ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

HALIM DOSS

Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires

Annales de l'I. H. P., section B, tome 13, nº 2 (1977), p. 99-125

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1977__13_2_99_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XIII, n° 2, 1977, p. 99-125.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires

par

Halim DOSS

Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris VI, Tour 56.
Laboratoire de probabilités, 4, Place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05

SUMMARY. — One shows that the integration of a stochastic differential equation in $\mathbb{R}$ can be reduced to the integration of an ordinary differential equation parametrized by a variable in the base probability space. We study some properties of the solution. This result remains true, under some conditions, in a finite or infinite dimensional case.

INTRODUCTION

On montre dans cet article que la résolution d'une équation différentielle stochastique dans $\mathbb{R}$

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s + \int_0^t b(X_s)ds$$

peut toujours se ramener à la résolution d'une équation différentielle ordinaire paramétrée par un élément ω variant dans l'espace de probabilité de base. Cette méthode s'applique aussi bien aux équations différentielles stochastiques par rapport à une semi-martingale continue quelconque. On prouve l'existence et l'unicité d'un processus solution.

En dimension finie ou infinie cette méthode reste valable à condition de supposer que l'équation aux différentielles totales :

$$\text{(E)} \quad Dy = \sigma(y)\,; \quad y(0) = \alpha$$

admet toujours une solution.

On obtient aisément des résultats précis concernant le comportement des trajectoires de la solution : des théorèmes d'approximation et de comparaison et une généralisation d'un résultat de Stroock et Varadhan sur le support des processus de diffusion.

I. Équations différentielles stochastiques

Soit $\Theta = (\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ un espace de probabilité complet (i. e. la famille croissante de sous-tribus $\mathscr{F}_t$ contient les ensembles négligeables de $\mathscr{F}$ et est continue à droite). Mr. N. Kazamaki a démontré [5] que l'équation différentielle stochastique

$$Z_t = x + \int_0^t f(Z_u)dN_u + \int_0^t g(Z_u)dU_u \qquad x \in \mathbb{R}$$

où $N = (N_t)$, $N_0 = 0$ est une martingale locale et $U = (U_t)$ est un processus continu croissant, admet, sous l'hypothèse que la famille $(\mathscr{F}_t)$ est quasi continue à gauche et lorsque les coefficients f et g sont lipschitziens de classe C^1, une solution unique. Il démontre cela grâce à un changement de temps et en utilisant la méthode classique de résolution des équations stochastiques d'Ito. Nous montrons d'une manière différente l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation différentielle stochastique (I) ci-dessous par rapport à une semi-martingale continue quelconque. De plus nous verrons qu'on obtient simplement de cette façon des résultats précis concernant le comportement des trajectoires de la solution. La méthode habituelle de résolution des équations stochastiques ne permet pas de mettre ces résultats en évidence.

Soit $M = (M_t)_{t \geq 0}$ une semi-martingale continue définie sur Θ telle que $M_0 = 0$ p. s. On note $\langle M \rangle$ l'unique processus croissant continu associé à la martingale locale N figurant dans la décomposition canonique de la semi-martingale M. Soient σ et b $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

1) σ et b sont lipschitziennes.

On définit l'application $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme solution des équations différentielles ordinaires

$$\text{2)} \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \frac{\partial h}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = \sigma(h(\alpha, \beta))\,;\ h(\alpha, 0) = \alpha$$

h existe puisque σ est lipschitzienne.

THÉORÈME 1. — Soient σ et b vérifiant la condition (1). Supposons de plus que σ soit de classe C^2.

Soit Y_0 une v. a. r. (variable aléatoire réelle) $\mathscr{F}_0$ mesurable p. s. finie. Il existe un processus $(Y_t)_{t \geq 0}$ continu, $\mathscr{F}_t$-adapté, unique à une indistinguabilité près qui est solution de l'équation différentielle stochastique.

$$(\mathrm{I})\quad \mathrm{Y}_t = \mathrm{Y}_0 + \int_0^t \sigma(\mathrm{Y}_s)d\mathrm{M}_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma'.\sigma(\mathrm{Y}_s)d\langle \mathrm{M}\rangle_s + \int_0^t b(\mathrm{Y}_s)ds \qquad \forall t \geq 0 \text{ p. s.}$$

La résolution de l'équation (I) est équivalente à la résolution pour presque tout $\omega \in \Omega$ des équations différentielles ordinaires :

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} \mathrm{D}_t'(\omega) = \exp\left(-\displaystyle\int_0^{\mathrm{M}_t(\omega)} \sigma'(h(\mathrm{D}_t(\omega), s))ds\right).(b(h(\mathrm{D}_t(\omega), \mathrm{M}_t(\omega)))) \\ \mathrm{D}_0(\omega) = \mathrm{Y}_0(\omega) \end{cases}$$

Le processus $(\mathrm{D}_t)_{t\geq 0}$ obtenu comme solution des équations (II) est adapté et vérifie les équations équivalentes suivantes

$$(3)\qquad \mathrm{Y}_t = h(\mathrm{D}_t, \mathrm{M}_t) \qquad t \geq 0 \text{ p. s.}$$

$$(4)\qquad \mathrm{D}_t = h(\mathrm{Y}_t, -\mathrm{M}_t) \qquad t \geq 0 \text{ p. s.}$$

Ces équations caractérisent de manière unique (à une indistinguabilité près) le processus $(\mathrm{D}_t)_{t\geq 0}$.

Commençons par énumérer quelques propriétés de la fonction h définie par (2).

LEMME 2. — On a

a) $\forall \alpha, \beta, \beta_1 \in \mathbb{R}\, h(\alpha, \beta) = h(h(\alpha, \beta_1), \beta - \beta_1)$

b) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \alpha = h(h(\alpha, \beta), -\beta)$

c) Si $\alpha_1 < \alpha_2$ $h(\alpha_1, \beta) < h(\alpha_2, \beta)$ $\forall \beta \in \mathbb{R}$

d) Lorsque σ est de plus de classe C^2 (resp. C^1) l'application h est de classe C^2 (resp. $\mathrm{C}^{1,2}$) et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ on a :

① $$\frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = \exp\left(\int_0^\beta \sigma'(h(\alpha, s))ds\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial \beta^2}(\alpha, \beta) = \sigma'.\sigma(h(\alpha, \beta))$$

② $$1 = \frac{\partial h}{\partial \alpha}(h(\alpha, \beta), -\beta) . \frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, \beta)$$

$$0 = \frac{\partial h}{\partial \alpha}(h(\alpha, \beta), -\beta)\frac{\partial h}{\partial \beta}(\alpha, \beta) - \frac{\partial h}{\partial \beta}(h(\alpha, \beta), -\beta)$$

③ $$\frac{\partial h}{\partial \beta}(\alpha, -\beta) = \sigma(\alpha) . \frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, -\beta)$$

④ $$\frac{\partial^2 h}{\partial \alpha^2}(\alpha, -\beta) . \sigma^2(\alpha) - 2\frac{\partial^2 h}{\partial \alpha \partial \beta}(\alpha, -\beta).\sigma(\alpha) + \frac{\partial^2 h}{\partial \beta^2}(h(\alpha, -\beta), \beta)\frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, -\beta) + \frac{\partial^2 h}{\partial \beta^2}(\alpha, -\beta) = 0.$$

Preuve. — On démontre les propriétés *a*) et *b*) grâce à l'unicité de la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \phi' = \sigma(\phi) \\ \phi(0) = \alpha \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

c) est une conséquence de *b*)

Les propriétés *d*) se prouvent par différenciation et en utilisant l'identité *b*)

PREUVE DU THÉORÈME 1

Existence. — Pour tout $\omega \in \Omega$ considérons l'application $f_\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_\omega(t, x) = \exp\left(- \int_0^{M_t(\omega)} \sigma'(h(x, s))ds \right) . b(h(x, M_t(\omega))) .$$

Compte tenu des hypothèses faites sur σ, b et M, on vérifie facilement que $f_\omega(t, x)$ est continue et localement lipschitzienne en x. Donc il existe une solution maximale $(D_t(\omega))_{t \geq 0}$ de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} D_t'(\omega) = f_\omega(t, D_t(\omega)) \\ D_0(\omega) = Y_0(\omega) \end{cases}$$

Cette solution est, en fait, définie pour tout $t \geq 0$. En effet, puisque σ est lipschitzienne, σ' est bornée donc pour tout $T > 0$ on vérifie qu'il existe deux constantes positives $K_1^T(\omega)$ et $K_2^T(\omega)$ qui ne dépendent que de σ, b, M et T telles que

$$| D_t'(\omega) | \leq K_1^T(\omega) + K_2^T(\omega) | D_t(\omega) | \qquad \forall t \in [0, T]$$

donc

$$| D_t(\omega) | \leq T . K_1^T(\omega) + | Y_0(\omega) | + K_2^T(\omega) \int_0^t | D_s(\omega) | ds \qquad \forall t \in [0, T]$$

d'après le lemme de Cronwall :

$$| D_t(\omega) | \leq \left(T . K_1^T(\omega) + | Y_0(\omega) |\right) . \exp\left(T . K_2^T(\omega)\right) .$$

Lorsque t tend vers une limite finie $| D_t(\omega) |$ est toujours borné ; la solution maximale $(D_t(\omega))_{t \geq 0}$ est donc définie sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

Cette solution étant unique, on voit, de plus, que le processus $(D_t)_{t \geq 0}$ ainsi construit est adapté à la famille de sous-tribus $\bar{\mathscr{F}}_t \subset \mathscr{F}_t$ où $\bar{\mathscr{F}}_t$ est engendrée par M_s, $0 \leq s \leq t$.

Considérons maintenant le processus $(\bar{Y}_t)_{t \geq 0}$ défini par :

$$\bar{Y}_t = h(D_t, M_t) .$$

En utilisant la formule d'Ito et le lemme 2 on trouve que :

$$\bar{Y}_t - Y_0 = h(D_t, M_t) - h(D_0, M_0)$$

$$= \int_0^t \frac{\partial h}{\partial \beta}(D_s, M_s)dM_s + \int_0^t \frac{\partial h}{\partial \alpha}(D_s, M_s)D'_s ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 h}{\partial \beta^2}(D_s, M_s)d\langle M \rangle_s$$

$$= \int_0^t \sigma(h(D_s, M_s))dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma'\sigma(h(D_s, M_s))d\langle M \rangle_s$$

$$+ \int_0^t \exp\left(\int_0^{M_s} \sigma'(h(D_s, u))du\right) . \exp\left(-\int_0^{M_s} \sigma'(h(D_s, u))du\right) b(h(D_s, M_s))ds$$

$$= \int_0^t \sigma(\bar{Y}_s)dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma' . \sigma(\bar{Y}_s)d\langle M \rangle_s + \int_0^t b(\bar{Y}_s)ds \qquad t \geq 0 \text{ p. s.}$$

Le processus $(\bar{Y}_t)_{t \geq 0}$ est donc une solution de l'équation (I) continue, $\mathscr{F}_t$-adaptée.

Unicité. — Soit $(Y_t)_{t \geq 0}$ une solution de l'équation (I). Posons $\bar{D}_t = h(Y_t, - M_t)$.

On va montrer que $(\bar{D}_t(\omega))_{t \geq 0}$ est, pour presque tout $\omega \in \Omega$, une solution de l'équation (II).

D'après l'unicité des solutions de cette équation on aura montré que $D_t(\omega) = \bar{D}_t(\omega)$ $\forall t \geq 0$ p. s.

D'après le lemme 2-*b*). On a :

$$Y_t = h(h(Y_t, - M_t), M_t) = h(\bar{D}_t, M_t) = h(D_t, M_t) = \bar{Y}_t \quad \forall t \geq 0 \text{ p. s.}$$

Utilisons à nouveau la formule d'Ito. On a :

$$\bar{D}_t - Y_0 = h(Y_t, - M_t) - h(Y_0, - M_0)$$

$$= \int_0^t \frac{\partial h}{\partial \alpha}(Y_s, - M_s)dY_s - \int_0^t \frac{\partial h}{\partial \beta}(Y_s, - M_s)dM_s$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 h}{\partial \beta^2}(Y_s, - M_s)d\langle M \rangle_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 h}{\partial \alpha^2}(Y_s, - M_s)d\langle Y \rangle_s$$

$$- \int_0^t \frac{\partial^2 h}{\partial \alpha \partial \beta}(Y_s, - M_s)d\langle Y, M \rangle_s \qquad \forall t \geq 0 \text{ p. s.}$$

$$= \int_0^t \left(\frac{\partial h}{\partial \alpha}(Y_s, - M_s)\sigma(Y_s) - \frac{\partial h}{\partial \beta}(Y_s, - M_s)\right)dM_s$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \beta^2}(Y_s, - M_s) - \frac{2\partial^2 h}{\partial \alpha \partial \beta}(Y_s, - M_s)\sigma(Y_s) + \frac{\partial h}{\partial \alpha}(Y_s, - M_s)\sigma'\sigma(Y_s)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 h}{\partial \alpha^2}(Y_s, - M_s)\sigma^2(Y_s)\right)d\langle M \rangle_s$$

$$+ \int_0^t \frac{\partial h}{\partial \alpha}(Y_s, - M_s)b(Y_s)ds \qquad \forall t \geq 0 \text{ p. s.}$$

D'après le lemme 2 ②, ③, ④ on a :

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha}(\mathrm{Y}_s, -\mathrm{M}_s) = \left(\frac{\partial h}{\partial \alpha}(h(\mathrm{Y}_s, -\mathrm{M}_s), \mathrm{M}_s)\right)^{-1} = \left(\frac{\partial h}{\partial \alpha}(\bar{\mathrm{D}}_s, \mathrm{M}_s)\right)^{-1}$$

$$= \exp\left(-\int_0^{\mathrm{M}_s} \sigma'(h(\bar{\mathrm{D}}_s, u))du\right)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha}(\mathrm{Y}_s, -\mathrm{M}_s).\sigma(\mathrm{Y}_s) - \frac{\partial h}{\partial \beta}(\mathrm{Y}_s, -\mathrm{M}_s) = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial \beta^2}(\mathrm{Y}_s, -\mathrm{M}_s) - 2\frac{\partial^2 h}{\partial \alpha \partial \beta}(\mathrm{Y}_s, -\mathrm{M}_s)\sigma(\mathrm{Y}_s) + \frac{\partial h}{\partial \alpha}(\mathrm{Y}_s, -\mathrm{M}_s)\sigma'\sigma(\mathrm{Y}_s) + \frac{\partial^2 h}{\partial \alpha^2}(\mathrm{Y}_s, -\mathrm{M}_s)\sigma^2(\mathrm{Y}_s)\right) = 0,$$

puisque

$$\mathrm{Y}_s = h(\bar{\mathrm{D}}_s, \mathrm{M}_s)$$

$$\sigma(\mathrm{Y}_s) = \frac{\partial h}{\partial \beta}(\bar{\mathrm{D}}_s, \mathrm{M}_s)$$

$$\sigma'\sigma(\mathrm{Y}_s) = \frac{\partial^2 h}{\partial \beta^2}(h(\mathrm{Y}_s, -\mathrm{M}_s), \mathrm{M}_s).$$

On en déduit bien que $(\bar{\mathrm{D}}_t(\omega))_{t \geq 0}$ est pour presque tout ω solution de l'équation (II).

II. Cas des processus de diffusion

On considère toujours l'espace de probabilité $\Theta = (\Omega, \mathscr{F}(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}, \mathrm{P})$.

Soit $(\mathrm{B}_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel défini sur Θ. Soient σ et b vérifiant la condition (1) et h vérifiant la condition (2).

Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère les fonctions $\sigma_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par :

$$(5) \qquad \sigma_\varepsilon(x) = \int \sigma(y).\rho_\varepsilon(y - x)dy = \int \sigma(x + z)\rho_\varepsilon(z)dz \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

où les fonctions ρ_ε sont à support dans $\mathrm{B}(0, \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R} : |x| < \varepsilon \}$, de classe C^∞, positives et telles que : $\int \rho_\varepsilon(x)dx = 1$.

On a σ_ε est de classe C^∞, de plus

$$\forall h \in \mathbb{R} \qquad |\sigma_\varepsilon(x + h) - \sigma_\varepsilon(x)| = \left| \int (\sigma(x + h + z) - \sigma(x + z))\rho_\varepsilon(z)dz \right| \leq \mathrm{K}.|h|$$

(K étant une constante de Lipschitz pour σ). Donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad |\sigma'_\varepsilon(x)| \leq \mathrm{K}.$$

D'autre part

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad |\sigma_\varepsilon(x) - \sigma(x)| = \left| \int (\sigma(x+z) - \sigma(x))\rho_\varepsilon(z)dz \right| \leq \mathrm{K}. \int |z| \rho_\varepsilon(z)dz \leq \mathrm{K}\varepsilon.$$

Soit X_0 une v. a. r. $\mathscr{F}_0$ mesurable de carré intégrable. On considère le processus de diffusion $(\mathrm{X}_t)_{t \geq 0}$ solution de :

$$\text{(III)} \qquad \mathrm{X}_t = \mathrm{X}_0 + \int_0^t \sigma(\mathrm{X}_s)d\mathrm{B}_s + \int_0^t b(\mathrm{X}_s)ds \qquad \forall t \geq 0 \text{ p. s.}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $(\mathrm{X}_\varepsilon(t))_{t \geqslant 0}$ la solution de

$$\text{(IV)} \qquad \mathrm{X}_\varepsilon(t) = \mathrm{X}_0 + \int_0^t \sigma_\varepsilon(\mathrm{X}_\varepsilon(s))d\mathrm{B}_s + \int_0^t b(\mathrm{X}_\varepsilon(s))ds \qquad \forall t \geq 0 \text{ p. s.}$$

THÉORÈME 3. — *i)* Soient σ et b vérifiant la condition (1) et h vérifiant la condition (2) :

Il existe un processus continu $(\mathrm{D}_t)_{t \geq 0}$, $\mathscr{F}_t$-adapté, presque sûrement localement lipschitzien en t, unique à une indistinguabilité près tel que :

$$\text{(6)} \qquad \mathrm{X}_t = h(\mathrm{D}_t, \mathrm{B}_t) \qquad \forall t \geq 0 \text{ p. s.}$$

Lorsque, de plus, σ est de classe $\mathrm{C}^{1,b}$ (i. e. de classe C^1 et σ' bornée), $(\mathrm{D}_t)_{t \geq 0}$ est, pour presque tout ω, dérivable en t et solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} \mathrm{D}'_t(\omega) = \exp\left(-\int_0^{\mathrm{B}_t(\omega)} \sigma'(h(\mathrm{D}_t(\omega), s)ds\right)\left(-\frac{1}{2}\sigma'\sigma(h(\mathrm{D}_t(\omega), \mathrm{B}_t(\omega))) + b(h(\mathrm{D}_t(\omega), \mathrm{B}_t(\omega)))\right) \\ \mathrm{D}_0(\omega) = \mathrm{X}_0(\omega) \end{cases}$$

ii) Soit σ_ε la fonction définie par (5) et h_ε la solution de

$$\text{(7)} \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = \sigma_\varepsilon(h_\varepsilon(\alpha, \beta)) ; \qquad h_\varepsilon(\alpha, 0) = \alpha$$

Soit $(\mathrm{D}^\varepsilon_t)_{t \geq 0}$ le processus vérifiant l'équation

$$\text{(8)} \qquad \mathrm{X}_\varepsilon(t) = h_\varepsilon(\mathrm{D}^\varepsilon_t, \mathrm{B}_t) \qquad \forall t \geqslant 0 \text{ p. s.}$$

Il existe une suite $\varepsilon_n \downarrow 0$ telle que $X_{\varepsilon_n}(t) \to X_t$ et que $D_t^{\varepsilon_n} \to D_t$ uniformément p. s. sur tout compact.

Preuve. — Lorsque σ est lipschitzienne de classe C^2 on montre exactement de la même façon que dans la première partie de la preuve du théorème 1 que p. s. il existe une solution $(D_t(\omega))_{t\geq 0}$ de l'équation (V), que le processus $(D_t)_{t\geq 0}$ ainsi construit est $\mathscr{F}_t$-adapté et que $h(D_t, B_t)$ est la solution de l'équation (III). On peut d'ailleurs supposer dans ce cas que la v. a. r. X_0 est seulement p. s. finie.

Soit $(X_\varepsilon(t))_{t\geq 0}$ la solution de (IV). Il existe un processus $(D_t^\varepsilon)_{t\geq 0}$ tel que $X_\varepsilon(t) = h_\varepsilon(D_t^\varepsilon, B_t)$.

On suppose que σ est uniquement lipschitzienne. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ la solution de l'équation (III). On a :

$$X_\varepsilon(t) - X_t = \int_0^t (\sigma_\varepsilon(X_\varepsilon(s)) - \sigma(X_\varepsilon(s)))dB_s + \int_0^t (b(X_\varepsilon(s)) - b(X_s))ds + \int_0^t (\sigma(X_\varepsilon(s)) - \sigma(X_s))dB_s .$$

Donc :

$$\forall T > 0 \quad E\,[\sup_{t\in[0,T]} |X_\varepsilon(t) - X_t|^2] \leq 12E\left(\left(\int_0^T (\sigma_\varepsilon(X_\varepsilon(s)) - \sigma(X_\varepsilon(s)))dB_s\right)^2\right)$$
$$+ 3E\left(\left(\int_0^T |b(X_\varepsilon(s)) - b(X_s)|\,ds\right)^2\right) + 12E\left(\left(\int_0^T (\sigma(X_\varepsilon(s)) - \sigma(X_s))dB_s\right)^2\right)$$
$$\leq 12K^2\varepsilon^2T + 3TK^2\int_0^T E(|X_\varepsilon(s) - X_s|^2)ds + 12K^2\int_0^T E(|X_\varepsilon(s) - X_s|^2)ds$$

d'après l'inégalité de Doob.

En utilisant les lemmes de Cronwall et de Borel-Cantelli, on en déduit qu'il existe une suite $\varepsilon_n \downarrow 0$ telle que :
$X_{\varepsilon_n}(t) \to X_t$ uniformément p. s. sur tout compact. D'autre part $\forall \alpha, \alpha_1, \beta \in \mathbb{R}$ on a :

$$h_\varepsilon(\alpha, \beta) - h(\alpha_1, \beta) = (\alpha - \alpha_1) + \int_0^\beta (\sigma_\varepsilon(h_\varepsilon(\alpha, s)) - \sigma_\varepsilon(h(\alpha_1, s)))ds + \int_0^\beta (\sigma_\varepsilon(h(\alpha_1, s)) - \sigma(h(\alpha_1, s)))ds .$$

D'après le lemme de Cronwall, on a si $|\beta| \leq B$

$$(9) \qquad |h_\varepsilon(\alpha, \beta) - h(\alpha_1, \beta)| \leq (|\alpha - \alpha_1| + \varepsilon BK) \exp BK .$$

On définit maintenant $(D_t)_{t\geq 0}$ par :

$$D_t = h(X_t, -B_t) \qquad \text{ou par} \qquad X_t = h(D_t, B_t)$$

d'après le lemme 2*b*). On a :

$$\forall T > 0 \qquad \operatorname*{Sup}_{t\in[0,T]} |D_t^{\varepsilon_n} - D_t| = \operatorname*{Sup}_{t\in[0,T]} |h_{\varepsilon_n}(X_{\varepsilon_n}(t), -B_t) - h(X_t, -B_t)|$$
$$\leq (||X_{\varepsilon_n} - X||_T + \varepsilon_n ||B||_T K) \,.\, \exp(||B||_T \,.\, K) \to 0 \qquad qd\ n \to \infty$$

d'après (9), en notant $||X_{\varepsilon_n} - X||_T = \operatorname*{Sup}_{t\in[0,T]} |X_{\varepsilon_n}(t) - X_t|$ et $||B||_T = \operatorname*{Sup}_{t\in[0,T]} |B_t|$.

Montrons que (D_t) est presque sûrement localement lipschitzien en t.

Pour tout $\varepsilon > 0$, $(D_t^\varepsilon)_{t\geq 0}$ est déterminé par l'équation différentielle

$$(10)\quad \begin{cases} (D_t^\varepsilon)' = \exp\left(-\displaystyle\int_0^{B_t} \sigma_\varepsilon'(h_\varepsilon(D_t^\varepsilon, s))ds\right) \\ \qquad\qquad\qquad \left(-\dfrac{1}{2}\sigma_\varepsilon' \,.\, \sigma_\varepsilon(h_\varepsilon(D_t^\varepsilon, B_t)) + b(h_\varepsilon(D_t^\varepsilon, B_t))\right) \\ D_0^\varepsilon = X_0. \end{cases}$$

Soit $M = \operatorname*{Sup}_{0\leq\varepsilon\leq 1} |\sigma_\varepsilon(0)|$

Puisque pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$h_\varepsilon(\alpha, \beta) = \alpha + \int_0^\beta (\sigma_\varepsilon(h_\varepsilon(\alpha, s)) - \sigma_\varepsilon(0))ds + \sigma_\varepsilon(0)\,.\,\beta$$

d'après le lemme de Cronwall :

$$|h_\varepsilon(\alpha, \beta)| \leq (|\alpha| + MB) \exp KB \quad \text{si} \quad |\beta| \leq B\,.$$

Donc

$$|h_\varepsilon(D_t^\varepsilon, B_t)| \leq (|D_t^\varepsilon| + M\,||B||_T)\,.\exp K\,||B||_T \qquad \forall t \in [0, T]\,.$$

En utilisant le fait que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \qquad |\sigma_\varepsilon'(x)| \leq K$$

on a d'après (10)

$$\begin{aligned} |(D_t^\varepsilon)'| &\leq \exp(K\,||B||_T)\,\{K(K\,|h_\varepsilon(D_t^\varepsilon, B_t)| + M) + K\,|h_\varepsilon(D_t^\varepsilon, B_t)| + |b(0)|\} \\ &\leq \exp(K\,||B||_T)(KM + |b(0)| + K^2M\,||B||_T \exp(K\,||B||_T) \\ &\quad + KM\,||B||_T \exp(K\,||B||_T)) + (\exp(K\,||B||_T))^2(K^2 + K)\,|D_t^\varepsilon| \\ &= A + B\,|D_t^\varepsilon|, \end{aligned}$$

donc

$$|D_t^\varepsilon| \leq (|X_0| + AT) + B\int_0^t |D_s^\varepsilon|\,ds \qquad \forall t \in [0, T]$$

et

$$|D_t^\varepsilon| \leq (|X_0| + AT) \exp BT \qquad \forall t \in [0, T]$$

$$|(D_t^\varepsilon)'| \leq A + B(|X_0| + AT) \exp (BT) = C_T \qquad \forall t \in [0, T].$$

Donc, p. s.

$$\forall T > 0 \ \exists C_T(\omega) \text{t. q. } \forall s, t \in [0, T] \, |D_t^\varepsilon(\omega) - D_s^\varepsilon(\omega)| \leq C_T(\omega)|t - s|.$$

Puisque les $(D_t^{\varepsilon_n})_{t \geq 0}$ convergent uniformément p. s. vers $(D_t)_{t \geq 0}$ sur tout compact on en déduit que :

(11) p. s. $\forall T>0 \ \exists C_T(\omega) \ \forall s, t \in [0, T] \quad |D_t(\omega) - D_s(\omega)| \leq C_T(\omega)|t-s|$.

D'après la formule $D_t = h(X_t, -B_t)$ on voit que le processus (D_t) est évidemment unique à une indistinguabilité près.

Lorsque σ est, de plus, de classe $C^{1,b}$ la fonction h est de classe $C^{1,2}$ et puisque :

$$X_t = h(D_t, B_t) = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s + \int_0^t b(X_s)ds \qquad \forall t \geq 0 \text{ p. s.}$$

et que $(D_t)_{t \geq 0}$ est adapté, à variations bornées, il suffit d'appliquer la formule d'Ito à $h(D_t, B_t)$ pour montrer que $(D_t(\omega))_{t \geq 0}$ est p. s. dérivable en t et solution de l'équation différentielle ordinaire (V).

C. Q. F. D.

III. Applications

Soient σ et b deux applications vérifiant la condition (1) et soit h la solution de l'équation (2).

Supposons que σ soit, de plus, de classe C^2. Soit $T > 0$. On considère Φ_1^T et Φ_2^T : $\mathbb{R} \times C_{\mathbb{R}}([0, T]) \to C_{\mathbb{R}}[0, T])$ définies par $\Phi_1^T(x, u) = D_1$ et $\Phi_2^T(x, u) = D_2$ avec

$$\begin{cases} D_1'(t) = \exp\left(-\int_0^{u_t} \sigma'(h(D_1(t), s))ds\right)\left(-\frac{1}{2}\sigma'\sigma(h(D_1(t), u_t)) + b(h(D_1(t), u_t))\right) \\ D_1(0) = x \end{cases}$$

$$D_2'(t) = \exp\left(-\int_0^{u_t} \sigma'(h(D_2(t), s))ds\right)(b(h(D_2(t), u_t)))$$

$$D_2(0) = x$$

si $(x, u) \in \mathbb{R} \times C_{\mathbb{R}}([0, T])$.

On considère aussi les applications

$$\Psi_1^T \quad \text{et} \quad \Psi_2^T : \mathbb{R} \times C_{\mathbb{R}}([0, T]) \to C_{\mathbb{R}}([0, T])$$

définies par :

$$\Psi_1^T(x, u) = h(\Phi_1^T(x, u), u)$$
$$\Psi_2^T(x, u) = h(\Phi_2^T(x, u), u).$$

D'après les théorèmes 1 et 3 si $(Y_t)_{t\geq 0}$ et $(X_t)_{t\geq 0}$ sont respectivement solutions des équations différentielles stochastiques (I) et (III) on a :

$$Y_t = \Psi_2^T(Y_0, M)(t) \qquad \forall t \in [0, T] \text{ p. s.}$$
$$X_t = \Psi_1^T(X_0, B)(t) \qquad \forall t \in [0, T] \text{ p. s.}$$

On munit $C_{\mathbb{R}}([0, T])$ de la norme $\| \, . \, \|_T$ uniforme sur $[0, T]$.

LEMME 4. — Soit E un ensemble borné de $\mathbb{R} \times C_{\mathbb{R}}([0, T])$. L'application Ψ_1^T(resp. Ψ_2^T) restreinte à l'ensemble E est lipschitzienne.

Preuve. — Montrons le pour Ψ_1^T, la démonstration pour Ψ_2^T étant identique.

On considère l'application $f : [0, T] \times \mathbb{R} \times C_{\mathbb{R}}([0, T]) \to \mathbb{R}$ définie par $f(t, x, u) = \exp\left(-\int_0^{u_t} \sigma'(h(x, s))ds\right)\left(-\frac{1}{2}\sigma'\sigma(h(x, u_t)) + b(h(x, u_t))\right)$ où $(t, x, u) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times C_{\mathbb{R}}([0, T])$.

On vérifie facilement que l'application $f(t, x, u)$ est lipschitzienne en (x, u) uniformément par rapport à t lorsque (x, u) parcourt l'ensemble E.

$$\begin{cases} \Phi_1^T(x, u)(t)' = f(t, \Phi_1^T(x, u)(t), u) & \forall t \in [0, T] \\ \Phi_1^T(x, u)(0) = x \end{cases}$$

Soient (x, u) et $(y, v) \in E$. On a :

$$(\Phi_1^T(x, u)(t) - \Phi_1^T(y, v)(t))' = (f(t, \Phi_1^T(x, u), u) - f(t, \Phi_1^T(x, u)(t), v))$$
$$(f(t, \Phi_1^T(x, u)(t), v) - f(t, \Phi_1^T(y, v)(t), v)) \qquad \forall t \in [0, T].$$

On montre que $\{ \Phi_1^T(x, u), (x, u) \in E \}$ est borné dans $C_{\mathbb{R}}([0, T])$ (cf. la démonstration du théorème 3).

Donc $\exists K > 0$ t. q. $\forall (x, u)$ et $(y, v) \in E$ on ait

$$\forall t \in [0, T] \, | (\Phi_1^T(x, u)'(t) - \Phi_1^T(y, v)'(t) | \leq K(\| u - v \|_T + | \Phi_1^T(x, u)(t) - \Phi_1^T(y, v)(t) |)$$

D'après le lemme de Cronwall on a :

$$\forall t \in [0, T] \, | \Phi_1^T(x, u)(t) - \Phi_1^T(y, v)(t) | \leq (| y - x | + KT \| u - v \|_T) \exp KT$$

L'application $h : (\alpha, \beta) \to h(\alpha, \beta)$ étant localement lipschitzienne, on en déduit bien que l'application Ψ_1^T restreinte à l'ensemble E est lipschitzienne.

THÉORÈME 5. — On suppose que σ et b vérifient (1) et que σ est de classe C^2.

i) Soit G un ensemble borné de $C_{\mathbb{R}}([0, T])$, $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ deux applications : $\Omega \to \mathbb{R}$, p. s. finies et soient $(Y_t)_{t \geq 0}$, $(X_t)_{t \geq 0}$ les solutions respectives des équations (I) et (III).

Pour presque tout $\omega \in \Omega$ $\exists K_G^T(\omega) > 0$ t. q.

$$\forall u \in G \qquad \| X - \Psi_1^T(\bar{X}, u) \|_T(\omega) \leq K_G^T(\omega)(\| u - B \|_T(\omega) + | X_0 - \bar{X} | (\omega))$$
$$\forall u \in G \qquad \| Y - \Psi_2^T(\bar{Y}, u) \|_T(\omega) \leq K_G^T(\omega)(\| u - M \|_T(\omega) + | Y_0 - \bar{Y} | (\omega))$$

ii) Si σ est de classe C^{k+1} et b est de classe C^k ($k \in \mathbb{N}^*$), pour tout $x \in \mathbb{R}$ soient $(X_t^x)_{t \geq 0}$ et $(Y_t^x)_{t \geq 0}$ les solutions respectives de

$$X_t^x = x + \int_0^t \sigma(X_s^x) dB_s + \int_0^t b(X_s^x) ds \tag{12}$$

$$Y_t^x = x + \int_0^t \sigma(Y_s^x) dM_s + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma' \sigma(Y_s^x) d \langle M \rangle_s + \int_0^t b(Y_s^x) ds . \tag{13}$$

Pour presque tout $\omega \in \Omega$ les applications

$$x \to X_t^x(\omega)$$
$$x \to Y_t^x(\omega)$$

sont $\forall t \geq 0$ de classe C^k.

Preuve. — Puisque

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad X_t^x = \Psi_1^T(x, B)(t) \qquad \forall t \geqslant 0 \text{ p. s.}$$
$$Y_t^x = \Psi_2^T(x, M)(t) \qquad \forall t \geqslant 0 \text{ p. s.}$$

la preuve est une conséquence immédiate du lemme 4 et du Théorème sur la différentiabilité par rapport à la valeur initiale pour des équations différentielles ordinaires, (cf. [5]).

COROLLAIRE 6. — Si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$) est une suite de processus continus (non nécessairement adaptés) qui converge uniformément p. s. sur tout compact vers le mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ (resp. vers la semi-martingale continue $(M_t)_{t \geq 0}$) alors :

$$\forall T > 0 \qquad \| X - \Psi_1^T(X_0, u_n) \|_T \to 0 \qquad \text{quand} \qquad n \to \infty \quad \text{p. s.}$$
$$\forall T > 0 \qquad \| Y - \Psi_2^T(Y_0, v_n) \|_T \to 0 \qquad \text{quand} \qquad n \to \infty \quad \text{p. s.}$$

REMARQUE 7. — Lorsque u est de classe C^1 et $u(0) = 0$, on a, en notant $\dot{u}$ la dérivée de u :

$$(14)\quad \forall t \in [0, T] \qquad \Psi_1^T(X_0, u)(t) = X_0 + \int_0^t \sigma(\Psi_1^T(X_0, u)(s))\dot{u}_s ds - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma'.\sigma(\Psi_1^T(X_0, u)(s))ds + \int_0^t b(\Psi_1^T(X_0, u))ds$$

$$(15)\quad \forall t \in [0, T] \qquad \Psi_2^T(Y_0, u)(t) = Y_0 + \int_0^t \sigma(\Psi_2^T(Y_0, u)(s))\dot{u}_s ds + \int_0^t b(\Psi_2^T(Y_0, u)s)ds\,.$$

Or, avec les notations du corollaire 6, on peut toujours choisir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$) continûment dérivable p. s.

En notant

$$(16)\quad S_{X_0} = \{ \phi^u_{X_0(\omega)},\ u \text{ de classe } C^1,\ \phi^u_{X_0(\omega)} \text{ solution de (14)}, \quad \omega \in \Omega \}$$

$$(17)\quad S_{Y_0} = \{ \theta^u_{Y_0(\omega)},\ u \text{ de classe } C^1,\ \theta^u_{Y_0(\omega)} \text{ solution de (15)}, \quad \omega \in \Omega \}$$

le support topologique de la loi P_X du processus de diffusion X (resp. la loi P_Y du processus Y) est contenu dans l'adhérence de S_{X_0} (resp. S_{Y_0}) dans $C_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

LEMME 8. — Soit $u \in C_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, alors :

$$(18)\qquad \forall T > 0\ \forall \varepsilon > 0 \qquad P(\| B - u \|_T < \varepsilon) > 0\,.$$

Preuve. — On pourra se référer à (10).

PROPOSITION 9. — Supposons que $X_0 \equiv x \in \mathbb{R}$. Soit u de classe C^1 et $\phi^u \in S_x$ (défini par (16)). Avec les notations du théorème 5 *i)* on a :

i) $\forall T > 0\ \exists K_T > 0$ (ne dépendant pas de ω) t. q. $\forall 0 < \varepsilon < 1$

$$\{ \| B - u \|_T < \varepsilon \} \underset{\text{p.s.}}{\subseteq} \{ \| X - \phi^u \|_T < K_T\varepsilon \}$$

$$ii)\ \forall T > 0\ \forall \varepsilon > 0 \qquad P(\| X - \phi^u \|_T < \varepsilon) > 0\,.$$

Preuve. — Évidente compte tenu du théorème 5 et du lemme 8. *i)* et *ii)* restent vrais si on suppose que σ est uniquement de classe $C^{1,b}$ et que σ' est localement lipschitzienne.

REMARQUE 10. — Une conséquence de la proposition 9, et de la remarque 7 c'est que :

$$(19)\qquad \operatorname{Supp} P_x = \bar{S}_x\,.$$

Strocck et Varadhan, dans (10), ont démontré (19) en dimension finie, en supposant (20) : σ et b lipschitziennes, σ, σ', σ'' et b bornées. Ils ont, pour cela, prouvé la propriété plus forte

(21) $\forall T > 0 \ \forall \phi^u \in S_x \ \forall \varepsilon > 0,$

$$P(\|X - \phi^u\|_T \geq \varepsilon / \|B - u\|_T < \delta) \to 0 \qquad qd\ \delta \to 0$$

En dimension 1 on a montré, par une méthode tout à fait différente, que, sous les hypothèses plus faibles (22) : σ et b lipschitziennes, σ' localement lipschitzienne, on a une propriété plus forte que (21). La proposition 9 *i*) est, en effet, équivalente à

(23) $\forall T > 0 \ \exists K_T > 0$ t. q. $\forall \phi^u \in S_x \ \forall \varepsilon > 0$

$$P(\|X - \phi^u\|_T \geq \varepsilon / \|B - u\|_T < \delta) = 0 \quad \text{si} \quad \delta < (K_T)^{-1}.\varepsilon$$

On va montrer plus loin que en dimension > 1, finie ou infinie, la propriété (23) reste valable si on fait les hypothèses (22) portant sur σ et b et si on suppose, de plus, que σ vérifie la condition de Frobénius (cf. lemme 17).

LEMME 10. — Soient $f_1(t, x)$, $f_2(t, x)$, $f_3(t, x)$ trois fonctions continues dans un ouvert Ω_0 de $\mathbb{R}^2$ et soient m_1, m_2, m_3 trois points de Ω_0 d'abscisse t_0 et d'ordonnées x_1, x_2, x_3. On suppose que l'équation $x' = f_1(t, x)$ (resp. $x' = f_3(t, x)$) a une seule solution maximale ϕ_1 (resp. ϕ_3) passant par m_1 (resp. m_3) et on désigne par ϕ_2 une solution maximale de $x' = f_2(t, x)$ passant par m_2. Si on a :

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \qquad \text{et} \qquad f_1(t, x) \leq f_2(t, x) \leq f_3(t, x)$$

on a aussi

$$\phi_1(t) \leq \phi_2(t) \leq \phi_3(t) \qquad \forall t \geq t_0$$

dans tout intervalle $[t_0, t_1[$ où les ϕ_i sont définies.

Preuve. — C'est un résultat bien connu relatif aux équations différentielles ordinaires.

On va démontrer un théorème de comparaison pour les solutions des équations différentielles stochastiques (I) et (III). Dans le cas des diffusions, en utilisant la propriété de Markov, Anderson [2] puis Yamada [*12*], avec des hypothèses un peu plus faibles portant sur les coefficients, ont démontré ce théorème. La preuve que nous donnons ici se fait par une méthode différente : on se ramène à la théorie des équations différentielles ordinaires.

THÉORÈME 11. — Soient σ, b, $\bar{b}$ trois applications lipschitziennes.

i) On suppose de plus que σ est de classe C^2. Sur l'espace de probabilité Θ soient Y_0 et $\bar{Y}_0$ deux v. a. r. $\mathcal{F}_0$ mesurables p. s. finies et soient (Y_t), $(\bar{Y}_t)_{t \geq 0}$ les solutions respectives de :

$$(24) \quad \begin{cases} Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma(Y_s)dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma'\sigma(Y_s)d\langle M \rangle_s \\ \qquad\qquad + \int_0^t b(Y_s)ds \qquad \forall t \geq 0 \text{ p. s.} \\ \bar{Y}_t = \bar{Y}_0 + \int_0^t \sigma(\bar{Y}_s)dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma'\sigma(\bar{Y}_s)d\langle M \rangle_s \\ \qquad\qquad + \int_0^t \bar{b}(\bar{Y}_s)ds \qquad \forall t \geq 0 \text{ p. s.} \end{cases}$$

On a alors :

$$Y_0 \leq \bar{Y}_0 \text{ p. s.} \quad \text{et} \quad \forall x \quad b(x) \leq \bar{b}(x) \Rightarrow Y_t \leq \bar{Y}_t \quad \forall t \geq 0 \text{ p. s.}$$

ii) On ne suppose plus que σ est de classe C^2. Sur l'espace de probabilité Θ soient X_0 et $\bar{X}_0$ deux v. a. r. de carré intégrable $\mathcal{F}_0$ mesurables et soient $(X_t)_{t \geq 0}$, $(\bar{X}_t)_{t \geq 0}$ les processus de diffusion solutions de :

$$(25) \quad \begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s + \int_0^t b(X_s)ds \qquad \forall t \geq 0 \text{ p. s.} \\ \bar{X}_t = \bar{X}_0 + \int_0^t \sigma(\bar{X}_s)dB_s + \int_0^t \bar{b}(\bar{X}_s)ds \qquad \forall t \geq 0 \text{ p. s.} \end{cases}$$

On a alors

$$X_0 \leq \bar{X}_0 \text{ p. s.} \quad \text{et} \quad \forall x \quad b(x) \leq \bar{b}(x) \Rightarrow X_t \leq \bar{X}_t \quad \forall t \geq 0 \text{ p. s.}$$

Preuve. — *i*) D'après le théorème 1 il existe deux processus $(D_t)_{t \geq 0}$ et $(\bar{D}_t)_{t \geq 0}$ dérivables p. s. tels que

$$Y_t = h(D_t, M_t) \qquad \forall t \geq 0 \text{ p. s.}$$
$$\bar{Y}_t = h(\bar{D}_t, M_t) \qquad \forall t \geq 0 \text{ p. s.}$$

où h est définie par (2).

Il suffit de considérer les équations différentielles ordinaires que satisfont respectivement les processus $(D_t)_{t \geq 0}$ et $(\bar{D}_t)_{t \geq 0}$ pour remarquer, grâce au lemme 10, que $D_t \leq \bar{D}_t \quad \forall t \geq 0$ p. s.

D'après le lemme 2 *c*, on a donc $Y_t \leq \bar{Y}_t \quad \forall t \geq 0$ p. s.

On peut remarquer ici que si on a des inégalités strictes ($Y_0 < \bar{Y}_0$ p. s. et $\forall x$ $b(x) \leq \bar{b}(x)$) ou ($Y_0 \leqslant \bar{Y}_0$ p. s. et $\forall x$ $b(x) < \bar{b}(x)$) on a aussi $Y_t < \bar{Y}_t$ $\forall t \geq 0$ p. s.

ii) On considère les approximations de classe $C^\infty \sigma_\varepsilon$ de σ définies par (5).

Soit

$$(26)\qquad \begin{cases} X_\varepsilon(t) = X_0 + \int_0^t \sigma_\varepsilon(X_\varepsilon(s))dB_s + \int_0^t b(X_\varepsilon(s))ds \\ \bar{X}_\varepsilon(t) = \bar{X}_0 + \int_0^t \sigma_\varepsilon(\bar{X}_\varepsilon(s))dB_s + \int_0^t \bar{b}(\bar{X}_\varepsilon(s))ds \end{cases}$$

D'après le théorème 3, il existe une suite $\varepsilon_n \downarrow 0$ telle que $X_{\varepsilon_n}(t) \to X_t$ et que $\bar{X}_{\varepsilon_n}(t) \to \bar{X}_t$ uniformément p. s. sur tout compact.

Or $X_{\varepsilon_n}(t) \leq \bar{X}_{\varepsilon_n}(t)$ $\forall t \geq 0$ p. s. La conclusion est donc évidente.

LEMME 12. — Soient $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \leq x_0 \leq x_2$. Soit u de classe C^1 telle que $u(o) = 0$. On note $\dot{u}$ la dérivée de u. Soient σ et b deux applications lipschitziennes et $\phi^u_{x_0}$ la solution de l'équation différentielle.

$$\phi^u_{x_0}(t) = x_0 + \int_0^t \sigma(\phi^u_{x_0}(s))\dot{u}_s ds + \int_0^t b(\phi^u_{x_0}(s))ds .$$

On a alors :

$$(27)\qquad \begin{cases} \sigma(x_1) = 0 \quad \text{et} \quad b(x_1) \geq 0 \Rightarrow \phi^u_{x_0}(t) \geq x_1 \quad \forall t \geq 0, \\ \sigma(x_2) = 0 \quad \text{et} \quad b(x_2) \leq 0 \Rightarrow \phi^u_{x_0}(t) \leq x_2 \quad \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Lorsque σ est de classe $C^{1,b}$ soit $\Psi^u_{x_0}$ la solution de :

$$\Psi^u_{x_0}(t) = x_0 + \int_0^t \sigma(\Psi^u_{x_0}(s))\dot{u}_s ds - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma'\sigma(\Psi^u_{x_0}(s))ds + \int_0^t b(\Psi^u_{x_0}(s))ds .$$

On a de même

$$(28)\qquad \begin{cases} \sigma(x_1) = 0 \quad \text{et} \quad b(x_1) \geq 0 \Rightarrow \Psi^u_{x_0}(t) \geq x_1 \quad \forall t \geq 0 \\ \sigma(x_2) = 0 \quad \text{et} \quad b(x_2) \leq 0 \Rightarrow \Psi^u_{x_0}(t) \leq x_2 \quad \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Preuve. — Il suffit de démontrer le premier point de (27), les autres démonstrations étant identiques.

Supposons d'abord que $\sigma(x_1) = 0$ et que $b(x_1) > 0$. Si $\exists t \geq 0$ t. q. $\phi^u_{x_0}(t) < x_1$, soit

$$t_0 = \inf\left(t \geq 0 \text{ t. q. } \phi^u_{x_0}(t) < x_1\right).$$

On vérifie facilement que $0 < t_0 < \infty$ et donc : $\phi^u_{x_0}(t_0) = x_1$ d'après la continuité de $\phi^u_{x_0}$.

Or $\phi^u_{x_0}(t)' = \sigma(\phi^u_{x_0}(t)).\dot{u}_t + b(\phi^u_{x_0}(t))$ donc $\phi^u_{x_0}(t_0)' = b(x_1) > 0$ $\exists \alpha > 0$ t. q. $\forall t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ $\phi^u_{x_0}(t) > \phi^u_{x_0}(t_0) = x_1$ ce qui est contradictoire.

Si $b(x_1) = 0$ on considère $\forall \varepsilon > 0$ $b_\varepsilon(x) = b(x) + \varepsilon$.

Soit $\phi_{x_0}^{(u,\varepsilon)}(t)$ la solution de :

$$\phi_{x_0}^{(u,\varepsilon)}(t) = x_0 + \int_0^t \sigma(\phi_{x_0}^{(u,\varepsilon)}(s))\dot{u}_s ds + \int_0^t b_\varepsilon(\phi_{x_0}^{(u,\varepsilon)}(s))ds .$$

Puisque $b_\varepsilon(x_1) = \varepsilon > 0$, on a :

$$\phi_{x_0}^{(u,\varepsilon)}(t) \geq x_1 \qquad \forall t \geq 0 .$$

Or on montre facilement que $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \phi_t^{(u,\varepsilon)} = \phi_t^u$.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 13. — Soient σ et b deux applications lipschitziennes et soit $(X_t)_{t\geq 0}$ le processus de diffusion solution de (III)

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s + \int_0^t b(X_s)ds \qquad \forall t \geq 0 \text{ p. s.}$$

Lorsque σ est, de plus, de classe C^2 soit $(Y_t)_{t\geq 0}$ la solution de :

$$\text{(I)} \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma(Y_s)dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma'.\sigma(Y_s)d\langle M \rangle_s + \int_0^t b(Y_s)ds \qquad t \geq 0 \text{ p. s.}$$

On a :

$$(29) \quad \begin{cases} X_0 \geq x_1 \text{ p. s.}, \sigma(x_1) = 0 & \text{et} \quad b(x_1) \geq 0 \Rightarrow X_t \geq x_1 \quad \forall t \geq 0 \text{ p. s.} \\ X_0 \leq x_2 \text{ p. s.}, \sigma(x_2) = 0 & \text{et} \quad b(x_2) \leq 0 \Rightarrow X_t \leq x_2 \quad \forall t \geq 0 \text{ p. s.} \end{cases}$$

$$(30) \quad \begin{cases} Y_0 \geq y_1 \text{ p. s.}, \sigma(y_1) = 0 & \text{et} \quad b(y_1) \geq 0 \Rightarrow Y_t \geq y_1 \quad \forall t \geq 0 \text{ p. s.} \\ Y_0 \leq y_2 \text{ p. s.}, \sigma(y_2) = 0 & \text{et} \quad b(y_2) \leq 0 \Rightarrow Y_t \leq y_2 \quad \forall t \geq 0 \text{ p. s.} \end{cases}$$

Preuve. — Compte tenu de la remarque 7 et du lemme 12 la démonstration est évidente lorsque σ est de classe $C^2 X_0$ et $Y_0 < \infty$ p. s.

Lorsque σ n'est que lipschitzienne (29) reste vrai si $X_0 \in L^2$. En effet on considère $\forall \varepsilon > 0$ l'application σ_ε définie par (5). Démontrons par exemple le premier point de (29). On définit l'application $\tilde{\sigma}_\varepsilon$ par $\tilde{\sigma}_\varepsilon(x) = \sigma_\varepsilon(x) - \sigma_\varepsilon(x_1)$. Soit $(\tilde{X}_\varepsilon(t))_{t\geq 0}$ la solution de l'équation :

$$\tilde{X}_\varepsilon(t) = X_0 + \int_0^t \tilde{\sigma}_\varepsilon(\tilde{X}_\varepsilon(s)dB_s + \int_0^t b(\tilde{X}_\varepsilon(s))ds \qquad \forall t \geq 0 \text{ p. s.}$$

On démontre aisément qu'il existe une suite $\varepsilon_n \downarrow 0$ telle que $\tilde{X}_{\varepsilon_n}(t) \to X_t$ uniformément p. s. sur tout compact.

La conclusion est donc évidente.

REMARQUE 14. — 1) Si σ est de classe C^2, sous les conditions du théorème 13, on pourrait remplacer les nombres x_1, x_2, y_1, $y_2 \in \mathbb{R}$ par des applications : $\Omega \to \mathbb{R}$ p. s. finies, les conclusions de ce théorème resteraient vraies.

2) En [3], on démontre différemment, dans le cadre d'une étude des processus de diffusion, une propriété semblable à la propriété (29) mais plus faible en supposant, de plus, que les points x_1 et x_2 sont des points de dégénérescence isolés de σ.

3) On aurait pu, tout au long de ce qui précède, y compris les applications; supposer que les fonctions σ et b dépendent du couple $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ en remplaçant la condition (1) par la condition

(1′) $\exists K > 0$ t. q. $\forall t, x, y \in \mathbb{R} \, | b(t, x) - b(t, y) | \leq K | x - y |$

et

t. q. $\forall t, t_1, x, x_1 \in \mathbb{R} \, | \sigma(t, x) - \sigma(t_1, x_1) | \leq K(| t - t_1 | + | x - x_1 |)$

La fonction h introduite en (2) serait remplacée par $\tilde{h} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$(2') \qquad \forall t, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \; \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \beta}(t, \alpha, \beta) = \sigma(t, \tilde{h}(t, \alpha, \beta)) \; ; \; \tilde{h}(t, \alpha, 0) = \alpha$$

Lorsque σ est de classe C^2, on considère de même le processus $(D_t)_{t \geq 0}$ solution des équations différentielles ordinaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} D'_t = \exp\left(- \displaystyle\int_0^{B_t} \frac{\partial \sigma}{\partial x}(t, \tilde{h}(t, D_t, u)) du \right) \\ \qquad \left(- \dfrac{\partial \tilde{h}}{\partial t}(t, D_t, B_t) - \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial \sigma}{\partial x} . \sigma(t, \tilde{h}(t, D_t, B_t)) + b(t, \tilde{h}(t, D_t, B_t)) \right). \end{array} \right.$$

$D_0 = X_0 < \infty \; X_0 \quad \mathcal{F}_0$-mesurable

puisque $\forall t, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial \beta}\left(\dfrac{\partial \tilde{h}}{\partial t}(t, \alpha, \beta) \right) = \dfrac{\partial \sigma}{\partial t}(t, \tilde{h}(t, \alpha, \beta)) + \dfrac{\partial \sigma}{\partial x}(t, \tilde{h}(t, \alpha, \beta)) . \dfrac{\partial \tilde{h}}{\partial t}(t, \alpha, \beta) \\ \dfrac{\partial \tilde{h}}{\partial t}(t, \alpha, 0) = 0 . \end{array} \right.$$

on a en utilisant (1)′

$$\forall B > 0 \qquad \operatorname*{Sup}_{\substack{t, \alpha \in \mathbb{R} \\ |\beta| \leq B}} \left| \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t}(t, \alpha, \beta) \right| \leq KB \exp KB .$$

ce qui garantit l'existence du processus $(D_t)_{t \geq 0}$ compte tenu des hypothèses. Si $(X_t)_{t \geq 0}$ est le processus de diffusion solution de l'équation

$$(31) \qquad X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s + \int_0^t b(s, X_s) ds$$

on a

$$X_t = h(t, D_t, B_t) \qquad \forall t \geq 0 \text{ p. s.}$$

On peut de même considérer les solutions des équations

$$\text{(32)} \qquad Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma(s, Y_s)dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial \sigma}{\partial x}.\sigma(s, Y_s)d\langle M \rangle_s + \int_0^t b(s, Y_s)ds \qquad \forall t \geqslant 0 \text{ p. s.}$$

où $M = (M_t)$ est une semi-martingale continue.

Tous les résultats déjà démontrés se généralisent facilement, les calculs étant identiques, on ne considère que le cas homogène afin de ne pas alourdir les notations.

IV. Une extension des résultats précédents en dimension finie ou infinie

Soient H, H_1, H_2, H_3 quatre espaces de Hilbert réels séparables.

Soit :

$$B : \Theta = (\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}, P) \to (C_H(\mathbb{R}_+), \mathscr{B})$$

un mouvement brownien à opérateur de covariance nucléaire W.

(Pour les définitions et extensions en dimension infinie on peut se référer à [*6*]).

Soit $\mathscr{L}(H, H_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ l'espace des applications linéaires continues de H dans H_i muni de la norme

$$\| u \|_{\mathscr{L}(H,H_i)} = \sup_{\|x\| \leq 1} \| u(x) \|$$

CONVENTION 15. — On considère l'opérateur nucléaire $W : H \to H$, un élément $\Phi \in \mathscr{L}(H, H_2)$ et son adjoint $\Phi^* \in \mathscr{L}(H_2, H)$. Soit de plus $\Psi \in \mathscr{L}(H_2, \mathscr{L}(H_2, H_3))$. Pour tout élément p de H_3 soit $\Psi\{p\} \in \mathscr{L}(H_2)$ qui vérifie

$$\text{(33)} \qquad \forall x, y \in H_2 \qquad \langle \Psi\{p\}(x), y \rangle_{H_2} = \langle \Psi(x)[y], p \rangle_{H_3}.$$

On définit ensuite un élément z de H_3 de la façon suivante : pour tout $p \in H_3$, $\langle z, p \rangle_{H_3}$ est la trace de l'opérateur $\Phi W \Phi^* \Psi\{p\} \in \mathscr{L}(H_2)$ notée $\operatorname{tr}(\Phi W \Phi^* \Psi\{p\})$. Puisque W est nucléaire, on vérifie bien que cette trace existe et que l'application

$$p \in H_3 \to \operatorname{tr}(\Phi W \Phi^* \Psi\{p\}) \in \mathbb{R}$$

est une forme linéaire continue sur H_3.

On notera $z = \operatorname{tr}(\Phi W \Phi^* \Psi)$.

Dans la suite Ψ désignera la dérivée seconde prise en un point $x \in H_2$ d'une application $F : H_2 \to H_3$ de classe C^2.

On considère un processus

$$\Phi : (\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+} \otimes \mathscr{F}) \to (\mathscr{L}(H, H_2), \| \cdot \|_{\mathscr{L}(H,H_2)})$$

mesurable, tel que $\forall t \in \mathbb{R}_+$ $\Phi(t, .)$ soit $\mathscr{F}_t$-mesurable et que

$$\forall T > 0 \qquad \int_0^T \| \Phi(t) \|^2_{\mathscr{L}(H,H_2)} dt < \infty \qquad \text{p. s.}$$

L'intégrale stochastique $X_t = \int_0^t \Phi_s dB_s$ est alors une martingale locale continue à valeurs dans H_2.

Soit $\theta : (\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+} \otimes \mathscr{F}) \to (H_1, \| \cdot \|_{H_1})$ un processus mesurable, $\mathscr{F}_t$ adapté, tel que :

$$\forall T > 0 \qquad \int_0^T \| \theta_s \| ds < \infty \qquad \text{p. s.}$$

On pose $V_t = \int_0^t \theta_s ds$, soit $f : H_1 \times H_2 \to H_3$ une application de classe $C^{1,2}$.

FORMULE D'ITO 16. — On a p. s.

$$(34) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad f(V_t, X_t) - f(V_0, X_0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_2}(V_s, X_s)\Phi_s dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_1}(V_s, X_s)\theta_s ds + \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{tr}\left(\Phi_s W \Phi_s^* . \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(V_s, X_s)\right) ds .$$

Soit

$$\sigma : H_1 \to \mathscr{L}(H, H_1)$$
$$b : H_1 \to H_1$$

deux applications vérifiant :

$$(35) \qquad \begin{cases} \sigma \text{ est de classe } C^{1,b} \text{ et sa dérivée D6 restreinte à} \\ \quad \text{tout borné de } H_1 \text{ est lipschitzienne.} \\ b \text{ est lipschitzienne.} \end{cases}$$

LEMME 17. — Il existe une application unique

$$h H_1 \times H \to H_1 ,$$

solution des équations aux différentielles totales :

$$(36) \qquad \forall (\alpha, \beta) \in H_1 \times H \, \frac{\partial h}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = \sigma(h(\alpha, \beta)) \, ; \, h(\alpha, 0) = \alpha$$

si et seulement si l'application σ vérifie la condition de Frobénius.

(37) $\forall x \in \mathrm{H}_1, \quad \forall \gamma, \quad \delta \in \mathrm{H} \, \mathrm{D}\sigma(x)[\sigma(x)(\gamma)](\delta) = \mathrm{D}\sigma(x)[\sigma(x)(\delta)](\gamma)$.

Preuve. — C'est un théorème classique, on peut se référer à [5]. Énonçons quelques propriétés de la fonction h (cf. le lemme 2).

LEMME 18. — Si σ est de classe $\mathrm{C}^{1,b}$ et vérifie la condition (37) :

a) h est de classe $\mathrm{C}^{1,2}$

b) $\forall \alpha \in \mathrm{H}_1 \beta, \beta_1 \in \mathrm{H}$ on a :

$$h(\alpha, \beta) = h(h(\alpha, \beta_1), \beta - \beta_1)$$

donc

$$\alpha = h(h(\alpha, \beta), -\beta).$$

c)
$$\begin{aligned} Id_{\mathrm{H}_1} &= \frac{\partial h}{\partial \alpha}(h(\alpha, \beta), -\beta) \circ \frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) \\ &= \frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) \circ \frac{\partial h}{\partial \alpha}(h(\alpha, \beta), -\beta). \end{aligned}$$

d) Les applications

$$(\alpha, \beta) \in \mathrm{H}_1 \times \mathrm{H} \to h(\alpha, \beta) \in \mathrm{H}_1$$
$$(\alpha, \beta) \in \mathrm{H}_1 \times \mathrm{H} \to \frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) \in \mathscr{L}(\mathrm{H}_1)$$

restreintes à tout borné de $\mathrm{H}_1 \times \mathrm{H}$ sont lipschitziennes.

Preuve. — Le point *a*) est un théorème connu (cf. [5]).

Le point *b*) se prouve comme le point *a*) du lemme 2.

Pour obtenir *c*), il suffit de différencier par rapport à α les deux membres de l'égalité

$$\alpha = h(h(\alpha, \beta), -\beta)$$

et d'utiliser le fait que

$$\alpha = h(\alpha_1, \beta) \Rightarrow \alpha_1 = h(\alpha, -\beta).$$

Pour obtenir *d*), on voit tout d'abord que l'application $(\alpha, \beta) \to h(\alpha, \beta)$ est bornée sur tout borné de $\mathrm{H}_1 \times \mathrm{H}$.

En effet

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \| h(\alpha, t\beta) - h(\alpha, o) \| &= \left\| \int_0^t \frac{\partial h}{\partial \beta}(\alpha, s\beta) . \beta ds \right\| \leq \int_0^t \| \sigma(h(\alpha, s\beta))\beta \| \, ds \\ &\leq \int_0^t \| \beta \| [\mathrm{K} \| h(\alpha, s\beta) \| + \| \sigma(0) \|] ds \end{aligned}$$

(K constante de Lipschitz pour σ).

D'après le lemme de Cronwall

$$\forall t \in [0, T], \qquad (\alpha, \beta) \in H_1 \times H \, || h(\alpha, t\beta) || \leq (|| \alpha || + || \beta || \quad || \sigma(0) || T) \exp K || \beta || t$$

Or

$$\frac{\partial h}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = \sigma(h(\alpha, \beta)) \Rightarrow \left\| \frac{\partial h}{\partial \beta}(\alpha, \beta) \right\| \leq K \, || h(\alpha, \beta) || + || \sigma(0) ||$$

donc $\frac{\partial h}{\partial \beta}(\alpha, \beta)$ est bornée sur tout borné de $H_1 \times H$.

De plus :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial h}{\partial \beta}(\alpha, \beta)\right) = \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, \beta)\right) = D\sigma(h(\alpha, \beta)) . \frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) .$$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad \frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, t\beta) = Id_{H_1} + \int_0^t D\sigma(h(\alpha, s\beta)) . \frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, s\beta) . \beta ds$$

et

$$\left\| \frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, t\beta) \right\| \leq 1 + K \, || \beta || \int_0^t \left\| \frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, s\beta) \right\| ds$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, t\beta) \right\| \leq \exp K \, || \beta || \, t .$$

Donc $\frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, \beta)$ est borné lorsque β varie dans un ensemble borné de H.

De plus :

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, t\beta) - \frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha_1, t\beta_1) = \int_0^t (D\sigma(h(\alpha, s\beta)) - D\sigma(h(\alpha_1, s\beta_1))) \frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, s\beta)\beta ds + \int_0^t D\sigma(h(\alpha_1, s\beta_1)) \left(\frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, s\beta)(\beta) - \frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha_1, s\beta_1)(\beta_1)\right) ds$$

En utilisant le lemme de Cronwall et les propriétés précédentes on voit que l'application $(\alpha, \beta) \to \frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, \beta)$ est bien lipschitzienne sur tout borné de $H_1 \times H$.

THÉORÈME 19. — Soient σ et b deux applications vérifiant la condition (35). Supposons de plus que σ vérifie la condition (37). Soit X_0 une v. a. $\mathscr{F}_0$ mesurable à valeurs dans H_1. Il existe un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans H_1 continu, $\mathscr{F}_t$-adapté, unique à une indistinguabilité près qui est solution de l'équation différentielle stochastique.

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) ds \qquad \forall t \geq 0 \text{ p. s.} \tag{38}$$

La résolution de l'équation (38) est équivalente à la résolution pour presque tout $\omega \in \Omega$ des équations différentielles ordinaires

$$(39) \quad \begin{cases} D'_t = \dfrac{\partial h}{\partial \alpha}(h(D_t, B_t), -B_t) \\ \qquad\qquad \left\{ -\dfrac{1}{2}\operatorname{tr}(WD\sigma(h(D_t, B_t)).\sigma(h(D_t, B_t))) + b(h(D_t, B_t)) \right\} \\ D_0 = X_0 \end{cases}$$

Le processus $(D_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans H_1, obtenu comme solution des équations (39) est adapté et vérifie les équations équivalentes suivantes :

$$(40) \qquad X_t = h(D_t, B_t) \qquad \forall t \geq 0 \text{ p. s.}$$

$$(41) \qquad D_t = h(X_t, -B_t) \qquad \forall t \geq 0 \text{ p. s.}$$

Ces équations caractérisent de manière unique (à une indistinguabilité près) le processus $(D_t)_{t \geq 0}$.

Preuve. — *Existence.* — Pour tout $\omega \in \Omega$, considérons l'application

$$f_\omega : \mathbb{R} \times H_1 \to H_1$$

définie par :

$$f_\omega(t, x) = \frac{\partial h}{\partial \alpha}(h(x, B_t), -B_t) \left\{ -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(WD\sigma(h(x, B_t)).\sigma(h(x, B_t))) + b(h(x, B_t)) \right\}$$

Compte tenu des hypothèses faites sur σ, b et du lemme 18, on vérifie facilement que $f_\omega(t, x)$ est continue et localement lipschitzienne en x. Donc il existe une solution maximale $(D_t(\omega))_{t \geq 0}$ de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} D'_t(\omega) = f_\omega(t, D_t(\omega)) \\ D_0(\omega) = X_0(\omega)\,. \end{cases}$$

Cette solution est en fait définie pour tout $t \geq 0$.

En effet comme $\left\| \dfrac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) \right\| \leq \exp K \| \beta \|$, on a, en utilisant le lemme 18 :

$$\forall T > 0 \quad \exists K_1^T(\omega) \qquad \text{et} \qquad K_2^T(\omega) > 0$$

qui ne dépendent que de T, σ, b et B telles que :

$$\| D'_t(\omega) \| \leq K_1^T(\omega) + K_2^T(\omega) \| D_t(\omega) \| \qquad \forall t \in [0, T]$$

donc

$$\| D_t(\omega) \| \leq (\| X_0(\omega) \| + TK_1^T(\omega)) \exp (K_2^T(\omega)T) \qquad \forall t \in [0, T]$$

d'après le lemme de Cronwall.

Lorsque t tend vers une limite finie $\|D_t(\omega)\|$ est toujours borné; la solution maximale $(D_t(\omega))_{t\geq 0}$ est donc définie sur $\mathbb{R}_+$ tout entier. Cette solution étant unique puisque $f_\omega(t, x)$ est localement lipschitzienne en x on voit de plus que le processus $(D_t)_{t\geq 0}$ ainsi construit est adapté à la famille de sous-tribus engendrée par le mot brownien B.

Considérons maintenant le processus $(\bar{X}_t)_{t\geq 0}$ défini par :

$$\bar{X}_t = h(D_t, B_t).$$

En utilisant la formule d'Ito (16) et le lemme (18) on a :

$$\begin{aligned}
&\bar{X}_t - X_0 \\
&= \int_0^t \frac{\partial h}{\partial \beta}(D_s, B_s)dB_s + \int_0^t \frac{\partial h}{\partial \alpha}(D_s, B_s)D_s' ds + \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{tr}\left(W\frac{\partial^2 h}{\partial \beta^2}(D_s, B_s)\right)ds \\
&= \int_0^t \sigma(h(D_s, B_s))dB_s + \int_0^t \frac{\partial h}{\partial \alpha}(D_s, B_s)\left\{\frac{\partial h}{\partial \alpha}(h(D_s, B_s), -B_s)b(h(D_s, B_s))\right\}ds \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{tr}(WD\sigma(h(D_s, B_s))\sigma(h(D_s, B_s))) - \frac{\partial h}{\partial \alpha}(D_s, B_s).\frac{\partial h}{\partial \alpha}(h(D_s, B_s), -B_s) \\
&\qquad\qquad \operatorname{tr}(WD\sigma(h(D_s, B_s))\sigma(h(D_s, B_s)))ds \\
&= \int_0^t \sigma(\bar{X}_s)dB_s + \int_0^t b(\bar{X}_s)ds \qquad \forall t \geqslant 0 \text{ p. s.}
\end{aligned}$$

. *Unicité.* — Soient (X_t) et $(\bar{X}_t)$ deux solutions de l'équation (38). Soit $T_n \uparrow \infty$ une suite de temps d'arrêts pour laquelle les processus arrêtés $(Z_{t\wedge T_n})$ et $(\bar{Z}_{t\wedge T_n})_{t\geq 0}$ sont des martingales, en notant

$$Z_t = \int_0^t \sigma(X_s)dB_s \qquad \text{et} \qquad \bar{Z}_t = \int_0^t \sigma(\bar{X}_s)dB_s.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\forall T > 0 \quad & E[\sup_{t\in[0,T]} \|X_{t\wedge T_n} - \bar{X}_{t\wedge T_n}\|^2] \\
&\leq 2E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left\|\int_0^{t\wedge T_n}(\sigma(X_s) - \sigma(\bar{X}_s))dB_s\right\|^2\right] \\
&+ 2E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left\|\int_0^{T\wedge T_n}(b(X_s) - b(\bar{X}_s))ds\right\|^2\right] \\
&\leq 2K^2(4 + T)\int_0^T E(\|X_{s\wedge T_n} - \bar{X}_{s\wedge T_n}\|^2)ds
\end{aligned}$$

Il suffit d'utiliser le lemme de Cronwall pour conclure.

V. Applications

Supposons toujours que σ et b vérifient la condition (35) et que σ vérifie la condition (37).

On considère l'application $\phi : H_1 \times C_H(\mathbb{R}_+) \to C_{H_1}(\mathbb{R}_+)$ définie par $\forall (x, u) \in H_1 \times C_H(\mathbb{R}_+)\ \phi(x, u)(t) = D_t$ est la solution maximale de l'équation différentielle :

$$(42) \quad \begin{cases} D'(t) = \dfrac{\partial h}{\partial \alpha}(h(D_t, u_t), -u_t) \left\{ -\dfrac{1}{2} \operatorname{tr}\left(WD\sigma(h(D_t, u_t))\sigma(h(D_t, u_t))\right) + b(h(D_t, u_t)) \right\} \\ D(0) = x . \end{cases}$$

Cette solution est en fait définie $\forall t \geq 0$.

On considère aussi l'application $\Psi : H_1 \times C_H(\mathbb{R}_+) \to C_{H_1}(\mathbb{R}_+)$ définie par :

$$\forall (x, u) \in H_1 \times C_H(\mathbb{R}_+)\ \Psi(x, u) = h(\phi(x, u), u) .$$

D'après le théorème 19, si $(X_t)_{t \geq 0}$ est la solution de l'équation (38) on a :

$$(43) \qquad X_t = \Psi(X_0, B)(t) \qquad \forall t \geq 0 \text{ p. s.}$$

Soit $T > 0$, G un ensemble borné de $C_H([0, T])$ (muni de la norme $\| \cdot \|_T$ uniforme sur $[0, T]$), X_1 une application : $\Omega \to H_1$.

Compte tenu des hypothèses faites sur σ et b et du lemme 18, on démontre de la même façon que pour le lemme 4.

PROPOSITION 20. — Pour presque tout $\omega \exists K_G^T(\omega) > 0$ telle que

$$(44) \quad \forall u \in G\ \| X - \Psi(X_1, u) \| (\omega) \leq K_G^T(\omega)(\| u - B \|_T(\omega) + \| X_0 - X_1 \| (\omega)) .$$

COROLLAIRE 21. — Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de processus continus (non nécessairement adaptés) qui converge uniformément p. s. sur tout compact vers le mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ alors

$$(45) \qquad \text{p. s.} \quad \forall T > 0 \qquad \| X - \Psi(X_0, u_n) \|_T \to 0 \ qd\ n \to \infty$$

REMARQUE 22. — Lorsque u est de classe C^1 par morceaux, $u(0) = 0$, on a, en notant $\dot{u}$ la dérivée de u

$$\forall t \geq 0 \quad \Psi(x, u)(t) = x + \int_0^t \sigma(\Psi(x, u)(s))\dot{u}_s ds - \frac{1}{2} \int_0^t \operatorname{tr}\left(WD\sigma(\Psi(x, u)(s))\right. \\ \left.\sigma(\Psi(x, u)(s))ds + \int_0^t b(\Psi(x, u)(s))ds .\right.$$

Or, avec les notations du corollaire 21, on peut toujours choisir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de classe C^1 par morceaux (il suffit de considérer les approximations polygonales du mouvement brownien (B_t)).

Notons $S_{X_0}=\{\Psi(X_0(\omega), u), u$ de classe C^1 par morceaux, $u(o)=0, \omega\in\Omega\}$. Le support topologique de la loi P_X du processus (X_t) solution de l'équation (38) est contenu dans l'adhérence de l'ensemble S_{X_0} dans $C_{H_1}(\mathbb{R}_+)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

LEMME 23. — Soit $u\in C_H(\mathbb{R}_+)$ alors

(46) $$\forall T > 0 \quad \forall\varepsilon > 0 \quad P(\|B - u\|_T < \varepsilon) > 0 .$$

Preuve. — Cf. [*6*].

PROPOSITION 24. — Supposons que $X_0 \equiv x$. Soit u de classe C^1 par morceaux : $\mathbb{R}_+ \to H$ et $\phi^u\in S_x$. Avec les notations de la proposition 20 :

i) $\forall T > 0 \quad \exists K_T > 0$ (ne dépendant pas de ω) t. q.

$$\forall 0 < \varepsilon < 1 \quad \{\|B - u\|_T < \varepsilon\} \underset{\text{p.s.}}{\subseteq} \{\|X - \phi^u\|_T < K_T\varepsilon\}$$

ii) $\forall T > 0 \quad \forall\varepsilon > 0 \quad P(\|X - \phi^u\|_T < \varepsilon) > 0.$

Compte tenu de la remarque 22, une conséquence immédiate de la proposition 24, c'est que Supp $P_x = \bar{S}_x$. Cf. la remarque [*10*].

REMARQUE 25. — 1) On peut obtenir l'analogue du théorème 13 en dimension finie.

Exemple. — Supposons que $H = H_1 = \mathbb{R}^2$, alors pour tout $x\in\mathbb{R}^2$, $\sigma(x)$ est une matrice à deux lignes et deux colonnes. Soient σ et b vérifiant les conditions (35) et (37) et soit

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{tr}(D\sigma(X_s)\sigma(X_s))ds + \int_0^t b(X_s)ds .$$

Supposons que γ soit une courbe fermée de classe C^1 qui divise le plan en deux parties disjointes S_1 et S_2. Si pour tout $x\in\gamma$, le sous-espace vectoriel Im $(x) = \sigma(x)(\mathbb{R}^2)$ est de dimension ≤ 1 et est parallèle au vecteur tangent à la courbe γ en ce point et si le vecteur $b(x)$ est dirigé vers l'intérieur de S_1 (resp. S_2) on a

$$x_0\in S_1 \text{ (resp. } S_2) \Rightarrow X_t\in S_1 \text{ (resp. } X_t\in S_2) \qquad \forall t \geq 0 \text{ p. s.}$$

En effet, à l'aide d'un raisonnement analogue à celui du lemme 12, on montre que cette propriété est vérifiée pour toute fonction $\phi^u\in S_{x_0}$, solution de l'équation différentielle :

$$\phi_t^u = x_0 + \int_0^t \sigma((\phi_s^u))\dot{u}_s ds + \int_0^t b(\phi_s^u)ds ,$$

u de classe C^1. Si $H = H_1 = \mathbb{R}^3$, on peut de même considérer une surface isolante $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ de classe C^1. On peut d'ailleurs, pour obtenir cette propriété, se passer de la condition (37), en se plaçant sous les hypothèses de Stroock et Varadhan : σ et b lipschitziennes, σ est de classe C^2, σ, $D\sigma$, $D^2\sigma$ et b sont bornées, puisqu'on a alors Supp $P_X \subseteq \bar{S}_{X_0}$.

2) Sous les conditions de théorème 19, supposons de plus que l'application σ soit de classe C^{k+1} et que b soit de classe C^k ($k \in \mathbb{N}^*$).

Pour tout $x \in H_1$, soit $(X_t^x)_{t \geq 0}$ la solution de

$$X_t^x = x + \int_0^t \sigma(X_s^x) dB_s + \int_0^t b(X_s^x) ds .$$

Pour presque tout $\omega \in \Omega$, l'application de H_1 dans H_1 : $x \to X_t^x(\omega)$ est, pour tout $t \geq 0$, de classe C^k. C'est une conséquence du théorème sur la différentiabilité par rapport à la valeur initiale pour des équations différentielles ordinaires et du théorème 19.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. F. ALLAIN, Sur quelques types d'approximation des solutions d'Équations Différentielles Stochastiques. *Thèse Doctorat 3e Cycle*, Rennes, 1974.

[2] H. J. ANDERSON, Local behaviour of stochastic integral equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. **164**, 1972.

[3] A. BONAMI, N. El KAROUI, B. ROYNETTE et H. REINHARD, Processus de diffusion associé à un opérateur elliptique dégénéré. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. VII, n° 1, 1971, p. 31-80.

[4] C. DOELANS-DADE, On the Existence and Unicity of Solutions of Stochastic Integral Equations. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, t. **36**, 1976, p. 93-101.

[5] J. DIEUDONNÉ, *Fondements de l'analyse moderne* (I). Gauthier-Villars, Paris, 1965.

[6] H. DOSS, *Quelques propriétés des processus de diffusion à valeurs dans un espace de Hilbert*. Thèse de Doctorat de 3e Cycle, Université Paris VI, 1975.

[7] N. KAZAMAKI, Note *On a stochastic integral equation*. Séminaire de Probabilités VI, Université de Strasbourg. Springer-Verlag, 1972.

[8] J. PELLAUMAIL, Une nouvelle construction de l'intégrale stochastique. *Société Mathématique de France*, 1973. Astérisque 9.

[9] P. E. PROTTER, *On the Existence, Uniqueness, Convergence and Explosions of solutions of Systems of Stochastic Integral Equations*. A paraître.

[10] D. W. STROOCK and S. R. S. VARADHAN, *On the support of diffusion processes with applications to the strong maximum principle*. 6th, Berkeley Symposium, Vol. III, 1972.

[11] WONG and ZAKAI, On the convergence of Ordinary Integrals to Stochastic Integrals. *Ann. of Math. Stat.*, n° 36, 1965.

[12] T. YAMADA, On a comparison theorem of solutions of stochastic differential equations and its application. *J. Math. Kyoto Univ.*, t. **13-3**, 1973.

(Manuscrit reçu le 30 juin 1976)