Annales de l'I. H. P., section B

Jacques Chevalier

Estimation du support et du contour du support d'une loi de probabilité

Annales de l'I. H. P., section B, tome 12, n^o 4 (1976), p. 339-364

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1976__12_4_339_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XII, n° 4, 1976, p. 339-364. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Estimation du support et du contour du support d'une loi de probabilité

par

Jacques CHEVALIER

Université Pierre-et-Marie-Curie
24, rue Tournefort, Paris 5e

RÉSUMÉ. — On se propose de définir et d'étudier des estimateurs du support et du contour du support d'une loi de probabilité dans le cas d'un échantillon.

ABSTRACT. — We define several estimators for the support and the boundary of the support of a probability law, on the base of a n-sample from this law. We prove some properties concerning the convergence of these estimators.

I. INTRODUCTION

Nous nous proposons, à partir d'un échantillon, d'estimer le support K et le contour du support d'une loi de probabilité P.

Ce problème a été abordé par Geffroy [*9*] [*10*], Renyi et Sulanke [*14*, I et II], Efron [*6*], Raynaud [*13*], Fisher [*7*] [*8*], Bosq [*1*] et Guilbard [*11*].

Ces travaux ont été faits en imposant à K ou à P des hypothèses assez restrictives ; en particulier, K est soit convexe, soit égal à

$$\{ (x, y) \in K' \times \mathbb{R} \mid 0 \leqslant y \leqslant s(x) \}$$

où K′ est un compact métrisable et s une application continue positive de K′ dans $\mathbb{R}$.

Nous nous proposons d'abord de reprendre en la généralisant l'étude faite dans [*5*], puis de la compléter par l'étude de problèmes de vitesse de convergence.

II. DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Fixons nos notations et donnons le critère de convergence que nous avons retenu.

(Ω, d) est un espace métrique, $\mathscr{A}$ la tribu borélienne associée et P une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ de support K. P_* et P^* désignent les probabilités intérieure et extérieure associées à P.

A étant un sous-ensemble de Ω, nous désignons par $\complement A$ ou $\bar{A}$ son complémentaire par rapport à Ω.

ε étant un réel strictement positif et A un sous-ensemble de Ω, on appelle ε-rétracté et ε-dilaté (resp. ε-rétracté ouvert, ε-dilaté ouvert) de A les ensembles $A_\varepsilon = \{ M \mid d(M, \bar{A}) \geqslant \varepsilon \}$ et $A^\varepsilon = \{ M \mid d(M, A) \leqslant \varepsilon \}$ (resp. ${}_\varepsilon A = \complement(\bar{A})^\varepsilon$, ${}^\varepsilon A = \complement(\bar{A})_\varepsilon$). (On utilise la convention $d(M, \phi) = +\infty$).

On se propose d'estimer K à l'aide d'un borélien H_n déterminé à partir des n premières valeurs d'une suite de v. a. indépendantes $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de loi P.

DÉFINITION 2.1. — On dit que H_n converge en probabilité (resp. p. s., p. co.) vers K si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ P_*(K_\varepsilon \subset H_n \subset K^\varepsilon) \underset{n}{\rightarrow} 1 \ (\text{resp. } P_* [\varliminf_n \{ K_\varepsilon \subset H_n \subset K^\varepsilon \}] = 1,$$

$$\sum_n (1 - P_*(K_\varepsilon \subset H_n \subset K^\varepsilon)) < +\infty).$$

REMARQUES 3.1. — *a*) En toute rigueur, on aurait dû dans la définition 2-1 utiliser les probabilités produits sur $\prod_{i=1}^{n} (\Omega, \mathscr{A})$ et $\prod_{i=1}^{\infty} (\Omega, \mathscr{A})$, ainsi que les probabilités intérieures et extérieures associées. Nous ferons, cependant, systématiquement usage de l'abus très pratique qui consiste à noter ces probabilités P, P_* et P^*.

b) Certains auteurs prennent pour H_n l'échantillon lui-même, et pour critère de convergence le fait que la distance de Hausdorff entre H_n et K tend vers 0, selon l'un des trois modes : en probabilité, p. s. et p. co. Ce critère, traduisant simplement le fait que l'échantillon devient « dense » dans K, lorsque n tend vers $+\infty$, ne nous a pas semblé assez puissant.

c) De même, nous n'avons pas retenu pour critère de convergence le comportement en probabilité, p. s. ou p. co. de la différence symétrique $H_n \Delta K$.

III. ESTIMATION DU SUPPORT D'UNE LOI DE PROBABILITÉ

A. K est un compact ε-convexe

1) Rappelons d'abord la notion d'ensemble ε-convexe qui est due à Perkal [*12*].

Pour tout couple $(\varepsilon, \varepsilon')$ de réels strictement positifs et tout sous-ensemble A de Ω, posons :

$$A(\varepsilon, \varepsilon') = \complement\left(\bigcup_{x \in \overline{A^{\varepsilon'}}} B(x, \varepsilon)\right) = \complement^{\varepsilon}(\overline{A^{\varepsilon'}}),$$

où $B(x, \varepsilon)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon ε.

DÉFINITION 3.1. — Soit ε un réel strictement positif et A un sous-ensemble de (Ω, d).

a) On appelle enveloppe ε-convexe de A et l'on note $A(\varepsilon)$ l'ensemble $A(\varepsilon, \varepsilon)$.

b) On dit que A est ε-convexe s'il est égal à son enveloppe ε-convexe.

REMARQUES 3.1. — *a*) On a toujours l'inclusion : $A \subset A(\varepsilon)$.

b) Si A est ε-convexe, il est encore ε'-convexe pour tout $\varepsilon' < \varepsilon$.

Notons T I, T II et T III les hypothèses suivantes :

T I : la fermeture de toute boule ouverte $B(x, \varepsilon)$ est la boule fermée de même rayon $B'(x, \varepsilon) = \{ M \mid d(x, M) \leqslant \varepsilon \}$.

T II : Tout ensemble borné de (Ω, d) est relativement compact.

T III : Pour tout $x \in \Omega$ et tout $\varepsilon > 0$, on a : $P[\{ M \mid d(x, M) = \varepsilon \}] = 0$.

LEMME 3.1. — Soit (Ω, d) un espace localement compact à base dénombrable tel que T I et T II soient vérifiées et A un sous-ensemble de Ω compact et ε-convexe, avec $\varepsilon > 0$. Alors, si (ε_n) est une suite de réels strictement positifs qui tend en croissant vers ε, quel que soit $\varepsilon' > 0$, on a, pour n assez grand :

$$A_{\varepsilon'} \subset A(\varepsilon, \varepsilon_n) \subset A(\varepsilon) = A. \tag{3-1}$$

Démonstration. — ε_n étant inférieur à ε, on l'inclusion $A(\varepsilon, \varepsilon_n) \subset A(\varepsilon)$. Supposons qu'il existe $\varepsilon' > 0$ tel que la première inclusion de (3-1) ne soit pas vérifiée pour une sous-suite (n_j). La suite $A(\varepsilon, \varepsilon_n)$ étant croissante, il existe donc une suite y_n de points du compact $A_{\varepsilon'}$ telle que $d(\overline{A^{\varepsilon_n}}, y_n) < \varepsilon$.

A tout y_n, on peut alors associer un point x_n de l'ouvert $\overline{A^{\varepsilon_n}}$ tel que $d(x_n, y_n) < \varepsilon$. $y_n \in A$ et $d(x_n, y_n) < \varepsilon$ entraînent l'appartenance de x_n au compact A^ε. Il existe donc deux points $X \in A^\varepsilon$ et $Y \in A_{\varepsilon'}$, avec $d(X, Y) \leqslant \varepsilon$, et une sous-suite (n_i) tels que :

$$\lim_i d(x_{n_i}, X) = \lim_i d(y_{n_i}, Y) = 0 .$$

Si l'on suppose $d(X, A) < \varepsilon$, on obtient, pour i assez grand, $d(x_{n_i}, A) < \varepsilon_{n_i}$ soit $x_{n_i} \in A^{\varepsilon_{n_i}}$, ce qui est impossible. $B(X, \varepsilon)$ est donc incluse dans $\bar{A}$. Comme $B(Y, \varepsilon'/2) \cap \bar{A} = \emptyset$, les boules $B(X, \varepsilon)$ et $B(Y, \varepsilon'/2)$ sont disjointes. T I étant vérifiée, on en déduit $d(X, Y) > \varepsilon$, ce qui est impossible.

Quel que soit $\varepsilon' > 0$, pour n assez grand, on a donc (3-1).

2) Pour étudier le problème de l'estimation de K, signalons d'abord une généralisation du résultat concernant la loi des grands nombres uniforme obtenu dans [*2*].

Θ est un espace topologique à base dénombrable, $(Z_\theta)_\Theta$ une famille de v. a. r. sur l'espace probabilisé $(\Lambda, \mathscr{B}, Q)$, $(\Lambda', \mathscr{B}', Q')$ l'espace produit de la famille $\{(\Lambda_k, \mathscr{B}_k, Q_k)\}_{\mathbb{N}^*}$ d'espaces isomorphes à $(\Lambda, \mathscr{B}, Q)$, I_k l'isomorphisme de $(\Lambda_k, \mathscr{B}_k, Q_k)$ sur $(\Lambda, \mathscr{B}, Q)$ et Pr_k la projection de Λ' sur Λ_k.

Q^* et Q_* désignant les probabilités extérieure et intérieure associées à Q, on suppose que (Z_θ) vérifie les deux conditions :

(A) (domination). A tout θ_0, on peut associer un voisinage V et une v. a. r. $Y(\theta_0)$ de $\mathscr{L}_2(\Lambda, \mathscr{B}, Q)$ tels que pour tout θ de V on ait :

$$|Z_\theta| \leqslant Y(\theta_0) . \tag{3-2}$$

(B) (continuité forte en probabilité). A tout θ_0 et tout couple $(\varepsilon, \varepsilon')$ de réels strictement positifs, on peut associer un voisinage V_1 de θ_0 tel que :

$$Q_*\left[\bigcap_{\theta \in V_1} |Z_\theta - Z_{\theta_0}| < \varepsilon\right] > 1 - \varepsilon' . \tag{3-3}$$

LEMME 3.2. — Si Θ est compact, pour tout $\varepsilon'' > 0$, on a :

$$\sum_n Q^*\left[\bigcup_{\theta \in \Theta} \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_\theta^i - E(Z_\theta)\right| > \varepsilon''\right] < +\infty \tag{3-4}$$

où l'on a posé : $Z_\theta^i = Z_\theta \circ I_i \circ Pr_i$.

Revenons aux notations définies en II. K' désignant un compact de Ω et ε un réel strictement positif, posons :

$$Y_x^n = 1_{B(x,\varepsilon)}(X_n) .$$

PROPOSITION 3.1. — Si T III est vérifiée, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\varepsilon'' > 0$, on a :

$$\sum_n \mathrm{P}^*\left[\bigcup_{x \in \mathrm{K}'} \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Y}_x^i - \mathrm{P}(\mathrm{B}(x, \varepsilon)) \right| > \varepsilon'' \right\}\right] < +\infty \tag{3-5}$$

Démonstration. — (A) est évidemment vérifiée. (ρ_n) désignant une suite de réels strictement positifs de limite nulle et ε' un élément de $]0, 1/2[$, (B) résulte de T III et de l'inclusion

$$\overline{\lim_n}\left(\bigcup_{y \in \mathrm{B}(x, \rho_n)} \{ | \mathrm{Y}_y^1 - \mathrm{Y}_x^1 | > \varepsilon' \} \right) \subset \{ z \mid d(z, x) = \varepsilon \} \tag{3-6}$$

3) Supposons maintenant Ω localement compact à base dénombrable et K compact ε-convexe avec $\varepsilon > 0$ connu. Supposons de plus T I, T II et T III vérifiées et posons :

$$\mathrm{H}'_n = \complement\left(\bigcup_{x \in \mathrm{I}_n} \mathrm{B}(x, \varepsilon) \right), \qquad \text{avec} \quad \mathrm{I}_n \{ x \mid \forall j = 1, \ldots, n, \mathrm{X}_j \notin \mathrm{B}(x, \varepsilon) \}.$$

THÉORÈME 3.1. — L'estimateur H'_n converge p. co. vers K.

Démonstration. — $\tilde{\varepsilon}$ étant un réel strictement positif, on sait d'après le lemme 3.1 qu'il est possible de prendre $\varepsilon' \in]0, \varepsilon[$ tel que l'on ait l'inclusion $\mathrm{K}_{\tilde{\varepsilon}} \subset \mathrm{K}(\varepsilon, \varepsilon')$.

Prenons $\mathrm{K}' = \mathrm{K}^{\varepsilon'}$ et posons :

$$\mathrm{E}_n = \{ \mathrm{K}(\varepsilon, \varepsilon') \subset \mathrm{H}'_n \} = \left\{ \bar{\mathrm{H}}'_n \subset \bigcup_{x \in \overline{\mathrm{K}'}} \mathrm{B}(x, \varepsilon) \right\}$$

et

$$\mathrm{F}_n = \mathrm{E}_n \cap \{ \mathrm{H}'_n \subset \mathrm{K}(\varepsilon) = \mathrm{K} \} = \mathrm{E}_n \cap \left\{ \left(\bigcup_{x \in \overline{\mathrm{K}^\varepsilon}} \mathrm{B}(x, \varepsilon) \right) \subset \bar{\mathrm{H}}'_n \right\}. \tag{3-7}$$

L'application $x \to \mathrm{P}(\mathrm{B}(x, \varepsilon))$ étant continue, sa restriction à K′ admet un minimum $\mathscr{S}$ qui est atteint. Par définition du support, $\mathscr{S}$ est strictement positif. Prenant $\varepsilon'' = \mathscr{S}/2$, on déduit alors de la proposition 3.1 :

$$\sum_n \mathrm{P}^*\left[\bigcup_{x \in \mathrm{K}'} \{ \forall i = 1, \ldots, n, \mathrm{X}_i \notin \mathrm{B}(x, \varepsilon) \} \right] < +\infty .$$

La série $\Sigma \mathrm{P}^*(\overline{\mathrm{E}_n})$ est donc convergente. Comme

$$\mathrm{P}_*\left[\bigcup_{x \in \overline{\mathrm{K}^\varepsilon}} \mathrm{B}(x, \varepsilon) \subset \bar{\mathrm{H}}'_n \right] = 1 ,$$

on obtient la convergence de la série $\Sigma P^*(\bar{F}_n)$ ce qui entraîne celle de la série $\Sigma(1 - P_*(K_{\tilde{\varepsilon}} \subset H'_n \subset K))$, d'où le résultat.

Pour estimer des supports non ε-convexes, il nous faut pouvoir utiliser des sous-ensembles de Ω dont le diamètre tend vers 0 avec $1/n$ et pour cela supposer connu un lien entre la distance et la probabilité.

B. Méthode des partitions

1) Lemmes

Soit $(C_i)_{i=1,k}$ une famille d'événements deux à deux disjoints d'un espace probabilisé $(\Lambda, \mathscr{B}, Q)$ et (Z_j) une suite de v. a. indépendantes de loi Q.

Les y_i désignant des réels positifs ou nuls, posons :

$$\alpha_i = Q(C_i)\,; \quad D_n^i = \{\, \forall j = 1, n, Z_j \notin C_i \,\}\,; \quad D_n = \bigcup_{i=1}^{k} D_n^i$$

$$\left(1 - \sum_{j=1}^{m} y_{i_j}\right)_*^n = \begin{cases} \left(1 - \sum_{j=1}^{m} y_{i_j}\right)^n, & \text{si } 1 \geqslant \sum_{j=1}^{m} y_{i_j} \\ 0 \quad , & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$Q_k^n(y_1, \ldots, y_k) = \sum_i (1 - y_i)_*^n - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant k} (1 - y_{i_1} - y_{i_2})_*^n + \ldots + (-1)^{n+1}\left(1 - \sum_{i=1}^{k} y_i\right)_*^n$$

On a :

$$Q(D_n) = Q_k^n(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)\,.$$

Lemme 3.3. — Soit (β_i) et (γ_i) deux k-uples tels que $\Sigma\gamma_i \leqslant 1$ et $\forall i = 1, k$, $\gamma_i \geqslant \beta_i \geqslant 0$. On a alors :

$$1 \geqslant Q_k^n(\beta_1, \ldots, \beta_k) \geqslant Q_k^n(\gamma_1, \ldots, \gamma_k) \geqslant 0\,. \tag{3-8}$$

Démonstration. — Q_k^n représentant sous les conditions de l'énoncé une probabilité, les première et troisième inégalités de (3-8) sont évidentes. Pour la seconde inégalité, on remarque qu'elle est évidente pour $k = 0$ ou $n = 1$. On montre alors, par dérivation, que dans le domaine d'étude Q_k^n

est décroissante par rapport à chacune des variables et on termine à l'aide d'une récurrence.

LEMME 3.4. — Si I_n est un sous-ensemble de $\{1, \ldots, k\}$, on a :

$$Q\left(\bigcap_{i\in I_n} \overline{D_n^i}\right) \leqslant \prod_{i\in I_n} Q(\overline{D_n^i}). \tag{3-9}$$

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur card I_n à partir du lemme précédent et de la formule suivante, où l'on a posé $I'_n = I_n - \{j\}$, avec $j \in I_n$:

$$Q\left(\bigcap_{I_n} \overline{D_n^i}\right) = 1 - Q\left(\bigcup_{I'_n} D_n^i\right) - P(D_n^j)\left(1 - P\left(\bigcup_{I'_n} D_n^i/D_n^j\right)\right).$$

Si l'on a une famille $(C_i)_{i\in R_n}$ d'événements disjoints deux à deux, avec card $R_n \leqslant +\infty$, on déduit facilement du lemme 3-4 le lemme suivant :

LEMME 3.5. — Pour tout sous-ensemble J_n de R_n, on a

$$Q\left(\bigcap_{i\in J_n} \overline{D_n^i}\right) \leqslant \prod_{i\in J_n} Q(\overline{D_n^i}), \tag{3-10}$$

avec la convention $\prod_{i\in J_n} Q(.) = 1$ si card $J_n = 0$.

2) CONDITIONS NÉCESSAIRES DE CONVERGENCE

Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une partition $A_n = (A_{n,i})_{i\in R_n}$ (avec card R_n non nécessairement fini) de Ω en événements. E désignant un borélien quelconque, posons :

$$\delta_{n,i} = \operatorname{diam} A_{n,i}\,; \qquad \delta_n = \sup_i \delta_{n,i}\,; \qquad \delta'_n = \inf_i \delta_{n,i}$$

$$m(n, E) = \inf_{A_{n,i}\subset E} P(A_{n,i})\,; \qquad M(n, E) = \sup_{A_{n,i}\subset E} P(A_{n,i})$$

$$B_{n,i} = \{\forall j = 1, \ldots, n,\ X_j \notin A_{n,i}\}\,; \qquad I_n = \{i \mid \exists j \in \{1, \ldots, n\} : X_j \in A_{n,i}\}$$

et

$$H_n = \bigcup_{i\in I_n} A_{n,i}.$$

Nous dirons qu'un borélien K′ vérifie la propriété $\mathscr{K}$ s'il est d'intérieur non vide et si $d(K', \bar{K})$ est strictement positif.

Notons T IV, T V, T V' et T VI les hypothèses suivantes :

T IV : la suite (δ_n) converge vers 0,

T V : pour tout borélien K' vérifiant $\mathscr{K}$, on a :

$$\lim_n M(n, K')^{-1}(1 - M(n, K'))^n = 0\,. \tag{3-11}$$

T V' : pour tout borélien K' vérifiant $\mathscr{K}$ et tout $\varepsilon > 0$, on a, pour n suffisamment grand :

$$M(n, K') \geqslant (1 - \varepsilon)Ln/n\,. \tag{3-12}$$

T VI : pour tout borélien K' vérifiant $\mathscr{K}$, la série $\Sigma M(n, K')^{-1}(1 - M(n, K'))^n$ est convergente.

REMARQUE 3.2. — T V entraîne T V'.

THÉORÈME 3.2. — Supposons T IV vérifiée. Alors,

a) La convergence en probabilité de H_n vers K entraîne T V et T V'.

b) La convergence p. co. de H_n vers K entraîne T VI.

Démonstration. — *a*) Soit K' un borélien vérifiant $\mathscr{K}$. Notons J_n l'ensemble des indices i tels que $A_{n,i}$ soit contenu dans K' et posons $\varepsilon' = d(K', \bar{K})$ et $k'(n) = \text{card } J_n$. Comme $K' \subset K_{\varepsilon'/2}$, la convergence en probabilité de H_n vers K entraîne :

$$P\left[\bigcap_{J_n} \overline{B_n^i}\right] \underset{n}{\rightarrow} 1\,.$$

Or, d'après le lemme 3.5, on a :

$$P\left[\bigcap_{J_n} \overline{B_n^i}\right] \leqslant (1 - (1 - M(n, K'))^n)^{k'(n)}\,,$$

d'où :

$$k'(n)(1 - M(n, K'))^n \rightarrow 0\,. \tag{3-13}$$

L'intérieur de K' n'étant pas vide, il existe une boule $B(x, 2\rho)$, avec $\rho > 0$ contenue dans K' et telle que le nombre $\eta = P(B(x, \rho))$ soit strictement positif. D'après T IV, pour n assez grand, $\bigcup_{J_n} A_{n,i}$ recouvre $B(x, \rho)$. On en déduit :

$$\eta \leqslant \sum_{J_n} P(A_{n,i}) \leqslant k'(n)M(n, K')\,, \tag{3-14}$$

c'est-à-dire, compte tenu de (3-13), T V et T V'.

b) Reprenant les notations précédentes, il suffit pour établir le résultat d'utiliser (3-14) et l'inégalité :

$$1 - \mathrm{P}\left(\bigcap_{\mathrm{J}_n} \overline{\mathrm{B}_n^i}\right) \geqslant \frac{k'(n)}{2}(1 - \mathrm{M}(n, \mathrm{K}'))^n, \qquad (3\text{-}15)$$

valable pour n assez grand.

Applications

Exemple 1. — On suppose que T IV est vérifiée, que $k(n) = \operatorname{card} \mathrm{R}_n$ est fini et qu'il existe K′ vérifiant $\mathscr{K}$ et $\beta > 0$ tels que pour n assez grand

$$\mathrm{M}(n, \mathrm{K}') \leqslant \beta/k(n). \qquad (3\text{-}16)$$

Alors si H_n converge en probabilité vers K, pour tout $\varepsilon > 0$, on a, pour n assez grand :

$$k(n) \leqslant (\beta + \varepsilon)\mathrm{L}n/n, \qquad (3\text{-}17)$$

. si H_n converge p. co. vers K, on a :

$$\mathrm{S} = \Sigma\, k(n)(1 - \beta/k(n))^n < +\infty. \qquad (3\text{-}18)$$

(3-17) est évident. Si $\mathrm{S} = +\infty$, compte tenu de T VI, il existe une sous-suite (n_i) telle que $\mathrm{M}(n_i, \mathrm{K}')^{-1}(1 - \mathrm{M}(n_i, \mathrm{K}'))^{n_i} < (1 - \beta/k(n_i))^{n_i}k(n_i)$. Vu la décroissance de $y = (1 - x)^n/x$ pour $x \in]0, 1]$, cela entraîne $\mathrm{M}(n_i, \mathrm{K}') > \beta/k(n_i)$, ce qui contredit (3-16). On a donc (3-18).

Exemple 2. — On suppose que T IV est vérifiée et qu'il existe une application h de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, croissante, continue en 0 et y valant 0. On suppose, de plus, qu'il existe K′ vérifiant $\mathscr{K}$ et $\beta > 0$ tels que pour n assez grand :

$$\mathrm{M}(n, \mathrm{K}') \leqslant \beta h(\delta_n). \qquad (3\text{-}19)$$

. Alors, si H_n converge en probabilité vers K, pour tout $\varepsilon > 0$, on a, pour n assez grand :

$$h(\delta_n)^{-1} \leqslant (\beta + \varepsilon)n/\mathrm{L}n, \qquad (3\text{-}20)$$

. Si H_n converge p. co. vers K, on a :

$$\Sigma h(\delta_n)^{-1}(1 - \beta h(\delta_n))^n < +\infty. \qquad (3\text{-}21)$$

La démonstration se fait comme dans l'exemple 1.

Exemple 3. — $\Omega = \mathbb{R}^s$. K est d'intérieur non vide et P admet une densité φ par rapport à la mesure de Lebesgue. On prend pour partition A_n un pavage de côté $\delta_n = o(1)$ et l'on suppose qu'il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{K},\ \varphi(\mathrm{M}) \leqslant \beta. \qquad (3\text{-}22)$$

. Alors, si H_n converge en probabilité vers K, pour tout $\varepsilon > 0$, on a, pour n assez grand :

$$1/\delta_n^s \leqslant (\beta + \varepsilon)n/\mathrm{L}n\,, \tag{3-23}$$

. Si H_n converge p. co. vers K, on a

$$\Sigma\delta_n^{-s}(1 - \beta\delta_n^s)^n < +\infty\,. \tag{3-24}$$

Il suffit de prendre $h : x \to x^s$ pour se ramener au cas précédent.

3) Conditions suffisantes de convergence

Notons T VII, T VII′ et T VIII les hypothèses :

T VII : on a

$$\lim_n m(n, \mathrm{K})^{-1}(1 - m(n, \mathrm{K}))^n = 0\,. \tag{3-25}$$

T VII′ : pour n suffisamment grand, on a :

$$m(n, \mathrm{K}) \geqslant \mathrm{L}n/n\,. \tag{3-26}$$

T VIII : la série $\Sigma m(n, \mathrm{K})^{-1}(1 - m(n, \mathrm{K}))^n$ est convergente.

Remarque 3.3. — T VII′ entraîne T VII.

Théorème 3.3. — Supposons T IV vérifiée. Alors,

a) T VII (donc T VII′) entraîne la convergence en probabilité de H_n vers K.

b) T VIII entraîne la convergence p. co. de H_n vers K.

Démonstration. — *a*) Prenons $\varepsilon > 0$ et notons J_n l'ensemble des indices i tels que $A_{n,i}$ soit contenu dans K_ε. D'après T IV, il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, on ait $\delta_n < \varepsilon/3$. Comme tout $x \in K_{2\varepsilon}$ appartient à un $A_{n,i}$ qui est alors contenu dans K_ε, on a :

$$K_{2\varepsilon} \subset \bigcup_{J_n} \bar{A}_{n,i}\,. \tag{3-27}$$

De T VII et des inégalités :

$$P\Big(\bigcup_{J_n} B_n^i\Big) \leqslant \text{card } J_n.(1 - m(n, \mathrm{K}))^n$$

et

$$1 \geqslant P(K_\varepsilon) \geqslant \text{card } J_n . m(n, \mathrm{K})\,,$$

on déduit :

$$\lim_n P\Big(\bigcap_{J_n} \overline{B_n^i}\Big) = 1\,, \tag{3-28}$$

ce qui entraîne, compte tenu de (3-27), la convergence de $P[K_{2\varepsilon} \subset H_n]$ vers 1. Il suffit alors pour conclure de remarquer que $P[H_n \subset K^\varepsilon] = 1$ dès que δ_n est inférieur à $\varepsilon/2$.

b) Le résultat se déduit immédiatement de la démonstration précédente.

Applications

Exemple 1'. — On suppose que T IV est vérifiée, que $k(n) = \text{card } R_n$ est fini et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour n assez grand :

$$\alpha/k(n) \leqslant m(n, K). \tag{3-29}$$

. $k(n) \leqslant \alpha n/Ln$ pour n assez grand entraîne la convergence en probabilité de H_n vers K.

. $\Sigma k(n)(1 - \alpha/k(n))^n < +\infty$ entraîne la convergence p. co. de H_n.
On utilise la croissance de $y = (1 - x)^n/x$ pour $x \in]0, 1]$.

Exemple 2'. — On suppose que T IV est vérifiée et qu'il existe une application t de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, croissante, continue en 0 et y valant 0. On suppose, de plus, qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour n assez grand :

$$\alpha t(\delta'_n) \leqslant m(n, K). \tag{3-30}$$

. $1/t(\delta'_n) \leqslant \alpha n/Ln$ pour n assez grand entraîne la convergence en probabilité de H_n vers K.

. $\Sigma t(\delta'_n)^{-1}(1 - \alpha t(\delta'_n))^n < +\infty$ entraîne la convergence p. co. de H_n vers K.

Exemple 3'. — $\Omega = \mathbb{R}^s$. P admet une densité φ par rapport à la mesure de Lebesgue. On prend pour partition A_n un pavage de côté $\delta_n = o(1)$ et l'on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall M \in K, \quad \alpha \leqslant \varphi(M). \tag{3-31}$$

. $1/\delta_n^s \leqslant \alpha n/Ln$ pour n assez grand, entraîne la convergence en probabilité de H_n vers K.

. $\Sigma \delta_n^{-s}(1 - \alpha\delta_n^s)^n < +\infty$ entraîne la convergence p. co. de H_n vers K.

Exemple 4. — Les hypothèses sont celles de l'exemple 3', sauf (3-31) qui devient : la restriction de φ à K est continue, $\alpha = \inf_K \varphi$ est strictement positif et il existe au moins un point M adhérent à $\mathring{K}$ tel que $\varphi(M) = \alpha$.

. En probabilité, on obtient alors pour condition nécessaire de convergence :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n' : \forall n \geqslant n', \qquad 1/\delta_n^s \leqslant (\alpha + \varepsilon)n/Ln,$$

et pour condition suffisante :

$$\exists n'' : \forall n \geqslant n'', \qquad 1/\delta_n^s \leqslant \alpha n/\mathrm{L}n .$$

En p. co., on obtient pour condition nécessaire :

$$\forall \varepsilon > 0 , \quad \Sigma \delta_n^{-s}(1 - (\alpha + \varepsilon)\delta_n^s)^n < + \infty ,$$

et pour condition suffisante :

$$\Sigma \delta_n^s(1 - \alpha\delta_n^s)^n < + \infty .$$

REMARQUE 3.4. — Si α existe mais n'est pas connu, il suffit de prendre $k(n) = o(n/\mathrm{L}n)$ (resp. $t(\delta_n')^{-1} = o(n/\mathrm{L}n)$, $\delta_n^s = o(n/\mathrm{L}n)$) dans l'exemple 1' (resp. 2', 3') pour avoir convergence tant en probabilité que p. co.

C. Utilisation des boules ouvertes dans $\mathbb{R}^s$

1) INTRODUCTION

Nous nous proposons d'étudier la convergence de deux estimateurs construits à partir d'une famille de boules ouvertes, et cela vis-à-vis des trois modes de convergence : en probabilité, p. s., p. co.

$(\Omega, \mathscr{A})$ est égal à $\mathbb{R}^s$ muni de la tribu borélienne et d est la distance euclidienne.

(ρ_n) étant une suite de réels strictement positifs de limite 0 et E un borélien quelconque, posons :

$$l(\rho_n, \mathrm{E}) = \inf_{\mathrm{B}(x,\rho_n)\subset \mathrm{E}} \mathrm{P}(\mathrm{B}(x, \rho_n)) ; \qquad \mathrm{L}(\rho_n, \mathrm{E}) = \sup_{\mathrm{B}(x,\rho_n)\subset \mathrm{E}} \mathrm{P}(\mathrm{B}(x, \rho_n))$$

$$\mathrm{B}_n^x = \{ \forall j = 1, \ldots, n, \mathrm{X}_j \notin \mathrm{B}(x, \rho_n) \} , \qquad \mathrm{I}_n = \{ x \mid \exists j \in \{ 1, \ldots, n \} : \mathrm{X}_j \in \mathrm{B}(x, \rho_n) \}$$

et

$$\mathrm{H}_n' = \complement \left(\bigcup_{x \notin \mathrm{I}_n} \mathrm{B}(x, \rho_n) \right) ; \qquad \mathrm{H}_n^* = \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{B}(\mathrm{X}_j, \rho_n) \tag{3-32}$$

2) CONDITIONS NÉCESSAIRES DE CONVERGENCE EN PROBABILITÉ ET P. CO.

Notons T IX, T IX' et T X les hypothèses suivantes :

T IX : pour tout borélien K' vérifiant $\mathscr{K}$, on a :

$$\lim_n \mathrm{L}(\rho_n, \mathrm{K})^{-1}(1 - \mathrm{L}(\rho_n, \mathrm{K}'))^n = 0 . \tag{3-33}$$

T IX' : pour tout borélien K' vérifiant $\mathscr{K}$ et tout $\varepsilon > 0$, on a, pour n assez grand :

$$\mathrm{L}(\rho_n, \mathrm{K}') \geqslant (1 - \varepsilon)\mathrm{L}n/n . \tag{3-34}$$

T X : pour tout borélien K′ vérifiant $\mathcal{K}$, la série

$$\Sigma L(\rho_n, K')^{-1}(1 - L(\rho_n, K'))^n$$

est convergente :

REMARQUE 3.5. — T IX entraîne T IX′ et la convergence de H_n^* vers K selon l'un des trois modes étudiés entraîne celle de H'_n vers K selon le même mode.

Nous désignons par $S(u)$ l'ensemble des points dont les coordonnées sont des multiples entiers de u.

THÉORÈME 3.4. — *a*) La convergence en probabilité de H'_n (ou de H_n^*) vers K entraîne T IX et T IX′.

b) La convergence p. co. de H'_n (ou de H_n^*) vers K entraîne T X.

Démonstration. — *a*) Soit K′ un borélien vérifiant $\mathcal{K}$. Notons J_n l'ensemble des points x de $S(2\rho_n)$ tels que $B(x, \rho_n) \subset K'$ et posons $\varepsilon' = d(K', \bar{K})$ et $k(n) = \text{card } J_n$. Comme $K' \subset K_{\varepsilon'/2}$, la convergence en probabilité de H'_n vers K entraîne :

$$P\left[\bigcap_{J_n} \overline{B_n^x}\right] \to 1 .$$

Les boules $B(x, \rho_n)$, pour $x \in J_n$, étant deux à deux disjointes, on montre comme au théorème 3.2 que l'on a :

$$k(n)(1 - L(\rho_n, K'))^n \to 0 \tag{3-35}$$

L'intérieur de K′ n'étant pas vide, il existe un pavé $U(x_0, 2\rho)$, avec $\rho > 0$, contenu dans K′ et tel que le nombre $\eta = P(U(x_0, \rho))$ soit strictement positif. Posons $J'_n = U(x_0, \rho) \cap S(\rho_n/s)$. Comme $\rho_n = o(1)$, pour n assez grand, $\bigcup_{J'_n} B(x, \rho_n)$ recouvre $U(x_0, \rho)$ et $k(n)$ vérifie l'inégalité : card $J'_n \leqslant k(n).(2s)^s$. On en déduit :

$$\eta \leqslant \sum_{J'_n} P(B(x, \rho_n)) \leqslant k(n)(2s)^s L(\rho_n, K'), \tag{3-36}$$

c'est-à-dire compte tenu de (3-35), T IX et T IX′.

b) Reprenant les notations précédentes, il suffit pour établir le résultat d'utiliser (3-36) et l'inégalité :

$$1 - P\left(\bigcap_{J_n} \overline{B_n^x}\right) \geqslant \frac{k(n)}{2}(1 - L(\rho_n, K'))^n, \tag{3-37}$$

valable pour n assez grand.

$v(s)$ désigne le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^s$.

Applications

Exemple 2''. — On suppose qu'il existe une fonction h analogue à celle de l'exemple 2, un borélien K' vérifiant $\mathscr{K}$ et $\beta > 0$ tels que pour n assez grand :

$$L(\rho_n, K') \leqslant \beta h(\rho_n). \tag{3-38}$$

. Alors, si H'_n (ou H^*_n) converge en probabilité vers K, pour tout $\varepsilon > 0$, on a pour n assez grand :

$$h(\rho_n)^{-1} \leqslant (\beta + \varepsilon)n/Ln, \tag{3-39}$$

. si H'_n (ou H^*_n) converge p. co. vers K, on a :

$$\Sigma h(\rho_n)^{-1}(1 - \beta h(\rho_n))^n < +\infty. \tag{3-40}$$

Exemple 3''. — Exceptée l'existence de la partition A_n qui devient inutile, les hypothèses sont celles de l'exemple 3.

. Si H'_n (ou H^*_n) converge en probabilité vers K, pour tout $\varepsilon > 0$, on a pour n assez grand :

$$1/\rho_n^s \leqslant (\beta + \varepsilon)v(s).n/Ln. \tag{3-41}$$

. Si H'_n (ou H^*_n) converge p. co. vers K, on a :

$$\Sigma\rho_n^{-s}(1 - \beta v(s)\rho_n^s)^n < +\infty. \tag{3-42}$$

3) Conditions suffisantes de convergence en probabilité et p. co.

ρ_n étant donné, désignons par ε_n et ρ'_n deux réels strictement positifs tels que :

$$\rho'_n + \varepsilon_n\sqrt{s}/2 < \rho_n. \tag{3-43}$$

Toute boule $B(x, \rho_n)$ contient une boule $B(y, \rho'_n)$ avec $y \in S(\varepsilon_n)$.

Posons

$$C_n^x = \{ \forall j = 1, \ldots, n, X_j \notin B(x, \rho'_n) \};$$

$$J_n = \{ x \mid x \in S(\varepsilon_n), B'(x, \varepsilon_n\sqrt{s}/2) \cap K_{\rho_n} \neq \varnothing \}$$

et

$$C_n = \bigcap_{x \in J_n} \overline{C_n^x}.$$

Notons T XI, T XI' et T XII les hypothèses :

T XI : on peut choisir ρ'_n et ε_n vérifiant (3-43) et tels que :

$$\lim_n (\rho_n/\varepsilon_n)^s l(\rho'_n, K)^{-1}(1 - l(\rho'_n, K))^n = 0 \tag{3-44}$$

T XI' : on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que pour n assez grand :

$$l(\rho_n(1 - \varepsilon), K) \geqslant Ln/n. \tag{3-45}$$

T XII : on peut choisir ρ'_n et ε_n vérifiant (3-43) et tels que la série :

$$\Sigma(\rho_n/\varepsilon_n)^s l(\rho'_n, \mathrm{K})^{-1}(1 - l(\rho'_n, \mathrm{K}))^n$$

soit convergente.

REMARQUE 3.6. — T XI' entraîne T XI.

THÉORÈME 3.5. — *a*) T XI (ou T XI') entraîne la convergence en probabilité de H_n^* et de H'_n vers K.

b) T XII entraîne la convergence p. co. de H_n^* et de H'_n vers K.

Démonstration. — *a*) Posons :

$$\Delta_n = \{ \mathrm{K}_{\rho_n} \subset \mathrm{H}_n^* \} \qquad \text{et} \qquad \Delta'_n = \{ \mathrm{H}_n^* \subset \mathrm{K}^{\rho_n} \} .$$

Comme $\mathrm{P}(\Delta'_n) = 1$, il nous suffit de montrer que $\mathrm{P}(\bar{\Delta}_n)$ tend vers 0 avec $1/n$. L'inclusion $\Delta_n \supset \mathrm{C}_n$ implique :

$$\mathrm{P}(\bar{\Delta}_n) \leqslant \mathrm{P}(\bar{\mathrm{C}}_n) \leqslant \mathrm{card}\ \mathrm{J}_n(1 - l(\rho'_n, \mathrm{K}))^n . \tag{3-46}$$

Désignons par v_n l'entier immédiatement supérieur à $2\rho_n/\varepsilon_n$. On a :

$$l(\rho'_n, \mathrm{K})\ \mathrm{card}\ \mathrm{J}_n \leqslant \mathrm{P}(\mathrm{K}) . v_n^s \leqslant (4\rho_n/\varepsilon_n)^s , \tag{3-47}$$

ce qui entraîne bien le résultat, compte tenu de (3-46) et de T IX.

b) Le résultat se déduit immédiatement de la démonstration précédente.

Applications

Exemple 2'''. — On suppose qu'il existe une fonction t analogue à celle de l'exemple 2' et un réel $\alpha > 0$ tels que pour ρ assez petit :

$$\alpha t(\rho) \leqslant l(\rho, \mathrm{K}) . \tag{3-48}$$

. Alors, pour que H_n^* (ou H'_n) converge en probabilité vers K, il suffit que pour un $\varepsilon > 0$, on ait, pour n assez grand :

$$t(\rho_n(1 - \varepsilon))^{-1} \leqslant \alpha n/\mathrm{L}n \tag{3-49}$$

Pour que la convergence p. co. ait lieu, il suffit que pour un $\varepsilon > 0$, on ait :

$$\Sigma t(\rho_n(1 - \varepsilon))^{-1}(1 - \alpha t(\rho_n(1 - \varepsilon)))^n < + \infty . \tag{3-50}$$

Exemple 3'''. — Exceptée l'existence de la partition A_n qui devient inutile, les hypothèses sont celles de l'exemple 3'.

. Pour que H_n^* (ou H'_n) converge p. co. vers K, il suffit que pour un $\varepsilon > 0$, on ait :

$$\Sigma \rho_n^{-s}(1 - (\alpha - \varepsilon)v(s)\rho_n^s)^n < + \infty .$$

. A titre d'exemple, raffinons pour la convergence en probabilité le choix du ε. θ_n et θ'_n étant deux réels vérifiant $\theta_n > \theta'_n > 0$, posons :

$$\delta_n^s = (\mathrm{L}n + (s-1)\mathrm{L}_2 n + \theta_n)/\alpha v(s)n\,,$$

$$\delta_n'^s = (\mathrm{L}n + (s-1)\mathrm{L}_2 n + \theta'_n)/\alpha v(s)n$$

et

$$\varepsilon_n^s = \big((\theta_n - \theta'_n)/s\sqrt{s}\big)^s/((\mathrm{L}n)^{s-1}\alpha v(s)n)\,.$$

. On a bien (3-43). Utilisant (3-44), on montre facilement que $\rho_n \geqslant \delta_n$ avec $\theta_n^{-1} = o(1)$ entraîne la convergence en probabilité de H_n^* (ou de H'_n) vers K.

Exemple 4'. — Exceptée l'existence de la partition A_n qui devient inutile, les hypothèses sont celles de l'exemple 4.

. En probabilité, on obtient alors pour condition nécessaire de convergence :

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists n' : \forall n \geqslant n'\,, \qquad \rho_n^{-s} \leqslant (\alpha + \varepsilon)v(s)n/\mathrm{L}n\,,$$

et pour condition suffisante :

$$\exists\varepsilon > 0, : \exists n'' : \forall n \geqslant n''\,, \qquad \rho_n^{-s} \leqslant (\alpha - \varepsilon)v(s)n/\mathrm{L}n\,.$$

. En p. co., on obtient pour condition nécessaire :

$$\forall\varepsilon > 0\,, \qquad \Sigma\rho_n^{-s}(1 - (\alpha + \varepsilon)v(s)\rho_n^s)^n < +\infty\,,$$

et pour condition suffisante :

$$\exists\varepsilon > 0 : \Sigma\rho_n^{-s}(1 - (\alpha - \varepsilon)v(s)\rho_n^s)^n < +\infty\,.$$

REMARQUE 3.7. — Si α existe mais n'est pas connu, il suffit de prendre $t(\rho_n(1-\varepsilon))^{-1} = o(n/\mathrm{L}n)$ (resp. $\rho_n^{-s} = o(n/\mathrm{L}n)$) dans l'exemple 2‴ (resp. 3‴) pour avoir la convergence tant en probabilité que p. co.

4) CONDITION SUFFISANTE DE CONVERGENCE P. S.

Posons :

$$\mathrm{L}'(\rho) = \sup_{x\in\mathrm{K}} \mathrm{P}(\mathrm{B}(x, \rho))\,,$$

et notons T XIII l'hypothèse :

T XIII : on a (3-44) et la série

$$\Sigma\left(\frac{\rho_n}{\varepsilon_n}\right)^s l(\rho'_n, \mathrm{K})^{-1}(1 - l(\rho'_n, \mathrm{K}))^n \mathrm{L}'(2\rho_n)$$

est convergente.

THÉORÈME 3.6. — T XIII entraîne la convergence p. s. de H_n^* et de H'_n vers K.

Démonstration. — Reprenant les notations du théorème 3.5, on sait que H_n^* et H_n' convergent p. s. vers K si :

$$P(\bar{\Delta}_n) \underset{n}{\to} 0. \tag{3-51}$$

et

$$\Sigma P(\bar{\Delta}_n \Delta_{n+1}) < +\infty. \tag{3-52}$$

. (3-51) résulte de (3-44) et du théorème 3.5. Étudions $\bar{\Delta}_n \cap \Delta_{n+1}$. Notons W_j avec $j = 1$, card J_n les boules $B(x, \rho_n')$ dont le centre appartient à J_n et $\bar{\Delta}_n(j)$ le fait qu'il existe une boule $B(y, \rho_n)$ centrée sur K_{ρ_n}, contenant W_j et ne contenant aucun des points $X_{j'}$, pour $j' = 1, n$. $\bar{\Delta}_n$ implique l'existence d'une boule $B(y, \rho_n)$ dont le centre appartient à K_{ρ_n} et qui ne contient aucun des $X_{j'}$, pour $j' = 1, n$. Comme cette boule contient l'une des boules W_j, on a :

$$\bar{\Delta}_n \subset \bigcup_{j=1}^{\operatorname{card} J_n} \bar{\Delta}_n(j)$$

Pour que $\Delta_{n+1} \cap \bar{\Delta}_n(j)$ ait lieu, il faut alors nécessairement que X_{n+1} appartienne à la boule $B(x_j, 2\rho_n)$ où x_j désigne le centre de W_j. On a donc, compte tenu de (3-46) :

$$\begin{aligned} P(\bar{\Delta}_n \Delta_{n+1}) &\leqslant \operatorname{card} J_n(1 - l(\rho_n', K))^n L'(2\rho_n) \\ &\leqslant \left(4\frac{\rho_n}{\varepsilon_n}\right)^s l(\rho_n', K)^{-1}(1 - l(\rho_n', K))^n L'(2\rho_n). \end{aligned}$$

(3-52) résulte alors de T XIII, d'où le résultat.

Application

Exemple 3 quart. — $\Omega = \mathbb{R}^S$. P admet une densité φ par rapport à la mesure de Lebesgue et il existe $\beta > \alpha > 0$ tels que :

$$\forall M \in K, \alpha \leqslant \varphi(M) \leqslant \beta. \tag{3-53}$$

θ et θ' étant deux réels tels que : $\theta > \theta' > 0$, posons :

$$\delta_n^s = (Ln + (s+1)L_2 n + L_3 n + \ldots + \theta L_p n)/\alpha v(s)n,$$

$$\delta_n'^s = (Ln + (s+1)L_2 n + L_3 n + \ldots + \theta' L_p n)/\alpha v(s)n$$

et

$$\varepsilon_n^s = ((\theta - \theta')/s\sqrt{s})^s (L_p n)^s/((Ln)^{s-1}\alpha v(s)n).$$

On a bien (3-43). Comme un rapide calcul le montre, $\rho_n \geqslant \delta_n$ avec $\theta > 1$ entraîne la convergence p. s. de H_n^* (ou H_n') vers K.

REMARQUE 3.8. — Posons

$$\Phi_n = \{ K_{\rho_n} \subset H_n^* \subset K^{\rho_n} \} \quad \text{et} \quad \Phi_n' = \{ K_{2\rho_n} \subset H_n' \subset K(\rho_n) \},$$

où $K(\rho_n)$ désigne l'enveloppe ρ_n-convexe de K.

Compte tenu de l'inclusion $\{ K_{\rho_n} \subset H_n^* \} \subset \{ K_{2\rho_n} \subset H'_n \}$ nous avons en fait démontré aux théorèmes 3.5 et 3.6 que T XI (resp. T XII ; T XIII) entraînent :

$$\lim P(\Phi_n) = \lim P(\Phi'_n) = 1 \text{ (resp. } P[\underline{\lim}\ \Phi_n] = P[\underline{\lim}\ \Phi'_n] = 1 \text{ ; } \Sigma P(\bar{\Phi}_n) < +\infty \quad \text{et} \quad \Sigma P(\overline{\Phi'_n}) < +\infty).$$

IV. VITESSE DE CONVERGENCE ET CONVERGENCE C^1 DANS LE CAS $s = 2$

A. Hypothèses et notations

Les hypothèses que nous allons faire seront valables pour tout le paragraphe IV.

a) P est une probabilité définie sur $\mathbb{R}^2$, de support compact K, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ^2 et dont la densité φ vérifie la propriété :

$$\forall M \in K, \quad 0 < \alpha \leqslant \varphi(M) \leqslant \beta, \tag{4-1}$$

avec α et β réels fixes strictement positifs.

α et β peuvent ou non être connus.

b) K admet pour frontière un arc simple de Jordan (fermé, sans point double) qui est rectifiable. Soit F la longueur de Γ, M_0 un point de Γ et s la représentation curviligne de [0, F] sur Γ d'origine M_0 telle que lorsque t varie de 0 à F, $M = s(t)$ parcourt Γ dans le sens direct. On suppose s deux fois continuement dérivable et telle que :

$$s'(0) = s'(F) \qquad \text{et} \qquad s''(0) = s''(F) \tag{4-2}$$

On sait que pour tout $t \in [0, F]$, $s'(t)$ est différent du vecteur nul.

Notons $R_{s(t)}$ le rayon de courbure (éventuellement infini) de Γ au point $s(t)$. On sait de même qu'il existe un réel $\mathscr{S} > 0$ que :

$$\forall t \in [0, F], \qquad |R_{s(t)}| \geqslant \mathscr{S}. \tag{4-3}$$

. Orientons les normales $\vec{N}_{s(t)}$ à Γ vers l'intérieur, de manière à ce que le repère $(\vec{T}_{s(t)}, \vec{N}_{s(t)})$ soit direct, avec $\vec{T}_{s(t)} = ds/dt$.

Abandonnant les notations des enveloppes convexes, notons $\Gamma(u)$ la courbe de représentation :

$$s_u(t) = s(t) + u\vec{N}_{s(t)} \tag{4-4}$$

On sait qu'il existe $u_0 > 0$, tel que pour $|u| \leqslant u_0$:

— K est $|u|$-convexe.

— $\Gamma(u)$ est un arc simple de Jordan.

— s_u est de classe C^1 et vérifie $s'_u(0) = s'_u(F)$ et

$$\forall t \in [0, F], \qquad s'_u(t) \neq 0 . \tag{4-5}$$

— L'application $v_u : s(t) \rightarrow s_u(t)$ est une bijection de Γ sur $\Gamma(u)$.

— Si u est positif, $\Gamma(u)$ est la frontière du rétracté K_u de K, si u est négatif, $\Gamma(u)$ est la frontière du dilaté K^u de K.

Pour obtenir ces résultats, il suffit de remarquer que quel que soit $t_0 \in [0, F]$, $s(t_0)$ admet un voisinage V sur Γ tel que pour tout $|u| < |R_{s(t_0)}|$, l'application $v_u : s(t) \rightarrow s_u(t)$ restreinte à V soit injective. (4-5) a lieu dès que u_0 est inférieur à $\mathscr{S}/2$. On achève alors la démonstration des propriétés énoncées en remarquant que Γ est compact.

Notons pour finir $\Lambda(u)$ la bande déterminée par Γ et $\Gamma(u)$ (frontière comprise) lorsque $|u| \leqslant u_0$.

B. Vitesse de convergence de H'_n

Comme nous l'avons signalé à la remarque 3.8, il est facile de voir que sous les hypothèses faites, la suite d'événements $\{ K_{2\rho_n} \subset H'_n \subset \complement^{\rho_n}(\overline{K^{\rho_n}}) \}$ a lieu p. co. si l'on prend $\rho_n^2 \geqslant (2 + \varepsilon)Ln/\alpha\pi n$, avec $\varepsilon > 0$ quelconque.

Nous allons pour l'estimateur H'_n étudier de manière plus précise la vitesse de convergence p. co. vers K.

THÉORÈME 4.1. — Soit (ρ_n) une suite de réels strictement positifs avec $\rho_n = o(1)$ et $Ln/n = o(\rho_n^2)$. On peut alors choisir $A > 0$ suffisamment grand pour avoir :

$$\Sigma(1 - P(K_{a_n} \subset H'_n \subset K)) < +\infty , \tag{4-6}$$

avec :

$$a_n = A\left(\frac{Ln}{n}\right)^{2/3} \rho_n^{-1/3} \tag{4-7}$$

Démonstration. — K étant $|u_0|$-convexe, la relation $\rho_n = o(1)$ entraîne :

$$P(H'_n \subset K) = 1 . \tag{4-8}$$

B, C et D étant trois réels strictement positifs, le premier étant considéré comme fixe, les deux autres à déterminer, posons :

$$\rho'_n = (3Ln/\alpha\pi n)^{1/2} ; \quad G_n = \{ K_{2\rho'_n} \subset H'_n \} ; \quad b_n = B(Ln/n)^{2/3}\rho_n^{-1/3} ;$$

$$c_n = C(Ln/n)^{2/3}\rho_n^{-1/3} ; \quad a_n = b_n + c_n ; \quad A = B + C ;$$

$$k = \text{partie entière } (D(n/\rho_n Ln)^{1/3}) .$$

Notons $\tilde{H}$ l'estimateur analogue à H_n^* mais construit avec des boules de rayon ρ'_n. De l'inclusion : $\{ K_{\rho'_n} \subset \tilde{H}_n \} \subset \{ K_{2\rho'_n} \subset H'_n \}$ et de la démonstration du théorème 3.5, on déduit :

$$\Sigma P(\bar{G}_n) < +\infty . \tag{4-9}$$

Soit $M_1, \ldots, M_k$ les points de Γ qui divisent Γ en k arcs de longueurs égales. Les normales à Γ en ces points partagent $\Lambda(b_n)$ en k sous-ensembles notés $\gamma_{n,j}, j = 1, \ldots, k$.

Posons :

$$E_n^j = \{ \exists i = 1, n : X_i \in \gamma_{n,j} \} ; \qquad E_n = \bigcap_j E_n^j .$$

Il est possible de prendre D suffisamment petit tel que, pour n assez grand on ait :

$$\forall j = 1, \ldots, k, \qquad P(\gamma_{n,j}) \geqslant \frac{5}{3} Ln/n ,$$

ce qui entraîne pour n assez grand :

$$P(\bar{E}_n) \leqslant k\left(1 - \frac{5}{3} Ln/n\right)^n \leqslant D/n^{4/3}(\rho_n Ln)^{1/3} \leqslant n^{-7/6} \tag{4-10}$$

Comme un rapide calcul le montre, on peut choisir C suffisamment grand pour que toute boule $B(x_0, \rho_n)$ dont l'intersection avec K_{a_n} est non vide soit rencontre $K_{\rho'_n}$, soit contient un $\gamma_{n,j}$.

(Il suffit de remarquer que si $B(x_0, \rho_n) \cap K_{a_n}$ est vide, $B(x_0, \rho_n)$ rencontre K_{a_n} et $\bar{K}$ et que toute corde de $B(x_0, \rho_n)$ de longueur égale à $2F/k$ avec $1/k = o(\rho_n)$ détermine une flèche dont la longueur est de l'ordre de $F^2/2k^2\rho_n$. On termine en utilisant le fait que $\Gamma(b_n)$ est de classe C^1). On a donc l'inclusion :

$$E_n \cap G_n \subset \{ K_{a_n} \subset H'_n \} , \tag{4-11}$$

ce qui entraîne (4-6), compte tenu de (4-8), (4-9) et (4-10).

En ce qui concerne la vitesse de convergence en probabilité de H'_n vers K, on obtient un résultat du même ordre que celui de (4-7).

Nous pensons qu'on ne peut améliorer ce résultat. Plus précisément, nous conjecturons que sans autre hypothèse sur Γ, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_n P(K_{a_n} \subset H'_n) \neq 1 , \qquad \text{avec} \qquad a_n = n^{-2/3-\varepsilon} .$$

REMARQUE 4.1. — L'étude précédente se généralise aisément aux divers cas suivants :

. Le support de P est union finie de compacts, chacun d'eux vérifiant les hypothèses définies en IV.A.

. La frontière du compact K est union finie d'arcs simples de Jordan, chacun d'eux vérifiant les hypothèses définies en IV.A (par exemple, une couronne circulaire).

. K est ε-convexe et sa frontière Γ est un arc simple de Jordan union finie d'arcs Γ_j, chacun d'eux étant rectifiable et admettant une représentation curviligne de classe C^2 (Par exemple un carré).

REMARQUE 4.2. — Il est facile utilisant une technique analogue à celle du théorème 4.1 de montrer que sous (4.7), on a :

$$\Sigma(1 - P(K^{\rho_n - a_n} \subset H_n^* \subset K^{\rho_n})) < +\infty .$$

C. Estimation du contour

Nous nous proposons d'estimer Γ en prenant pour critère de convergence la distance C^1 entre courbes. Les hypothèses sont celles définies en IV.A.

Q étant un point de $\mathbb{R}^2$, il existe au moins un point Q' sur Γ tel que : $d(Q, Q') = d(Q, \Gamma)$. QQ' est la normale en Q' à Γ. Notons v l'application « projection » qui à Q associe les points Q' tels que : $d(Q, Q') = d(Q, \Gamma)$. On sait que la restriction de v à $\Lambda(u_0) \cup \Lambda(-u_0)$ est une application univoque.

γ étant un arc simple de Jordan qui admet en tout point une tangente, posons :

$$\Delta(\gamma, \Gamma) = \sup_{Q \in \gamma} d(Q, \Gamma) + \sup_{Q \in \gamma} \sup_{Q' \in v(Q)} d^1(\vec{T}_Q, \vec{T}_{Q'}), \qquad (4\text{-}12)$$

où $\vec{T}_Q$ et $\vec{T}_{Q'}$ désignent les vecteurs unitaires portés par les tangentes à γ et Γ en Q et Q' et $d^1(\vec{T}_Q, \vec{T}_{Q'})$ l'angle (compris entre 0 et $\pi/2$) des droites portant $\vec{T}_Q$ et $\vec{T}_{Q'}$.

Nous dirons que γ vérifie la propriété S1 si γ est rectifiable et admet une représentation curviligne de classe C^1, $s^* : [0, F'] \to \gamma$ telle que :

$$(s^*)'(0) = (s^*)'(F') .$$

Il est alors facile de voir que si γ vérifie S1, pour $\Lambda(\gamma, \Gamma)$ suffisamment petit, γ est contenu dans $\Lambda(u_0) \bigcup \Lambda(-u_0)$ et vérifie la propriété S2 : la restriction de v à γ est une bijection de γ sur Γ (sinon, il existerait $Q \in \gamma$ et $Q' \in v(Q)$ tels que : $d^1(\vec{T}_Q, \vec{T}_{Q'}) = \pi/2$).

On démontre aisément que si γ vérifie S1, la convergence C^1 de γ vers Γ est équivalente à la convergence de $\Delta(\gamma, \Gamma)$ vers 0.

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs qui tend vers 0 avec $1/n$ et (δ_n) une suite d'arc de cercles telle que δ_n soit contenu dans $\Lambda(u_n)$. Supposons de plus que le disque ouvert d_n associé à δ_n ait pour rayon r_n et ne rencontre pas $\Gamma(u_n)$. On établit alors le lemme :

LEMME 4.1. — Si r_n vérifie :

$$u_n = o(r_n), \tag{4-13}$$

$\sup\limits_{Q\in\delta_n} \sup\limits_{Q'\in v(Q)} d^1(\vec{T}_Q, \vec{T}_{Q'})$ tend vers 0 avec $1/n$.

Démonstration. — Il suffit de remarquer que si $\vec{T}_Q$ subit une variation angulaire de $d\theta$ lorsque Q parcourt une distance l sur le cercle associé à δ_n, on a nécessairement $l = r_n d\theta$. On conclut en utilisant la compacité de Γ et le fait que d_n ne rencontre pas $\Gamma(u_n)$. De plus, cette convergence ne dépend que de Γ, r_n et u_n et non de la position de δ_n.

Soit (γ_n) une suite d'arcs simples de Jordan telle que γ_n soit contenu dans $\Lambda(u_n)$. Supposons de plus γ_n formé de W_n arcs de cercles γ_n^j de même rayon r_n et tel que si d_n^j désigne le disque ouvert associé à γ_n^j, on ait :

$$\text{S3 :} \quad \bigcup_j d_n^j \quad \text{et} \quad \gamma_n \text{ sont disjoints.}$$

et

$$\text{S4 :} \quad \bigcup_j d_n^j \quad \text{et} \quad \Gamma(u_n) \text{ sont disjoints.}$$

Définissons $\Delta(\gamma_n, \Gamma)$ en remplaçant dans (4-12) $d^1(\vec{T}_Q, \vec{T}_{Q'})$ par

$$\frac{1}{2}\left[d^1(\vec{T}_Q^1, \vec{T}_{Q'}) + d^1(\vec{T}_Q^2, \vec{T}_{Q'})\right],$$

lorsque Q est un point anguleux de γ_n, $\vec{T}_Q^1$ et $\vec{T}_Q^2$ désignant alors les deux demi-tangentes associées.

On a alors :

LEMME 4.2. — Si r_n vérifie (4-13), $\Delta(\gamma_n, \Gamma)$ tend vers 0 avec $1/n$, et pour n assez grand, γ_n vérifie S2.

Démonstration. — Il résulte du lemme 4.1 que $\Delta(\gamma_n, \Gamma) - \sup\limits_{Q\in\gamma_n} d(Q, \Gamma)$ tend vers 0 avec $1/n$. $\Delta(\gamma_n, \Gamma)$ tend donc vers 0 avec $1/n$. Ce résultat combiné avec S3 permet d'affirmer que pour n assez grand, γ_n vérifie S2.

Soit Γ_n la frontière de H_n'. Γ_n est une union finie d'arcs simples de Jordan $\Gamma_n(i)$, avec $i = 1, W_n'$, chacun d'entre eux étant une union finie d'arcs de cercles de rayon ρ_n. Notons (Γ_n^j) avec $j = 1, W_n$ cette famille d'arc de cercles.

Notons $M_n^j(1)$ et $M_n^j(2)$ les points qui divisent Γ_n^j en trois arcs égaux.

r étant un réel strictement positif désignons par $\Gamma_n''(r)$ la frontière de l'enveloppe r-convexe $H_n''(r)$ de $\bar{H}_n'$. On dit que $\Gamma_n''(r)$ vérifie la propriété S5 si pour tout $j = 1, W_n$, l'arc de cercle $M_n^j(1)M_n^j(2)$ appartient à $\Gamma_n''(r)$. Il est toujours possible de trouver r_n'' qui dépend de $X_1, \ldots, X_n$, tel que pour tout $r \in]0, r_n'']$, $\Gamma_n''(r)$ vérifie S5.

Soit $\bar{r}_n$ une suite de réels strictement positifs telle que $\bar{r}_n = o(\sqrt{Ln/n})$. On prend pour estimateur de Γ la courbe $\tilde{\Gamma}_n = \Gamma_n''(\tilde{r}_n)$ avec $\tilde{r}_n = \inf(\bar{r}_n, r_n'')$ et l'on pose $\tilde{H}_n = \overline{H_n''(\tilde{r}_n)}$. $\tilde{\Gamma}_n$ vérifie S5 et est union de W_n' arcs de Jordan $\tilde{\Gamma}_n(i)$ (numérotés en correspondance avec les $\Gamma_n(i)$) qui vérifient chacun S1.

Posons :

$$\Delta(\Gamma_n, \Gamma) = \sup_i (\Delta(\Gamma_n(i), \Gamma)) \qquad \text{et} \qquad \Delta(\tilde{\Gamma}_n, \Gamma) = \sup_i (\Delta(\tilde{\Gamma}_n(i), \Gamma))$$

La convergence vers 0 de la distance C^1 entre $\tilde{\Gamma}_n$ et Γ (i. e. le sup. des distances C^1 entre $\tilde{\Gamma}_n(i)$ et Γ) est équivalente à $\lim_n \Delta(\tilde{\Gamma}_n, \Gamma) = 0$.

DÉFINITION 4.1. — On dit que $\tilde{\Gamma}_n$ converge en classe C^1 et en probabilité (resp. p. s., p. co.) vers Γ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P[\Delta(\tilde{\Gamma}_n, \Gamma) < \varepsilon] \underset{n}{\to} 0 \qquad (\text{resp. } P[\lim \Delta(\tilde{\Gamma}_n, \Gamma) = 0] = 1,$$
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \Sigma P[\Delta(\tilde{\Gamma}_n, \Gamma) > \varepsilon] < +\infty) \qquad (4\text{-}14)$$

Nous pouvons maintenant établir le théorème :

THÉORÈME 4.2. — *a*) Si la densité φ est continue, la convergence C^1 en probabilité de $\tilde{\Gamma}_n$ vers Γ entraîne :

$$1/\rho_n^2 = o(n/Ln). \qquad (4\text{-}15)$$

b) Réciproquement, φ n'étant plus nécessairement continue, si (4-15) et $\rho_n = o(1)$ sont vérifiées,

— $\tilde{\Gamma}_n$ est p. co. un arc simple de Jordan vérifiant la propriété S2,
— $\tilde{\Gamma}_n$ converge C^1 p. co. vers Γ.

Démonstration. — *a*) Sans restreindre la généralité du problème, on peut supposer que $\rho_n = o(1)$.

Soit Q le point de Γ où la restriction de φ à Γ atteint son minimum. Posons $\gamma = \varphi(Q)$ et désignons par D et ε deux réels strictement positifs tels que :

$$D/\sqrt{2} + ((\gamma + \varepsilon)/2\gamma)^{1/2} < 1.$$

Il existe une boule $B(Q, \rho)$ telle que pour $M \in V = B(Q, \rho) \cap K$ on ait :

$$|\varphi(M) - \gamma| < \varepsilon.$$

La convergence C^1 en probabilité de $\tilde{\Gamma}_n$ vers Γ entraîne la convergence en probabilité de $\tilde{H}_n$ vers K. H'_n qui contient $\tilde{H}_n$ converge donc en probabilité vers K. Pour n assez grand, on a donc :

$$\rho_n^2 \geqslant Ln/(\gamma + \varepsilon)\pi n .$$

Nous nous proposons, à l'aide d'une démonstration analogue à celle du théorème 3.5, de montrer que Γ_n contient un arc de courbe qui « longe » Γ sur une distance finie.

On peut supposer que V contient le « pavé » limité par Γ, $\Gamma(u')$ et les normales d'équations $t = 0$ et $t = L'$ où $u' \in]0, u_0[$ et $L' > 0$ sont deux réels correctement choisis. Posons :

$$\bar{\rho}_n^2 = Ln/(\gamma + \varepsilon)\pi n , \qquad \rho'_n = ((\gamma + \varepsilon)/2\gamma)^{1/2}\bar{\rho}_n ; \qquad \varepsilon_n = D\bar{\rho}_n .$$

Notons V_n le « pavé » limité par $\Gamma(2\bar{\rho}_n)$, $\Gamma(3\bar{\rho}_n)$ et les normales d'équations $t = L'/3$ et $t = 2L'/3$ et posons :

$$B_n^x = \{ \forall j' = 1, \dots, n, X_{j'} \notin B(x, \bar{\rho}_n) ; \quad C_n^x = \{ \forall j' = 1, \dots, n, X_{j,} \notin B(x, \rho'_n) \}$$

$$\delta_n = V_n^{\bar{\rho}_n} ; \qquad J_n = \{ x \mid x \in S(\varepsilon_n), B'(x, \varepsilon_n/\sqrt{2}) \cap \delta_n \neq \emptyset \} ,$$

$$B_n = \bigcap_{x \in \delta_n} \overline{B_n^x} ; \qquad C_n = \bigcap_{x \in J_n} \overline{C_n^x}$$

De l'inégalité : $\rho'_n + \varepsilon_n/\sqrt{2} < \bar{\rho}_n$ et de l'inclusion $C_n \subset B_n$, on déduit :

$$P(\bar{B}_n) \leqslant P(\bar{C}_n) \leqslant \text{card } J_n(1 - (\gamma + \varepsilon)\pi\bar{\rho}_n^2/2)^n .$$

Comme il existe $m > 0$ tel que pour n assez grand card $J_n \leqslant m\bar{\rho}_n/\varepsilon_n^2$, cela entraîne :

$$P(\bar{B}_n) \leqslant \sqrt{(\gamma + \varepsilon)\pi}\, \frac{m}{D^2} \sqrt{\frac{n}{Ln}} \left(1 - \frac{Ln}{2n}\right)^n \leqslant \sqrt{(\gamma + \varepsilon)\pi}\, m/D^2\sqrt{Ln} .$$

L'événement qui consiste en ce qu'il existe une boule ouverte de rayon ρ_n qui rencontre V_n et ne contient aucun $X_{j'}$ pour $j' = 1, \dots, n$ a donc une probabilité qui tend vers 0. Avec une probabilité qui tend vers 1, Γ_n contient donc un arc Γ_n^* compris entre Γ et $\Gamma(2\bar{\rho}_n)$, qui « longe » Γ depuis la normale $t = L'/3$ jusqu'à la normale $t = 2L'/3$.

A et B étant des réels strictement positifs qui seront déterminés ultérieurement, posons $\tilde{\rho}_n = A(Ln/n)^{1/2}$ et $\rho_n^* = B(Ln/n)^{1/2}$ et considérons le quadrillage S_n défini par Γ, $\Gamma(\tilde{\rho}_n)$ et les normales d'équations $t = k\rho_n^*$, avec $L'/3\rho_n^* \leqslant k \leqslant 2L'/3\rho_n^*$. Le nombre de « rectangles » de S_n est minoré par s/ρ_n^*, où s est un réel strictement positif et l'aire d'un « rectangle » est majorée, pour n assez grand, par $AB(1 + \varepsilon)Ln/n$.

Prenons A et B tels que $AB < 1/4(\gamma + \varepsilon)(1 + \varepsilon)$, et notons F_n l'événement consistant en ce que chaque « rectangle » du quadrillage S_n contienne au moins un $X_{j'}$ avec $1 \leqslant j' \leqslant n$. On a

$$P(F_n) \leqslant (1-(1-(\gamma+\varepsilon)(1+\varepsilon)\text{ABL}n/n)^n)^{s/\rho_n^*} \leqslant (1-(1-\text{L}n/4n)^n)^{s/\rho_n^*},$$

d'où :

$$\text{LP}(F_n) \leqslant -\frac{s}{\text{B}}\sqrt{\frac{n}{\text{L}n}}\left(1-\frac{\text{L}n}{4n}\right)^n$$

et

$$\lim P(F_n) = 0$$

Supposons A tel que $\tilde{\rho}_n > 2\bar{\rho}_n$. Avec une probabilité qui tend vers 1, il existe un « rectangle » G de S_n qui rencontre Γ_n^* et ne contient aucun point de $\{X_1, \ldots, X_n\}$. Compte tenu de la convergence C^1 en probabilité de $\tilde{\Gamma}_n$ vers Γ, avec une probabilité qui tend vers 1, tout arc de Γ_n^* contient au moins un $X_{j'}$, pour $j' = 1, \ldots, n$. $G \cap \Gamma_n^*$ contient donc un arc $\widehat{C_1C_4}$ de rayon ρ_n et tel que : $C_1C_4 \geqslant \rho_n^*/2$. Notons C_2 et C_3 les points qui le partagent en trois arcs égaux. Vu le choix de $\tilde{r}_n$, il est facile de voir que l'arc $\widehat{C_2C_3}$ appartient à $\tilde{\Gamma}_n$.

Notons θ_n le sup. de la mesure angulaire des arcs constitutifs de $\tilde{\Gamma}_n$. Avec une probabilité qui tend vers 1, θ_n est donc supérieur à $\text{B}(\text{L}n/n)^{1/2}/6\rho_n$. Si pour une sous-suite n_i, il existe $h > 0$ tel que : $\rho_{n_i}^2 < h\text{L}n_i/n_i$, on en déduit, compte tenu de la convergence en probabilité de $\Delta(\tilde{\Gamma}_n, \Gamma)$ vers 0, $\lim_i \theta_{n_i} = 0$, ce qui est impossible. On a donc (4-15).

b) D'après le théorème 4.1, on a :

$$\Sigma(1 - P(K_{a_n} \subset H_n' \subset K)) < +\infty,$$

avec $a_n = o((\text{L}n/n)^{1/2})$, d'où :

$$\Sigma(1 - P(\Gamma_n \subset \Lambda(a_n))) < +\infty.$$

Comme $a_n = o(\rho_n)$, $\{\Gamma_n \subset \Lambda(a_n)\}$ implique pour n assez grand que Γ_n est un arc simple de Jordan.

Γ_n vérifiant alors par construction S3 et S4 (où u_n doit être remplacé par a_n) on sait, d'après le lemme 4.2, que sous la condition $\{\Gamma_n \subset \Lambda(a_n)\}$, Γ_n vérifie S2 pour n assez grand et $\Delta(\Gamma_n, \Gamma)$ tend vers 0 avec $1/n$. On en déduit également, vu le mode de construction de $\tilde{\Gamma}_n$, que, toujours sous la condition $\{\Gamma_n \subset \Lambda(a_n)\}$, $\tilde{\Gamma}_n$ est pour n assez grand un arc simple de Jordan qui vérifie S2 et $\Delta(\tilde{\Gamma}_n, \Gamma)$ tend vers 0 avec $1/n$.

L'événement $\{\Gamma_n \subset \Lambda(a_n)\}$ ayant lieu p. co., on obtient donc les résultats annoncés.

REMARQUES 4.3. — *a*) L'étude précédente se généralise aisément aux divers cas suivants :

. Le support de P est union finie de compacts, chacun d'eux vérifiant les hypothèses définies en IV.A.

. La frontière du compact K est union finie d'arcs simples de Jordan chacun d'eux vérifiant les hypothèses définies en IV.A.

b) Supposons que la frontière Γ de K est un arc simple de Jordan union finie d'arcs Γ_i, avec $i = 1, \ldots, p$, chacun d'eux étant rectifiable et admettant une représentation curviligne s_i de classe C^2. Notons N_i les points de raccord des arcs Γ_i et posons :

$$V_i = B(N_i, \varepsilon) \cap \Gamma\,; \qquad V = \bigcup_i V_i\,; \qquad \Gamma' = \Gamma - V$$

Enfin, associons à tout arc simple de Jordan γ la quantité :

$$\Delta_\varepsilon(\gamma, \Gamma) = \sup_{Q \in \gamma'} \sup_{Q' \in v'(Q)} d(Q, Q') + \sup_{Q \in \gamma'} \sup_{Q' \in v'(Q)} d^1(\vec{T}_Q, \vec{T}_{Q'}),$$

où l'on a posé $v'(Q) = v(Q) \cap \Gamma'$ et $\gamma' = \{ Q \in \gamma \mid v'(Q) \neq \varnothing \}$.

Il est alors possible d'établir pour $\Delta_\varepsilon(\tilde{\Gamma}_n, \Gamma)$ un résultat analogue au théorème 4.2.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] D. Bosq, Contribution à la théorie de l'estimation fonctionnelle. Thèse, Paris, 1971.

[*2*] J. Chevalier, Propriétés d'uniformité de la convergence p. s. de la moyenne d'un échantillon indexé. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **274**, série A, 1972, p. 494-497.

[*3*] J. Chevalier, Majoration et minoration p. s. dans un échantillon ordonné. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **279**, série A, 1974, p. 573-575.

[*4*] J. Chevalier, Majoration et minoration asymptotique dans un échantillon ordonné. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **282**, série A, 1976, p. 235-238.

[*5*] J. Chevalier, Contribution à l'étude des statistiques d'ordre, de l'estimation géométrique et du maximum de vraisemblance. Thèse, Paris, 1975.

[*6*] B. Efron, The convex hull of a random set of points. *Biometrika*, t. **52**, 1965, p. 331-343.

[*7*] L. Fischer, The convex hull of a sample. *Bull. Am. Math..Soc.*, t.**72**, 1966, p. 555-558.

[*8*] L. Fischer, Limiting sets and convex hulls of samples from product measures. *Ann. Math. Stat.*, t. **40**, n° 5, 1969, p. 1824-1832.

[*9*] J. Geffroy, Localisation asymptotique du polyèdre d'appui d'un échantillon laplacien à k dimensions. *Publ. ISUP*, t. **10**, 1961, p. 213-228.

[*10*] J. Geffroy, Sur un problème d'estimation géométrique. *Publ. ISUP.*, t. **13**, 1964, p. 191-200.

[*11*] C. Guilbart, Étude de la continuité de l'application H qui à toute mesure de probabilité définie sur $\mathbb{R}^n$ muni de sa tribu borélienne fait correspondre l'enveloppe convexe fermée du support de cette mesure. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **277**, série A, 1973, p. 999-1002.

[*12*] J. Perkal, Sur les ensembles ε-convexes. *Colloque Math. IV*, fasc. **1**, 1956, p. 1-10.

[*13*] H. Raynaud, Sur le comportement asymptotique de l'enveloppe convexe d'un nuage de points tirés au hasard dans $\mathbb{R}^n$. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **261**, série A, 1965, p. 627-629.

[*14*] Renyi et R. Sulanke, Uber die konvexe Hülle von n Zufällig gewählten punkten I und II. *Z. Wahrschein. I*, t. **2**, 1963, p. 75-84 ; II, t. **3**, 1964, p. 138-147.

(Manuscrit reçu le 18 octobre 1976)