède la propriété de mesurabilité énoncée ci-dessus. Parmi les éléments de  $M$  on désigne par  $m_0$  la mesure de Lebesgue ( $m_0(dt) = dt$ ), et par  $\delta_x$  la mesure de Dirac unité en  $x \in \mathbb{R}$ , elle est définie par  $\delta_x(A) = \Pi_A(x)$  où  $\Pi_A$  désigne la fonction indicatrice du sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}$ .

Une mesure aléatoire (réelle)  $N$  est une application mesurable de  $(\Omega, \mathcal{A})$  dans  $(M, \mathcal{M})$  qui commute avec les flots, c'est-à-dire telle que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on ait  $N \circ \theta_x = \tau_x \circ N$  ou

$$N(\theta_x \omega; a) = \int a(t) N(\theta_x \omega; dt) = \int a(t - x) N(\omega; dt) = N(\omega; a(\cdot - x)),$$

pour tout  $\omega \in \Omega$  et toute fonction  $a \in C_k$ . On notera par  $\mathcal{A}_N$  l'image réciproque de la tribu  $M$  par  $N$ ; elle est invariante par le flot  $(\theta_t; t \in \mathbb{R})$  et  $(\Omega, \mathcal{A}_N, (\theta_t; t \in \mathbb{R}))$  est aussi un flot mesurable.

Une probabilité  $P$  sur  $(\Omega, \mathcal{A}, (\theta_t; t \in \mathbb{R}))$  est *stationnaire* si elle est invariante par le flot, c'est-à-dire si

$$\int f(\theta_x \omega) P(d\omega) = \int f(\omega) P(d\omega),$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et pour toute fonction positive  $f$  mesurable sur  $\Omega$ . On dira également que le flot  $(\Omega, \mathcal{A}, P, (\theta_t; t \in \mathbb{R}))$  est stationnaire.

Une probabilité  $P$  sur  $(\Omega, \mathcal{A}, (\theta_t; t \in \mathbb{R}))$  est *mélangeante* si elle est stationnaire et, si pour tout événement  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{A}$ , on a

$$P(A \cap \theta_x^{-1} B) \rightarrow P(A) \cdot P(B).$$

Lorsque  $x \rightarrow \pm \infty$ . Une probabilité  $P$  mélangeante est *a fortiori ergodique* pour le flot, c'est-à-dire que tout événement invariant est de probabilité 0 ou 1. Un événement  $A \in \mathcal{A}$  est *invariant* si pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $\theta_x^{-1} A = A$ . L'ensemble des événements invariants forme une sous-tribu  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{A}$ . La condition de mélange est, bien entendu, équivalente à chacune des deux conditions suivantes :

$$(1) \int f(\omega) g(\theta_x \omega) P(d\omega) \rightarrow \int f dP \cdot \int g dP \text{ pour tout } f \text{ et } g \in L^2(P),$$

$$(2) \int f(\omega)g(\theta_x\omega)P(d\omega) \rightarrow \int fdP. \int gdP \text{ pour tout } f \in L^1(P) \text{ et } g \in L^\infty(P),$$

lorsque  $x \rightarrow \pm \infty$ .

Étant donné une mesure aléatoire N définie sur un flot stationnaire  $(\Omega, \mathcal{A}, P, (\theta_t; t \in \mathbb{R}))$ . La *mesure de Palm*  $\widehat{P}_N$  de N est l'unique mesure  $\sigma$ -finie et positive sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  vérifiant ([4])

$$(3) \int f(t, \theta_t\omega, \omega)N(\omega; dt)P(d\omega) = \int f(-t, \omega, \theta_t\omega)d\widehat{P}(d\omega),$$

pour toute fonction f mesurable sur  $\mathbb{R} \times \Omega \times \Omega$ , positive ou réelle mais telle que l'un des deux membres de (3) soit fini pour la valeur absolue |f| de f. On remarque que la probabilité P, elle-même, est la mesure de Palm de la mesure aléatoire identiquement égale à la mesure de Lebesgue  $m_0$  sur  $\mathbb{R}$ . Dans la suite une mesure aléatoire sera toujours définie sur un flot stationnaire  $(\Omega, \mathcal{A}, P, (\theta_t; t \in \mathbb{R}))$ .

Une mesure aléatoire N est du *premier ordre* si sa mesure de Palm  $\widehat{P}_N$  est bornée. La quantité  $\lambda_N = \widehat{P}_N(\Omega)$  est l'*intensité* de N et la probabilité  $\widehat{Q}_N = \lambda_N^{-1} \cdot \widehat{P}_N$  est la *probabilité de Palm* de N.

Une mesure aléatoire N est du *second ordre* si  $N(\cdot, a) \in L^2(P)$  pour toute fonction  $a \in C_k$ . La mesure positive  $\sigma_N$  sur  $\mathbb{R}$ , associée à la mesure aléatoire N par

$$\sigma_N(A) = \int N(\omega; A)\widehat{P}_N(d\omega).$$

pour tout  $A \in \mathcal{B}$ , est de Radon si et seulement si N est du second ordre. De plus ([5] prop. II.22)

$$(4) \text{Sup} \{ \sigma_N(t + K); t \in \mathbb{R} \} < \infty,$$

pour tout compact K de  $\mathbb{R}$ , t + K désignant le translaté de K par t. Enfin une mesure aléatoire du second ordre est, *a fortiori*, du premier ordre.

Un *processus ponctuel* N est une mesure aléatoire dont toutes les réalisations non nulles  $N(\omega)$  sont des sommes dénombrables de masses de Dirac unités, distinctes et placées sur une suite de points de  $\mathbb{R}$  ne s'accumulant qu'en  $-\infty$  et  $+\infty$ . Soit  $(T_n; n \in \mathbb{Z})$  cette suite strictement croissante de variables aléatoires définies sur  $(N \neq 0) \in \mathcal{A}_N$ ; on la numérote de telle

manière que  $T_0 \leq 0 < T_1$  et on a  $N = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_{T_n}$  sur  $(N \neq 0)$ .

La mesure de Palm  $\widehat{P}_N$  d'un processus ponctuel N est portée par l'événement P-négligeable

$$\widehat{\Omega}_N = (N(\cdot; \{0\}) = 1) = (T_0 = 0) \in \mathcal{A}_N;$$

et elle est invariante par la transformation  $\widehat{\theta}_N = \theta_{T_1}$  de  $\widehat{\Omega}_N$ . La formule

$$(5) \quad \int f(\omega)P(d\omega) = \int_{\widehat{\Omega}_N} \left( \int_0^{T_1(\omega)} f(\theta_t, \omega) dt \right) \widehat{P}_N(d\omega)$$

est une conséquence de (3).

Soit  $\mu$  une probabilité sur  $\mathbb{R}_+$  telle que  $\int x\mu(dx) < \infty$ , un processus de renouvellement  $N$ , associé à  $\mu$ , est un processus ponctuel du second ordre jamais nul, tel que la suite  $(T_{n+1} - T_n; n \in \mathbb{Z})$ , définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \widehat{Q}_N)$ , soit une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi  $\mu$ . On dira qu'un processus de renouvellement  $N$ , associé à  $\mu$ , est non-arithmétique si le semi-groupe additif engendré par le support de  $\mu$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . Avec cette hypothèse, on sait [2] que le flot  $(\Omega, \mathcal{A}_N, P, (\theta_t; t \in \mathbb{R}))$  est mélangeant ; car, d'après (5), il est isomorphe au flot sous la fonction  $T_1$  construit au-dessus du système dynamique  $(\widehat{\Omega}_N, \widehat{\mathcal{A}}_N, \widehat{Q}_N, \widehat{\theta}_N)$ , où  $\widehat{\mathcal{A}}_N = \widehat{\Omega}_N \cap \mathcal{A}_N$  est la trace de la tribu  $\mathcal{A}_N$  sur l'événement  $\widehat{\Omega}_N$ .

## 2. PREMIER THÉORÈME

Commençons par introduire deux familles remarquables de fonctions réelles définies sur  $\Omega$  et  $\mathcal{A}$ -mesurables. La première, associée à chaque mesure aléatoire  $N$ , est l'ensemble  $H^1(N)$  des fonctions  $F$  de la forme :

$$(6) \quad F(\omega) = \int a(t)f(\theta_t, \omega)N(\omega; dt),$$

pour toute fonction réelle  $a \in L^1(m_0)$ , telle que  $\int a(t)dt = 1$ , et pour toute fonction réelle  $f \in L^1(\widehat{P}_N)$ . Quant à la seconde famille, notée  $H^\infty$ , elle est constituée des fonctions  $G$  de la forme :

$$(7) \quad G(\omega) = \int a(-t)g(\theta_t, \omega)dt,$$

pour toute fonction réelle  $a \in L^1(m_0)$ , telle que  $\int a(t)dt = 1$ , et pour toute fonction réelle  $g \in L^\infty(P)$ . Les propriétés de ces deux classes de fonctions sont résumées dans le

LEMME. — *i) La famille  $H^1(N)$  est contenue dans  $L^1(P)$ , et totale dans cet espace si et seulement si  $N(\omega) \neq 0$  pour  $P$ -presque tout  $\omega$ .*

*ii) La famille  $H^\infty$  est contenue et totale dans  $L^\infty(\widehat{P}_N)$  faible pour toute mesure aléatoire  $N$ .*

*Démonstration.* — *i)* Soit  $F \in H^1(N)$  de la forme (6) ; alors, grâce à (3), on a

$$\int |F| dP \leq \int |a(t)| |f(\theta_t \omega)| N(\omega ; dt) P(d\omega) = \int |a(t)| dt \cdot \int |f| d\hat{P} < \infty ;$$

et ainsi  $F \in L^1(P)$ .

Maintenant, supposons que, pour une fonction  $g \in L^\infty(P)$ , on ait  $\int Fg dP = 0$ , pour toute  $F \in H^1(N)$ . En vertu de (3), on obtient

$$\int a(t) f(\theta_t \omega) g(\omega) N(\omega ; dt) P(d\omega) = \int a(-t) f(\omega) g(\theta_t \omega) dt \hat{P}_N(d\omega) = 0,$$

pour toute action  $a \in L^1(m_0)$ , telle que  $\int a(t) dt = 1$ , et pour toute fonction  $f \in L^1(\hat{P}_N)$ . Ce qui prouve que la fonction  $(t, \omega) \rightarrow g(\theta_t \omega)$  est négligeable pour la mesure  $m_0 \otimes \hat{P}_N$  sur  $\mathbb{R} \times \Omega$ . D'où

$$0 = \int |g(\theta_t \omega)| dt \hat{P}_N(d\omega) = \int |g(\omega)| N(\omega ; \mathbb{R}) P(d\omega).$$

Donc, la fonction  $g$  est nulle  $P$ -presque sûrement sur l'ensemble invariant  $(N \neq 0)$ . Nous avons ainsi démontré que la famille  $H^1(N)$  est totale dans  $L^1(P)$ , dès que  $P(N = 0) = 0$ .

Réciproquement, on remarque que tous les éléments de  $H^1(N)$  sont nuls sur l'événement  $(N = 0)$ . Donc la classe  $H^1(N)$  ne peut être totale dans  $L^1(P)$  si  $P(N = 0) > 0$ .

*ii)* Soit  $N$  une mesure aléatoire sur  $\Omega$  et soit  $G \in H^\infty$  de la forme (7). Alors pour tout  $f \in L^1(\hat{P}_N)$ , on a

$$\begin{aligned} \int f G d\hat{P}_N &= \int a(-t) f(\omega) g(\theta_t \omega) dt \hat{P}_N(d\omega). \\ (8) \qquad \qquad &= \int a(t) f(\theta_t \omega) N(\omega ; dt) g(\omega) P(d\omega), \end{aligned}$$

d'après (3). Mais comme  $g \in L^\infty(P)$ , toujours en vertu de (3) on peut écrire

$$\begin{aligned} \left| \int f G d\hat{P}_N \right| &\leq \|g\|_\infty \cdot \int |a(t) f(\theta_t \omega)| N(\omega ; dt) P(d\omega) \\ &\leq \|g\|_\infty \cdot \int |a(-t)| dt \cdot \int |f| d\hat{P}_N < \infty. \end{aligned}$$

Ainsi la fonction  $G$  appartient à  $L^\infty(\hat{P}_N)$ .

Maintenant, supposons que pour une fonction  $f \in L^1(\hat{P}_N)$  on ait  $\int f G d\hat{P}_N = 0$ , pour toute fonction  $G \in H^\infty$ . En considérant (8), on voit que

la fonction  $(t, \omega) \rightarrow f(\theta_t \omega)$  est nulle presque partout par rapport à la mesure  $\sigma$ -finie  $N(\omega; dt)\widehat{P}_N(d\omega)$ . D'où

$$0 = \int |f(\theta_t \omega)| N(\omega; dt)P(d\omega) = \infty \cdot \int |f| d\widehat{P}_N.$$

Donc, la fonction  $f$  est nulle  $\widehat{P}_N$ -presque partout. Ce qui prouve que la famille  $H^\infty$  est totale dans  $L^\infty(\widehat{P}_N)$  muni de la topologie faible  $\sigma(L^\infty, L^1)$ . ■

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le premier théorème ; celui-ci ne fait aucune hypothèse sur l'ordre des mesures aléatoires.

**THÉORÈME 1.** — *Si la probabilité  $P$  est mélangeante, alors pour toute mesure aléatoire  $N$ , on a*

$$(9) \quad \int f(\omega)G(\theta_x \omega)\widehat{P}_N(d\omega) \rightarrow \int f(\omega)\widehat{P}_N(d\omega) \cdot \int G(\omega)P(d\omega)$$

lorsque  $x \rightarrow \pm \infty$ , pour toute fonction  $f \in L^1(\widehat{P}_N)$  et  $G \in H^\infty$ .

*Inversement, si on a (9) pour une mesure aléatoire  $N$ , pour toute fonction  $f \in L^1(\widehat{P}_N)$  et toute fonction  $G \in H^\infty$ , alors la probabilité  $P$  est mélangeante.*

*Démonstration.* — On suppose donc  $P$  mélangeante et soit  $G$  de la forme (7) ; alors, grâce à (3), on peut écrire, successivement

$$(10) \quad \begin{aligned} \int f(\omega)G(\theta_x \omega)\widehat{P}_N(d\omega) &= \int f(\omega)a(-t)g(\theta_{t+x}\omega)dt\widehat{P}_N(d\omega) \\ &= \int a(t)f(\theta_t \omega)N(\omega; dt)g(\theta_x \omega)P(d\omega) \\ &= \int F(\omega)g(\theta_x \omega)P(d\omega), \end{aligned}$$

où  $F \in H^1(N)$  est de la forme (6). D'après le lemme, cette fonction  $F$  est un élément de  $L^1(P)$ , tandis que  $g$  est un élément de  $L^\infty(P)$ . On peut donc appliquer à (10) la propriété de mélange. On obtient

$$(11) \quad \int f(\omega)G(\theta_x \omega)\widehat{P}_N(d\omega) \rightarrow \int F(\omega)P(d\omega) \cdot \int g(\omega)P(d\omega)$$

lorsque  $x \rightarrow \pm \infty$ . Mais, on a

$$(12) \quad \int F(\omega)P(d\omega) = \int f(\omega)\widehat{P}_N(d\omega) \quad \text{et} \quad \int G(\omega)P(d\omega) = \int g(\omega)P(d\omega),$$

car les fonctions  $F$  et  $f$  sont reliées par (6), tandis que  $G$  et  $g$  le sont par (7). D'où la limite (9).

Maintenant, on suppose (9) vrai pour une mesure aléatoire  $N$ . Alors, à cause de (12), on obtient (11) et, en vertu de (10), on a

$$\int F(\omega)g(\theta_x\omega)P(d\omega) \rightarrow \int F(\omega)P(d\omega) \cdot \int g(\omega)P(d\omega),$$

lorsque  $x \rightarrow \pm \infty$ , pour toute fonction  $F \in H^1(N)$  et  $g \in L^\infty(P)$ . Mais cette dernière limite est encore vraie, lorsque  $F$  parcourt le sous-espace vectoriel fermé de  $L^1(P)$  engendré par  $H^1(N)$  ; on le vérifie facilement, compte tenu de l'invariance de  $P$  par le flot. Pour obtenir la propriété (2) de mélange, il reste à démontrer que la famille  $H^1(N)$  est totale dans  $L^1(P)$  ; et donc, d'après le lemme, à prouver que  $P(N = 0) = 0$ . Or, l'événement  $(N = 0)$  étant invariant par le flot, son indicatrice est un élément de  $H^\infty$ . En effet, on peut écrire

$$(13) \quad \Pi_{(N=0)}(\omega) = \int a(-t)\Pi_{(N=0)}(\theta_t\omega)dt \in H^\infty,$$

pour n'importe quelle fonction  $a \in L^1(m_0)$ , telle que  $\int a(t)dt = 1$ . En remplaçant  $G$  par cette indicatrice dans la limite (9), on a

$$\int_{(N=0)} f(\omega)\widehat{P}_N(d\omega) = \int f(\omega)\widehat{P}_N(d\omega) \cdot P(N = 0).$$

pour toute fonction  $f \in L^1(\widehat{P}_N)$ . Mais le premier membre de cette dernière relation est nul, car, compte tenu de (13), il s'écrit aussi

$$\int a(-t)\Pi_{(N=0)}(\theta_t\omega)f(\omega)dt\widehat{P}_N(d\omega) = \int_{(N=0)} \left( \int a(t)f(\theta_t\omega)N(\omega ; dt) \right) P(d\omega) = 0.$$

Enfin, il suffit de choisir une fonction  $f$  telle que  $\int f d\widehat{P}_N \neq 0$ , pour obtenir que  $P(N = 0) = 0$ . Le théorème est démontré. ■

En posant  $f = 1$  dans le théorème et en désignant par  $\theta_x\widehat{Q}_N = \widehat{Q}_N \circ \theta_x^{-1}$  l'image de la probabilité  $Q_N$  par  $\theta_x(x \in \mathbb{R})$ , on a le

**COROLLAIRE.** — *Si la probabilité  $P$  est mélangeante et si la mesure aléatoire  $N$  est du premier ordre, on a*

$$(14) \quad \int G(\omega)\theta_x\widehat{Q}_N(d\omega) \rightarrow \int G(\omega)P(d\omega)$$

lorsque  $x \rightarrow \pm \infty$ , pour toute fonction  $G \in H^\infty$ .

Bien que la famille  $H^\infty$  soit totale dans  $L^\infty(\widehat{Q}_N)$ , il n'est pas possible de passer à la fermeture dans la limite (14), comme dans la démonstration de la partie réciproque du théorème 1. En particulier, il n'est pas vrai que  $\theta_x\widehat{Q}_N(A) = \widehat{Q}_N(\theta_x^{-1}A) \rightarrow P(A)$  lorsque  $x \rightarrow \pm \infty$ , pour tout  $A \in \mathcal{A}$ . En



voici un contre-exemple : soit  $N$  un processus ponctuel du premier ordre et soit  $A \in \mathcal{A}$  l'événement  $A = (N(\cdot; \mathbb{Z}) \geq 1) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \theta_n^{-1} \widehat{\Omega}_N$ . Alors  $P(A) = 0$ , tandis que, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\theta_n \widehat{Q}_N(A) = \widehat{Q}_N(A) = \widehat{Q}_N(\widehat{\Omega}_N) = 1.$$

Inversement, soit  $Q$  une probabilité sur un flot mesurable  $(\Omega, \mathcal{A}, (\theta_t; t \in \mathbb{R}))$  telle que  $(\theta_x Q; x \in \mathbb{R})$  ait une limite  $P$ , au sens du corollaire, lorsque  $x \rightarrow \pm \infty$ . Alors évidemment, la probabilité  $P$  est stationnaire, et on a  $Q(A) = P(A)$  pour tout  $A \in \mathcal{I}$ ; car pour un tel événement,  $\Pi_A$  appartient à  $H^\infty$ , comme on l'a vu pour  $(N = 0)$  par la formule (13). En particulier, la probabilité  $Q$  est absolument continue par rapport à  $P$  sur la tribu des événements invariants  $\mathcal{I}$ . Ce qui entraîne ([1] théorème (3.8)) l'existence d'une mesure aléatoire, du premier ordre et d'intensité 1, dont  $Q$  est la mesure de Palm.

### 3. UN THÉORÈME DU RENOUVELLEMENT

Ce paragraphe est consacré à un résultat de J. Neveu, résultat que l'on peut considérer comme une généralisation du théorème du renouvellement ([3] Ch. XI). Commençons par une définition : étant donné une mesure aléatoire  $N$  du second ordre, on dira que la probabilité  $P$  est *N-mélangeante* si

$$(15) \quad \int N(\omega; a)N(\theta_x \omega; b)P(d\omega) \rightarrow \lambda_N^2 \cdot \int a(t)dt \cdot \int b(u)du$$

lorsque  $x \rightarrow \pm \infty$ , pour toute fonction réelle  $b$  et  $a \in C_k$ . Si une probabilité  $P$  est mélangeante, elle est *a fortiori* *N-mélangeante* pour toute mesure aléatoire  $N$  du second ordre.

**THÉORÈME 2.** — *Soit  $N$  une mesure aléatoire du second ordre d'intensité  $\lambda_N$ . Alors, si la probabilité  $P$  est N-mélangeante,  $\tau_x \sigma_N$  converge vaguement vers  $\lambda_N^2 m_0$  lorsque  $x \rightarrow \pm \infty$ .*

*Démonstration.* — En utilisant la formule (3), puis le théorème de Fubini et enfin la définition de  $\sigma_N$ , on obtient successivement :

$$\begin{aligned} \int N(\omega; a)N(\theta_x \omega; b)P(d\omega) &= \int N(\theta_{x+t} \omega; b)a(-t)dt \widehat{P}_N(d\omega) \\ &= \int N(\theta_x \omega; b * \check{a})\check{P}_N(d\omega) \\ &= \int b * \check{a}(u)\tau_x \sigma_N(du), \end{aligned}$$

en désignant par  $\check{a}$  la fonction réelle  $t \rightarrow \check{a}(-t)$ , et par  $b * \check{a}$  le produit de convolution des deux fonctions  $\check{a}$  et  $b \in C_k$ . La propriété de N-mélange (15) devient donc

$$(16) \quad \int b * \check{a}(u) \tau_x \sigma_N(du) \rightarrow \lambda_N^2 \cdot \int b * \check{a}(u) du$$

lorsque  $x \rightarrow \pm \infty$ , pour toute fonction  $\check{a}$  et  $b \in C_k$ . Alors, on a la convergence

$$\int a(t) \tau_x \sigma_N(dt) \rightarrow \lambda_N^2 \cdot \int a(t) dt$$

lorsque  $x \rightarrow \pm \infty$ , pour toute fonction  $a \in C_k$ , et le théorème est démontré. ■

Si N est un processus de renouvellement non-arithmétique, le flot  $(\Omega, \mathcal{A}_N, P, (\theta_t; t \in \mathbb{R}))$  est mélangeant ; dans ce cas, le théorème 2 se réduit au théorème classique du renouvellement ([3] Ch. XI, th. 2).

#### 4. CONVERGENCE EN LOI

Débutons ce paragraphe par une définition intermédiaire entre celle de mélange et celle de N-mélange. Soit N une mesure aléatoire du premier ordre, on dira que la probabilité P est *fortement N-mélangeante*, si

$$\int N(\omega; a) f(\theta_x \omega) P(d\omega) \rightarrow \lambda_N \cdot \int a(t) dt \cdot \int f(\omega) P(d\omega)$$

lorsque  $x \rightarrow \pm \infty$ , pour toute fonction réelle  $a \in L^1(m_0)$  et toute fonction réelle  $f \in L^\infty(P)$ . Bien entendu, si une probabilité P est mélangeante, elle est aussi fortement N-mélangeante pour toute mesure aléatoire N du premier ordre. Et, il est également clair que, si la probabilité P est fortement N-mélangeante pour une mesure aléatoire du second ordre N, elle est aussi N-mélangeante pour cette même mesure aléatoire N.

Maintenant, introduisons la notion de convergence étroite des lois. Soit N une mesure aléatoire, sa *loi*, notée  $(P)_N$ , est la probabilité image de P par l'application N sur  $(M, \mathcal{M})$ . Si N est du premier ordre, sa *loi de Palm*, notée  $(\hat{Q})_N$ , est l'image de sa probabilité de Palm par N sur  $(M, \mathcal{M})$ . On rappelle qu'une suite de probabilités  $(P)_n$  sur  $(M, \mathcal{M})$  converge étroitement lorsque  $n \rightarrow \pm \infty$ , vers une probabilité (P) si, pour toute fonction réelle f définie sur M, bornée et continue pour la topologie vague, on a

$$(17) \quad \int f(m) (P)_n(dm) \rightarrow \int f(m) (P)(dm)$$

lorsque  $n \rightarrow \pm \infty$ . On sait ([5] Prop. I.16) que cette convergence est équivalente à la convergence des fonctionnelles de Laplace, c'est-à-dire à la convergence (17), pour les seules fonctions positives  $f$  sur  $M$  de la forme

$$f(m) = \exp \left( - \int b(t)m(dt) \right) = \exp(-m(b)).$$

où  $b \in C_k$  et  $\geq 0$ . Enfin, signalons que  $\tau_x(\widehat{Q})_N$  est la translatée par  $x \in \mathbb{R}$  de la loi de Palm  $(\widehat{Q})_N$ . Après ces quelques préliminaires, on peut énoncer et démontrer le

**THÉORÈME 3.** — *Soit  $N$  une mesure aléatoire du second ordre. Alors, si la probabilité  $P$  est fortement  $N$ -mélangeante,  $\tau_x(\widehat{Q})_N$  converge étroitement vers  $(P)_N$  lorsque  $x \rightarrow \pm \infty$ .*

*Démonstration.* — Il suffit de montrer que pour toute fonction positive  $b \in C_k$ , on a

$$(18) \quad B(x) = \int \exp(-N(\theta_x \omega; b)) \widehat{P}_N(d\omega) \rightarrow \lambda_N \cdot \int \exp(-N(\omega; b)) P(d\omega)$$

lorsque  $x \rightarrow \pm \infty$ . Pour une fonction positive  $a \in L^1(m_0)$ , telle que  $\int adm_0 = 1$ , le produit de convolution

$$a * B(x) = \int a(-t) \exp(-N(\theta_{x+t} \omega; b)) dt \widehat{P}_N(d\omega)$$

est aussi égal à

$$a * B(x) = \int N(\omega; a) \exp(-N(\theta_x \omega; b)) P(d\omega).$$

Et, par définition de la propriété de  $N$ -mélange fort,

$$(19) \quad a * B(x) \rightarrow \lambda_N \cdot \int \exp(-N(\omega; b)) P(d\omega)$$

lorsque  $x \rightarrow \pm \infty$ . Il ne reste plus qu'à démontrer que la fonction  $B$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ , pour déduire (18) de (19), cette dernière limite étant valable pour toute fonction positive  $a \in L^1(m_0)$ , telle que  $\int adm_0 = 1$ . Or, on a

$$\begin{aligned} |B(x) - B(y)| &\leq \int |\exp(-N(\theta_x \omega; b)) - \exp(-N(\theta_y \omega; b))| \widehat{P}_N(d\omega) \\ &\leq \int |N(\theta_x \omega; b) - N(\theta_y \omega; b)| \widehat{P}_N(d\omega) \\ &\leq \int |b(t-x) - b(t-y)| \sigma_N(dt). \end{aligned}$$

D'où

$$| B(x) - B(y) | \leq 2. \text{Sup } \sigma_N(t + K) \cdot \omega(b ; | x - y |),$$

en désignant respectivement par  $K$  et  $\omega(b ; \cdot)$  le support et le module de continuité uniforme de  $b \in C_k$ . Ce qui prouve, à cause de (4), l'uniforme continuité de la fonction  $B$  et achève la démonstration du théorème. ■

Puis de manière classique, on déduit le

COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses du théorème précédent, on a*

$$\int f(N(\theta_x \omega)) \widehat{Q}_N(d\omega) \rightarrow \int f(N(\omega)) P(d\omega)$$

*lorsque  $x \rightarrow \pm \infty$ , pour toute fonction réelle  $f$  bornée et continue en  $(P)_N$ -presque tous points de  $M$ .*

Terminons ce paragraphe par un exemple d'application du corollaire. Soit  $N$  un processus ponctuel du second ordre pour lequel la probabilité de Palm est fortement  $N$ -mélangeante. Alors, la loi de la variable aléatoire  $T_1 \circ \theta_x$ , relativement à la probabilité de Palm  $\widehat{Q}_N$ , converge étroitement vers la loi de  $T_1$ , relativement à la probabilité stationnaire  $P$ . En effet, pour toute fonction réelle  $f$  bornée et continue sur  $\mathbb{R}^+$ , la fonction  $m \rightarrow f(T_1(m))$  n'est discontinue que sur le sous-ensemble  $(P)_N$ -négligeable  $N(\widehat{\Omega}_N) \subset M$ . La convergence des moyennes de  $T_1 \circ \theta_x$  est traitée dans le paragraphe suivant.

### 5. COMPLÉMENTS

Soient  $N$  une mesure aléatoire du premier ordre et  $P$  une probabilité fortement  $N$ -mélangeante. Comme le suggère la démonstration du théorème 3, il est possible d'augmenter la classe des fonctions réelles  $f$ , mesurables sur  $\Omega$ , telles que  $\int f \circ \theta_x d\widehat{Q}_N$  converge vers  $\int f dP$  lorsque  $x \rightarrow \pm \infty$ . C'est le but de ce dernier paragraphe.

Soit  $f \in L^\infty(P)$ , l'expression

$$(20) \quad F(x) = \int f(\theta_x \omega) \widehat{P}_N(d\omega)$$

définit, pour  $m_0$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}$ , une fonction  $F \in L^\infty(m_0)$ , de norme inférieure ou égale à  $\lambda_N \cdot \|f\|_\infty$ . En effet, pour tout  $a \in L^1(m_0)$ , on a

$$\begin{aligned} \left| \int a(-t) \left( \int |f(\theta_t \omega)| \widehat{P}_N(d\omega) \right) dt \right| &\leq \int N(\omega ; |a|) |f(\omega)| P(d\omega) \\ &\leq \lambda_N \cdot \|f\|_\infty \cdot \int |a(-t)| dt < \infty. \end{aligned}$$

Mais si la mesure aléatoire  $N$  est de plus du second ordre, l'expression (20) définit, pour  $m_0$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}$ , une fonction  $F$  localement intégrable sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m_0)$  dès que  $f \in L^2(P)$ . En effet, pour tout intervalle borné  $I$  de  $\mathbb{R}$ , on a

$$\left| \int \Pi_I(-t) \left( \int |f(\theta_t \omega)| \widehat{P}_N(d\omega) \right) dt \right| \leq \|N(\cdot; I)\|_2 \cdot \|f\|_2 < \infty,$$

où  $\|\cdot\|_2$  est la norme dans  $L^2(P)$ . On considérera donc deux cas :

- i) la mesure aléatoire  $N$  est du premier ordre et la fonction  $f \in L^\infty(P)$ ,
- ii) la mesure aléatoire  $N$  est du second ordre et la fonction  $f \in L^2(P)$ .

Soit

$$a * F(x) = \int N(\omega; a) f(\theta_x \omega) P(d\omega).$$

le produit de convolution de la fonction  $F$ , définie par (20), avec  $a = \Pi_I$  l'indicatrice d'un intervalle borné  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Par la propriété de  $N$ -mélange fort,  $a * F(x)$  converge vers  $\lambda_N \cdot \int a dm_0 \cdot \int f dP$  lorsque  $x \rightarrow \pm \infty$ , dans chacun des deux cas. On peut en déduire la convergence de  $F(x)$ , lui-même, vers  $\lambda_N \cdot \int f dP$ , si la fonction  $F$  vérifie une propriété de platitude asymptotique unilatérale, c'est-à-dire si  $(F(x) - F(y))^+$  (ou  $(F(x) - F(y))^-$ ) tend vers 0 lorsque  $x \rightarrow \infty$  et  $x - y \rightarrow 0$  avec  $x \geq y$ . Rappelons rapidement comment on obtient alors la convergence de  $F(x)$  lorsque  $x \rightarrow \infty$ . On écrit

$$(21) \quad F(x) - \lambda_N \cdot \int f dP = \int (F(x) - F(x-t)) a(t) dt + a * F(x) - \lambda_N \cdot \int f dP.$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut choisir  $A$  et  $\eta > 0$  tels que, d'une part en posant  $a = \eta^{-1} \cdot \Pi_{(0, \eta)}$  dans le second membre de (21), on ait

$$F(x) - \lambda_N \cdot \int f dP < \varepsilon$$

dès que  $x > A$ , et que d'autre part en posant  $a = \eta^{-1} \cdot \Pi_{(-\eta, 0)}$  on ait

$$F(x) - \lambda_N \cdot \int f dP > -\varepsilon$$

dès que  $x > A$ .

Terminons par un exemple. Soit  $N$  un processus ponctuel du second ordre pour lequel la probabilité  $P$  est fortement  $N$ -mélangeante. Alors, comme

$$y + T_n \circ \theta_y \leq x + T_n \circ \theta_x \quad \text{si} \quad y \leq x,$$

la fonction  $x \rightarrow \int T_n \circ \theta_x d\widehat{P}_N$  est unilatéralement asymptotiquement plate. Donc, si  $T_n \in L^2(P)$ , on a

$$\int T_n \circ \theta_x d\widehat{Q}_N \rightarrow \int T_n dP \quad \text{lorsque} \quad x \rightarrow \pm \infty.$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BENVENISTE, Processus stationnaires et mesure de Palm du flot spécial sous une fonction. Séminaire de Probabilités IX, Université de Strasbourg. *Lecture Notes in Mathematics*, 465, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [2] F. BLANCHARD, K-flots et théorème de renouvellement. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, t. 36, 1976, p. 345-358.
- [3] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. II, J. Wiley, New York, 1966.
- [4] S. MECKE, Stationäre zufällige Masse auf lokalkompakten Abelschen Gruppen. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, t. 9, 1967, p. 36-58.
- [5] J. NEVEU, Cours sur les Processus Ponctuels. École d'Été de Saint-Flour, 1976. *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin (*à paraître*).

(Manuscrit reçu le 2 juin 1977).