Annales de l'I. H. P., section B

J.-P. Lepeltier
B. Marchal

Problème des martingales et équations différentielles stochastiques associées à un opérateur intégro-différentiel

Annales de l'I. H. P., section B, tome 12, nº 1 (1976), p. 43-103
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1976__12_1_43_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XII, n° 1, 1976, p. 43-103. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Problème des martingales et équations différentielles stochastiques associées à un opérateur intégro-différentiel

par

J.-P. LEPELTIER
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques,
Route de Laval, 72000 Le Mans

et

B. MARCHAL (*)
Université Paris-Nord, C. S. P.
Département de Mathématiques,
Avenue J.-B. Clément 93430 Villetaneuse

RÉSUMÉ. — Soit L un opérateur intégro-différentiel. Nous nous proposons de montrer que le problème des martingales associé à L, posé par analogie au cas des diffusions, est équivalent au problème de l'existence et de l'unicité en loi de la solution d'une équation différentielle stochastique. Nous utilisons ensuite ce lien pour obtenir certains résultats d'existence et d'unicité au problème des martingales.

ABSTRACT. — Let L be an integro-differential operator. We show that the martingale problem associated to L is equivalent to the problem of existence and unicity in law of the solution of a stochastic differential equation. We deduce from this equivalence a number of existence and unicity results for the martingale problem.

INTRODUCTION

Dans le cas d'un opérateur différentiel elliptique du second ordre :

$$L_t = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(t, x)D^{ij} + \sum_{i=1}^{d} b_i(t, x)D^i$$

(*) Membre du Laboratoire n° 224 associé au C. N. R. S. « Processus stochastiques et applications ».

le problème des martingales a été introduit par Stroock et Varadhan [*19*]. Dans le cas où les coefficients étaient continus et la matrice a définie positive ils obtenaient l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème, et par suite l'existence et l'unicité en loi de l'équation différentielle stochastique associée.

Dans le cas où l'opérateur considéré est intégro-différentiel ce problème a été introduit par analogie au cas continu par Komatsu [*8*] et par Stroock [*21*]. Leurs articles sont surtout consacrés à l'étude de l'existence et de l'unicité qu'ils obtiennent par des méthodes différentes.

Dans la première partie de cet article qui correspond en gros au chapitre II de la thèse de 3[e] cycle de Lepeltier [*11*], nous examinons systématiquement les formes équivalentes au problème des martingales ; nous étudions en détail la récupération du système de Lévy (définition § II_{1a}) et la formulation du problème par rapport aux éléments de classe $\mathscr{C}^2$. Nous obtenons une majoration exponentielle généralisant celle de Stroock et Varadhan dans le cas continu [*19*] [*15*], aux martingales locales continues à droite et pourvues de limites à gauche (c. a. d. l. a. g.). Cette majoration et la topologie de Skorokhod sur tout compact sur l'espace canonique des applications c. a. d. l. a. g. de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}^d$ (étudiée en appendice) nous permettent d'avoir un théorème de compacité pour les familles de probabilités définies sur cet espace. Enfin le rôle des termes du premier ordre est abordé au cours du dernier paragraphe.

La deuxième partie est consacrée au lien entre le problème des martingales et les équations différentielles stochastiques introduites par Ito en 1951, étudiées en particulier par Skorokhod [*18*]. Après avoir introduit les équations différentielles stochastiques, nous montrons leur équivalence avec le problème des martingales grâce à un résultat de El-Karoui et Lepeltier [*5*] (§ $\mathrm{II}_{1.c}$). Pour terminer nous généralisons celui de Yamada et Watanabé [*22*] : l'unicité trajectorielle entraîne l'unicité en loi.

Dans la dernière partie nous étudions l'existence et l'unicité trajectorielle de la solution à l'équation différentielle stochastique dans le cas où les coefficients sont localement lipschitziens. Nous obtenons en particulier une version « cadcontinue » de cette solution, définition III_6. Alors grâce à ce résultat d'existence et d'unicité, à une généralisation de l'inégalité de Krylov [*9*] [*13*] et au théorème de compacité nous montrons l'existence au problème des martingales avec des cofficients boréliens bornés ; en particulier si les coefficients sont continus nous retrouvons le résultat d'existence de Stroock [*21*].

Nous avons pris connaissance des articles de Komatsu, puis de Stroock au cours de l'élaboration de ce travail. Nous avons plus approfondi les différentes équivalences au problème des martingales. Nous obtenons une formule exponentielle pour les martingales c. a. d. l. a. g., ce qui nous permet d'avoir une majoration exponentielle, puis un théorème de compacité. Enfin pour l'étude de l'existence nous avons utilisé au maximum le lien avec les équations différentielles stochastiques.

Nous tenons à exprimer nos remerciements à Mme El-Karoui et à M. Priouret pour l'aide fructueuse et constante qu'ils ont bien voulu nous apporter tout au long de ce travail.

I. PROBLÈME DES MARTINGALES ASSOCIÉ A UN OPÉRATEUR INTÉGRO-DIFFÉRENTIEL

§ 1. Position du problème

Soit L un opérateur intégro-différentiel de la forme

$$\mathrm{L}f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\mathrm{D}^i\mathrm{D}^j f(x) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\mathrm{D}^i f(x)$$
$$+ \int_{\mathrm{U}} (f(x+u) - f(x) - \mathbb{1}_{[|u|\leqslant 1]}\langle u, \operatorname{grad} f(x)\rangle)\mathrm{S}(x, du)$$

où :

— $a(x)$ est pour tout x de R^d une $d \times d$ matrice symétrique définie positive,

— les fonctions a_{ij}, b_i sont pour tout i et j des applications de R^d dans R, boréliennes, bornées sur tout compact de R^d,

— S est un noyau positif borélien défini sur $\mathrm{R}^d \times \mathrm{U}$ où $\mathrm{U} = \mathrm{R}^d - \{0\}$ prolongé à $\hat{\mathrm{U}} = \mathrm{U} \cup \{\delta\}$ par $\mathrm{S}(x, \{\delta\}) = 0$ pour tout x, de plus :

S intègre $|u|^2 \wedge 1$ uniformément sur les compacts de R^d

Désignons alors par :

Ω^0 : l'ensemble des applications de R_+ dans R^d continues à droite limitées à gauche (c. a. d. l. a. g.),

X_t : les applications coordonnées $(\mathrm{X}_t(\omega) = \omega(t))$ pour tout ω appartenant à Ω^0, pour tout t appartenant à R_+.

$$\underline{\underline{\mathrm{F}}}_t^0 = \sigma(\mathrm{X}_s, s \leqslant t)$$
$$\underline{\underline{\mathrm{F}}}_{t+}^0 = \bigcap_{s>t} \underline{\underline{\mathrm{F}}}_s^0$$

Cet opérateur a été étudié dans [*8*] [*21*].

Par analogie au cas des diffusions, nous posons la définition :

DÉFINITION 1. — Une probabilité P^x définie sur $(\Omega^0, (X_t), (\underline{\underline{F}}_t^0))$ sera dite solution au problème des martingales partant de x si et seulement si :

1) $$P^x(X_0 = x) = 1$$

2) $$H_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s)ds \quad \text{est une } P^x$$

martingale locale relativement à la famille de tribus $(\underline{\underline{F}}_t^0)$ dès que f appartient à $\mathscr{C}_c^\infty(R^d)$.

NOTATION. — Nous dirons que P^x est une solution au problème des martingales partant de x relativement au triplet (a, b, S).

Cette définition entraîne plusieurs remarques utiles pour la suite de ce papier.

REMARQUE 2. — Si P^x est une solution au problème des martingales partant de x, et si f appartient à $\mathscr{C}_c^2(R^d)$ par convergence uniforme H_t^f est une martingale locale. Dans la définition précédente nous pouvons donc remplacer $\mathscr{C}_c^\infty(R^d)$ par $\mathscr{C}_c^2(R^d)$.

REMARQUE 3. — D'une part il est clair que, puisque $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus c. a. d. l. a. g., la martingale locale $(H_t^f)_{t\geq 0}$ est également c. a. d. l. a. g.

D'autre part d'après les hypothèses faites sur a, b, S nous pouvons facilement vérifier que pour tout compact K de R^d, si T_K désigne le temps de sortie de celui-ci pour le processus $(X_t)_{t\geq 0}$, $H_{t\wedge T_K}^f$ est une martingale de carré intégrable. Comme T_K tend vers l'infini si K tend vers R^d, la martingale locale H_t^f est localement de carré intégrable (Dans toute la suite de ce chapitre, lorsque nous parlerons de martingales locales, il s'agira plus précisément de martingales locales localement de carré intégrable).

REMARQUE 4. — Toujours dans le cadre de la définition 1, soit $\underline{\underline{F}}_t$ la tribu $\underline{\underline{F}}_{t+}^0$ complétée de tous les ensembles P^x négligeables de $\underline{\underline{F}}_\infty^0$, la famille $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0}$ vérifie alors les « conditions habituelles de Dellacherie », et si f appartient à $\mathscr{C}_c^2(R^d)$, la martingale locale H_t^f c. a. d. l. a. g. est aussi une martingale locale relativement à la famille de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0}$.

Nous allons maintenant étendre la définition du problème des martingales aux éléments de $\mathscr{C}^{2,b}$; la seule difficulté par rapport aux cas des diffusions résidant dans le saut possible du processus X_t à la sortie du compact.

§ 2. Problème des martingales relativement aux éléments de $\mathscr{C}^{2,b}$

Cette section est consacrée à la démonstration du théorème suivant qui introduit le problème des martingales par rapport aux éléments de $\mathscr{C}^{2,b}$:

THÉORÈME 5. — *Soit* P^x *une probabilité sur* $(\Omega^0, (X_t)_{t\geq 0}, (\underline{F_t^0})_{t\geq 0})$ *telle que* $P^x(X_0 = x) = 1$. *Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes*

1) $H_t^f = f(X_t) - f(x) - \int_0^t Lf(X_s)ds$ *est une* P^x *martingale locale dès que* f *appartient à* $\mathscr{C}_c^2$.

2) H_t^f *est une* P^x *martingale locale dès que* f *appartient à* $\mathscr{C}^{2,b}$.

3) *Pour tout* θ *appartenant à* R^d

$$H_t^{(\theta)} = \exp\left\{ i\langle \theta, X_t - x\rangle + \frac{1}{2}\int_0^t \langle \theta, a(X_s)\theta\rangle ds \right.$$
$$\left. - i\int_0^t \langle \theta, b(X_s)\rangle ds - \int_0^t ds \int_U (e^{i\langle\theta,u\rangle} - 1 - i\mathbb{1}_{(|u|\leq 1)}(u)\langle \theta, u\rangle)S(X_s, du) \right\}$$

est une P^x *martingale locale.*

Avant d'aborder la démonstration proprement dite nous allons d'abord énoncer deux lemmes dont la preuve simple du premier peut être trouvée dans [8].

LEMME 6. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *intégrable, avec* $X_0 = 0$, *soit une martingale est que* $E[X_T]$ *soit nul pour tout temps d'arrêt* T *borné.*

LEMME 7. — *Soient* x *de* R^d, *et* K *un compact de* R^d *contenant* x. *Notons* T_K *le temps de sortie de ce compact pour le processus* X_t, $t \geq 0$. *Alors si* P^x *est une solution au problème des martingales partant de* x, *pour toute fonction* g *de* $\mathscr{C}^{2,b}(R^d)$ *s'annulant sur* K, *nous avons*

$$[g(X_{T_K})\mathbb{1}_{(T_K\leq t)}]^{(3)} = \int_0^{t\wedge T_K} ds \int_U g(X_s + u)S(X_s, du) \tag{1}$$

où $[g(X_{T_K})\mathbb{1}_{(T_K\leq t)}]^{(3)}$ *désigne la projection duale prévisible du processus* $g(X_{T_K})\mathbb{1}_{(T_K\leq t)}$.

Démonstration. — Si g appartient à $\mathscr{C}_c^2(R^d)$ le résultat est immédiat en considérant l'expression de la martingale de carré intégrable $H^g_{t\wedge T_K}$.

Soit alors g élément de $\mathscr{C}^{2,b}(R^d)$ s'annulant sur K. Nous pouvons toujours trouver une suite de fonctions f_n appartenant à $\mathscr{C}_c^2(R^d)$ uniformément bornées ainsi que leurs dérivées secondes et s'annulant sur K telle que cette suite converge simplement vers g sur $\mathbf{R}^d$. L'égalité (1) est vraie pour tout f_n, $n \geqslant 1$, puisqu'elles appartiennent à $\mathscr{C}_c^2(\mathbf{R}^d)$ et nous pouvons écrire :

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{E}[f_n(\mathrm{X}_{\mathrm{T_K}})\mathbb{1}_{(\mathrm{T_K}<\mathrm{T})}] = \mathrm{E}\left[\int_0^{\mathrm{T}\wedge\mathrm{T_K}} ds \int_{\mathrm{U}} f_n(\mathrm{X}_s + u)\mathrm{S}(\mathrm{X}_s, du)\right]$$

pour tout temps d'arrêt borné.

Par application de la formule de Taylor nous obtenons l'existence d'une constante C indépendante de n telle que pour tout x de K et tout n :

$$|f_n(x+u)| \leqslant \mathrm{C}(|u|^2 \wedge 1).$$

Grâce aux propriétés du noyau S, nous pouvons appliquer le théorème de Lebesgue de part et d'autre de l'égalité (2) et en utilisant de nouveau le lemme 6 nous obtenons (1). ■

Revenons à la démonstration du théorème 5 :

1) $\Rightarrow$ 2)

Soit g un élément de $\mathscr{C}^{2,b}(\mathbf{R}^d)$, $\mathrm{K}_n = \{ y \in \mathbf{R}^d \mid |y - x| \leqslant n \}$, T_n le temps de sortie du compact K_n pour le processus $\mathrm{X}_{t,t\geqslant 0}$, et f_n un élément de $\mathscr{C}_c^2(\mathbf{R}^d)$ égal à g sur K_n.

Il suffit de remarquer que $\mathrm{H}^g_{t\wedge\mathrm{T}_n} - \mathrm{H}^{f_n}_{t\wedge\mathrm{T}_n}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\mathrm{H}^g_{t\wedge\mathrm{T}_n} - \mathrm{H}^{f_n}_{t\wedge\mathrm{T}_n} = (g - f_n)(\mathrm{X}_{\mathrm{T}_n})\mathbb{1}_{(\mathrm{T}_n\leqslant t)} - \int_0^{t\wedge\mathrm{T}_n} ds \int_{\mathrm{U}} (g - f_n)(\mathrm{X}_s + u)\mathrm{S}(\mathrm{X}_s, du)$$

pour, en utilisant le lemme 7, obtenir que $\mathrm{H}^g_{t\wedge\mathrm{T}_n}$ ne diffère de la martingale $\mathrm{H}^{f_n}_{t\wedge\mathrm{T}_n}$ que d'une martingale, d'où le résultat.

2) $\Rightarrow$ 3)

Si 2) est vraie, en prenant $f(x) = \exp\{ i\langle \theta, x\rangle \}$ il vient que le processus :

$$\mathrm{N}_t^{(\theta)} = \exp\{ i\langle \theta, \mathrm{X}_t\rangle \} - \exp\{ i\langle \theta, x\rangle \} - \int_0^t \mathrm{L}e^{i\langle\theta,\cdot\rangle}(\mathrm{X}_s)ds$$

est une martingale locale. Posons :

$$\begin{aligned}\phi_\theta(x) &= \exp\{ i\langle \theta, x\rangle \}\,\mathrm{L}e^{i\langle\theta,\cdot\rangle}(x)\\ &= -\frac{1}{2}\langle \theta, a(x)\theta\rangle + i\langle \theta, b(x)\rangle\\ &\quad + \int_{\mathrm{U}} (\exp\{ i\langle \theta, u\rangle \} - 1 - i\mathbb{1}_{(|u|\leqslant 1)}(u)\langle \theta, u\rangle)\mathrm{S}(\mathrm{X}_s, du)\end{aligned}$$

$$\mathrm{A}_t = \exp\left\{ -\int_0^t \phi_\theta(\mathrm{X}_s)ds \right\}$$

$$\mathrm{M}_t^{(\theta)} = \mathrm{N}_t^{(\theta)} \exp\{ -i\langle \theta, x\rangle \}.$$

La formule d'Ito permet alors d'écrire :

$$H_t^{(\theta)} = Y_t A_t = Y_0 A_0 + \int_0^t A_{s^-} dY_s + \int_0^t Y_s dA_s = 1 + \int_0^t A_{s^-} dM_s^{(\theta)}$$

d'où, $H_t^{(\theta)}$ est une martingale locale.

3) $\Rightarrow$ 2)

Si 3) est vraie, posons $B_t = \exp\left\{ \int_0^t \phi_\theta(X_s)ds \right\}$ et de la même manière nous pouvons écrire :

$$B_t H_t^{(\theta)} = \exp\{ i\langle \theta, X_t - x \rangle \} = B_0 H_0^{(\theta)} + \int_0^t B_{s^-} dH_s^{(\theta)} + \int_0^t H_s^{(\theta)} dB_s$$

$$= 1 + \int_0^t B_{s^-} dH_s^{(\theta)} + \int_0^t \exp\{ -i\langle \theta, x \rangle \} Le^{i\langle \theta, . \rangle}(X_s)ds$$

Il vient alors que

$$\exp\{ i\langle \theta, X_t \rangle \} - \exp\{ i\langle \theta, x \rangle \} - \int_0^t Le^{i\langle \theta, . \rangle}(X_s)ds$$

égal à $\exp\{ i\langle \theta, x \rangle \} \int_0^t B_{s^-} dH_s^{(\theta)}$ est une martingale locale, et 2) est vraie pour toute combinaison linéaire de fonctions de la forme $f(x) = \exp\{ i\langle \theta, x \rangle \}$. En remarquant que l'ensemble des fonctions f de $\mathscr{C}^{2,b}(\mathbf{R}^d)$ satisfaisant à H_t^f martingale locale est fermé pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact des fonctions et de leurs deux premières dérivées et que tout élément de $\mathscr{C}^{2,b}(\mathbf{R}^d)$ est limite en ce sens de combinaisons linéaires d'exponentielles, nous obtenons facilement le résultat. ■

REMARQUE 8. — L'expression de $H_t^{(\theta)}$ est analogue à celle de la fonction caractéristique des processus à accroissements indépendants [*1*].

§ 3. Représentation du noyau de Lévy du processus ponctuel associé au processus $(X_t)_{t \geq 0}$

— Notre but est d'étendre la définition du problème des martingales à tous les éléments de $\mathscr{C}^2(\mathbf{R}^d)$, mais pour cela, nous aurons besoin de la représentation du noyau de Lévy du processus ponctuel

$$Y_t = \begin{cases} \Delta X_t & \text{si } \Delta X_t \neq 0 \\ \delta & \text{sinon} \end{cases}$$

processus que nous appellerons désormais processus ponctuel associé au processus $(X_t)_{t \geq 0}$ [*5*].

— Nous utiliserons auparavant le résultat suivant :

Soit f et g deux éléments de $\mathscr{C}^{2,b}(\mathrm{R}^d)$, si P^x est une solution au problème des martingales partant de x, d'après le théorème 5 H^f et H^g sont deux P^x martingales locales, localement de carré intégrables et nous pouvons définir les quantités entre crochets suivantes [*11*] [*14*]

$$\langle \mathrm{H}^f, \mathrm{H}^f \rangle_t = \langle \mathrm{H}^{f,c}, \mathrm{H}^{f,c} \rangle_t + \left[\sum_{s \leqslant t} (\Delta \mathrm{H}_s^f)^2 \right]^{(3)} = ([\mathrm{H}^f, \mathrm{H}^f]_t)^{(3)}$$

$$\langle \mathrm{H}^f, \mathrm{H}^g \rangle_t = \frac{1}{2}(\langle \mathrm{H}^{f+g}, \mathrm{H}^{f+g} \rangle_t - \langle \mathrm{H}^f, \mathrm{H}^f \rangle_t - \langle \mathrm{H}^g, \mathrm{H}^g \rangle_t)$$

et nous avons :

LEMME 9. — *Soit* P^x *une solution au problème des martingales partant de* x, *et* f *et* g *deux éléments quelconques de* $\mathscr{C}^{2,b}(\mathrm{R}^d)$. *Alors*

$$(3) \quad \langle \mathrm{H}^f, \mathrm{H}^f \rangle_t = \int_0^t \langle \nabla f(\mathrm{X}_s), a(\mathrm{X}_s)\nabla f(\mathrm{X}_s) \rangle ds + \int_0^t ds \int_{\mathrm{U}} (f(\mathrm{X}_s + u) - f(\mathrm{X}_s))^2 \mathrm{S}(\mathrm{X}_s, du)$$

$$(4) \quad \langle \mathrm{H}^f, \mathrm{H}^g \rangle_t = \int_0^t \langle \nabla f(\mathrm{X}_s), a(\mathrm{X}_s)\nabla g(\mathrm{X}_s) \rangle ds + \int_0^t ds \int_{\mathrm{U}} (f(\mathrm{X}_s + u) - f(\mathrm{X}_s))(g(\mathrm{X}_s + u) - g(\mathrm{X}_s))\mathrm{S}(\mathrm{X}_s, du)$$

Démonstration. — Si f appartient à $\mathscr{C}^{2,b}$, il en est de même de f^2, et par conséquent :

$$(5) \qquad f^2(\mathrm{X}_t) = f^2(x) + \mathrm{H}_t^{f^2} + \int_0^t \mathrm{L}f^2(\mathrm{X}_s)ds$$

où $\mathrm{H}_t^{f^2}$ est une martingale locale.

D'autre part la formule d'Ito appliquée à la semi-martingale locale $f(\mathrm{X}_t) = f(x) + \mathrm{H}_t^f + \int_0^t \mathrm{L}f(\mathrm{X}_s)ds$ nous permet d'écrire :

$$f^2(\mathrm{X}_t) = f^2(x) + 2\int_0^t f(\mathrm{X}_s)\mathrm{L}f(\mathrm{X}_s)ds + 2\int_0^t f(\mathrm{X}_{s^-})d\mathrm{H}_s^f + \langle \mathrm{H}^{f,c}, \mathrm{H}^{f,c} \rangle_t + \sum_{s \leqslant t} (f(\mathrm{X}_s) - f(\mathrm{X}_{s^-}))^2$$

soit, puisque les sauts de (H_t^f) sont les mêmes que ceux de $(f(X_t))$:

$$(6)\quad f^2(X_t) = f^2(x) + 2\int_0^t f(X_s)Lf(X_s)ds + 2\int_0^t f(X_{s^-})dH_s^f + \langle H^{f,c}, H^{f,c}\rangle_t + \sum_{s\leq t}(\Delta H_s^f)^2$$

En comparant alors (5) et (6) il vient que le processus

$$\int_0^t (Lf^2(X_s) - 2f(X_s)Lf(X_s))ds - [H^f, H^f]_t$$

est une martingale locale et le processus

$$\int_0^t (Lf^2(X_s) - 2f(X_s)Lf(X_s))ds$$

continu, donc prévisible, est la projection duale prévisible de $[H^f, H^f]_t$, par suite :

$$\begin{aligned}\langle H^f, H^f\rangle_t &= \int_0^t (Lf^2(X_s) - 2f(X_s))Lf(X_s)ds \\ &= \int_0^t \langle \nabla f(X_s), a(X_s)\nabla f(X_s)\rangle\, ds \\ &+ \int_0^t ds\int_U (f(X_s+u) - f(X_s))^2 S(X_s, du)\end{aligned}$$

l'expression de $\langle H^f, H^g\rangle_t$ s'obtenant ensuite par un calcul élémentaire. ■

THÉORÈME 10. — *Soit* P^x *une solution au problème des martingales partant de* x, *alors la propriété* (P) *suivante est vérifiée*

$$(P)\quad E\left[\sum_{s\leq T} h(X_s, X_{s^-})1\!\!1_{(X_s\neq X_{s^-})}\right] = E\left[\int_0^T ds\int_U h(X_s+u, X_s)S(X_s, du)\right]$$

pour toute h *borélienne positive, pour tout temps d'arrêt* T

Démonstration. — Soit f une fonction de R^d dans R^d de classe $\mathscr{C}_c^2$, et h une fonction borélienne quelconque de $R^d \times R^d$ dans R, nous dirons que h vérifie la propriété (P′) si :

$$(P')\quad \sum_{s\leq t} h(f(X_s), f(X_{s^-}))1\!\!1_{(f(X_s)\neq f(X_{s^-}))} - \int_0^t ds\int_U h(f(X_s+u), f(X_s))1\!\!1_{(f(X_s+u)\neq f(X_s))}S(X_s, du)$$

est une martingale locale.

a) Soit g une fonction de $\mathscr{C}^2(\mathbf{R}^d)$. $g\circ f$ appartient alors à $\mathscr{C}^{2,b}(\mathbf{R}^d)$ et par suite :

$$g\circ f(\mathrm{X}_t) = g\circ f(x) + \mathrm{H}_t^{g\circ f} + \int_0^t \mathrm{L}(g\circ f)(\mathrm{X}_s)ds \tag{7}$$

où $\mathrm{H}^{g\circ f}$ est une martingale locale. D'autre part par application de la formule d'Ito à la semi-martingale locale $f(\mathrm{X}_t) = f(x) + \mathrm{H}_t^f + \int_0^t \mathrm{L}f(\mathrm{X}_s)ds$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} g\circ f(\mathrm{X}_t) = g\circ f(x) &+ \sum_{i=1}^d \int_0^t \mathrm{D}^i g\circ f(\mathrm{X}_s)\mathrm{L}f_i(\mathrm{X}_s)ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t \mathrm{D}^i g\circ f(\mathrm{X}_{s^-})d\mathrm{H}_s^{f_i} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \int_0^t \mathrm{D}^i\mathrm{D}^j g\circ f(\mathrm{X}_{s^-})d\langle \mathrm{H}^{f_i,c}, \mathrm{H}^{f_j,c}\rangle_s \\ &+ \sum_{s\leq t}\Big(g\circ f(\mathrm{X}_s) - g\circ f(\mathrm{X}_{s^-}) - \sum_{i=1}^d \mathrm{D}^i g\circ f(\mathrm{X}_{s^-})(f_i(\mathrm{X}_s) - f_i(\mathrm{X}_{s^-}))\Big) \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} g\circ f(\mathrm{X}_t) = g\circ f(x) &+ \sum_{i=1}^d \int_0^t \mathrm{D}^i g\circ f(\mathrm{X}_s)\mathrm{L}f_i(\mathrm{X}_s)ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t \mathrm{D}^i g\circ f(\mathrm{X}_{s^-})d\mathrm{H}_s^{f_i} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \int_0^t \mathrm{D}^i\mathrm{D}^j g\circ f(\mathrm{X}_{s^-})d[\mathrm{H}^{f_i}, \mathrm{H}^{f_j}]_s \\ &+ \sum_{s\leq t}\Big[g\circ f(\mathrm{X}_s) - g\circ f(\mathrm{X}_{s^-}) - \sum_{i=1}^d \mathrm{D}^i g\circ f(\mathrm{X}_{s^-})(f_i(\mathrm{X}_s) - f_i(\mathrm{X}_{s^-})) \\ &- \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \mathrm{D}^i\mathrm{D}^j g\circ f(\mathrm{X}_{s^-})(f_i(\mathrm{X}_s) - f_i(\mathrm{X}_{s^-}))(f_j(\mathrm{X}_s) - f_j(\mathrm{X}_{s^-}))\Big] \end{aligned} \tag{8}$$

D'après le lemme 9, et comparant (7) et (8) nous obtenons finalement que :

$$\begin{aligned} &\sum_{s\leq t}\Big(g\circ f(\mathrm{X}_s) - g\circ f(\mathrm{X}_{s^-}) - \sum_{i=1}^d \mathrm{D}^i g\circ f(\mathrm{X}_{s^-})(f_i(\mathrm{X}_s) - f_i(\mathrm{X}_{s^-})) \\ &\qquad - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \mathrm{D}^i\mathrm{D}^j g\circ f(\mathrm{X}_{s^-})(f_i(\mathrm{X}_s) - f_i(\mathrm{X}_{s^-}))\,((f_j(\mathrm{X}_s) - f_j(\mathrm{X}_{s^-}))) \end{aligned}$$

ne diffère que d'une martingale locale de

$$\int_0^t ds \int_U \Big(g \circ f(X_s + u) - g \circ f(X_s) - \sum_{i=1}^d D^i g \circ f(X_{s^-})(f_i(X_s + u) - f_i(X_s))$$
$$- \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d D^i D^j g \circ f(X_{s^-})(f_i(X_s + u) - f_i(X_s))(f_j(X_s + u) - f_j(X_s)\Big) S(X_s, du)$$

b) Si $\mathcal{H}_1$ désigne l'ensemble des applications de $R^d \times R^d$ dans R de classe $\mathcal{C}^2$ s'annulant sur la diagonale ainsi que ses deux premières dérivées en x, montrons que la propriété (P′) est vraie dès que h appartient à $\mathcal{H}_1$.

En effet : dans *a*) est montré que (P′) est vérifiée pour toute fonction h de $\mathcal{H}_1$ de la forme :

$$h(x, y) = f(x)g(y) - f(y)g(y) - \sum_{i=1}^d D^i f(y)g(y)(x_i - y_i)$$
$$- \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d D^i D^j f(y)g(y)(x_i - y_i)(x_j - y_j)$$

f et g étant des applications de R^d dans R de classe $\mathcal{C}^2$, et d'après la formule de Taylor, l'ensemble des combinaisons linéaires de fonctions de ce type est dense dans $\mathcal{H}_1$ pour la topologie $\mathcal{C}$ de la convergence uniforme sur tout compact des fonctions et de leurs deux premières dérivées en x.

D'autre part, grâce aux propriétés du noyau S, dès que h appartient à $\mathcal{H}_1$, S intègre uniformément $h(f(X_s + u), f(X_s))$ sur les compacts de R^d. Le sous-ensemble de $\mathcal{H}_1$ formé des éléments vérifiant (P′) est par suite fermé dans $\mathcal{H}_1$, ce qui entraîne que (P′) est vraie dès que h appartient à $\mathcal{H}_1$.

Nous avons en particulier que pour toute fonction G de $R^d \times R^d$ dans R, de classe $\mathcal{C}^2$

$$\sum_{s \leq t} G(f(X_s), f(X_{s^-})) \mid f(X_s) - f(X_{s^-}) \mid^4$$
$$- \int_0^t ds \int_U G(f(X_s + u), f(X_s)) \mid f(X_s + u) - f(X_s) \mid^4 S(X_s, du)$$

est une martingale locale.

c) Désignons par $\mathcal{H}_2$, l'ensemble des fonctions h de $R^d \times R^d$ dans R, boréliennes bornées ; la propriété (P′) est vraie pour toutes les fonctions de la forme $h(x, y) \mid x - y \mid^4$ où h appartient à $\mathcal{H}_2$, grâce au théorème de la classe monotone.

Il existe donc une suite croissante de temps d'arrêt T_n tendant vers l'infini avec n telle que :

$$E\left[\sum_{s\leq T\wedge T_n} h(f(X_s), f(X_{s^-}))\,|\,f(X_s) - f(X_{s^-})\,|^4\right]$$
$$= E\left[\int_0^{T\wedge T_n} ds \int_U h(f(X_s + u), f(X_s))\,|\,f(X_s + u) - f(X_s)\,|^4 S(X_s, du)\right]$$

pour tout temps d'arrêt T, dès que h est borélienne bornée, et pour toute fonction h borélienne positive par limite croissante.

En choisissant :

$$h(x, y) = \frac{H(x, y)}{|x - y|} \qquad \text{si } x \neq y$$
$$= 0 \qquad \text{si } x = y$$

où H est une fonction borélienne positive et en faisant tendre n vers l'infini, nous obtenons par limite monotone :

$$E\left[\sum_{s\leq T} H[f(X_s), f(X_{s^-})]\mathbb{1}_{(f(X_s)\neq f(X_{s^-}))}\right]$$
$$= E\left[\int_0^T ds \int_U H[f(X_s + u), f(X_s)]\mathbb{1}_{(f(X_s+u)\neq f(X_s))} S(X_s, du)\right]$$

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathscr{C}_c^2(R^d)$ égales à l'identité sur K_n où (K_n) est une suite croissante de compacts tendant vers R^d, alors par limite monotone nous obtenons la propriété (P). ■

Le système de Lévy du processus ponctuel Y_t est donc égal à $(S(X_{\cdot -}, \cdot), t)$. Ce résultat va nous permettre d'avoir une formulation du problème des martingales par rapport aux éléments de $\mathscr{C}^2(R^d)$, qui n'appartiennent pas tous au domaine de définition de l'opérateur L.

§ 4. Problème des martingales par rapport à $\mathscr{C}^2(R^d)$

Nous allons d'abord démontrer une proposition se présentant comme une généralisation d'un résultat classique dans le cas continu [*15*] et qui nous permettra de plus d'obtenir une majoration exponentielle dans le paragraphe suivant :

PROPOSITION 11. — *Soit* B_t *un processus croissant continu,* M_t *un processus réel, c. a. d. l. a. g., quasi continu à gauche dont tous les sauts sont d'amplitude en valeur absolue bornée par un nombre k, et tel que le processus ponctuel* *σ-fini associé au processus* M_t *admette pour système de Lévy le couple* (N, A), *et soit enfin* $(f_\lambda(x))$ *la famille de fonctions réelles indexées sur* R *définies pour tout* λ *par* $f_\lambda(x) = e^{\lambda x} - 1 - \lambda x$. *Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes*

1) M_t *est une martingale locale et* $B_t = \langle M^c, M^c \rangle_t$.

2) $X_t^\lambda = \exp\left\{ \lambda M_t - \dfrac{\lambda^2}{2} B_t - \displaystyle\int_0^t dA_s N(s, f_\lambda) \right\}$ *est une martingale locale*

pour tout λ *réel.*

De plus 1) *entraîne que* X_t^λ *est une vraie martingale dès que*

$$E\left[\int_0^t \exp(2\lambda M_s) dB_s \right]$$

et

$$E\left[\int_0^t \exp(2\lambda M_s) N(s, (e^{\lambda x} - 1)^2) dA_s \right]$$

sont finies pour tout λ *réel, pour tout* t *positif.*

Si X_t^λ *est une vraie martingale, alors* M_t *est une vraie martingale dès que* $E[e^{\lambda M_t}]$ *est finie pour tout* t, *et tout* λ *réel.*

Démonstration. — 1) $\Rightarrow$ 2)

Si 1) est vraie, nous pouvons appliquer la formule d'Ito à la semi-martingale locale $Y_t = \lambda M_t - \dfrac{\lambda^2}{2} B_t - \displaystyle\int_0^t dA_s N(s, f_\lambda)$ d'où nous obtenons :

$$X_t^\lambda = \exp\{Y_t\} = 1 + \lambda \int_0^t \exp\{\lambda_{s^-}\} dM_s - \int_0^t \exp\{Y_{s^-}\} N(s, f_\lambda) dA_s$$
$$+ \sum_{s \leq t} [\exp\{Y_s\} - \exp\{Y_{s^-}\} - \exp\{Y_{s^-}\} \Delta Y_s]$$

dans le dernier terme nous pouvons remplacer ΔY_s par $\lambda \Delta M_s$, puisque comme A_t est continu (M est quasi continu à gauche) les sauts de Y_s sont les mêmes que ceux de λM_s.

Par définition du système de Lévy nous voyons que X_t^λ est la somme de deux martingales locales, donc est une martingale locale.

2) $\Rightarrow$ 1)

En arrêtant les processus aux temps d'arrêt

$$T_n = \inf\left\{ t \mid \sup\left(|M_t|, B_t, \int_0^t dA_s N(s, x^2) \right) > n \right\},$$

puisque le saut possible de M_t à l'instant T_n est d'amplitude bornée par k, nous pouvons nous ramener au cas où M, B, $\int_0^t dA_s N(s, f_\lambda)$ avec $|\lambda| \leqslant 1$, sont des processus bornés. Le théorème de Lebesgue permet alors de dériver indéfiniment sous le signe intégrale au voisinage de zéro la relation :

$$\int_H X_t^\lambda dP = \int_H X_s^\lambda dP, \qquad s \leqslant t, \qquad H \in \underline{\underline{F}}_s^0$$

d'où le résultat en prenant successivement les dérivées premières et secondes pour λ nul.

Si 1) est réalisée nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} X_t^\lambda = 1 + \int_0^t \exp\{Y_{s^-}\} dM_s^c + \int_0^t \exp\{Y_{s^-}\} dM_s^d \\ + \left(\sum_{s \leqslant t} \exp(Y_{s^-}) f_\lambda(\Delta M_s) - \int_0^t \exp(Y_{s^-}) N(s, f_\lambda) dA_s \right) \\ = 1 + \int_0^t \exp(Y_{s^-}) dM_s^c + X_t^{\lambda,d} \end{aligned}$$

où $X_t^{\lambda,d}$ est la partie somme compensée de sauts de X_t^λ. Par suite si nous avons pour tout λ, tout t, $E\left[\int_0^t \exp(2\lambda M_s) dB_s\right]$ et

$$E\left[\int_0^t \exp(2\lambda M_s) N(s, (e^{-\lambda x} - 1)^2) dA_s\right]$$

finies nous voyons :

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_0^t \exp(Y_{s^-}) dM_s^c\right)^2\right] \\ = E\left[\int_0^t \exp(2Y_{s^-}) dB_s\right] \leqslant E\left[\int_0^t \exp(2\lambda M_s) dB_s\right] < \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[(X_t^{\lambda,d})^2] &= E\left[\sum_{s \leqslant t} \exp(2Y_{s^-}) (\exp(\lambda \Delta M_s) - 1)^2\right] \\ &= E\left[\left(\int_0^t \exp(2Y_{s^-}) N(s, (e^{\lambda x} - 1)^2)\right) dA_s\right] \\ &\leqslant E\left[\int_0^t \exp(2\lambda M_s) N(s, (e^{\lambda x} - 1)^2) dA_s\right] < \infty \end{aligned}$$

et X_t^λ est une martingale de carré intégrable.

Si de plus E $[\exp(\lambda M_t)]$ est finie pour tout λ, pour tout t fini. Nous pouvons appliquer le théorème de Lebesgue pour dériver sous le signe intégrale et de la même manière que précédemment nous obtenons que M_t est une martingale de carré intégrable. ■

THÉORÈME 12. — *Soit* P^x *une probabilité sur* $(\Omega^0, (X_t)_{t\geq 0}, (F_t^0)_{t\geq 0})$, *telle que* $P^x(X_0 = x) = 1$. *Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1) P^x *est solution au problème des martingales partant de* x.

2) (P) *est vraie, et si* f *est un élément de* $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^d)$, *le processus*

$$L_t^f = f(X_t) - f(x) - \int_0^t L^0 f(X_s)ds - \sum_{s\leq t}(f(X_s) - f(X_{s^-})) - \sum_{i=1}^d D^i f(X_{s^-})\Delta X_s^i \mathbb{1}_{(|\Delta X_s|\leq 1)}$$

est une P^x *martingale locale, où* $L^0 f$ *représente la partie elliptique de l'opérateur* L.

3) (P) *est vraie et* $M_t = X_t - x - \int_0^t b(X_s)ds - \sum_{s\leq t}\Delta X_s \mathbb{1}_{(|\Delta X_s|>1)}$ *est une* P^x *martingale locale vectorielle de processus croissant associé à* $\langle \theta, M_t \rangle$

$$\int_0^t \langle \theta, a(X_s)\theta \rangle ds + \int_0^t ds \int_{|u|\leq 1} \langle \theta, u \rangle^2 S(X_s, du)$$

4) (P) *est vraie et pour tout* θ *appartenant à* $\mathbb{R}^d$:

$$\exp\left\{ \langle \theta, X_t - x \rangle - \int_0^t b(X_s)ds - \sum_{s\leq t}\Delta X_s \mathbb{1}_{(|\Delta X_s|>1)} - \frac{1}{2}\int_0^t \langle \theta, a(X_s)\theta \rangle ds - \int_0^t ds \int_{|u|\leq 1} (e^{\langle\theta,u\rangle} - 1 - \langle \theta, u \rangle) S(X_s, du)\right.$$

est une P^x *martingale locale, où* (P) *est la propriété introduite au théorème* 10.

Démonstration. — 1) ⇒ 2)

Si 1) est vraie, alors d'après le théorème 10 (P) est vraie. D'autre part, f appartenant à $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^d)$, il est toujours possible de trouver une suite f_n, $n \geq 0$, de fonctions de classe $\mathscr{C}^{2,b}$ telles que pour tout n, $f_n = f$ sur $K_n = \{ y \in \mathbb{R}^d \mid |x - y| \leq n \}$. Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} f(X_{t\wedge T_n}) &= f_n(X_{t\wedge T_n}) + (f(X_{T_n}) - f_n(X_{T_n}))1_{(T_n\leq t)} \\ &= f_n(X_{t\wedge T_n}) + \sum_{s\leq t\wedge T_n} \Delta(f - f_n)(X_s) \end{aligned}$$

où T_n est le temps de sortie de K_n pour le processus X_t. Après un calcul élémentaire, nous obtenons :

$$H^{f_n}_{t\wedge T_n} = L^f_{t\wedge T_n} + \sum_{s\leqslant t\wedge T_n}\left(\Delta f_n(X_s) - \sum_{i=1}^{d} D^i f_n(X_{s^-})\Delta X^i_s \mathbb{1}_{(|\Delta X_s|\leqslant 1)}\right)$$
$$- \int_0^{t\wedge T_n} ds \int_U (f_n(X_s+u) - f_n(X_s) - \mathbb{1}_{(|u|\leqslant 1)}(u)\langle u, \nabla f_n(X_s)\rangle)S(X_s, du))$$

Grâce à la proposition (P) $L^f_{t\wedge T_n}$ est une martingale, d'où le résultat, T_n tendant vers l'infini avec n.

2) $\Rightarrow$ 1)

f étant de classe $\mathscr{C}^{2,b}$, 2) est vraie et par suite la propriété (P), ce qui entraîne 1).

2) $\Rightarrow$ 3)

Posons $f(x) = \langle \theta, x \rangle$, alors de 2) il vient que $\langle \theta, M_t \rangle$ est une martingale locale pour tout θ de R^d, et donc M_t est une martingale locale vectorielle.

Alors par un raisonnement identique à celui du lemme 9 appliqué à $f(x) = \langle \theta, x \rangle$ nous voyons immédiatement que la projection duale prévisible du processus croissant $[\langle \theta, M \rangle, \langle \theta, M \rangle]_t$ est :

$$\int_0^t \langle \theta, a(X_s)\theta \rangle ds + \left[\sum_{s\leqslant t} \langle \theta, \Delta X_s \rangle^2 \mathbb{1}_{(|\Delta X_s|\leqslant 1)}\right]^{(3)}.$$

Nous obtenons le résultat grâce à (P).

3) $\Rightarrow$ 2)

Si 3) est vraie, il suffit d'appliquer la formule d'Ito pour f élément de $\mathscr{C}^2(R^d)$ à la semi-martingale locale :

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + M_t + \sum_{s\leqslant t} \Delta X_s \mathbb{1}_{(|\Delta X_s|>1)}$$

pour obtenir que L^f_t soit une martingale locale.

3) $\Leftrightarrow$ 4)

Le processus $\langle \theta, M_t \rangle$ n'a que des sauts d'amplitude inférieure ou égale en valeur absolue à $\sum_{i=1}^{d} \theta_i$, et (P) étant vraie, le système de Lévy du processus ponctuel associé à $\langle \theta, M_t \rangle$ est égal à $(S(X. -, \omega, du)\mathbb{1}_{(|u| \leqslant 1)}, t)$. L'équivalence annoncée est alors une application directe du lemme 11. ∎

§ 5. Majoration exponentielle. Applications au problème des martingales

Nous allons utiliser le lemme 11 pour obtenir une majoration exponentielle de $P(\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |M_s| \geqslant c)$ dès que la martingale locale vérifie certaines conditions. Ce résultat, qui nous permettra d'obtenir un théorème de compacité, sera une généralisation de la majoration exponentielle des martingales locales continues [*15*].

THÉORÈME 13 (Majoration exponentielle). — *Soit* $M = (M_t)_{t \geqslant 0}$ *une martingale locale réelle, nulle en* 0, *quasi continue à gauche, telle que* $\langle M, M \rangle_t \leqslant kt$ *pour tout t fini et que tous ses sauts soient bornés en valeur absolue par* 1. *Nous avons alors, pour tout t positif, tout c positif et tout λ réel*

$$P[\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |M_s| \geqslant c] \leqslant 2 \exp\left\{ -\lambda c + \frac{\lambda^2}{2} kt(1 + e^{|\lambda|}) \right\} \tag{9}$$

En particulier dès que $c > e$ *et* $(\operatorname{Log} c)^2 \leqslant \dfrac{c}{2kt}$

$$P[\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |M_s| \geqslant c] \leqslant 2 \exp\left\{ -\frac{c}{2} \operatorname{Log}(\operatorname{Log} c) \right\} \tag{10}$$

Démonstration. — Posons $M_t^+ = \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} M_s$, $B_t = \langle M^c, M^c \rangle_t$, alors, si (N, A) désigne le système de Lévy du processus ponctuel Y_t associé au processus M_t, le processus $X_t^\lambda = \exp\left\{ \lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} B_t - \int_0^t N(s, f_\lambda) dA_s \right\}$ est d'après le lemme 11 une martingale locale positive, ce qui entraîne $E[X_t^\lambda] \leqslant E[X_0^\lambda] = 1$ pour tout t fini.

D'autre part l'égalité :

$$\begin{aligned} \langle M, M \rangle_t &= \langle M^c, M^c \rangle_t + \Big(\sum_{s \leqslant t} (\Delta M_s)^2\Big)^{(3)} \\ &= \langle M^c, M^c \rangle_t + \int_0^t dA_s N(s, x^2) \end{aligned}$$

et l'hypothèse $\langle M, M \rangle_t \leqslant kt$ montrent : $\langle M^c, M^c \rangle_t \leqslant kt$ et

$$\int_0^t dA_s N(s, f_\lambda) = \int_0^t dA_s \int_{|x| \leqslant 1} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x) N(s, dx)$$
$$\leqslant \frac{\lambda^2}{2} e^{|\lambda|} \int_0^t ds N(s, x^2)$$
$$\leqslant \frac{\lambda^2}{2} e^{|\lambda|} kt ,$$

d'où en utilisant l'inégalité de Doob

$$P(M^+ \geqslant c) \leqslant P\left[\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} X_s^\lambda \geqslant \exp\left\{\lambda c - \frac{\lambda^2}{2} kt - \frac{\lambda^2}{2} e^{|\lambda|} kt\right\}\right]$$
$$\leqslant E(X_0^\lambda) \exp\left\{- \lambda c + \frac{\lambda^2}{2} kt(1 + e^{|\lambda|})\right\}$$

pour tout λ réel.

Nous ne pouvons pas déterminer exactement le minimum de la fonction $\exp\left\{- \lambda c + \frac{\lambda^2}{2} kt(1 + e^{|\lambda|})\right\}$, mais en posant $\lambda = \operatorname{Log}(\operatorname{Log} c)$ nous obtenons après une majoration élémentaire :

$$P(M_t^+ \geqslant c) \leqslant \exp\left\{- \frac{c}{2} \operatorname{Log}(\operatorname{Log} c)\right\} \quad \text{dès que} \quad (\operatorname{Log} c)^2 \leqslant \frac{c}{2kt}$$

En appliquant le même résultat à $- M$, nous obtenons alors les inégalités (9) et (10). ■

REMARQUE 14. — Si $M = (M_t)_{t \geqslant 0}$ est une martingale locale vectorielle à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ et si les composantes M_t^i satisfont aux hypothèses de la proposition précédente, nous obtenons :

$$\text{(11)} \qquad P\left[\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |M_s| \geqslant c\right] \leqslant \sum_{i=1}^{d} P\left[\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |M_s^i| \geqslant \frac{c}{d}\right]$$
$$\leqslant 2d \exp\left\{- \lambda \frac{c}{d} + \frac{\lambda^2}{2} kt(1 + e^{|\lambda|})\right\}$$

La proposition précédente nous permet d'avoir une majoration pour l'espérance de $\exp\left[\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |M_s|\right]$. Posons pour simplifier $M_t^* = \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |M_s|$.

PROPOSITION 15. — *Sous les hypothèses de la proposition* 13 *nous avons :*

$$\text{(12)} \qquad \int_{(M_t^* \geqslant c)} e^{M_t^*} dP \leqslant 4e^{-\frac{c}{2}}$$

dès que c vérifie c $> \exp\{\exp 3\}$, $(\operatorname{Log} c)^2 < \dfrac{c}{2kt}$. *Par conséquent* $E(e^{M_t^*})$ *est finie pour tout t positif.*

Démonstration. — Elle est identique à celle effectuée dans le cas continu [*15*]. En effet nous obtenons de la même manière à l'aide de (10) :

$$\int_{(M_t^* \geqslant c)} e^{M_t^*} dP \leqslant 2 \int_c^{+\infty} \exp\left\{ -\frac{u}{2} \operatorname{Log}(\operatorname{Log} u) \right\} \exp\{u\}\, du$$
$$\leqslant 2 \int_c^{+\infty} \exp\left\{ -\frac{u}{2} \right\} du \leqslant 4e^{-\frac{c}{2}}$$

dès que $c > \exp\{\exp 3\}$.

La seconde partie de la proposition en découle immédiatement. ■

Nous allons maintenant appliquer les résultats précédents au problème des martingales.

En utilisant successivement le lemme 11 et la proposition 15, nous obtenons :

COROLLAIRE 16. — *Supposons que les applications* a_{ij}, b_j *soient bornées pour tout* i, j *et que le noyau* S *intègre* $|u|^2 \wedge 1$ *uniformément sur* R^d. *Si* P^x *est une solution au problème des martingales partant de x relativement au triplet* (a, b, S), *les processus* M_t *et* X_t^λ *du théorème* 12 *sont alors des martingales de carré intégrables.*

Nous utiliserons pour le théorème de compacité le lemme suivant qui est un corollaire de la majoration exponentielle.

LEMME 17. — *Soit* P^x *une solution au problème des martingales partant de x relativement au triplet* (a, b, S). *S'il existe des constantes* a_0, b_0, c_0 *telles que*

$$\|a\| = \left(\sum_{i,j=1}^{d} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \leqq a_0 \tag{13}$$

$$|b| \leqq b_0 \tag{14}$$

$$\sup_x S(x, |u|^2 \mathbb{1}_{(|u| \leqslant 1)} + |u| \mathbb{1}_{(|u|>1)}) \leqq c_0 \tag{15}$$

alors pour tout λ *réel et tout* A *positif*

$$(16)\quad P^x(\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |X_s| > \eta)$$
$$\leqq 2d \exp\left\{ -\frac{\lambda}{d}(\eta - |x| - b_0 t - A) + \frac{\lambda^2}{2} kt(1 + e^{|\lambda|}) \right\} + \frac{ct}{A}$$

où k est une constante ne dépendant que de a_0 *et* c_0.

Démonstration. — Le théorème 12 indique que le processus :

$$M_t = X_t - x - \sum_{s \leqslant t} \Delta X_s \mathbb{1}_{(|\Delta X_s| > 1)} - \int_0^t b(X_s) ds$$

est une P^x martingale locale vectorielle. Nous pouvons appliquer la majoration exponentielle puisque grâce aux inégalités (13) et (15)

$$\langle M, M \rangle_t = \int_0^t a(X_s) ds + \int_0^t ds \int_U S(X_s, |u|^2 \mathbb{1}_{(|u| \leqslant 1)}) \leqslant kt$$

Alors

$$P^x [\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |M_s| > \eta] \leqslant 2d \exp \left\{ -\frac{\lambda \eta}{d} + \frac{\lambda^2}{2} kt(1 + e^{|\lambda|}) \right\}$$

pour tout λ réel où k ne dépend que de a_0 et c_0.

Nous en déduisons d'après (14) :

$$P^x [\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |X_s| > \eta] \leqslant P^x [\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |M_s| + \sum_{0 \leqslant s \leqslant t} |\Delta X_s| \mathbb{1}_{(|\Delta X_s| > 1)} > \eta - Bt - |x|]$$

$$\leqslant P^x [\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |M_s| > \eta - b_0 - A] + P^x \left[\sum_{0 \leqslant s \leqslant t} |\Delta X_s| \mathbb{1}_{(|\Delta X_s| > 1)} > A \right]$$

Or le dernier terme est majoré par :

$$\frac{1}{A} E^x \left[\sum_{s \leqslant t} |\Delta X_s| \mathbb{1}_{(|\Delta X_s| > 1)} \right]$$

P^x satisfaisant au problème des martingales partant de x, nous pouvons appliquer la propriété (P) du théorème 10 et :

$$E^x \left[\sum_{s \leqslant t} |\Delta X_s| \mathbb{1}_{(|\Delta X_s| > 1)} \right] = E^x \left[\int_0^t ds \int_{(|u| > 1)} |u| S(X_s, du) \right] \leqslant c_0$$

Nous en déduisons (16). ■

Avant d'étudier un théorème de compacité, nous avons besoin d'introduire le problème des martingales avec départ aléatoire.

§ 6. **Problème des martingales avec temps d'arrêt**

Soit P une probabilité sur $(\Omega^0, \underline{\underline{F}}^0_\infty)$ et soit T un temps d'arrêt fini de la famille de tribus (F^0_{t+}). Il existe alors une répartition conditionnelle de P relativement à $\underline{\underline{F}}^0_{t+}$, $D(\omega, .)$ telle que :

— pour tout $\omega D(\omega, .)$ soit une loi de probabilité sur $(\Omega^0, \underline{\underline{F}}^0_\infty)$,

— pour tout A de $\underline{\underline{F}}^0_\infty$ $D(., A)$ soit $\underline{\underline{F}}^0_{T+}$ mesurable,

— pour toute fonction positive f, $\underline{\underline{F}}^0_\infty$ mesurable $D(., f)$ soit une version de l'espérance conditionnelle $E_P[f/\underline{\underline{F}}^0_{T+}]$.

L'existence de telles lois conditionnelles résulte des propriétés topologiques de Ω^0. En effet $\underline{\underline{F}}^0_\infty$ est la tribu borélienne de Ω^0 où cet espace est muni d'une structure d'espace polonais (théorème A_2).

THÉORÈME 18. — *Soit* P^x *une solution au problème des martingales partant de* x *et* T *un temps d'arrêt borné de la famille* $(\underline{\underline{F}}^0_{t+})$. *Notons par* $D(., .)$ *une répartition conditionnelle de* P^x *par rapport à la tribu* $\underline{\underline{F}}^0_{T+}$ *et par* $H(A, \omega)$: $D(\omega, \theta_T^{-1}(A))$ *où* A *est un élément de* $\underline{\underline{F}}^0_\infty$, ω *de* Ω^0. *Alors* P^x *p.-s. la mesure* $H(., \omega)$ *est une solution au problème des martingales partant de* $X_T(\omega)$.

Démonstration. — Ayant remarqué que les hypothèses nous permettent de dire que $H_t^f = f(X_t) - f(x) - \int_0^t Lf(X_s)ds$ est une P^x martingale locale par rapport à la famille $\underline{\underline{F}}^0_{t+}$, la démonstration est alors identique à celle du cas continu [*15*]. Il existe une suite d'ensembles P-nuls N_p et de temps d'arrêt T_p telles que pour tout p, tout $\omega \notin N_p$ le processus $H^f_{t\wedge T_p}$ soit une P^x martingale, d'où le résultat en prenant $N = \bigcup_p N_p$. ■

Nous utiliserons le corollaire suivant :

COROLLAIRE 19. — *Sous les conditions du lemme* 17 *pour tout temps d'arrêt* T *de la famille* $\underline{\underline{F}}^0_{t+}$ P^x *p.-s. borné, pour tout* λ *et tout* A *positif*

$$(17) \quad P^x[\sup_{0\leq s\leq t} |X_{s+T} - X_T| > \eta] \leq 2d \exp\left\{ -\frac{\lambda}{d}(\eta - b_0 - A) + \frac{\lambda^2}{2}kt(1 + e^{|\lambda|})\right\} + \frac{c_0 t}{A}$$

où k *est une constante ne dépendant que de* a_0 *et* c_0.

Démonstration. — Appliquant le lemme 17 et le théorème 18 nous avons (17) P^x p.-s. pour les probabilités H^T_ω. Nous pouvons alors conclure. En effet,

$$\begin{aligned} P^x[\sup_{0\leq s\leq t} |X_{s+T} - X_T| > \eta] &= P^x[P^x[\sup_{0\leq s\leq t} |X_{s+T} - X_T| > \eta \mid \underline{\underline{F}}^0_{T+}]] \\ &= P^x[H^T_\omega[\sup_{0\leq s\leq t} |X_s - X_T| > \eta]]. \quad ■ \end{aligned}$$

§ 7. Théorème de compacité

THÉORÈME 20. — *Soit une famille* $(P^x_\alpha)_{\alpha\in I}$ *de solutions au problème des martingales partant de x relativement aux triplets* $(a^\alpha, b^\alpha, S^\alpha)_{\alpha\in I}$ *alors, si les conditions* (13), (14) *et* (15) *sont satisfaites uniformément en* α, *la famille* $(P^x_\alpha)_{\alpha\in I}$ *est relativement compacte pour la topologie de la convergence étroite.*

Démonstration. — Il suffit de vérifier les conditions du théorème A_3.

a) *Vérifions I.* — Appliquons le lemme 17. Donnons-nous ε et choisissons A tel que $\dfrac{c_0 t}{A} = \dfrac{\varepsilon}{2}$, alors :

$$I_1 = \sup_{\alpha\in I} P^x_\alpha\,[\sup_{0\leqslant s\leqslant t} |X_s| > \eta]$$
$$\leqslant 2d \exp\left\{ -\frac{\lambda}{d}\left(\eta - |x| - b_0 - \frac{c_0}{\varepsilon}\right) + \frac{\lambda^2}{2} kt(1 + e^{|\lambda|})\right\} + \frac{\varepsilon}{2}$$

t et λ fixés nous pouvons trouver un η indépendant de α tel que $I_1 < \varepsilon$, ce qui montre I.

b) *Vérifions II.* — Appliquons le corollaire 19, ε et η étant donnés

$$\sup_\alpha P^x_\alpha\,[\sup_{T\leqslant s\leqslant T+h} |X_s - X_T| > \eta]$$
$$\leqslant 2d \exp\left\{ -\frac{\lambda\eta}{d} + \frac{\lambda}{d}(b_0 + A) + \frac{\lambda^2}{2} kh(1 + e^{|\lambda|})\right\} + \frac{c_0}{A}.$$

Choisissons A de la même manière que précédemment et en étudiant la fonction de λ

$$\exp\left\{ -\frac{\lambda}{d}\eta + \frac{\lambda h}{d}\left(b_0 + \frac{c_0}{\varepsilon}\right) + \frac{\lambda^2}{2} kh(1 + e^{|\lambda|})\right\}$$

nous voyons qu'il existe pour h donné un λ grand tel que cette fonction soit minimale, minimum qui tend vers 0 avec h. Nous en déduisons que, pour ε et η donnés, il existe h^ε_η petit tel que pour tout temps d'arrêt T

$$\sup_\alpha P^x_\alpha\,[\sup_{T\leqslant s\leqslant T+h} |X_s - X_T| > \eta] \leqslant \varepsilon \tag{18}$$

Appliquant (18) avec $T = 0$, nous obtenons la propriété II.

c) *Vérifions III.* — De l'inégalité $|X_t - X_s| \leqslant |X_t - X_{p-h}| + |X_{p-h} - X_s|$ et de (18) nous voyons que pour tout p entier : si $= h^{\frac{\varepsilon}{2}}_{\frac{\eta}{2}}$

$$\sup_\alpha P_\alpha^x [\sup_{p-h \leqslant s < t < p} |X_t - X_s| > \eta] \leqslant 2 \sup_\alpha P_\alpha^x \left[\sup_{p-h \leqslant s < p} |X_t - X_{p-h}| > \frac{\eta}{2}\right] < \varepsilon$$

d) *Vérifions IV.* — Pour obtenir la propriété IV à partir de l'inégalité (18), nous allons utiliser une idée de Strook-Varadhan [*20*], voir aussi [*21*]. Posons :

$$T_0 = 0$$

$$\cdots\cdots$$

$$T_n = \inf\left\{ t > T_{n-1} \mid |X_t - X_{T_{n-1}}| > \frac{\eta}{2} \right\}, \qquad + \infty \text{ si vide.}$$

Vue la continuité à droite de X_t, c'est une suite de $(\underline{\underline{F}}_{t+})$ temps d'arrêt strictement croissante sur les $(T_n < + \infty)$. Fixons p, si

$$\sup_{\substack{t_1 < t_2 \leqslant p \\ |t_1 - t_2| < h}} \sup_{\substack{t \\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2}} \min \{ |X_t - X_{t_1}|, |X_t - X_{t_2}| \} > \eta$$

il existe un t, $t_1 < t < t_2$ tel que $|X_t - X_{t_1}| > \eta$ et $|X_t - X_{t_2}| > \eta$.

Supposons que $T_{n-1} \leqslant t_1 < T_n$, alors :

$$\eta \leqslant |X_t - X_{t_1}| \leqslant |X_{t_1} - X_{T_{n-1}}| + |X_{T_{n-1}} - X_t| \leqslant \frac{\eta}{2} + |X_{T_{n-1}} - X_t|$$

par suite $t_1 < T_n \leqslant t$, et de la même manière $t < T_{n+1} \leqslant t_2$.

Nous en déduisons que pour tout ω il existe n tel que $|T_n(\omega) - T_{n-1}(\omega)| < h$.

Posons $\delta_p^\eta = \inf \{ T_n - T_{n-1} \mid T_{n-1} < p \}$, nous voyons que la propriété IV sera vraie si pour tout p entier nous trouvons h tel que :

$$\sup_\alpha P_\alpha^x[\delta_p^\eta < h] < \varepsilon$$

Or :

$$\begin{aligned}
\sup_\alpha P_\alpha^x[\delta_p^\eta < h] &= \sup_\alpha P_\alpha^x [\inf_n \{ T_n - T_{n-1} \mid T_{n-1} < p \} < h] \\
&\leqslant \inf_n \sup_\alpha P_\alpha^x[T_n - T_{n-1} < h ; T_{n-1} < p] \\
&\leqslant \inf_n \sup_\alpha P_\alpha^x \left[\sup_{0 \leqslant s < h} |X_{T_{n-1+s}} - X_{T_n}| > \frac{\eta}{2} ; T_{n-1} < p \right] \\
&\leqslant \inf_n \sup_\alpha P_\alpha^x \left[\sup_{0 \leqslant s < h} |X_{T_{n-1} \wedge T + s} - X_{T_n \wedge T}| > \frac{\eta}{2} \right]
\end{aligned}$$

Les temps d'arrêts $T_{n-1} \wedge T$ étant bornés, nous pouvons appliquer (18) et ainsi conclure. ■

§ 8. Intégrales stochastiques par rapport à un processus ponctuel. 1re application au problème des martingales

Nous allons dans un premier temps rappeler les principaux résultats de la théorie de l'intégrale stochastique par rapport aux mesures martingales d'un processus ponctuel. Les démonstrations qui sont une généralisation d'un travail de Skorokhod [*18*] peuvent être trouvées dans [5].

Notations et Définitions — Soit $(\Omega, \underline{\underline{F}}, (\underline{\underline{F}}_t)_{t\geqslant 0}, P)$ un espace de probabilité, et $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ un processus ponctuel à valeurs dans un espace lusinien $(U, \underline{\underline{U}})$ adapté σ-fini. Nous noterons par (N, A) son système de Lévy et si $\mathscr{P}$ désigne la tribu des prévisibles [3] posons :

(19) $L^1(N, A)$

$$= \left\{ Z \in \mathscr{P} \otimes \underline{\underline{U}} / E\left[\int_0^t dA_s \int_U N(s, du)\,|\,Z\,(s, u)\,| < \infty \text{ pour tout } t\right]\right\}$$

(20) $L^2(N, A)$

$$= \left\{ Z \in \mathscr{P} \otimes \underline{\underline{U}} / E\left[\int_0^t dA_s \int_U N(s, du)\,|\,Z^2(s, u)\,| < \infty \text{ pour tout } t\right]\right\}$$

Si Z appartient à $L^1(N, A)$, nous pouvons définir une mesure aléatoire à variation bornée par :

$$Q_t(Z) = P_t(Z) - \int_0^t dA_s N(s, Z) \tag{21}$$

où $P_t(Z) = \sum_{s\leqslant t} Z(s, Y_s)$, alors $Q_t(Z)$ est une martingale c. a. d. l. a. g.

Nous pouvons alors énoncer les résultats suivants :

Proposition 21. — *Soit* Z *appartenant à* $L^1(N, A)$. *Une condition suffisante pour que* $Q_t(Z)$ *soit une martingale de carré intégrable est que* Z *appartienne à* $L^2(N, A)$. *Le processus croissant prévisible associé à* $Q_t(Z)$ *vaut alors :*

$$\int_0^t dA_s N(s, Z^2) - \sum_{s\leqslant t} (\Delta A_s)^2 N^2(s, Y_s)$$

Théorème 22. — *Pour tout* Z *appartenant à* $L^2(N, A)$, *il existe une unique martingale de carré intégrable, somme compensée de sauts, que nous noterons* $Q_t(Z)$, *telle que si* Z *appartient aussi à* $L^1(N, A)$

$$Q_t(Z) = P_t(Z) - \int_0^t dA_s N(s, Z),$$

et de processus croissant

$$\int_0^t dA_s N(s, Z^2) - \sum_{s \leq t} (\Delta A_s)^2 N^2(s, Z).$$

Dans la suite nous noterons $Q_t(Z) = \int_0^t \int_U Z(s, u) q(ds, du)$

Au chapitre II nous reprendrons ces résultats dans le cas particulier des processus ponctuels de poisson.

Nous allons appliquer le théorème 22 pour donner une autre équivalence au problème des martingales, résultat principal de cette section.

Soit P une probabilité sur Ω^0 vérifiant la propriété (P) avec un noyau S qui intègre $|u|^2 \wedge 1$ uniformément sur R^d.

Le processus ponctuel Y_t associé au processus $\langle \theta, X_t \rangle$, où θ est un élément de R^d, est alors quasi continu à gauche et σ-fini. Par conséquent $Z(s, \omega, u) = \langle \theta, u \rangle \mathbb{1}_{(|u| \leq 1)}$ appartient à $L^2(S, t)$ et d'après le théorème 22, il existe une martingale de carré intégrable notée :

$$\int_0^t \int_{|u| \leq 1} \langle \theta, u \rangle q(ds, du)$$

somme compensée de sauts de processus croissant

$$\int_0^t ds \int_{|u| \leq 1} \langle \theta, u \rangle^2 S(X_s, du)$$

Nous en déduisons immédiatement le théorème suivant, basé sur l'unicité des processus croissants associés à une martingale de carré intégrable.

THÉORÈME 23. — *Soit* P *une probabilité sur* Ω^0, *telle que* (P) *soit vraie pour* P. *Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes.*

1) *Le processus*

$$M_t = X_t - x - \int_0^t b(X_s) ds - \sum_{s \leq t} \Delta X_s \mathbb{1}_{(|\Delta X_s| > 1)}$$

est une P *martingale de processus croissant associé à* $\langle \theta, M_t \rangle$

$$\int_0^t \langle \theta, a(X_s)\theta \rangle ds + \int_0^t ds \int_{|u| \leq 1} \langle \theta, u \rangle^2 S(X_s, du)$$

2) *Le processus*

$$\overline{M}_t = X_t - x - \int_0^t b(X_s) ds - \sum_{s \leq t} \Delta X_s \mathbb{1}_{(|\Delta X_s| > 1)} - \int_0^t \int_{|u| \leq 1} u q(ds, du)$$

est une martingale vectorielle continue de processus croissant associé à

$$\langle \theta, \overline{\mathrm{M}}_t \rangle : \int_0^t \langle \theta, a(\mathrm{X}_s)\theta \rangle \, ds$$

pour tout θ *de* R^d.

Ces deux derniers théorèmes vont nous permettre d'étudier les relations existant entre deux solutions au problème des martingales relatifs à des coefficients b différents. Nous suivrons l'étude faite dans le cas continu [*13*].

§ 9. Rôle des termes du premier ordre

Dans la suite nous supposons que la matrice a et les vecteurs b_1, b_2 sont bornés et que le noyau S intégre $|u|^2 \wedge 1$ uniformément sur R^d. Introduisons la définition suivante :

DÉFINITION 24. — *Soit une matrice a d × d, symétrique, définie positive bornée. Nous dirons qu'un vecteur* $b(x)$ *borélien borné est de classe* $\mathrm{V}(a)$, *s'il existe un vecteur* $\beta(x)$ *d-dimensionnel, borélien, borné sur tout compact de* R^d *tel que pour tout x de* R^d

$$b(x) = a(x)\beta(x) \tag{22}$$

En particulier si la matrice a est inversible pour tout x $\beta(x) = a^{-1}(x)b(x)$, alors $\mathrm{V}(a)$ est l'ensemble des vecteurs $b(x)$ bornés.

Soit P_1^x une solution au problème des martingales partant de x relativement au triplet (a, b_1, S). Si Y_t est la martingale continue de carré intégrable :

$$\mathrm{Y}_t = \mathrm{X}_t - x - \int_0^t b(\mathrm{X}_s)ds - \sum_{s \leqslant t} \Delta\mathrm{X}_s \mathbb{1}_{(|\Delta\mathrm{X}_s| > 1)} - \int_0^t \int_{|u| \leqslant 1} uq(ds, du)$$

alors posons :

$$\mathrm{R}_t = \exp\left\{ \int_0^t \langle \beta(\mathrm{X}_s), d\mathrm{Y}_s \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t \langle \beta(\mathrm{X}_s), b(\mathrm{X}_s) \rangle \, ds \right\} \tag{23}$$

où $\int_0^t \langle \beta(\mathrm{X}_s), d\mathrm{Y}_s \rangle$ est une intégrale stochastique.

Nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 25. — *Soit un vecteur* $b_2 = b + b_1$ *où b est de classe* $\mathrm{V}(a)$. *Il existera une solution* P_x^2 *au problème des martingales partant de x relativement au triplet* (a, b_2, S).

De plus les probabilités P_x^2 *et* P_x^1 *sont liées par*

$$\left.\frac{d\mathrm{P}_x^2}{d\mathrm{P}_x^1}\right|_{\underline{\underline{\mathrm{F}_t^0}}} = \mathrm{R}_t \qquad \text{pour tout } t \tag{24}$$

Démonstration. — Cette démonstration est identique au cas continu [*13*] pour montrer que pour tout θ de R^d

$$\overline{\mathrm{M}}_t^\theta = \left\langle \theta, \mathrm{X}_t - x - \int_0^t b^2(\mathrm{X}_s)ds - \sum_{s \leqslant t} \Delta \mathrm{X}_s \mathbb{1}_{(|\Delta \mathrm{X}_s| > 1)} - \int_0^t \int_{|u| \leqslant 1} uq(ds, du) \right\rangle$$

est une martingale continue de processus croissant associé

$$\int_0^t \langle \theta, a(\mathrm{X}_s)\theta \rangle \, ds \qquad \text{pour tout } \theta \text{ de } \mathrm{R}^d$$

Remarquons en particulier, qu'il faut procéder en deux temps, en supposant $\beta(x)$ borné.

Alors la définition de P_2^x sur $(\Omega^0, \underline{\underline{\mathrm{F}}}_\infty^0)$ est possible car R_t est une $\underline{\underline{\mathrm{F}}}_t^0$ martingale d'après la proposition 11 et l'espace $(\Omega^0, \underline{\underline{\mathrm{F}}}^0)$ est un espace polonais (théorème A_2). Remarquons aussi que dans ce cas P_x^1 p.-s. pour tout t $0 < \mathrm{R}(t) < \infty$.

Si $\beta(x)$ est seulement borné sur tout compact, posons $b^n = b \mathbb{1}_{\mathrm{K}_n}$ et $\beta^n = \beta \mathbb{1}_{\mathrm{K}_n}$ où K_n une suite de compacts tendant vers R^d quand n croît vers l'∞. A l'aide des résultats dans le cas borné, nous pouvons voir que la famille des martingales R_t^n définies à l'aide des β^n est équi-intégrable. Alors R_t est aussi une martingale et de nouveau nous pouvons définir la probabilité P_2^x à l'aide de la relation (24). Le résultat cherché suit facilement.

Dans le cas discontinu d'après le théorème 22 il reste à montrer que P_2^x satisfait à la relation (P).

Or ceci est vrai, car nous pouvons écrire successivement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}^{\mathrm{P}_2^x}\left[\sum_{s \leqslant \mathrm{T}} h(\mathrm{X}_s, \mathrm{X}_{s^-}) \mathbb{1}_{(\mathrm{X}_s \neq \mathrm{X}_{s^-})}\right] &= \mathrm{E}^{\mathrm{P}_1^x}\left[\mathrm{R}_\mathrm{T} \sum_{s \leqslant \mathrm{T}} h(\mathrm{X}_s, \mathrm{X}_{s^-}) \mathbb{1}_{(\mathrm{X}_s \neq \mathrm{X}_{s^-})}\right] \\
&= \mathrm{E}^{\mathrm{P}_1^x}\left[\int_0^\mathrm{T} \mathrm{R}_s d\left(\sum_{v \leqslant s} h(\mathrm{X}_v, \mathrm{X}_{v^-}) \mathbb{1}_{(\mathrm{X}_v \neq \mathrm{X}_{v^-})}\right)\right] \\
&= \mathrm{E}^{\mathrm{P}_1^x}\left[\int_0^\mathrm{T} \mathrm{R}_s d\left(\int_0^s dv \int_\mathrm{U} h(\mathrm{X}_v + u, \mathrm{X}_v) \mathrm{S}(\mathrm{X}_v, du)\right)\right] \\
&= \mathrm{E}^{\mathrm{P}_1^x}\left[\mathrm{R}_\mathrm{T} \int_0^\mathrm{T} ds \int_\mathrm{U} h(\mathrm{X}_s + u, \mathrm{X}_s) \mathrm{S}(\mathrm{X}_s, du)\right] \\
&= \mathrm{E}^{\mathrm{P}_2^x}\left[\int_0^\mathrm{T} ds \int_\mathrm{U} h(\mathrm{X}_s + u, \mathrm{X}_s) \mathrm{S}(\mathrm{X}_s, du)\right]. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Le théorème 25 va nous permettre de déduire facilement le théorème d'unicité suivant, qui se démontre comme dans le cas continu [*13*] [*15*].

THÉORÈME 26. — *S'il existe une unique solution* P_1^x *au problème des martingales partant de* x *relativement au triplet* (a, b_1, S), *il existera alors une unique solution au problème des martingales partant de* x *relativement au triplet* (a, b_2, S) *où* $b_2 - b_1$ *est un vecteur de classe* $V(a)$.

Démonstration. — Grâce au théorème 25 qui montre l'existence, il reste à prouver l'unicité.

Soit π et π' deux probabilités solutions au problème des martingales partant de x relativement au triplet (a, b_2, S). Il existera deux solutions π_1 et π'_1 au problème des martingales partant de x relativement au triplet (a, b_1, S) d'après le théorème 25 liées à π et π' par relation (24). Nous pouvons trouver une même version des intégrales stochastiques

$$\int_0^t \langle \beta(X_s), dY_s^2 \rangle$$

relatives aux deux probabilités π et π', ainsi nous pouvons prendre $R_t^\pi = R_t^{\pi'} = S_t$.

En se plaçant sur les compacts $\{ x : | x | \leqslant r \}$, puis faisant tendre r vers l'infini, nous avons facilement alors l'unicité. ■

II. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES ET PROBLÈME DES MARTINGALES

Dans ce chapitre nous allons définir les équations différentielles stochastiques et étudier leur lien avec le problème des martingales. Pour cela il nous est nécessaire de rappeler les principales propriétés des processus de poisson ponctuels (p. p. p.).

§ 1. Processus de poisson ponctuels, mesure aléatoire associée

Nous nous placerons sur un certain espace de probabilité $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$ muni d'une famille croissante de sous-tribus $\underline{\underline{F}}_t$, $t \geqslant 0$, satisfaisant les conditions habituelles de Dellacherie. Pour plus de détails sur les définitions et les propriétés qui suivent il est conseillé de consulter [5] [7] et [*16*].

a) PROCESSUS PONCTUEL MULTIVARIÉ ET P. P. P.

Nous dirons que le processus Y_t, $t \geqslant 0$ à valeurs dans $\hat{U} = U \cup \{ \delta \}$ est un *processus ponctuel multivarié σ-discret* si l'ensemble

$$D = \{ (\omega, t)/Y_t(\omega) \neq \delta \}$$

a des coupes au plus dénombrables.

Si Z est une fonction aléatoire positive $\underline{\underline{F}} \otimes \mathscr{B}(R^+) \otimes \underline{\underline{U}}$ mesurable (où $\underline{\underline{U}}$ est la tribu borélienne de $U = R^d - \{0\}$), nous désignerons par :

$$P(Z)(\omega) = \sum_{0 < s \in D\omega} Z(\omega, s, Y_s(\omega)), \qquad P_t(Z)(\omega) = \sum_{0 < s \in D\omega} Z(\omega, s, Y_s(\omega)) \mathbb{1}_{(s \leqslant t)}$$

en particulier pour tout B de $\underline{\underline{U}}$

$$P_t(B) = \sum_{0 < s \leqslant t} \mathbb{1}_B(Y_s) \tag{25}$$

Alors nous dirons que le processus ponctuel Y_t, $t \geqslant 0$, est *σ-fini* s'il existe un processus H, $\mathscr{P} \otimes \underline{\underline{U}}$ mesurable, strictement positif tel que $E[P(H)] < +\infty$; *adapté* si Y_0 est $\underline{\underline{F}}_0$ mesurable et si pour tout B de U $P_t(B)$ est un processus à valeurs dans R_+, $\underline{\underline{F}}_t$ adapté.

Il est bien connu [5] que si Y_t est un processus ponctuel σ-fini, adapté, alors il existe un processus strictement croissant prévisible A_t et un noyau de transition de $\mathscr{P}$ vers $(U, \underline{\underline{U}})$, $N(t, \omega, .)$, σ-fini, tels que pour toute fonction $f\,\underline{\underline{U}}$ mesurable positive $P_t(f) = \sum_{0<s\leqslant t} f(Y_s)$ ait pour projection duale prévisible le processus croissant

$$\int_0^t N(s, f)dA_s .$$

Le couple (N, A) *est appelé système de Lévy du processus* (Y_t).

DÉFINITION II_1. — *Un processus ponctuel multivarié σ-fini, adapté,* Y_t, $t \geqslant 0$, *sera un p. p. p. s'il existe sur* $(U, \underline{\underline{U}})$ *une mesure m σ-finie telle que son système de Lévy soit* (m, t), *m sera dite la mesure de Lévy du p. p. p.* (Y_t).

(Pour voir la correspondance avec les définitions habituelles consulter [5]).

Pour tout B de $\underline{\underline{U}}$ nous noterons par $Q_t(B)$ la $\underline{\underline{F}}_t$ martingale

$$P_t(B) - tm(B).$$

REMARQUES II_2. — 1) Si (Y_t) est un p. p. p. de mesure de Lévy *m*, pour tout B de $\underline{\underline{U}}$ tel que *m*(B) soit fini, tout temps d'arrêt T :

i) $P^T_{T+t}(B) = \sum_{T<s\leqslant T+t} \mathbb{1}_B(Y_s)$ est indépendant de $\underline{\underline{F}}_T$.

ii) Y_{T+t} est un p. p. p. $\underline{\underline{F}}_{T+t}$ adapté, de mesure de Lévy *m*.

Cette propriété est connue comme la *propriété forte de Markov* [*16*].

2) Soit B de $\underline{\underline{U}}$ tel que $m(B)$ soit fini, nous pouvons définir la suite croissante de temps d'arrêt tendant vers l'infini :

$$\begin{aligned} T_1^B &= \inf\{ t > 0 \quad | Y_t \in B \}, + \infty \quad \text{si vide} \\ T_n^B &= \inf\{ t > T_{n-1} | Y_t \in B \}, + \infty \quad \text{si vide.} \end{aligned}$$

posons pour tout $n \geqslant 1$ $S_n^B = T_n - T_{n-1}$, alors les variables aléatoires $S_1^B, \ldots, S_n^B, \ldots, Y_{T_1}^B, \ldots, Y_{T_n}^B, \ldots$, sont mutuellement indépendantes, les S_n^B de loi exponentielle de paramètre $m(B)$ et les $Y_{T_n}^B$ de loi

$$P[Y_{T_n}^B \in A] = \frac{m(A)}{m(B)}$$

pour tout A de $\underline{\underline{U}}$ inclus dans B.

Dans la suite nous supposerons toujours $m(U_\varepsilon)$ finie pour tout ε avec $U_\varepsilon = \{ u / |u| > \varepsilon \}$.

b) MESURES ALÉATOIRES ASSOCIÉES A UN P. P. P.

Nous sommes ici dans un cas particulier du paragraphe I_7.

Posons :

$$L^1(m) = \left\{ Z \in \mathscr{P} \otimes U, \underline{\underline{F_t}} \text{ adapté} / E\left[\int_0^t ds \int_U |Z(s, u)| m(du) \right] = \|Z\|_t^1 < \infty \text{ pour tout } t \right\}$$

$$L^{1,\mathrm{loc}}(m) = \left\{ Z \in \mathscr{P} \otimes U, \underline{\underline{F_t}} \text{ adapté} \middle/ \int_0^t ds \int_U |Z(s, u)| m(du) < \infty \ P_{\text{p.-s.}} \text{ pour tout } t \right\}$$

$$L^2(m) = \left\{ Z \in \mathscr{P} \otimes U, \underline{\underline{F_t}} \text{ adapté} / E\left[\int_0^t ds \int_U |Z(s, u)|^2 m(du) \right]^{\frac{1}{2}} = \|Z\|_t^2 < \infty \text{ pour tout } t \right\}$$

$$L^{2,\mathrm{loc}}(m) = \left\{ Z \in \mathscr{P} \otimes U, \underline{\underline{F_t}} \text{ adapté} \middle/ \int_0^t ds \int_U |Z(s, u)|^2 m(du) < \infty, P_{\text{p.-s.}} \text{ pour tout } t \right\}$$

REMARQUES. — Nous garderons les mêmes notations pour Z d-dimensionnel si une des propriétés précédentes est vérifiée pour toutes les applications coordonnées.

DÉFINITION II_3. — *Pour toute application d-dimensionnelle positive telle que* $P_t(Z) = \sum_{0<s\leq t} Z(s, Y_s)$ *ait un sens, nous écrirons*

$$P_t(Z) = \int_0^t \int_U Z(s, u)\,p(ds, du) \tag{26}$$

et nous dirons que c'est l'intégrale stochastique de Z *par rapport à la mesure aléatoire* P.

En particulier $P_t(Z)$ a un sens pour Z dans $L^{1,\mathrm{loc}}(m)$, et si de plus elle appartient *à* $L^1(m)$

$$E[P_t\,|\,Z\,|\,] = E\left[\int_0^t ds \int_U |\,Z(s, u)\,|\,m(du)\right] \tag{27}$$

Pour tout Z dans $L^2(m)$ il existe une unique martingale de carré intégrable, somme compensée de sauts, Q_tZ, telle que si Z appartient aussi à $L^1(m)$

$$Q_tZ = P_tZ - \int_0^t ds \int_U Z(s, u)m(du) \tag{28}$$

de processus croissant prévisible $\int_0^t ds \int_U Z^2(s, u)m(du)$.

De plus si Z appartient à $L^{2,\mathrm{loc}}(m)$ nous pouvons définir une unique martingale locale localement de carré intégrable somme compensée de sauts, telle qu'étant donnée une suite croissante de temps d'arrêt $(T_n)_{n\geq 1}$ réduisant fortement (Q_tZ), $Q_{t\wedge T_n}(Z) = Q_t(Z\,\mathbb{1}_{]0,T_n]})$.

DÉFINITION II_4. — $Q_t(Z)$ *sera appelée l'intégrale stochastique de* Z *par rapport à la mesure aléatoire q et sera notée*

$$Q_t(Z) = \int_0^t \int_U Z(s, u)q(ds, du) \tag{29}$$

(Sur les propriétés de ces mesures aléatoires voir [*5*] [*11*]).

Nous utiliserons une formule d'Ito semblable à celle de Kunita-Watanabe [*10*], formule qui se déduit de celle de Meyer [*14*] à l'aide de la formule de Taylor.

PROPOSITION II_5 (formule d'Ito). — *Considérons la semi-martingale locale* $X_t = X_0 + M_t + A_t + Q_tf + P_tg$ *où, à valeurs dans* R^d, M_t *est une martingale locale continue,* A_t *un processus à variations bornées continu,* f *un élément de* $L^{2,\mathrm{loc}}(m)$, g *de* $L^{1,\mathrm{loc}}(m)$ *et* X_0 *une variable aléatoire* $\underline{\underline{F}}_0$

mesurable bornée. Alors, si pour tout $i, j = 1, \ldots, d$, $f_i g_j = 0$, *pour toute fonction complexe* H *définie sur* $\mathbf{R}^d$ *de classe* $\mathscr{C}^2$, *nous avons que*

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(\mathrm{X}_t) - \mathrm{H}(\mathrm{X}_0) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\int_0^t \mathrm{D}^i\mathrm{D}^j\mathrm{H}(\mathrm{X}_s)d\langle \mathrm{M}^i, \mathrm{M}^j\rangle_s - \sum_{i=1}^{n}\int_0^t \mathrm{D}^i\mathrm{H}(\mathrm{X}_s)d\mathrm{A}_s^i \\ - \int_0^t ds\int_{\mathrm{U}} \{ \mathrm{H}(\mathrm{X}_{s^-} + f(s, u)) - \mathrm{H}(\mathrm{X}_{s^-}) - \langle f(s, u), \nabla\mathrm{H}(\mathrm{X}_{s^-})\rangle \\ + \mathrm{H}(\mathrm{X}_{s^-} + g(s, u)) - \mathrm{H}(\mathrm{X}_{s^-}) \} m(du)\end{aligned}$$

est une $\underline{\underline{\mathrm{F}}}_t$ *martingale.*

c) REPRÉSENTATION DES PROCESSUS PONCTUELS QUASI CONTINUS A GAUCHE

Toutes les propriétés qui suivent et qui montrent le rôle important des p. p. p. constituent les résultats essentiels de [5].

Tout noyau $\mathrm{N}(x, .)\mathscr{B}_{\mathbf{R}^d}$ mesurable sur $(\mathrm{U}, \underline{\underline{\mathrm{U}}})$, σ-fini possède la propriété (N) :

pour toute mesure m sur $(\mathrm{U}, \underline{\underline{\mathrm{U}}})$ σ-finie, positive, diffuse et satisfaisant pour tout x de $\mathbf{R}^d$

$$\mathrm{N}(x, \mathrm{U}) \leqslant m(\mathrm{U}) \tag{30}$$

il existe une fonction $n(x, u)\mathscr{B}_{\mathbf{R}^d} \otimes \underline{\underline{\mathrm{U}}}$ mesurable à valeurs dans $\hat{\mathrm{U}}$ telle que pour toute fonction f positive U mesurable

$$\mathrm{N}(x, f) = \int_{\mathrm{U}} f(n(x, u))m(du) \tag{31}$$

De (31) il suit facilement que pour tout processus ponctuel σ-fini quasi continu à gauche de noyau de Lévy (N, t) et pour toute mesure m sur $(\mathrm{U}, \underline{\underline{\mathrm{U}}})$ diffuse et de masse infinie, il existe un processus $\mathscr{P} \otimes \underline{\underline{\mathrm{U}}}$ mesurable $n(t, \omega, u)$ tel que :

$$\mathrm{N}(\omega, t, f) = \int_{\mathrm{U}} f(n(t, \omega, u))m(du) \tag{32}$$

De (32) il est montré l'existence d'un p. p. p. $(\hat{\Omega}, \hat{\underline{\mathrm{F}}}, \hat{\underline{\underline{\mathrm{F}}}}_t, \hat{\mathrm{Y}}_t)$ tel que Y soit l'image de $\hat{\mathrm{Y}}$ par n.

Alors si nous considérons une martingale locale vectorielle localement de carré intégrable dont le processus croissant est absolument continu par rapport au temps et celui associé à la martingale $(\langle \theta, \mathrm{M}_t\rangle)^c$ est $\int_0^t \langle \theta, a(s)\theta\rangle ds$ nous obtenons l'existence d'un espace de probabilité $(\hat{\Omega}, \hat{\underline{\mathrm{F}}}, \hat{\underline{\underline{\mathrm{F}}}}_t, \hat{\mathrm{P}})$, et, sur cet espace d'un mouvement brownien m dimensionnel $(\hat{B}_t)_{t\geq 0}$, d'un p. p. p. $(\hat{Y}_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\hat{U}$ de mesure de Lévy m diffuse indépendant du brownien et d'un processus $n(t, u)\mathcal{P} \otimes \underline{\underline{U}}$ mesurable où n est associé par (32) au noyau N du processus ponctuel dérivé de la martingale $(M_t)_{t\geq 0}$, pour lesquels :

$$M_t = M_0 + \int_0^t \sigma_s d\hat{\beta}_s + \int_0^t \int_U n(s, u)\hat{q}(ds, du) \tag{33}$$

§ 2. Équations différentielles stochastiques : généralités

Considérons les trois applications boréliennes suivantes : σ de R^d dans $R^d \times R^m$, b de R^d dans R^d, f de $R^d \times U$ dans R^d, alors :

DÉFINITION II_6. — *Nous appellerons solution de l'équation différentielle stochastique* (E)

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt + \int_{\{|u|\leq 1\}} f(X_{t^-}, u)\,q(dt, du)$$
$$+ \int_{\{|u|> 1\}} f(X_{t^-}, u)\,p(dt, du)$$

de condition initiale $X_0 = x$, *x de* R^d, *la donnée de :*

a) *un espace de probabilité* $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$, *muni d'une famille croissante de sous-tribus* $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0}$ *satisfaisant aux conditions habituelles ;*

b) *un* $\underline{\underline{F}}_t$ *mouvement brownien m-dimensionnel* $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *tel que* $B_0 = 0$;

c) *un p. p. p.* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *à valeurs dans* $\hat{U}$, *de mesure de Lévy m, p et q étant les mesures aléatoires associées au p. p. p.* (Y_t) ;

d) *une fonction aléatoire* X *de* $R_+ \times \Omega$ *dans* R^d, *c. a. d. l. a. g.,* $\underline{\underline{F}}_t$ *adaptée telle que :* $P_{\text{p.-s.}}$, *pour tout t ;*

i) $\displaystyle\int_0^t ||\sigma(X_s)||^2 ds < \infty$

ii) $\displaystyle\int_0^t |b(X_s)|\,ds < \infty$

iii) $\displaystyle\int_0^t ds \int_{\{|u|\leq 1\}} |f(X_{s^-}, u)|^2 m(du) < \infty$

iv) $\displaystyle\sum_{0<s\leq t} |f(X_{s^-}, Y_s)|\,\mathbb{1}_{(|Y_s|>1)} < \infty$, *en particulier*

$$\int_0^t ds \int_{\{|u|>1\}} |f(X_{s^-}, u)|\,m(du) < \infty$$

et telle que

$$(34)\quad X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \int_{\{|u| \leq 1\}} f(X_{s^-}, u)q(ds, du) + \int_0^t \int_{\{|u| > 1\}} f(X_{s^-}, u)p(ds, du)$$

Les conditions *i*), *ii*), *iii*) et *iv*) permettent l'existence des intégrales stochastiques dans l'équation (34). De plus, la troisième intégrale existe car $f(X_{t^-}, u)$ est prévisible pour tout u de U.

Suivant Yamada-Watanabé [*22*] dans le cas continu, nous avons deux définitions de l'unicité.

DÉFINITION II_7 (unicité trajectorielle). — *Nous dirons qu'il y a unicité trajectorielle des solutions de* (E) *si étant donnée deux solutions* $\mathcal{X} = (B, Y, X)$ *et* $\mathcal{X}' = (B', Y', X')$ *sur le même espace de probabilité avec même condition initiale* $X_0 = X'_0 = x$, *pour tout* t $B_t \equiv B'_t$ *et* $Y_t \equiv Y'_t$ *implique que* $X_t = X'_t$ *pour tout* t $P_{\text{p.-s.}}$.

DÉFINITION II_3 (unicité en loi). — *Nous dirons qu'il y a unicité en loi pour l'équation* (E) *si, étant données deux solutions* $\mathcal{X} = (B, Y, X)$ *et* $\mathcal{X}' = (B', Y', X')$ *telles que* $X_0 = x$ $P_{\text{p.-s.}}$ *et* $X'_0 = x$ $P'_{\text{p.-s.}}$ *et de plus telles que les p. p. p. ont même mesure de Lévy* m, *les processus* X_t *et* X'_t *ont même loi sur l'espace canonique* $(\Omega^0, \underline{\underline{F}}^0)$.

Avant de passer à l'étude du lien avec le problème des martingales montrons que nous pouvons remplacer dans *c*) le p. p. p. (Y_t) par un P. A. I. (Z_t) que nous appellerons P. A. I. associé au p. p. p. (Y_t).

Nous dirons que la mesure de Lévy possède la propriété (M) si elle intègre $|u|^2 \mathbb{1}_{(|u| \leq 1)} + |u| \mathbb{1}_{(|u| > 1)}$. Alors posons :

$$Z_t = \int_0^t \int_{\{|u| \leq 1\}} uq(ds, du) + \int_0^t \int_{\{|u| > 1\}} up(ds, du)$$

Par application de la formule d'Ito nous en déduisons que Z_t est un P. A. I. nul en 0, de fonction caractéristique :

$$(35)\qquad E[e^{i\langle z, Z_t \rangle}] = \exp\left\{ t \int_U m(du)(e^{i\langle z, u\rangle} - 1 - i\mathbb{1}_{\{|u| \leq 1\}} \cdot \langle z, u\rangle) \right\}$$

Inversement si nous considérons un tel P. A. I. nous voyons facilement à l'aide des théorèmes 10, 12 et 23 que :

$$Z_t = \int_0^t \int_{|u| \leq 1} uq'(ds, du) + \int_0^t \int_{|u| > 1} up'(ds, du)$$

où p' et q' sont les mesures aléatoires associées au p. p. p. (Y'_t), processus ponctuel associé à (Z_t).

En conclusion nous obtenons une bijection entre l'ensemble des p. p. p. de mesure de Lévy m possédant la propriété (M) et les P. A. I. nuls à l'origine de fonction caractéristique (35).

Remarques. — 1) Skorokhod [*18*] a défini les équations différentielles à partir des P. A. I. associés avec la mesure de Lévy $m(du) = \dfrac{du}{|u|^{d+1}}$.

2) Le P. A. I. canonique défini sur $(\Omega^0, \underline{\underline{F}}^0)$ sera appelé le P. A. I. canonique associé au p. p. p. (Y_t). Le p. p. p. qui lui correspond sur $(\Omega^0, \underline{\underline{F}}^0)$ sera le p. p. p. canonique.

3) Nous aurions pu prendre un autre partage de l'espace U pour définir les mesures p et q. Cela reviendrait essentiellement à changer le coefficient b.

§ 3. Équation différentielle stochastique (E) et problème des martingales

Cette section est consacrée à l'équivalence entre le problème des martingales et l'équation différentielle stochastique (E).

THÉORÈME II_9. — *Supposons qu'il existe une solution $\mathscr{X}$ à l'équation différentielle stochastique* (E) *avec condition initiale* $X_0 = x$, *où la matrice* $a = \sigma\sigma^*$, *le vecteur* b, *les intégrales*

$$\int_{\{|u| \leqslant 1\}} |f(x, u)|^2 m(du) \qquad \text{et} \qquad \int_{\{|u| > 1\}} |f(x, u)|\, m(du)$$

sont bornés sur tout compact de $\mathbf{R}^d$, *la mesure de Lévy* m *possède la propriété* (M), *alors il existe sur* $(\Omega^0, \underline{\underline{F}}^0)$ *une probabilité* P^x *solution au problème des martingales partant de* x *relativement au triplet* $(a, \bar{b}, S)$ *où pour tout* x

$$\bar{b}(x) = b(x) - \int_{|u| \leqslant 1, |f(x,u)| > 1} f(x, u) m(du) + \int_{|u| > 1, |f(x,u)| \leqslant 1} f(x, u) m(du) \tag{36}$$

et pour tout A *de* $\underline{\underline{U}}$

$$S(x, A) = \int_U 1_A(f(x, u)) m(du) \tag{37}$$

Démonstration. — Des hypothèses nous voyons que $\bar{b}$ est borné sur tout compact de $\mathbf{R}^d$ et S intègre $|u|^2 \wedge 1$ uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}^d$.

Appliquons la formule d'Ito à une fonction F de classe $\mathscr{C}^{2,b}$ alors :

$$F(X_t) - F(x) - \int_0^t ds\left\{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} D^iD^jF(X_s)a_{ij}(X_s)ds + \sum_{i=1}^{d} D^iF(X_s)b_i(X_s)\right\}$$

$$- \int_0^t ds\int_U \left\{ 1\!\!1_{(|u|\leqslant 1)}\left[F(X_{s^-} + f(X_{s^-}, u)) - F(X_{s^-}) - \sum_{i=1}^{d} D^iF(X_s)f_i(X_{s^-} + u)\right]\right.$$

$$\left. + 1\!\!1_{(|u|>1)}[F(X_{s^-} + f(X_{s^-}, u)) - F(X_{s^-})]\right\} m(du).$$

Nous en déduisons que :

$$H_t^F = F(X_t) - F(x) - \int_0^t LF(X_s)ds$$

est une P martingale locale.

Nous obtenons le résultat en se plaçant sur l'espace canonique et $P^x = X.P.$ ■

Grâce aux rappels II_{1c} nous obtenons une réciproque :

THÉORÈME II_{10}. — *Supposons qu'il existe une solution* P^x *au problème des martingales partant de* x *relativement au triplet* (a, b, S), *alors, pour toute matrice* σ, $d \times m$, *racine carrée de* a *et toute fonction* $n(x, u)$ *à valeurs dans* $\hat{U}$ *vérifiant* (31) *avec une mesure* m *σ-finie, diffuse possédant la propriété* (M), *il existe une solution à l'équation différentielle stochastique* (E) *avec condition initiale* $X_0 = x$ *relativement au triplet* $(\sigma, \hat{b}, n)$ *avec*

$$(36') \quad \hat{b}(x) = b(x) + \int_{|u|\leqslant 1, |n(x,u)|>1} n(x, u)m(du) - \int_{|u|>1, |n(x,u)|\leqslant 1} n(x, u)m(du)$$

Démonstration. — En vertu du théorème 12, la propriété (P) est vraie pour P^x et

$$M_t = X_t - x - \int_0^t b(X_s)ds - \sum_{s\leqslant t} \Delta X_s 1\!\!1_{(|\Delta X_s|>1)}$$

est une martingale locale vectorielle de processus croissant absolument continu par rapport au temps.

Si (Y_t) est le processus ponctuel associé à (X_t), alors les rappels II_{1c} nous permettent d'obtenir l'existence d'un espace de probabilité $(\hat{\Omega}, \underline{\hat{F}}, \underline{\underline{\hat{F}}}_t, \hat{P})$, d'un mouvement brownien m dimensionnel $(\hat{\beta}_t)$ nul à l'origine, d'un p. p. p. $(\hat{Y}_t)$ indépendant de mesure de Lévy m tel que $Y_t = n(X_{t^-}, \hat{Y}_t)$ et

$$M_t = \int_0^t \sigma(X_s)d\hat{\beta}_s + \int_0^t \int_{|n(X_{s^-}, u)|\leqslant 1} n(X_{s^-}, u)\hat{q}(ds, du).$$

Soit :

$$(38)\quad X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)d\hat{\beta}_s + \int_0^t b(X_s)ds$$
$$+ \int_0^t \int_{|n(X_{s^-},u)|\leq 1} n(X_{s^-}, u)\hat{q}(ds, du) + \int_0^t \int_{|n(X_{s^-},u)|>1} n(X_{s^-}, u)\hat{p}(ds, du)$$

d'où le résultat grâce à la propriété (M). ■

Remarque. — Par simple changement de b, (38) est identique à (34). Le choix de la forme (34) pour expression de l'équation différentielle stochastique est justifiée par l'étude du cas lipschitzien (chap. III).

Les théorèmes précédents entraînent facilement le corollaire suivant :

COROLLAIRE II_{10}. — *L'unicité en loi de l'équation différentielle stochastique* (E) *entraîne celle du problème des martingales correspondant. Inversement l'unicité au problème des martingales entraîne l'unicité en loi de toutes les équations différentielles stochastiques correspondantes* (*c'est-à-dire pour tout couple* (n, m) *vérifiant les hypothèses du théorème* II_9).

Remarque. — Dans le cas lipschitzien nous obtenons l'unicité trajectorielle, d'où l'intérêt de montrer que celle-ci entraîne l'unicité en loi, ce qui fait l'objet du paragraphe suivant.

Pour terminer énonçons la propriété de Markov fort dont la démonstration à l'aide du théorème I_{19} est identique au cas continu [*19*].

THÉORÈME II_{12}. — *L'existence et l'unicité au problème des martingales entraîne que le processus* (X_t) *est fortement markovien par rapport à la famille* $\underline{\underline{F}}_t$ (remarque I_4).

§ 4. Unicité trajectorielle et unicité en loi

Nous allons généraliser un résultat de Yamada-Watanabe [*22*] [*17*].

THÉORÈME II_{13}. — *Pour l'équation différentielle stochastique* (E) *l'unicité trajectorielle entraîne l'unicité en loi.*

Démonstration. — Considérons l'espace canonique ($\bar{\Omega} = W \times \Omega^0 \times \Omega^0$, $\bar{\mathscr{B}} = \mathscr{B}(W) \otimes \underline{\underline{F}}^0 \otimes \underline{\underline{F}}^0$) où $(W, \mathscr{B}(w))$ est l'espace $\mathscr{C}(R^+, R^m)$ muni de la topologie de la convergence uniforme. Un point de $\bar{\Omega} = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$ sera noté $\bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, de plus $\tilde{\Omega} = W \times \Omega^0 = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\tilde{\mathscr{B}} = \mathscr{B}(W) \otimes \underline{\underline{F}}^0$ et $\tilde{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$. A l'aide du théorème A_2 nous voyons que l'espace $(\bar{\Omega}, \bar{\mathscr{B}})$ a une structure d'espace polonais et $\bar{\mathscr{B}} = \sigma(W_1(t), W_2(t), W_3(t), t < \infty)$ (où W_t sont les applications coordonnées).

Considérons une solution $\mathscr{X} = (B, Z, X)$ à l'équation (E) sur l'espace de probabilité $(\Omega, F, \underline{\underline{F}}_t)$ partant de x.

Si nous notons par R la loi du brownien (B_t) et P_m celle du P. A. I. (Z_t), la loi du couple sur $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{B}})$ est

$$\tilde{Q}(d\tilde{\omega}) = R(d\omega_1).P_m(d\omega_2)$$

grâce à l'indépendance des processus $(B_t)_{t\geqslant 0}$ et $(Z_t)_{t\geqslant 0}$.

Notons par $\bar{Q}(d\bar{\omega})$ la loi du processus $(B_t, Z_t, X_t)_{t\geqslant 0}$ sur $(\bar{\Omega}, \bar{\mathscr{B}})$. Grâce à la propriété d'espace polonais de $\bar{\Omega}$, nous pouvons écrire :

$$\bar{Q}(d\omega_1, d\omega_2, d\omega_3) = \bar{Q}(\omega_1, \omega_2 ; d\omega_3)\tilde{Q}(d\omega_1, d\omega_2)$$

où $\bar{Q}(\omega_1, \omega_2 ; d\omega_3)$ est une version régulière de la probabilité conditionnelle $\bar{Q}(./\tilde{\mathscr{B}})$.

Posons $\mathscr{B}_t^3 = \sigma(W_3(s), s \leqslant t) = \underline{\underline{F}}_t^0$, $\tilde{\mathscr{B}}_t = \sigma(W_1(s), W_2(s), s \leqslant t)$, alors, si B est un élément de $\mathscr{B}_t^3$, $\bar{Q}(. ; B)$ est une fonction en $\tilde{\omega}$ égale à $\tilde{Q}_{\text{p.-s.}}$ à une fonction $\tilde{\mathscr{B}}_t$ mesurable. Ce résultat se démontre d'une manière analogue au cas continu [17] sachant que le processus $(B_t, Z_t)_{t\geqslant 0}$ est un P. A. I.

Considérons une seconde solution $\mathscr{X}' = (B', Z', X')$ sur l'espace de probabilité $(\Omega', \underline{\underline{F}}', (\underline{\underline{F}}_t')_{t\geqslant 0})$ où les P. A. I. $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ et $(Z_t')_{t\geqslant 0}$ ont même fonction caractéristique et définissons $\bar{Q}'(\omega_1, \omega_2 ; d\omega)$ comme précédemment. Sur l'espace de probabilité

$$(\hat{\Omega}, \hat{\mathscr{B}}) = (W \times \Omega^0 \times \Omega^0 \times \Omega^0, \mathscr{B}(W) \otimes \underline{\underline{F}}^0 \otimes \underline{\underline{F}}^0 \otimes \underline{\underline{F}}^0)$$

posons

$$\hat{Q}(d\omega_1, d\omega_2, d\omega_3, d\omega_4) = \bar{Q}(\omega_1, \omega_2 ; d\omega_3)\bar{Q}'(\omega_1, \omega_2 ; d\omega_4)\tilde{Q}(d\omega_1, d\omega_2)$$

où $\tilde{Q}(d\omega_1, d\omega_2)$ est la loi des processus (B_t, Z_t), (B_t', Z_t').

Les projections sur Ω_1 et Ω_2, $\hat{W}_1(t)$ et $\hat{W}_2(t)$ satisfont aux conditions *b*) et *c*) de la définition II_6 où $\hat{\mathscr{B}}_t = \sigma(\hat{W}(s), s \leqslant t)$.

En effet :

$$\hat{Q}[\hat{W}_1(o) = 0, \hat{W}_2(o) = 0] = \tilde{Q}[W_1(o) = 0, W_2(o) = 0] = 1$$

$$E_{\hat{Q}}[e^{i(\langle Z_1, \hat{W}_1(t)\rangle + \langle Z_2, \hat{W}_2(t)\rangle)}] = E_R[e^{i\langle Z_1, W_1(t)\rangle}]E_{P_m}[e^{i\langle Z_2, W_2(t)\rangle}]$$

et grâce à la propriété : $\bar{Q}(\tilde{\omega} ; B_3)\,(\bar{Q}'(\tilde{\omega}, B_4))$ est p.-s. $\tilde{B}_t$ mesurable pour tout élément $B_3(B_4)$ de $\mathscr{B}_t^3 = \sigma(\hat{W}_3(s), s \leqslant t)\,(\mathscr{B}_t^4)$, nous en déduisons facilement que le processus $(\hat{W}_1(t), \hat{W}_2(t))_{t\geqslant 0}$ est un P. A. I.

$(X_t)_{t\geqslant 0}$ et $(X_t')_{t\geqslant 0}$ sont toutes deux solutions avec même condition initiale $\hat{X}_3(o) = \hat{W}_4(o) = x$ sur le même espace $(\hat{\Omega}, \hat{\mathscr{B}}, (\hat{\mathscr{B}}_t)_{t\geqslant 0}, \hat{Q})$ avec le même brownien $(\hat{W}_1(t)_{t\geqslant 0})$ et le même P. A. I. $(\hat{W}_2(t)_{t\geqslant 0})$. Alors l'hypothèse d'unicité trajectorielle entraîne que $\hat{W}_3(t) = \hat{W}_4(t)$ $\hat{Q}_{\text{p.-s.}}$ pour tout t. Soit encore $\hat{Q}[\hat{W}_3 = \hat{W}_4] = 1$, d'où $\bar{Q}_{\tilde{\omega}} = \bar{Q}'_{\tilde{\omega}}[\hat{W}_3 = \hat{W}_4] = 1$ et l'existence d'une fonction de $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{B}}_t)$ dans $(\Omega^0, \underline{\underline{F}}_t^0)$ pour tout t telle que $\hat{W}_3 = \hat{W}_4 = F(\hat{W}_1, \hat{W}_2).\hat{Q}_{\text{p.-s.}}$. L'unicité en loi suit. ■

L'existence de la fonction F nous permet d'énoncer le corollaire important suivant :

COROLLAIRE II_{13}. — *S'il y a unicité trajectorielle, alors l'équation différentielle stochastique* (E) *admet une solution quels que soient l'espace de probabilité, le mouvement brownien et le p. p. p. considérés. De plus cette solution est mesurable par rapport à la tribu engendrée par le mouvement brownien et le p. p. p.*

III. APPLICATIONS A L'EXISTENCE ET L'UNICITÉ D'UNE SOLUTION AU PROBLÈME DES MARTINGALES

Dans cette partie nous utiliserons l'équivalence entre le problème des martingales et les équations différentielles stochastiques (E) pour obtenir un résultat d'existence et d'unicité dans le cas localement lipschitzien, et d'existence dans le cas borélien borné.

A. CAS LOCALEMENT LIPSCHITZIEN

Nous suivrons la méthode de Skorokhod [*18*] pour établir l'existence et l'unicité trajectorielle à l'équation différentielle stochastique (E). Nous supposerons donner les propriétés *a*), *b*), *c*) de la définition II_6.

Bien que la démonstration soit proche de celle de Skorokhod il nous a paru intéressant de préciser les hypothèses et d'éclaircir certains points obscurs car nous étudions des processus c. a. d. l. a. g. Malgré tout, nous ne donnerons qu'un aperçu des démonstrations ; de plus nous obtiendrons une version mesurable et une version « cadcontinue » de la solution.

§ 1. **Équation différentielle stochastique** (E′)

Nous allons d'abord étudier une équation différentielle stochastique particulière :

DÉFINITION III_1. — *Etant données les trois applications boréliennes suivantes* σ *de* R^d *dans* $\mathrm{R}^d \times \mathrm{R}^m$, b *de* R^d *dans* R^d *et* F *de* $\mathrm{R}^d \times \mathrm{U}$ *dans* R^d *nous appellerons solution de l'équation différentielle stochastique* (E′)

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt + \int_{\mathrm{U}} F(X_{t^-}, u)q(dt, du), \qquad t \geqslant 0$$

de condition initiale $X_s = x$, x *de* R^d *et* $s \geqslant 0$, *une fonction aléatoire de*

$[s, +\infty[\, \times \Omega$ *dans* $\mathbf{R}^d$, *c. a. d. l. a. g.*, $\underline{\underline{F}}_t$ *adaptée telle que pour tout* $t \geqslant s$, $P_{\text{p.-s.}}$ *les intégrales*

$$\int_s^t \| \sigma(X_v) \|^2 dv, \qquad \int_s^t | b(X_s) | ds, \qquad \int_s^t dv \int_U | F(X_{v^-}, u) |^2 m(du)$$

soient finies et

$$X_t = x + \int_s^t \sigma(X_v) dB_v + \int_s^t b(X_v) dv + \int_s^t \int_U F(X_{v^-}, u) q(dv, du) \tag{38}$$

Cette solution est unique si pour tout $t \geqslant s$, $X_t = X'_t \; P_{\text{p.-s.}}$.

Remarque. — $F(X_{t^-}, u)$ est $\mathscr{P} \otimes \underline{\underline{U}}$ mesurable et vues les hypothèses l'intégrale stochastique par rapport à la mesure aléatoire q est bien définie.

Nous obtenons un premier résultat d'existence et d'unicité.

PROPOSITION III$_2$. — *Si les applications* σ, b, F *vérifient les conditions :*

(L_1) *il existe une constante* K *telle que pour tout* x *de* $\mathbf{R}^d$

$$\sum_{k=1}^m | \sigma_k(x) |^2 + | b(x) |^2 + \int_U | F(x, u) |^2 m(du) \leqslant K(1 + | x |^2)$$

(L_2) *il existe une constante* L *telle que pour tout* x, y *de* $\mathbf{R}^d$

$$\sum_{k=1}^m | \sigma_k(x) - \sigma_k(y) |^2 + | b(x) - b(y) |^2 + \int_U | F(x, u) - F(y, u) |^2 m(du) \leqslant L | x - y |^2,$$

alors pour tout $s \geqslant 0$ *et toute variable aléatoire* $\eta \underline{\underline{F}}_s$ *mesurable et de carré intégrable l'équation différentielle stochastique* (E') *admet une et unique solution* $X^s_\eta(t)$, $t \geqslant s$, *avec condition initiale* $X_s = \eta$.

De plus pour tout $T \geqslant s$ *il existe une constante* K_T *telle que pour tout* $s \leqslant t \leqslant T$:

$$E[| X_t |^2] \leqslant (m + 3) \{ E[| \eta |^2] + TK_T \} e^{(m+3)TK_T} \tag{39}$$

$$E\Big[\sup_{s \leqslant t \leqslant T} | X_t |^2 \Big] \leqslant 4(m + 3) \{ E[| \eta |^2] + TK_T \} \{ 1 + TK_T (m + 3) e^{(m+3)TK_T} \} \tag{40}$$

Enfin il existe pour tout s *une fonction aléatoire mesurable* $\phi_s(x, t, \omega)$ *telle que :*

$$\phi_s(x, t) = X^s_x(t) \qquad P_{\text{p.-s.}}$$

et si η est une variable aléatoire $\underline{\underline{F}}_s$ mesurable de carré intégrable

$$\phi_s(\eta, t) = X_\eta^s(t) \qquad P_{\text{p.-s.}} \tag{41}$$

Démonstration. — Appelons $\Sigma_T^s(\eta)$ l'espace de Banach des processus c. a. d. l. a. g. d-dimensionnels, $(X_t)_{s \leqslant t \leqslant T}$, $\underline{\underline{F}}_t$ adaptés avec condition initiale $X_s = \eta$, où η est une variable aléatoire de carré intégrable $\underline{\underline{F}}_s$ mesurable, muni de la norme $\| X \|_T^s = E [\sup_{s \leqslant t \leqslant T} [X_t]^2]^{1/2}$. Alors posons :

$$SX_t = \eta + \int_s^t \sigma(X_v) dBv + \int_s^t b(X_v) dv + \int_s^t \int_U F(X_{v^-}, u) q(dv, du)$$

La propriété (L_1) entraîne que S est un opérateur sur $\Sigma_T^s(\eta)$, la propriété (L_2) qu'il existe un n tel que S^n soit une contraction. Nous en déduisons aisément l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation différentielle stochastique (E′) avec condition initiale $X_s = \eta$.

Par un calcul élémentaire (L_1) entraîne les inégalités (39) et (40).

L'existence d'une version mesurable et l'égalité (41) suivent alors avec une démonstration en tout point identique à celle de Dynkin dans le cas des diffusions [*4*]. ■

Nous allons étendre ce résultat au cas où η est $P_{\text{p.-s.}}$ finie et les coefficients localement lipschitziens.

THÉORÈME III$_3$. — *Si les applications σ, b et* F *satisfont aux propriétés* (L_1) *et* (L_2') : (L_2') *pour tout entier* N *il existe une constante* M_N *telle que pour tout x, y de la boule* $\{ | x | \leqslant N \}$

$$\sum_{k=1}^{m} | \sigma(x) - \sigma(y) |^2 + | b(x) - b(y) |^2 + \int_U | F(x, u) - F(y, u) |^2 m(du) \leqslant M_N | x - y |^2,$$

pour tout $s \geqslant 0$ et pour toute variable aléatoire $\eta \underline{\underline{F}}_s$ mesurable p.-s.-finie, l'équation différentielle stochastique (E′) *admet une unique solution partant de η en s, $X_\eta^s(t)$, qui satisfait les inégalités* (39) *et* (40) *si η est de carré intégrable.*

De plus il existe une fonction aléatoire mesurable $\phi_s(x, t, \omega)$ telle que $X_\eta^s(t) = \phi_s(\eta, t)$ $P_{\text{p.-s.}}$.

Démonstration. — Considérons les applications $\psi_{p,p>1}$, boréliennes de R^d dans R telles que

$$\psi_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } | x | \leqslant p \\ p + 1 - | x | & \text{pour } p \leqslant | x | \leqslant p + 1 \\ 0 & \text{pour } | x | \geqslant p + 1 \end{cases}$$

et notons par $a^{(p)}(x) : \psi_p(x) a(x)$.

Les propriétés (L_1) et (L_2') entraînent que les triplets $(\sigma^{(p)}, b^{(p)}, F^{(p)})$ satisfont les conditions (L_1) et (L_2). Nous pouvons appliquer la proposition précédente. Prenons les versions mesurables, posons

$$X_{s,\eta}^{(p)}(t) = \phi_s^{(p)}(\eta \mathbb{1}_{\{|\eta| \leqslant p\}}, t)$$

et considérons la suite de temps d'arrêt :

$$T_p = \inf \{ t > s \mid |X_{s,\eta}^{(p)}(t)| > p \}, \qquad + \infty \text{ si vide.}$$

Il est facile de voir que sur $\{ t < T_p \}$ $X_{s,\eta}^{(p)}(t)$ est solution de l'équation différentielle stochastique (E') relativement aux triplets (σ, b, F) avec condition initiale $X_s = \eta$.

L'existence suit, car à l'aide des inégalités (39) et (40), nous pouvons montrer que la suite de temps d'arrêt $(T_p)_{p \geqslant 1}$ croît vers l'∞ avec p. Il est évident que nous avons obtenu une version mesurable. ■

L'unicité suit facilement de la proposition précédente.

§ 2. Problème des martingales : cas localement lipschitzien

Nous allons d'abord établir l'existence et l'unicité trajectorielle de l'équation différentielle stochastique (E).

THÉORÈME III_4. — *Si les applications σ, b et f satisfont aux conditions suivantes :*

(E_1) : *il existe une constante K telle que pour tout x de R^d*

$$\sum_{k=1}^{m} |\sigma_k(x)|^2 + |b(x)|^2 + \int_{\{|u| \leqslant 1\}} |f(x, u)|^2 m(du) \leqslant K(1 + |x|^2)$$

(E_2) : *pour tout entier p il existe une constante L_p telle que pour tout x et y de la boule $\{ |x| \leqslant p \}$*

$$\sum_{k=1}^{m} |\sigma_k(x) - \sigma_k(y)|^2 + |b(x) - b(y)|^2 + \int_{\{|u| \leqslant 1\}} |f(x, u) - f(y, u)|^2 m(du) \leqslant L_p(|x - y|^2)$$

(E_3) : *soit pour tout x de R^d, tout u appartenant à $U_1 = \{ |u| > 1 \}$ $|f(x, u)| < \infty$, ou, soit : pour tout entier p il existe une constante M_p telle que*

$$\sup_{\{|x| \leqslant p\}} \int_{\{|u| > 1\}} |f(x, u)| m(du) \leqslant M_p$$

alors l'équation différentielle stochastique (E) *admet pour tout* x *de* $\mathbf{R}^d$ *une unique solution* X_t, $t \geqslant 0$, *c. a. d. l. a. g. adaptée avec la condition initiale* $X_0 = x$. *De plus il existe une fonction aléatoire mesurable* $\phi(t, x, \omega)$ *telle que* $X(t) = \phi(t, x)$ *pour tout* t $P_{\text{p.-s.}}$.

Démonstration. — Comme dans la remarque II_2 considérons la suite croissant vers l'∞ des temps d'arrêt $T_n = \inf\{ t > T_{n-1} \mid |Y_t| > 1 \}$, $+\infty$ si vide. Par définition de la mesure aléatoire nous avons grâce à la propriété (E_3) :

$$(42) \qquad \int_0^t \int_{|u|>1} f(x_{s-}, u)p(ds, du) = \sum_n f(X_{T_{n-1}}, Y_{T_n}) \mathbb{1}_{(T_n \leqslant t)} < \infty$$

Il suffit de montrer l'existence et l'unicité trajectorielle pour T donné.

Sur l'ensemble $\{ T < T_1 \}$ l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') relativement au triplet $(\sigma, b, F(x, u) = f(x, u) \mathbb{1}_{(|u| \leqslant 1)})$. Par suite l'équivalence des conditions (E_1), (E_2) et (L_1), (L'_2) entraîne l'existence d'une unique solution mesurable à (E') $\phi_0^1(x, t)$. Par suite $\phi_0^1(x, t)$, $t \leqslant T$, est l'unique solution à l'équation (E) sur $\{ T < T_1 \}$.

Plaçons-nous maintenant sur $\{ T \geqslant T_1 \}$. Nous voyons d'après (42) que $\phi(x, T_1) = \eta_1 = \phi_0^1(x, T_1) + f(\phi_0^1(x, T_1), Y_{T_1})$. De plus, grâce aux conditions (E_1), (E_2), (E_3) et par un raisonnement semblable à celui de la fin du théorème III_3 $|\phi(x, T_1)|$ est $P_{\text{p.-s.}}$ fini.

Sur l'ensemble $\{ (t, \omega) \mid 0 \leqslant t < T_2(\omega) - T_1(\omega) \}$ il est facile de voir que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') définie sur l'espace $(\Omega, \underline{\underline{F}}, (F_{T_1+t}), P)$ par rapport au brownien $(B_{t+T} - B_T)_{t\geqslant 0}$ et au p. p. p. $(Y_{T_1+t})_{t\geqslant 0}$ relativement au triplet $(\sigma, b, F(x, u) = f(x, u) \mathbb{1}_{(|u| \leqslant 1)})$ avec condition initiale $X_0 = \eta_1(x)$. Soit $\phi_0^2(\eta_1(x), t)$ la solution mesurable. Alors en définissant $\eta_2(x)$ comme précédemment et continuant de proche en proche, nous obtenons l'existence et l'unicité trajectorielle d'une solution à l'équation (E), dont la version mesurable s'écrit :

$$(43) \quad \phi_s(x, t) = \phi_s^1(x, t) \mathbb{1}_{(T_1 > t)} + \sum_{n=2}^{\infty} \phi_0^n(\eta_{n-1}(x), t) \mathbb{1}_{(T_{n-1} \leqslant t < T_n)} . \qquad \blacksquare$$

Remarques. — Il y a unicité en loi d'après le théorème II_{12}.

Le résultat d'existence et d'unicité est valable sur tout espace de probabilité pour tout mouvement brownien et tout p. p. p. telle que sa mesure de Lévy m vérifie les conditions du théorème.

La mesurabilité de la solution nous permettrait de montrer la propriété de Markov.

Une démonstration identique à la précédente nous permettrait d'avoir le corollaire suivant :

COROLLAIRE III$_5$. — *Si σ et b satisfont aux conditions* (E_1) *et* (E_2) *et si f vérifie : pour un $\varepsilon > 0$ $|f(x, u)| = |f(x, u)| 1\!\!1_{(|u|>\varepsilon)}$ et pour tout entier p il existe une constante M_p telle que :*

$$\sup_{\{|x|\leqslant p\}} \int_{\{|u|>\varepsilon\}} |f(x, u)|\, m(du) \leqslant M_p \tag{44}$$

alors pour tout x il existe une unique solution partant de x à l'équation différentielle stochastique particulière :

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt + \int_{\{\varepsilon<|u|\}} f(X_{s^-}, u)\,p(ds, du)$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat relatif au problème des martingales :

THÉORÈME III$_6$. — *Supposons que le triplet (a, b, S) satisfasse aux conditions supplémentaires suivantes :*

— *a est de classe $\mathscr{C}^2$, $b = b_1 + b_2$ où b_2 est de classe $V(a)$,*

— *il existe une application n de $R^d \times U$ dans U telle que pour tout A de $\underline{\underline{U}}$, x de R^d :*

$$S(x, A) = \int_U 1\!\!1_A(n(x, u))m(du)$$

et si nous posons

$$\hat{b}(x) = b_1(x) + \int_{|u|\leqslant 1,|n(x,u)|>1} n(x, u)m(du) - \int_{|u|>1,|n(x,u)|\leqslant 1} n(x, u)m(du)$$

$\hat{b}$ et $1\!\!1_{\{|u|\leqslant 1\}}n(., u)$ satisfont aux conditions (E_1) *et* (E_2), *alors pour tout x il existe une unique solution au problème des martingales partant de x relativement au triplet (a, b, S). $(\Omega^0, \underline{\underline{F}}, (\underline{\underline{F}}_t), P^x, (X_t)_{t\geqslant 0})$ est de plus un processus de Markov fort.*

Démonstration. — D'après le théorème 26 il suffit de montrer l'existence et l'unicité pour le triplet (a, b_1, S). D'après les théorèmes II$_9$, II$_{11}$ et II$_{12}$ il suffit en fait de montrer que le triplet $(\sigma, \hat{b}, n)$ où $a = \sigma\sigma^*$ vérifie les conditions (E_1), (E_2) et (E_3).

(E_1) et (E_2) sont vraies grâce aux hypothèses par application d'un résultat de Freidlin [6]. La seconde propriété (E_3) se vérifie facilement car S intègre $|u| 1\!\!1_{(|u|>1)}$ uniformément sur tout compact. ■

REMARQUE III$_7$. — Du corollaire III$_4$ nous obtenons l'existence et l'unicité au problème des martingales si a est de classe $\mathscr{C}^2$ et est non dégénérée, b un vecteur quelconque et le noyau S est de la forme

$$S(x, A) = \int_U \mathbb{1}_A(n(x, u))m(du)$$

avec $|n(x, u)| = |n(x, u)| \mathbb{1}_{\{|u| > \varepsilon\}}$ pour un certain ε positif.

Nous allons maintenant généraliser la propriété de bicontinuité établie dans le cas des diffusions [*17*].

§ 3. **Cadcontinuité**

DÉFINITION III_8. — *Nous dirons qu'une fonction $a(t, x)$ à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ définie sur $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d$ est cadcontinue si pour tout couple $(t, x) a(s, y)$ converge dans $\mathbf{R}^d$ vers $a(t, x)$ lorsque s décroît vers t et y tend vers x.*

Nous aurons besoin du résultat suivant qui généralise le lemme 13 de [*17*].

LEMME III_9. — *Considérons une fonction aléatoire $Z_{t,x}$, $t \geqslant 0$, $x \in \mathbf{R}^d$ telle que pour chaque x elle soit $P_{\text{p.-s.}}$ continue à droite en t et pour tout x, y éléments de la boule $B_k = \{ |x| \leqslant k \}$ il existe une suite croissante de temps d'arrêt $(T_p^{x,y,k})$ tendant $P_{\text{p.-s.}}$ vers l'∞ avec p, un $\alpha > 0$, une constante A ne dépendant que de k, p, t et α et un $\varepsilon > 0$ pour lesquels*

$$\text{(45)} \qquad E\Big[\sup_{s \leqslant t \wedge T_p^{x,y,k}} |Z_{s,x} - Z_{s,y}|^\alpha \Big] \leqslant A |x - y|^{d+\varepsilon}$$

alors il existe une fonction aléatoire $Z^*_{t,x}$ $P_{\text{p.-s.}}$ cadcontinue telle que pour tout x $Z_{t,x} = Z^*_{t,x}$ $P_{\text{p.-s.}}$ pour tout t.

Démonstration. — Notons par D_q l'ensemble des points de $\mathbf{R}^d$ dont les coordonnées sont de la forme $\frac{k}{2^q}$, k de Z. Nous dirons qu'un point y de D_q est voisin de x de $\mathbf{R}^d$ si pour tout $i = 1, \ldots, d$ $|x_i - y_i| \leqslant 2^{-q}$. Considérons la suite de temps d'arrêt croissant vers l'∞ $P_{\text{p.-s.}}$ avec p :

$$T_p^k = \inf_{\substack{(x,y) \in B_k \times B_k \\ x,y \in Q^d}} T_p^{k,x,y}$$

et posons

$$U_{t,q}^{k,p} = \sup_{s \leqslant t \wedge T_p^k} \ \sup_{\substack{y,y' \in D_q \text{ voisins} \\ |y_i| \leqslant q, |y'_i| \leqslant q \\ y,y' \in B_k}} |Z_{s,y} - Z_{s,y'}|$$

Comme dans [*17*] grâce à l'inégalité (45) nous obtenons que $\sum_q U_{t,q}^{k,p}$ converge $P_{\text{p.-s.}}$.

Notons par D_q^x l'ensemble des points voisins de x éléments de D_q, alors, si $(a_y)_{y\in D_q}$ est une suite de masses affectées aux points de D_q, posons :

$$\Phi^p[(a_y)\,;\,x] = \sum_{y\in D_q^x} \frac{\prod_{i=1}^{d}(2^{-q} - |x_i - y_i|)}{\sum_{y\in D_q^x}\prod_{i=1}^{d}(2^{-q} - |x_i - y_i|)} \cdot a_y \,.$$

Il est évident que $Z_{t,x}^p = \Phi^p[(Z_{t,y})_{y\in D_q}\,;\,x]$ est une fonction $P_{\text{p.-s.}}$ cadcontinue qui vaut $Z_{t,x}$ pour x appartenant à D_q, de plus par construction :

$$|Z_{t,x}^{q+1} - Z_{t,x}^q| \leqslant \sup_{\substack{y\in D_{q+1}^x \\ y'\in D_q^x}} |Z_{t,y} - Z_{t,y'}| \,.$$

Cette inégalité entraîne que pour tout x de B_k avec $|x_i| \leqslant q$ pour tout $i = 1, \ldots, d$

$$\sup_{s\leqslant t\wedge T_p^{k+1}} |Z_{s,x}^{q+1} - Z_{s,x}^q| \leqslant 2U_{t,q+1}^{k+1,p} \,.$$

Nous en déduisons que la suite $(Z_{s,x}^q)_{q\geqslant 1}$ converge $P_{\text{p.-s.}}$ uniformément sur $[0, t] \times B_k$ pour tout t positif et tout entier k.

Posons $Z_{t,x}^* = \overline{\lim_q}\, Z_{t,x}^q$, $Z_{t,x}^*$ est $P_{\text{p.-s.}}$ cadcontinue et de (45) pour tout x et tout t $Z_{t,x}^* = Z_{t,x}$ $P_{\text{p.-s.}}$. De la continuité à droite nous pouvons conclure. ■

A l'aide du lemme précédent nous obtiendrons l'existence d'une version cadcontinue pour une solution de l'équation (E'). Pour établir l'inégalité (45) nous utiliserons le résultat intermédiaire suivant.

LEMME III_{10}. — *Considérons les applications σ de $(R_+ \times \Omega, \mathscr{B}_{R_+} \otimes \underline{\underline{F}})$ dans $(R^{d\times m}, \mathscr{B}_{R^{d\times m}})$, b de $(R_+ \times \Omega, \mathscr{B}_{R_+} \otimes \underline{\underline{F}})$ dans $(R^d, \mathscr{B}_{R^d})$ et f de $(R_+ \times \Omega \times U, \mathscr{P} \otimes \underline{\underline{U}})$ dans $(R^d, \mathscr{B}_{R^d})$ telles que $P_{\text{p.-s.}}$ pour tout t les trois intégrales $\int_0^t \|\sigma_s\|^2 ds$, $\int_0^t |b_s|\, ds$ et $\int_0^t ds \int_U |f(s, u)|^2 m(du)$ soient finies, alors pour tout $s \geqslant 0$ et toute variable aléatoire η $P_{\text{p.-s.}}$ finie $\underline{\underline{F}}_s$ mesurable la semi-martingale locale définie pour tout $t \geqslant s$ par :*

$$X_t = \eta + \int_s^t \sigma_v dB_v + \int_s^t b_v dv + \int_s^t \int_U f(v, u) q(dv, du)$$

possède la propriété suivante, il existe une suite de temps d'arrêt T_p, $p \geqslant 1$, minorée et croissant vers l'∞ avec p $P_{\text{p.-s.}}$ et pour tout $t \geqslant s$, tout $p \geqslant 2$ une constante $C_{t,p}$ positive telles que :

$$(46)\quad E[\sup_{s \leqslant v \leqslant t \wedge T_q} |X_v|^p] \leqslant C_{t,p}\Big[E[|\eta|^p] + E\Big[\int_s^{t \wedge T_q} dv \Big\{ |b_v|\,|X_v|^{p-1} + |b_v|^p + \|\sigma_v\|^2 |X_v|^{p-2} + |X_v|^{p-2}\int_U |f(v,u)|^2 m(du) + \int_U |f(v,u)|^p m(du) \Big\}\Big]\Big]$$

Démonstration. — Appliquons la formule d'Ito à la fonction $F(x) = |x|^p$, alors

$$N_t = |X_t|^p - |\eta|^p - p\sum_{i=1}^{d} \int_s^t \Big\{ X_v^i |X_v|^{p-2} b_v^i + \frac{1}{2}|X_v|^{p-2}\sum_{i=1}^{m} |\sigma_v^{i,k}|^2 \Big\} dv$$
$$- \frac{p(p-2)}{2}\int_s^t X_v^i X_v^j |X_v|^{p-4}\Big(\sum_{k=1}^{m} \sigma_v^{i,k}\sigma_v^{j,k}\Big) dv$$
$$- \int_s^t dv \int_U \Big\{ |X_{v^-} + f^i(v,u)|^p - |X_{v^-}|^p - \sum_{i=1}^{n} pX_{v^-}^i |X_{v^-}|^{p-2} f^i(v,u) \Big\} m(du)$$

est une martingale locale, localement de carré intégrable. Considérons une suite de temps d'arrêt $(T_q)_{q \geqslant 1}$ croissant vers l'∞ avec q $P_{\text{p.-s.}}$ minorée par s et réduisant fortement la martingale locale précédente ainsi que :

$$M_t = \int_s^t \sigma_v dB_v + \int_s^t \int_U f(v,u) q(dv, du)$$

Fixons q et posons $T = T_q$. Appliquant l'inégalité de Hölder à l'aide d'un calcul élémentaire, nous avons :

$$(47)\quad E[\sup_{s \leqslant v \leqslant t \wedge T} |X_v|^p]$$
$$\leqslant 3^{p-1}\Big(1 + 3^{p-1}\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p\Big)\Big\{ E[|\eta|^p] + t^{p-1}E\Big[\int_s^{t \wedge T} |b_v|^p dv\Big]\Big\}$$
$$+ 3^{2(p-1)}\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p E[|X_{t \wedge T}|^p]$$

D'autre part de l'expression de N_t nous obtenons que :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\,|X_{t\wedge T}|^p] &= \mathrm{E}[\,|\eta|^p] + p\mathrm{E}\left[\int_s^{t\wedge T} |X_v|^{p-2}\left(\sum_{i=1}^{d} X_v^i b_v^i\right)dv\right] \\
&+ \frac{p}{2}\mathrm{E}\left[\int_s^{t\wedge T} |X_v|^{p-4}\right. \\
&\left.\left\{(p-2)\sum_{i,j=1}^{d} X_v^i X_v^j\left(\sum_{k=1}^{m}\sigma_v^{i,k}\sigma_v^{j,k}\right) + |X_v|^2\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{m}|\sigma_v^{i,k}|^2\right\}dv\right] \\
&+ \mathrm{E}\left[\int_s^{t\wedge T} dv\int_{\mathrm{U}}\left\{|X_{v^-} + f(v,u)|^p - |X_{v^-}|^p\right.\right. \\
&\left.\left.- \sum_{i=1}^{d} pX_{v^-}^i\,|X_{v^-}|^{p-2}f^i(v,u)\right\}m(du)\right] = \mathrm{I}_0 + \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3
\end{aligned}
$$

Alors nous obtenons, avec de plus l'aide de la formule des accroissements finis pour I_3, les majorations suivantes :

$$
\mathrm{I}_1 \leqslant pd^{\frac{1}{2}}\mathrm{E}\left[\int_s^{t\wedge T}|X_v|^{p-1}\,|b_v|\,dv\right] \tag{48}
$$

$$
\mathrm{I}_2 \leqslant d\,\frac{p(p-1)}{2}\,\mathrm{E}\left[\int_s^{t\wedge T}|X_v|^{p-2}\,\|\sigma_v\|^2 dv\right] \tag{49}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_3 \leqslant dp(p-1)2^{p-3}\mathrm{E}\Bigg[\int_s^{t\wedge T} dv\Bigg\{\int_{\mathrm{U}} &|f(v,u)|^p m(du) \\
&+ |X_v|^{p-2}\int_{\mathrm{U}}|f(v,u)|^2 m(du)\Bigg\}\Bigg]
\end{aligned} \tag{50}
$$

Nous déduisons la propriété (46) des inégalités (47), (48), (49) et (50). ■

Remarque. — Les constantes $C_{t,p}$ étant indépendantes de la suite de temps d'arrêt l'inégalité (46) peut être écrite sans temps d'arrêt.

PROPOSITION III_{11}. — *Sous les hypothèses du théorème III_3 et si de plus la condition* (L_3) *est satisfaite :*

(L_3) *pour un certain $p > d$, pour tout $n \geqslant 1$ il existe une constante N_n telle que pour tout x, y de B_n*

$$
\int_{\mathrm{U}} |\mathrm{F}(x,u) - \mathrm{F}(y,u)|^p m(du) \leqslant \mathrm{N}_n\,|x-y|^p
$$

alors pour tout $s \geqslant 0$ *la solution à l'équation différentielle stochastique* (E'), $X_x^s(t)$, $t \geqslant s$, *admet une version cadcontinue* $\psi_s(t, x)$.

Démonstration. — Fixons k, et soient deux éléments x et y de B_k. Appliquons le lemme précédent à la semi-martingale locale $X_x^s(t) - X_y^s(t)$. La suite de temps d'arrêt T_q, qui dépend de x et y, peut être choisie telle que $X_x^s(t)$ et $X_y^s(t)$ soient bornées par un entier η_q sur $[0, T_q[$. Alors de l'inégalité (46) à l'aide des propriétés (L_2') et (L_3) nous obtenons facilement la majoration

$$\begin{aligned} E\Big[\sup_{s\leqslant v\leqslant t\wedge T_q} |X_x^s(v) - X_y^s(v)|^p\Big] \leqslant C_{t,p}\Big\{ |x-y|^p \\ + (3M_{n_q} + (M_{n_q})^{\frac{p}{2}} + N_{n_q}) \int_s^t dv E\Big[\sup_{s\leqslant u\leqslant v\wedge T_q} |X_x^s(u) - X_y^s(u)|^p\Big]\Big\} \end{aligned}$$

et par un calcul élémentaire l'existence d'une constante K telle que

$$E\Big[\sup_{s\leqslant v\leqslant t\wedge T} |X_x^s(v) - X_y^s(v)|^p\Big] \leqslant Ke^{Kt}|x-y|^p.$$

La condition (45) est satisfaite pour $\varepsilon = p - d$, d'où le résultat d'après le lemme III_9. ■

THÉORÈME III_{12}. — *Si les trois applications* σ, b *et* f *satisfont aux conditions* (E_1), (E_2), (E_3), *plus* (E_4) *et* (E_5) :

(E_4) *pour un certain* $p > d$ *et tout entier* n *il existe une constante* N_n *pour laquelle quels que soient* x *et* y *de* B_n

$$\int_{\{|u|\leqslant 1\}} |f(x,u) - f(y,u)|^p m(du) \leqslant N_n |x-y|^p$$

(E_5) *pour tout* u *fixé* $f(x, u)$ *est continue en* x, *alors il existe une version cadcontinue* $\psi(t, x)$, $t \geqslant 0$, *à l'équation différentielle stochastique* (E).

Démonstration. — Les équations (E') considérées dans la démonstration du théorème III_4 satisfont à la condition (L_3) grâce à (E_4), par suite nous pouvons travailler avec des versions cadcontinues au lieu de mesurables. La continuité en x de $f(x, u)$ nous montre que les variables aléatoires $\eta_n(x)$ sont continues. Nous en déduisons l'existence d'une version cadcontinue de la forme (43). ■

COROLLAIRE III_{13} (application au problème des martingales). — *Si les hypothèses du théorème* III_6 *sont satisfaites et si de plus* $n(x, u)$ *vérifie les conditions* (E_4) *et* (E_5), *alors pour tout* x *il existe une solution au problème des martingales et* $(X_t)_{t\geqslant 0}$ *est un processus de Markov fortement fellérien.*

Démonstration. — Il reste à montrer la propriété fellérienne de $(X_t)_{t\geq 0}$. Or :

$$E_x\left[\int_0^t e^{-\lambda v} f(X_v)dv\right] = E_x^{b_1}\left[R_t \int_0^t e^{-\lambda v} f(X_v)dv\right]$$
$$= \hat{E}\left[\hat{R}_t \int_0^t e^{-\lambda v} f(\psi(s, x))dv\right]$$

où $\psi(t, x)$ est la version cadcontinue de l'équation (E) associée au triplet $(\sigma, \hat{b}_1, n)$ (théorème II_{10}) et où R_t est définie par (24), en particulier

$$\hat{R}_t = \exp\left\{\int_0^t \beta[\psi(s, o)]\sigma[\psi(s, o)]d\hat{B}_s - \frac{1}{2}\int_0^t \langle \beta[\psi(s, o)], b_1[\psi(s, o)] \rangle ds\right\}$$

sur $(\hat{\Omega}, \hat{\underline{\underline{F}}}_t)$.

La fonction f pouvant être choisie continue bornée la continuité en x de $E_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda v} f(X_v)dv\right]$ suit facilement. ■

B. CAS BORÉLIEN BORNÉ

Nous allons d'abord généraliser l'inégalité de Krylov [9] [*13*] puis nous montrerons l'existence dans le cas borélien borné ce qui nous permettra en particulier d'obtenir le résultat de Strook [*21*] dans le cas où les coefficients sont continus.

§ 4. **Inégalité fondamentale**

Supposons donnés un espace de probabilité $(\Omega, \underline{F}, P)$ muni d'une famille croissante de sous-tribus $\underline{\underline{F}}_t$, $t \geq 0$, et sur cet espace un $\underline{\underline{F}}_t$ mouvement brownien d-dimensionnel et un $\underline{\underline{F}}_t$ p. p. p. de mesure de Lévy m à valeurs dans $\hat{U}$. De plus considérons, définis sur cet espace, un processus matriciel, σ_t, $d \times d$, symétrique, borélien et $\underline{\underline{F}}_t$ adapté, un processus vectoriel b_t, d-dimensionnel, borélien et $\underline{\underline{F}}_t$ adapté et enfin une fonction aléatoire d-dimensionnelle, $n(t, u)$, $\mathscr{P} \otimes \underline{\underline{U}}$ mesurable et $\underline{\underline{F}}_t$ adaptée pour tout u de U tels qu'il existe une constante M pour laquelle pour tout t

$$(51)\quad \|\sigma_t\| + |b_t| + \int_{|u|\leq 1} |n(s, u)|^2 m(du) + \int_{|u|>1} |n(s, u)|\, m(du) \leq M$$

alors nous pouvons poser :

$$(52)\quad X_t(x, \sigma, b, n) = x + \int_0^t \sigma_s dB_s + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \int_{|u| \leqslant 1} n(s, u) q(ds, du) + \int_0^t \int_{|u| > 1} n(s, u) p(ds, du)$$

où p et q sont les mesures aléatoires associées au p. p. p. Y_t.

Pour toute fonction borélienne réelle définie sur $C_r = \{ x \mid |x| < r \}$ définissons la norme :

$$\| f \|_{d,r} = \left(\int_{C_r} | f(x) |^d dx \right)^{\frac{1}{d}}$$

alors si pour tout r, tout x de C_r, τ_r^x est le temps de sortie de C_r pour le processus $X_t(x, \sigma, b, n)$, nous obtenons l'estimation suivante :

THÉORÈME III_{14}. — *S'il existe une constante* M *vérifiant* (51) *et si la matrice σ possède la propriété* (U) :

(U) : *pour tout r il existe une constante μ_r telle que pour tout x de* C_r det $\sigma(t, \omega) \geqslant \mu_r > 0$ *sur l'ensemble*

$$A_r^x = \{ (t, \omega) / \omega \in \Omega,\ t \in [0, \tau_r^x(\omega) [\}$$

alors, il existe une constante N_t ne dépendant que de r, μ_r, M *et t telle que pour tout $t \geqslant 0$, tout r et tout x de C_r*

$$(53)\qquad E\left[\int_0^{t \wedge \tau_r^x} | f(X_s(x, \sigma, b, n)) | ds \right] \leqslant N_t \| f \|_{d,r}$$

quelle que soit f borélienne bornée définie sur $\mathbf{R}^d$.

Démonstration. — Elle fait appel à la théorie des polyhèdres convexes et est peu différente de celle de l'inégalité dans le cas continu [9] [*13*], aussi nous n'en indiquerons que les grandes lignes en insistant surtout sur les différences.

Remarquons tout d'abord qu'à l'aide du théorème de la classe monotone et d'un calcul élémentaire il suffit d'obtenir (53) pour r égal à 1, tout x de C_1 et toute fonction continue bornée nulle sur δC_1.

Soit σ une matrice, $d \times d$, symétrique, strictement elliptique quelconque. Pour toute fonction réelle borélienne définie sur $\mathbf{R}^d$, $g(x)$, posons :

$$(54)\quad T_t^\sigma g(x) = (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} (\det \sigma)^{-1} \int_{\mathbf{R}^d} g(y) \exp\left\{ - \frac{| \sigma^{-1}(x - y) |^2}{2t} \right\} dy$$

Il suit facilement que :

(55) $$|T_t^\sigma g(x) - T_t^\sigma g(y)| \leqslant \sup_{v \in \mathbf{R}^d} |g(x+v) - g(y+v)|$$

(56) $$|\nabla T_t^\sigma g(x) - \nabla T_t^\sigma g(y)| \leqslant N \sup_{v \in \mathbf{R}^d} |g(x+v) - g(y+v)|$$

D'autre part à l'aide de la théorie des polyhèdres convexes nous pouvons montrer pour toute fonction f définie sur $\mathbf{R}^d$ continue à support dans $\overline{C_1}$ l'existence d'une fonction réelle convexe $Z(x)$ possédant les propriétés suivantes :

i) $Z(x) \geqslant 0$ sur C_2, $\leqslant 0$ hors de C_2,

ii) il existe une constante N_1 telle que pour tout x, y de $\mathbf{R}^d$

(57) $$Z(x) \geqslant -N_1 |x| \, \| f \|_{d,1}$$

(58) $$|Z(x) - Z(y)| \leqslant N_1 |x - y| \, \| f \|_{d,1}$$

iii) si nous posons $Z_\delta(x) = T_\delta^\sigma Z(x)$ et $f_\delta(x) = T_\delta^\sigma f(x)$ pour $\delta \geqslant 0$, alors Z_δ est de classe $\mathscr{C}^2$ et

(59) $$L^\sigma Z_\delta(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} D^i D^j Z_\delta(x) \leqslant -\sqrt[d]{\det \sigma^2} N_2 f_\delta(x)$$

où N_2 est une constante positive et $a = \sigma\sigma^*$. De plus à l'aide des inégalités (55), (56) et (58) remarquons que :

(60) $$|\nabla Z_\delta(x)| \leqslant N_3 \| f \|_{d,1}$$

(61) $$\| D^i D^j Z_\delta(x) \| \leqslant N_3 \| f \|_{d,1}$$

Notons par $\eta_t(x)$:

$$Z(X_t(x, \sigma, b, n)) - Z(x) + \int_0^t ds \Big\{ N_2 \sqrt[d]{\det \sigma_s^2} f(X_s(x, \sigma, b, n)) - N_3 \| f \|_{d,1} \Big(|b_s| + \int_{|u| \leqslant 1} |n(s, u)|^2 m(du) + \int_{|u| > 1} |n(s, u)| \, m(du) \Big) \Big\}$$

Vue la remarque du début nous obtenons l'estimation (53) si $\eta_t(x)$ possède pour tout x de C_1 la propriété (S – M) : $\eta_t(x)$ est une surmartingale. En effet, appliquons le théorème d'arrêt, nous obtenons pour tout x de C_1 $E[\eta_{t \wedge \tau_1^x}(x)] \leqslant 0$, et par conséquent :

$$N_2 E\left[\int_0^{t \wedge \tau_1^x} \sqrt[d]{\det \sigma_s^2} f(X_s(x, \sigma, b, n)) ds \right] \leqslant Z(x) - E[Z(X_{t \wedge \tau_1^x})] + N_3 \| f \|_{d,1} E\left[\int_0^{t \wedge \tau_1^x} ds \left\{ |b_s| + \int_{|u| \leqslant 1} |n(s, u)|^2 m(du) + \int_{|u| > 1} |n(s, u)| \, m(du) \right\} \right]$$

soit

$$E\left[\int_0^{t\wedge\tau_1^x} f(X_s)ds\right] \leqslant N_2^{-1}\mu^{-\frac{2}{d}} \| f \|_{d,1}(N_1 + N_3Mt).$$

Il reste à établir la propriété (S – M). Cette propriété est satisfaite pour tout triplet (σ, b, n) où σ et b sont déterministes et n est de la forme $\sum_{k=1}^{n} n_k \mathbb{1}_{B_k}(u)$ où les n_k sont déterministes et les B_k sont des sous-ensembles de U disjoints contenus dans $\{ u \mid |u| \leqslant 1 \}$ ou $\{ u \mid |u| > 1 \}$ et m intégrables. En effet appliquons la formule d'Ito à la semi-martingale $X_t(x, \sigma, b, n)$ et à la fonction Z_δ, alors le processus :

$$\begin{aligned}Z_\delta(X_t)-Z_\delta(x)&-\int_0^t ds\{ L^\sigma Z_\delta+\langle b, \nabla Z_\delta\rangle\}(X_s)\\&-\int_0^t ds \sum_{\substack{k\\ B_k\subset\{|u|\leqslant 1\}}} \{ Z_\delta(X_{s^-}+n_k)-Z_\delta(X_{s^-})-\langle n_k, \nabla Z_\delta(X_{s^-})\rangle \}m(B_k)\\&-\int_0^t ds \sum_{\substack{k\\ B_k\subset\{|u|> 1\}}} \{ Z_\delta(X_{s^-}+n_k)-Z_\delta(X_{s^-}) \}m(B_k)\end{aligned}$$

est une $\underline{\underline{F}}_t$ martingale. Le processus $\eta_t(x)$ correspondant est par suite une surmartingale en faisant tendre δ vers 0 grâce à la formule de Taylor et aux inégalités (59), (60) et (61).

Si maintenant σ_t et b_t sont des processus étagés et continus à droite, et si $n(t, u)$ est une fonction aléatoire de la forme

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r'} n_j^i \mathbb{1}_{]s_i,s_{i+1}]\times B_j}$$

où les B_j sont disjoints et m intégrables et les $n_j^i \underline{\underline{F}}_{s_i}$ mesurables, il est évident qu'il suffit de montrer la propriété (S.M) sur tout intervalle $]s, t[$ pour lequel $\sigma_v = \sigma_s$, $b_v = b_s$ et $n(v, u) = \sum_{k=1}^{r'} n_k(s) \mathbb{1}_{B_k}(u)$. Ce fait suit facilement de la propriété suivante des espérances conditionnelles à partir du cas déterministe en prenant pour $\mathscr{A}$: F_s et $\mathscr{A}'$: $\sigma(B_v - B_s, Y_v - Y_s, s \leqslant v)$.

Soient $(E, \mathscr{E}, P)$ un espace probabilisé, $(G, \mathscr{G})$ un espace mesurable, X une application de $(E, \mathscr{E})$ dans $(G, \mathscr{G})$, F une variable aléatoire bornée de $(F \times G, \mathscr{E} \otimes \mathscr{G})$ et $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}'$ deux sous-tribus de $\mathscr{E}$ indépendantes avec $\mathscr{A} \supset X^{-1}(\mathscr{G})$, alors, si pour tout x l'application $F(x, .)$ est $\mathscr{A}'$ mesurable,

$$E[F(X, \omega) \mid \mathscr{A}] = E[F(., \omega)](X)$$

Revenons au cas général, nous pouvons trouver une suite de triplets (σ^p, b^p, n^p) de la forme précédente telle que σ^p converge vers σ dans $L^2(\lambda)$, b^p vers b dans $L^1(\lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue sur R^d, $\mathbb{1}_{(|u| \leqslant 1)} n^p(., u)$ converge vers $\mathbb{1}_{(|u| \leqslant 1)} n(., u)$ dans $L^2(m)$ et $\mathbb{1}_{(|u| > 1)} n^p(., u)$ vers $\mathbb{1}_{(|u| > 1)} n(., u)$ dans $L^1(m)$. Alors nous avons :

$$\begin{aligned} E[\,|X_t(x, \sigma^p, b^p, n^p) - X_t(x, \sigma, b, n)|\,] & \\ \leqslant E\left[\int_0^t ds \,|\sigma_s^p - \sigma_s|^2\right]^{\frac{1}{2}} &+ E\left[\int_0^t |b_s^p - b_s|\,ds\right] \\ + E\left[\int_0^t ds \int_{|u| \leqslant 1} |n^p(s, u) - n(s, u)|^2 m(du)\right]^{\frac{1}{2}} & \\ + E\left[\int_0^t ds \int_{|u| > 1} |n^p(s, u) - n(s, u)|\, m(du)\right] & \end{aligned}$$

Nous pouvons choisir (σ^p, b^p, n^p) tel que ce triplet vérifie (51) uniformément en p, par suite de ce qui précède nous déduisons que la suite (X_t^p) converge vers X_t pour tout t $P_{\text{p.-s.}}$ et $\eta_t(x)$ est une surmartingale. ■

Adaptons l'estimation (53) au problème des martingales. Nous dirons que le triplet (a, b, S) vérifie la propriété (V) suivante si :

(V) *i)* $a(x)$ est bornée et uniformément elliptique sur tout compact, c'est-à-dire : pour tout r il existe une constante $\mu_r > 0$ telle que pour tout x de $\overline{C}_r$ et λ de R^d

$$\mu_r |\lambda|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j$$

ii) $b(x)$ est borné.

iii) $S(x, du)$ intègre $|u|^2 \mathbb{1}_{(|u| \leqslant 1)} + |u| \mathbb{1}_{(|u| > 1)}$ uniformément en x.

Alors si τ_r est le temps de sortie de C_r pour le processus X_t, $t \geqslant 0$:

THÉORÈME III_{15}. — *Si quel que soit x de R^d il existe une solution P^x au problème des martingales partant de x relativement au triplet (a, b, S) possédant la propriété (V), alors pour tout r et tout t il existe une constante N ne dépendant que de r, t, μ_r et M borne des coefficients telle que pour tout x de C_r et toute fonction f borélienne bornée*

$$E^x\left[\int_0^{t \wedge \tau_r} f(X_t)dt\right] \leqslant N \,\| f \|_{d,r} \tag{62}$$

Démonstration. — Soit σ la racine carrée symétrique de a, appliquons le théorème II_{10}, alors il existe un espace de probabilité $(\hat{\Omega}, \underline{\hat{F}}, \underline{\hat{F}}_t, \hat{P})$, un $\underline{\hat{F}}_t$ mouvement brownien, un p. p. p. de mesure de Lévy m possédant la propriété (M) et une fonction à valeurs dans $\hat{U}$, $n(x, u)$, définie par (31) tels que l'équation différentielle stochastique (E) partant de x relativement au triplet $(\sigma, \hat{b}, n)$ où $\hat{b}$ est définie par (36′) admet une solution $\hat{X}_t$. Posons $\sigma_t = \sigma(\hat{X}_t)$, $\hat{b}_t = \hat{b}(\hat{X}_t)$ et $n(t, u) = n(\hat{X}_{t-}, u)$ alors grâce à (V) le triplet $(\sigma_t, \hat{b}_t, n(t, u))$ vérifie les hypothèses du théorème III_{14}. De (53) nous déduisons de suite l'inégalité (62). ■

De l'inégalité (62) il est facile d'obtenir à l'aide de la majoration exponentielle (théorème 13) par une méthode analogue à celle du cas continu [*13*] le corollaire suivant :

COROLLAIRE III_{16}. — Sous les hypothèses du théorème précédent pour tout ensemble Γ de mesure P^x nulle, le temps de séjour en Γ du processus X_t est nul λ-p.-s., c'est-à-dire :

$$E^x\left[\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_\Gamma(X_s)ds\right] = 0 \tag{63}$$

§ 5. Existence d'une solution au problème des martingales

Nous allons obtenir le résultat d'existence suivant :

THÉORÈME III_{17}. — *Pour tout x il existe une solution P^x au problème des martingales partant de x relativement au triplet (a, b, S) s'il satisfait la condition* (V).

Démonstration. — Nous pouvons trouver une suite de matrices a_q de classe $\mathscr{C}^2$, uniformément elliptiques sur tout compact uniformément en q et uniformément bornées, qui converge vers a. Soit $n(x, u)$ la fonction définie à partir du noyau S par (31) où m est une mesure sur U possédant la propriété (M), alors posons pour tout A de $\underline{\underline{U}}$ et tout x :

$$S_q(x, A) = \int_{|u| > \frac{1}{q}} \mathbb{1}_A(n(x, u))m(du) \tag{64}$$

L'étude du cas lipschitzien (remarque III_7) nous a montré l'existence pour tout x et tout q d'une solution P_q^x partant de x relativement au triplet (a_q, b, S_q). Nous pouvons appliquer le théorème 20 de compacité et nous obtenons l'existence pour tout x fixé d'une probabilité P^x sur $(\Omega^0, \underline{\underline{F}}^0)$ limite en loi d'une sous-suite de (P_q^x). Montrons que P^x est bien une solution au problème des martingales.

L'ensemble $\{ X_0 = x \}$ étant fermé pour la topologie de Skorokhod sur tout compact (proposition A_4), $P^x(X_0 = x) = 1$.

Il est facile de voir grâce à la continuité à droite de X_t et à la définition des probabilités P_q^x qu'il suffit d'obtenir que

$$E_q^x\left[\eta\left(f(X_t) - f(x) - \int_0^t L^q f(X_s)ds\right)\right]$$

converge vers $E^x\left[\eta\left(f(X_t) - f(x) - \int_0^t Lf(X_s)ds\right)\right]$ pour tout t n'appartenant pas à l'espace dénombrable de points de R_+ introduit au corollaire A_5, toute fonction réelle de $\mathscr{C}^{2,b}(R^d)$ et toute variable aléatoire $\eta \underline{\underline{F}}_t$ mesurable continue bornée pour montrer que P^x est une solution au problème des martingales partant de x.

$$\begin{aligned}
I^q(x) = \Bigg| & E_q^x\left[\eta\left(f(X_t) - f(x) - \int_0^t L^q f(X_s)ds\right)\right] \\
& - E^x\left[\eta\left(f(X_t) - f(x) - \int_0^t Lf(X_s)ds\right)\right]\Bigg| \\
\leqslant & \mid E_q^x[\eta(f(X_t) - f(x))] - E[\eta(f(X_t) - f(x))] \mid \\
& + E\left[\mid \eta \mid \int_0^t \mid Lf(X_s) - L^k f(X_s) \mid ds \right] \\
& + \left| E\left[\eta \int_0^t L^k f(X_s)ds\right] - E_q^x\left[\eta \int_0^t L^k f(X_s)ds\right]\right| \\
& + E_q^x\left[\mid \eta \mid \int_0^{t \wedge \tau_r} \mid L^k f(X_s) - L^p f(X_s) \mid ds \right] \\
& + \int_{[\tau_r \leqslant t]} \mid \eta \mid \left\{ \int_0^t \mid L^k f(X_s) - L^q f(X_s) \mid ds \right\} dP_q^x \\
\leqslant & I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 .
\end{aligned}$$

Soit ε, par construction de L^k, $\int_0^t \mid Lf(X_s) - L^k f(X_s) \mid ds$ converge vers 0 avec $\frac{1}{k}$, par conséquent pour k grand $I_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{5}$.

Pour r grand, grâce à la majoration exponentielle (lemme 17), les coefficients de L^q étant bornés uniformément en q, $P^x_q[\tau_r \leqslant t]$ est petit, alors f étant un élément de $\mathscr{C}^{2,b}(\mathrm{R}^d)$ pour r grand, tout q et tout k $I_5 \leqslant \frac{\varepsilon}{5}$.

Grâce au théorème III_{15}, (a_q, b, S_q) satisfaisant à la propriété (V) uniformément en q, il existe une constante K indépendante de k et q telle que :

$$E^x_q\left[\,|\eta|\int_0^{t\wedge\tau_r} |L^k f(X_s) - L^q f(X_s)|\,ds\right] \leqslant K N_{t,r} \| L^k f - L^q f \|_{d,r},$$

où si q est supérieur à k :

$$\| L^k f - L^q f \|_{d,r} \leqslant K'\left(\int_{C_r}\left\{\| a_k(x) - a_p(x)\|^d + \int_{\frac{1}{q}<|u|\leqslant\frac{1}{k}} |n(x, u)|^2 m(du)|^d\right\} dx\right)^{\frac{1}{d}}$$

tend vers 0 avec $\frac{1}{q}$ et $\frac{1}{k}$, par suite pour $q > k$ grands $I_4 \leqslant \frac{\varepsilon}{5}$.

Par le choix de t, X_t est continu sauf sur un ensemble P^x-nul, par suite la convergence en loi de P^x_q vers P^x entraîne que $I_1 + I_3 \leqslant \frac{2\varepsilon}{5}$ pour q grand.

Nous en déduisons que pour q grand $I_q \leqslant \varepsilon$, d'où le résultat cherché. ■

Nous pouvons aisément retrouver le résultat d'existence de Strook [*21*] qui améliore celui de Komatsu [*8*] grâce à l'estimation du théorème III_{15}.

COROLLAIRE III_{18}. — *Supposons que la matrice $a(x)$ et le vecteur $b_1(x)$ soient bornés et continus, que le vecteur $b_2(x)$ soit borné et de classe $\mathrm{V}(a)$, que le noyau S intègre $|u|^2 \mathbb{1}_{(|u|\leqslant 1)} + |u| \mathbb{1}_{(|u|>1)}$ uniformément en x et que pour toute fonction ϕ continue bornée $\mathrm{S}(x, \phi)$ soit continue en x, alors il existe pour tout x de R^d une solution au problème des martingales partant de x relativement au triplet $(a, b_1 + b_2, \mathrm{S})$.*

Démonstration. — Grâce au théorème 25 il suffit d'établir le résultat avec b_2 nul. Posons $a_q = a + \frac{1}{q}\mathrm{I}$, alors le triplet (a_q, b, S) vérifie la condition (V). Les coefficients étant bornés uniformément en q il existe donc une famille relativement compacte de probabilités P^x_q, solutions au problème des martingales par rapport aux triplets (a_q, b, S). Quitte à extraire une sous-suite (P^x_q) converge en loi vers une probabilité P^x. Comme précédemment il suffit de montrer que $I_q(t)$ converge vers 0 avec $\frac{1}{q}$ pour tout t n'appartenant pas à un sous-ensemble dénombrable de R_+. Or grâce aux propriétés de continuité des coefficients

$$E_q^x\left[\eta\left(f(X_t) - f(x) - \int_0^t Lf(X_s)ds\right)\right]$$

converge vers

$$E^x\left[\eta\left(f(X_t) - f(x) - \int_0^t Lf(X_s)ds\right)\right]$$

lorsque p tend vers l'∞.

Le résultat final suit car :

$$E_q^x\left[\,|\eta| \int_0^t |L^q f(X_s) - Lf(X_s)|\,ds\right] \leqslant K\frac{t}{q}$$

où K est une constante indépendante de q. ■

APPENDICE

TOPOLOGIE DE SKOROKHOD SUR TOUT COMPACT SUR Ω^0

Nous voulons munir l'espace Ω^0 d'une structure d'espace polonais qui induira la topologie de Skorokhod sur tout compact. Nous ne pouvons pas généraliser immédiatement d'une manière analogue à la topologie de la convergence uniforme sur tout compact la topologie de Skorokhod sur $D[[0, 1], R^d]$ étudiée en particulier par Billingsley [*2*]. De même la topologie de type de Skorokhod introduite par Maisonneuve [*12*] sur $D[R_+, K]$ où K est un compact de R^d ne se généralise pas à Ω^0, car alors nous perdons la complétion ; par suite nous voyons l'utilité de l'étude qui suit :

Suivant Maisonneuve [*12*] introduisons les définitions ci-dessous. Nous appellerons *changement de temps* les applications strictement croissantes et continues de R_+ dans lui-même ; t-changement de temps celles qui vérifient $\lambda(t) = t$; et enfin *taille d'un changement de temps* le nombre positif suivant :

$$|\lambda| = \sup_{t \geq 0} |\lambda(t) - t| + \sup_{s \neq t} \left| \operatorname{Log} \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right| \tag{65}$$

Nous noterons par $\Lambda(\Lambda_t)$ la classe des (t-) changements de temps.

Nous pouvons introduire la topologie de Skorokhod sur tout compact : nous dirons qu'une suite x_k, $k \geq 1$, converge vers x dans Ω^0 pour la *topologie de Skorokhod sur tout compact* si pour tout n entier il existe une suite de changements de temps λ_k^n, $k \geq 1$, telle que :

$$\lim_{k \to \infty} |\lambda_k^n| = 0 \tag{66}$$

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{0 \leq t \leq n} |x(t) - x_k(\lambda_k^n(t))| = 0 \tag{67}$$

Considérons pour tout n entier les fonctions définies sur R_+ :

$$\phi^n(t) = \begin{cases} 1 & & 0 \leq t \leq n \\ n + 1 - t & \text{si} & n \leq t \leq n + 1 \\ 0 & \text{si} & t \geq n + 1 \end{cases}$$

et posons $x^n(t) = \phi^n(t)x(t)$

$$\rho_n(x, y) = \inf_{\lambda \in \Lambda_{n+1}} \{ |\lambda| + \sup_{0 \leq t \leq n+1} |x^n(t) - y^n(\lambda t)| \}$$

et enfin

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(x, y)}{1 + \rho_n(x, y)}.$$

Les propriétés de la taille d'un changement de temps [*12*] nous permettent de montrer facilement que d est une distance sur Ω^0.

La proposition suivante dont la démonstration est assez longue établit l'équivalence entre la topologie induite par d et celle de Skorokhod sur tout compact.

PROPOSITION A_1. — *Une suite x_k, $k \geqslant 1$, converge vers x dans Ω^0 pour la topologie de Skorokhod sur tout compact si et seulement si*

$$\lim_{k \to 0} d(x_k, x) = 0$$

Remarque. — Il est facile de voir que la topologie de Skorokhod sur tout compact sur $C(R_+, R^d)$ est équivalente à la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Grâce à la proposition A_1 la démonstration des résultats importants ci-dessous se déduit facilement de celle de Billingsley [*2*].

THÉORÈME A_2. — *La distance d induit sur Ω^0 une structure d'espace polonais. De plus la tribu borélienne $\mathscr{B}$ et F sont identiques.*

THÉORÈME A_3 (Critère de compacité). — *Pour qu'une famille P_i, $i \in I$, de probabilités sur (Ω^0, F) soit relativement compacte il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, tout entier p et tout η positif il existe*

I) a_p *tel que* $\sup_I P_i \{ \sup_{t \leqslant p} | X_t | > a_p \} \leqslant \varepsilon$

II) δ_η *tel que* $\sup_I P_i \{ \sup_{s,t < \delta_\eta} | X_t - X_s | > \eta \} \leqslant \varepsilon$

III) $\sigma_{p,\eta}$ *tel que* $\sup_I P_i \{ \sup_{\sigma_{p,\eta} \leqslant s < t < p} | X_t - X_s | > \eta \} \leqslant \varepsilon$

IV) $h_{p,\eta}$ *tel que* $\sup_I P_i \{ \sup_{\substack{t_i < t_2 \leqslant p \\ |t_1 - t_2| \leqslant h_{p,\eta}}} \sup_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} \min \{ | X_t - X_{t_1} |, | X_t - X_{t_2} | \} > \eta \} \leqslant \varepsilon.$

Enfin les applications coordonnées possèdent la propriété suivante [ ].

PROPOSITION A_4. — *Si la suite x_k, $k \geqslant 1$, converge vers x pour la topologie de Skorokhod sur tout compact, alors $x_n(t)$ tend vers $x(t)$ pour tout t point de continuité de x.*

De plus si P est une probabilité sur $(\Omega^0, \underline{F})$

$$P[x : X_t(x) \neq X_{t^-}(x)] = 0$$

sauf pour un nombre dénombrable de points t.

COROLLAIRE A_5. — *Pour toute probabilité P sur $(\Omega^0, \underline{F})$, pour presque tout point t il existe un ensemble N_t de mesure P nulle telle que X_t soit continue en tout point x n'appartenant pas à N_t.*

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] J. BRETAGNOLLE, Processus à accroissements indépendants. École d'été de probabilité. *Lecture Notes in M.*, vol. 307, Springer, 1973.

[*2*] P. BILLINSLEY, *Convergence of probability measures.* J. Wiley, 1968.

[*3*] C. DELLACHERIE, *Capacités et processus stochastiques.* Springer, 1972.

[*4*] E. B. DYNKIN, *Markov processus I.* Springer, 1965.

[*5*] N. EL KAROUI, J.-P. LEPELTIER, Représentation des processus ponctuels multivariés à l'aide d'un processus de poisson *(à paraître).*

[*6*] M. I. FREIDLIN, The factorization of non-negative definite matrices. *Theory proba. Appl.*, t. **13**, 1968, n° 2, p. 354-356.

[*7*] K. ITO, Poisson point processes attached to Markov processus. *Sixth Berkeley Symposium on math. Stat. Proba.*, vol. III, 1972, p. 225-239.

[*8*] T. KOMATSU, Markov processus associated with certain integro-differentiel operators. *Osaka J. Math.*, t. **10**, 1973, p. 271-303.

[9] N. V. KRYLOV, An inequality in the theory of stochastic integrals. *Theory Proba. Appl.*, t. **16**, 1971, n° 3, p. 438-448.

[10] H. KUNITA, S. WATANABE, On square integrable martingales. *Nagoya J. Math.*, t. **30**, 1967, p. 209-245.

[11] J.-P. LEPELTIER, Étude des processus de Markov sur R^n et leur lien avec la théorie des équations différentielles stochastiques. *Thèse 3e cycle*. Université P. et M. Curie, Paris, 1975.

[12] B. MAISONNEUVE, Topologie de type de Skorokhod. Séminaire de proba., Strasbourg VI. *Lecture notes in M.*, vol. 258, Springer, 1972, p. 112-117.

[13] B. MARCHAL, Processus de diffusion à coefficients discontinus. *Thèse 3e cycle*. Université P. et M. Curie, Paris, 1972.

[14] P. A. MEYER, C. DOLEANS-DADE, Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales. Séminaire de proba., Strasbourg IV. *Lecture notes in M.*, vol. **124**, Springer, 1970, p. 77-107.

[15] P. A. MEYER et autres, Exposés sur les diffusions d'après STROOK et VARADHAN. Séminaire de proba., Strasbourg IV. *Lecture notes in M.*, Vol. **124**, Springer, 1970, p. 241-282.

[16] P. A. MEYER, Processus de poisson ponctuel d'après K. ITO. Séminaire de proba., Strasbourg V. *Lecture notes in M.*, vol. **191**, Springer, 1971, p. 177-191.

[17] P. PRIOURET, Processus de diffusion et équations différentielles stochastiques. École d'été de proba., III. *Lecture notes in M.*, vol. **390**, Springer, 1974.

[18] A. V. SKOROKHOD, *Studies in the theory of random processus*. Addison, Wesley. 1965.

[19] D. STROOK, S. R. S. VARADHAN, Diffusion processus with continuous coefficients I et II. *Commun. Pure Appl. Math.*, t. **XXII**, 1969, p. 345-400 et 479-530.

[20] D. STROOK, S. R. S. VARADHAN, Diffusion processus with boundary conditions. *Commun. Pure Appl. Math.*, t. **XXIV**, 1971, p. 477-495.

[21] D. STROOK, Diffusion processus associated with Lévy generators. *Z. Wahrschein lichkeits theorie verw.*, t. **32**, 1975, p. 209-244.

[22] T. YAMADA, S. WATANABE, On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. *J. Math. Kyoto Univ.*, t. **11** (1), 1971, p. 156-167.