ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

C. SUNYACH

Une classe de chaînes de Markov récurrentes sur un espace métrique complet

Annales de l'I. H. P., section B, tome 11, n° 4 (1975), p. 325-343
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1975__11_4_325_0>

© Gauthier-Villars, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XI, n° 4, 1975, p. 325-343. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Une classe de chaînes de Markov récurrentes sur un espace métrique complet

par

C. SUNYACH (*)

SUMMARY. — In order to prove recurrence properties for a class of diffusions on an infinite dimensional Hilbert space, we study the class of transition probability on a complete metric space which satisfy the following conditions:

1) They induce strict contractions on the space of Lipschitz functions.
2) They operate on the space of measures for which the distance to any point is an integrable function.

We prove that there exists a unique invariant probability measure and derive that the associated Markov chain is recurrent on non negligible open sets. Then we construct and characterize the potential operator. Finally we apply these results to stochastic differential equations on a Hilbert space.

INTRODUCTION

A part la théorie des marches aléatoires récurrentes sur les groupes localement compacts, c'est la théorie des chaînes récurrentes au sens de Harris qui est la plus développée et utilisée (cf. [7]). Il se trouve que sur un espace de Hilbert de dimension infinie, il existe des diffusions très simples (gaussiennes) qui ne sont pas récurrentes au sens de Harris, mais qui cependant sont récurrentes sur les ouverts.

C'est pour étudier les propriétés de récurrence de ces diffusions que

(*) 23, rue Daubenton, 75005 Paris.

nous considérons la classe des probabilités de transition sur un espace métrique complet, ayant les propriétés suivantes :

1) L'espace des fonctions lipschitziennes est invariant et l'application induite est une contraction stricte.

2) L'espace des mesures bornées intégrant les fonctions distance à un point arbitraire, est invariant.

Dans le paragraphe 1, nous montrons, pour ces probabilités de transition, l'existence d'une probabilité invariante γ et un théorème ergodique.

Dans le paragraphe 2, nous montrons que la chaîne de Markov associée est récurrente sur les ouverts non γ-négligeables.

Dans le paragraphe 3, nous construisons et caractérisons l'opérateur potentiel de la chaîne (on trouvera dans [9] une étude plus approfondie du principe du maximum récurrent).

Dans le paragraphe 4, nous appliquons ces résultats aux probabilités de transition définies par les solutions des équations différentielles stochastiques sur un espace de Hilbert.

Je tiens à remercier D. Revuz qui a bien voulu relire et commenter ce travail.

I. UNE CONDITION SUFFISANTE D'ERGODICITÉ

Dans tout ce texte (X, d) désigne un espace métrique complet séparable et $\mathcal{X}$ sa tribu borélienne. On désigne par $L(X)$ (resp. $L^b(X)$) l'espace des fonctions numériques lipschitziennes (resp. lipschitziennes et bornées) sur X. Pour tout $f \in L(X)$, on désigne par $[f]$ le plus petit $k \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x, y \in X \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant kd(x, y).$$

THÉORÈME 1. — *Soit* N *une probabilité de transition sur* $(X, \mathcal{X})$ *telle qu'existe* $\theta \in [0, 1[$ *tel que si* $f \in L^b(X)$ *alors* $Nf \in L^b(X)$ *et* $[Nf] \leqslant \theta[f]$ *et qu'existe* $x \in X$ *tel que* $\int d(x, y)N(x, dy) < +\infty$ $\Big($*ce qui entraîne* $\int d(x', y)N(x'', dy) < +\infty$ *pour tous* x' *et* $x'' \in X$; *on pose* $\varphi(x) = \int d(x, y)N(x, dy)\Big)$.

Alors il existe une unique probabilité γ *invariante par* N *telle que pour tout* $x \in X$, $y \mapsto d(x, y)$ *soit* γ*-intégrable et pour tous* $f \in L(X)$, $x \in X$ *et* $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$(1) \qquad |N^n f(x) - \gamma(f)| \leqslant \frac{\theta^n}{1-\theta}[f]\varphi(x).$$

L'opérateur induit par N *sur* $L^1(X, \mathscr{X}, \gamma)$ *est conservatif et ergodique* (*voir* [6]).

Démonstration. — Pour tous $f \in L(X)$, $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|N^n f - N^n f(x) 1_X| \leqslant \theta^n [f] d(., x)$$

(On désigne par 1_A la fonction caractéristique de $A \in \mathscr{X}$; lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté on remplacera $t1_X$ par t ($t \in \mathbb{R}$)), d'où

$$(2) \qquad |N^{n+1} f(x) - N^n f(x)| = |N(N^n f - N^n f(x) 1_X)(x)| \leqslant \theta^n [f] \varphi(x).$$

Donc la suite $(N^n f(x))_n$ est convergente, or

$$|N^n f(x) - N^n f(y)| \leqslant \theta^n [f] d(x, y),$$

donc la limite ne dépend pas de x. Nous la désignerons par $\Gamma(f)$.

Si $x \in X$, posons $\mu_x^n(dy) = N^n(x, dy)$ et montrons que la suite $(\mu_x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la condition de Prokhorov. Si K est une partie compacte de X et $\varepsilon > 0$, posons $\varphi_{\varepsilon,K}(x) = \inf\left(1, \frac{1}{\varepsilon} d(x, K)\right)$, qui est une fonction $\frac{1}{\varepsilon}$ — lipschitzienne valant 1 lorsque $x \notin (K)_\varepsilon$, où $(K)_\varepsilon = \{ x, d(x, K) \leqslant \varepsilon \}$.

Étant donné $\varepsilon > 0$, soient p un entier tel que $\frac{\theta^p}{1 - \theta} \times \frac{1}{\varepsilon} \times \varphi(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et K^ε un compact tel que $\mu_x^i(K^\varepsilon) \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ pour $i = 1, \ldots, p$.

D'après (2), on a

$$|\mu_x^n(\varphi_{\varepsilon,K^\varepsilon}) - \mu_x^p(\varphi_{\varepsilon,K^\varepsilon})| \leqslant \frac{\theta^p}{1 - \theta} \times \frac{1}{\varepsilon} \times \varphi(x)$$

pour $n \geqslant p$, d'où

$$\mu_x^n(((K^\varepsilon)_\varepsilon)^c) \leqslant \mu_x^n(\varphi_{\varepsilon,K^\varepsilon}) \leqslant \mu_x^p(\varphi_{\varepsilon,K^\varepsilon}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$$

pour $n \geqslant p$ et aussi pour $n \leqslant p$ d'après la définition de K^ε.

Étant donné $\varepsilon > 0$, soient $\varepsilon_n > 0$ tels que $\varepsilon = \sum_n \varepsilon_n$ et posons $J = \bigcap_n (K^{\varepsilon_n})_{\varepsilon_n}$. L'espace (X, d) étant complet, J est compact et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\mu_x^p(J^c) \leqslant \sum_n \mu_x^p(((K^{\varepsilon_n})_{\varepsilon_n})^c) \leqslant \sum_n \varepsilon_n = \varepsilon,$$

ce qui prouve que la suite $(\mu_x^p)_p$ vérifie la condition de Prokhorov.

Si γ est une probabilité adhérente à $(\mu_x^p)_p$, il existe une suite $p' \uparrow \infty$ telle que pour toute fonction numérique continue et bornée f, on ait

$\lim_{p'\uparrow\infty} \mu_x^{p'}(f) = \gamma(f)$. Donc $\gamma(f) = \Gamma(f)$ pour tout $f \in L^b(X)$. Par conséquent il existe une seule probabilité γ telle que $\lim_{n\uparrow\infty} N^n f(x) = \int f d\gamma$ pour tout $f \in L^b(X)$, donc aussi pour toute fonction numérique f continue et bornée.

L'inégalité (1) résulte donc de (2) lorsque $f \in L^b(X)$. Or il existe une suite croissante $a_n \in L^b(X)$ telle que $0 \leqslant a_n \leqslant 1$, convergeant simplement vers 1_X et que $\lim_n [a_n] = 0$ $\left(\text{par exemple } a_n(x) = \inf\left(1, \frac{1}{n}\Phi(x)\right) \text{ où } \Phi(x)\right.$ est la distance de x au complémentaire de la boule ouverte de centre x_p et de rayon $2n$). Si $f \in L(X)$, en appliquant (1) à $a_p f$ et en faisant $p \uparrow \infty$ on trouve que f vérifie (1).

Si γ_0 est une probabilité invariante par N, on a

$$\int f d\gamma_0 = \int N^n f d\gamma_0 = \lim_{p\uparrow\infty} \int N^p f d\gamma_0 = \int f d\gamma$$

pour tout $f \in L^b(X)$, donc $\gamma = \gamma_0$.

Les propriétés de l'opérateur induit par N sur $L^1(X, \gamma)$ résultent de la proposition suivante.

PROPOSITION 2. — *Soient* $(E, \mathscr{A}, P)$ *un espace de probabilité et* N *une probabilité de transition sur* $(E, \mathscr{A})$ *telle que* P *soit l'unique probabilité invariante par* N. *Alors l'opérateur induit par* N *sur* $L^1(E, \mathscr{A}, P)$ *est conservatif et ergodique.*

Démonstration. — Pour toute fonction numérique $\mathscr{A}$-mesurable bornée f, on a $\int |Nf| dP \leqslant \int N|f| dP$, donc N induit un opérateur, noté $\bar{N}$, sur $L^1(E, a, P)$. Désignons par $\tilde{N}$ l'opérateur sur $L^1(E, \mathscr{A}, P)$ tel que $(fP)N = (f\tilde{N})P$ pour tout $f \in L^1(E, \mathscr{A}, P)$. Comme $1\tilde{N} = 1$ et $\bar{N}1 = 1$, $\tilde{N}$ et $\bar{N}$ sont conservatifs. Soit $g \in L^1(E, \mathscr{A}, P)$ tel que $g\tilde{N} = g$; pour toute fonction numérique $\mathscr{A}$-mesurable bornée h, on a

$$\int g(Nh)dP = \int (g\tilde{N})h dP = \int gh dP,$$

ce qui montre que la mesure gP est invariante par le noyau N. En particulier si $A \in \mathscr{A}$ est tel que $\bar{1}_A\tilde{N} = \bar{1}_A$ (On désigne par $\bar{f}$ la classe dans $L^1(E, \mathscr{A}, P)$ de $f \in \mathscr{L}^1(E, a, P)$) et $P(A) \neq 0$, la probabilité $\frac{\bar{1}_A P}{P(A)}$ est invariante par N, d'où $\bar{1}_A P = P(A)P$, donc $0 = P(A)\int_{A^c} dP$, ce qui prouve que A^c est P-négligeable. Donc $\tilde{N}$ est ergodique.

Soit $g \in L^2(E, \mathscr{A}, P)$ tel que $\tilde{N}g = g$; on a

$$(g\tilde{N}, g)_{L^2} = (g, \tilde{N}g)_{L^2} = \| g \|_{L^2}^2 \qquad \text{et} \qquad \| g\tilde{N} \|_{L^2} \leqslant \| g \|_{L^2},$$

d'où $g\tilde{N} = g$. Donc si $A \in \mathscr{A}$ est tel que $\tilde{N}\tilde{I}_A = \tilde{I}_A$ et $P(A) \neq 0$, alors A^c est P-négligeable, ce qui prouve que $\tilde{N}$ est ergodique.

Remarques.

1) Si l'on ne suppose pas que X est séparable, le théorème 1 reste vrai en supposant de plus qu'existe $x_0 \in X$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ les probabilités $N^n(x_0, dy)$ sont de Radon (Comme précédemment, on montre que cette suite vérifie la condition de Prokhorov).

2) Sous les hypothèses du théorème 1, il n'y a pas en général unicité des mesures σ-finies positives invariantes. Par exemple si $X = \mathbb{R}$ et $Nf(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$. Alors $\gamma = \varepsilon_0$ (ε_x désigne la mesure de Dirac en x) et si $x \in \mathbb{R}\backslash\{ 0 \}$, la mesure $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon_{2^n x}$ est invariante par N ; il en résulte que N ne vérifie pas la condition de Harris. On donnera un autre exemple de ce dernier phénomène dans le paragraphe IV, pour lequel le support de γ est X.

3) Soient N_i (resp. N) une suite de probabilités de transition (resp. une probabilité de transition) sur X vérifiant les hypothèses du théorème 1 avec $\theta = \sup_i \theta_i < 1$, telle qu'existe $x_0 \in X$ avec $\sup \int d(x_0, y) N_i(x_0, dy) < +\infty$ et que $\lim_{i\uparrow\infty} N_i f(x) = Nf(x)$ pour tous $f \in L^b(X)$ et $x \in X$. Désignons par γ_i (resp. γ) l'unique probabilité invariante par N_i (resp. N). Alors $\lim_{i\uparrow\infty} \gamma_i = \gamma$ étroitement.

En effet si $f \in L(X)$, on a d'après (1)

$$| N_i^n f(x_0) - \gamma_i(f) | \leqslant \frac{\theta^n}{1-\theta}[f] \int d(x_0, y) N_i(x_0, dy),$$

d'où

$$\overline{\lim_i}\ \gamma_i(f) \leqslant N^n f(x_0) + \frac{\theta^n}{1-\theta}[f] \sup_i \int d(x_0, y) N_i(x_0, dy),$$

donc $\overline{\lim_i}\ \gamma_i(f) \leqslant \gamma(f)$ et aussi $\gamma(f) \leqslant \underline{\lim_i}\ \gamma_i(f)$; il en résulte que $\lim_i \gamma_i = \gamma$ étroitement.

4) On peut démontrer le théorème 1 en introduisant l'ensemble $\mathscr{P}$ des probabilités λ sur $(X, \mathscr{X})$ telles que $\int d(x, y) \lambda(dy) < +\infty$ pour tout

$x \in X$; muni de la distance $\bar{d}(\lambda, \mu) = \sup\limits_{[f] \neq 0, f \in L^b(X)} \dfrac{\left| \int f d\lambda - \int f d\mu \right|}{[f]}$, $\mathscr{P}$ est complet. D'autre part $\mathscr{P}$ est stable par N et pour tous $\lambda, \mu \in \mathscr{P}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\bar{d}(\lambda N^n, \mu N^n) \leqslant \theta^n \int d(x, y) \lambda(dx) \mu(dy) ;$$

donc si $\lambda \in \mathscr{P}$, alors

$$\sum_n \bar{d}(\lambda N^n, \lambda N^{n+1}) < +\infty .$$

5) Plus généralement le théorème 1 est vrai si l'on remplace $L^b(X)$ par un ensemble de fonctions numériques lipschitziennes bornées sur X, noté L, ayant les propriétés suivantes :

a) L engendre la tribu borélienne et est stable par N.

b) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C_\varepsilon \geqslant 0$ tel que pour tout compact K il existe $\varphi \in L$, $[\varphi] \leqslant C_\varepsilon$ et un compact $K' \supset K$ tels que $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\varphi = 0$ sur K et $\varphi = 1$ sur $((K')_\varepsilon)^c$.

c) Il existe $\theta \in [0, 1[$ tel que pour tous $f \in L$, on ait $[Nf] \leqslant \theta[f]$. Ceci permet d'appliquer le théorème 1 sur un espace $(X, d) = (X_1, d_1) \times (X_2, d_2)$ aux probabilités de transition $N_1 \otimes N_2$ où N_1 (resp. N_2) vérifie les hypothèses du théorème 1 sur (X_1, d_1) (resp. sur (X_2, d_2)), L étant l'ensemble des fonctions $f_1 \otimes f_2$ avec $f_1 \in L^b(X_1)$ et $f_2 \in L^b(X_2)$.

II. PROPRIÉTÉ DE RÉCURRENCE

Dans ce paragraphe nous utilisons les opérateurs U_h introduits dans [7].

On désigne par H l'ensemble des fonctions boréliennes sur X à valeurs dans [0, 1]. Si $h \in H$ et si N est une probabilité de transition sur $(X, \mathscr{X})$, on pose

$$U_h^N = \sum_{n \in \mathbb{N}} (NI_{1-h})^n N ,$$

où I_f est l'opérateur de multiplication par f (on a remplacé $1_X - h$ par $1 - h$).

PROPOSITION 3. — *Pour que* $U_h^N h = 1_X$, *il faut et il suffit que pour tout* $x \in X$ *on ait* $\lim\limits_{n \uparrow \infty} (NI_{1-h})^n 1_X(x) = 0$.

Démonstration. — En effet pour tout $x \in X$, on a

$$U_h^N h(x) = \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{p=0}^{n} (NI_{1-h})^p N h(x)$$

$$= \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{p=0}^{n} (NI_{1-h})^p (1_X - N(1_X - h))(x) = \lim_{n \uparrow \infty} (1_X - (NI_{1-h})^{n+1} 1_X(x)$$

PROPOSITION 4. — *Soit* N *une probabilité de transition sur* $(X, \mathscr{X})$ *vérifiant les hypothèses du théorème* 1. *Si* $h \in H \cap L^b(X)$ *et* $\gamma(h) > 0$, *alors* $U_h^N h = 1_X$.

Démonstration. — Soit $h \in H \cap L^b(X)$ et posons $\varphi_n = (NI_{1-h})^n 1_X$ et $\varphi = \lim_{n \uparrow \infty} \varphi_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $[(NI_{1-h})^n 1_X] \leqslant (\theta + \theta^2 + \ldots + \theta^n)[h]$, donc $[\varphi_n] \leqslant \dfrac{\theta}{1-\theta}[h]$ et $\varphi \in L^b(X)$. On a $NI_{1-h}\varphi = \varphi$, d'où $\varphi \leqslant N\varphi$. La suite $(N^n\varphi)_n$ est croissante et converge simplement vers $\gamma(\varphi)$ d'après le théorème 1 car $\varphi \in L^b(X)$, d'où $\varphi \leqslant \gamma(\varphi)$. Par conséquent

$$\varphi = N(1-h)\varphi \leqslant \gamma(\varphi)N(1-h),$$

d'où

$$\gamma(\varphi) \leqslant \gamma(\varphi)(1-\gamma(h)) \qquad \text{et} \qquad \gamma(\varphi)\gamma(h) \leqslant 0.$$

Donc si $\gamma(h) > 0$ on a $\gamma(\varphi) = 0$, d'où $0 \leqslant \varphi \leqslant \gamma(\varphi) = 0$, ce qui entraîne que $U_h^N h = 1_X$ d'après la proposition 3.

COROLLAIRE. — *Soit* N *une probabilité de transition vérifiant les hypothèses du théorème* 1. *Pour tout borélien d'intérieur non vide* A *et non* γ*-négligeable la probabilité de visiter une infinité de fois* A *est identique à* 1.

En effet il existe $h \in H \cap L^b(X)$ tel que $0 \leqslant h \leqslant 1_A$ et $\gamma(h) > 0$. Or $1_X = U_h^N h \leqslant U_{1_A}^N 1_A \leqslant 1_X$. D'où $U_{1_A}^N 1_A = 1_X$.

III. L'OPÉRATION POTENTIEL DE LA CHAÎNE

PROPOSITION 5. — *Soient* N *une probabilité de transition sur* $(X, \mathscr{X})$ *vérifiant les hypothèses du théorème* 1 *et* f *une fonction numérique lipschitzienne sur* X *telle que* $\gamma(f) = 0$. *Il existe une fonction numérique lipschitzienne* g *telle que* $(I - N)g = f$, *unique à l'addition d'une fonction constante près ; nous désignerons par* Vf *l'unique solution telle que* $\gamma(Vf) = 0$.

Démonstration. — Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$, on a

$$| N^n f(x) - N^{n+1} f(x) | \leqslant \theta^n [f] \int d(x, y) N(x, dy),$$

d'où pour tout $m \geqslant n$

$$(3) \qquad | N^n f(x) - N^m f(x) | \leqslant \frac{\theta^n}{1 - \theta} [f] \int d(x, y) N(x, dy).$$

Or $\lim\limits_{m \uparrow \infty} N^m f(x) = \gamma(f) = 0$, d'après (1).

D'où

$$| N^n f(x) | \leqslant \frac{\theta^n}{1 - \theta} [f] \int d(x, y) N(x, dy),$$

donc $\lim\limits_{n \uparrow \infty} (I + N + \ldots + N^n) f(x)$ existe ; désignons par $Vf(x)$ la limite.

On a $[(I + N + \ldots + N^n) f] \leqslant \dfrac{1}{1 - \theta} [f]$ donc Vf est lipschitzienne, et $(I - N)(I + N + \ldots + N^n) f = f - N^{n+1} f$, d'où $(I - N) Vf = f$ d'après le théorème de Lebesgue.

Soient g_1 et g_2 des fonctions lipschitziennes telles que

$$(I - N) g_1 = (I - N) g_2 = f.$$

On a $(I - N)(g_1 - g_2) = 0$, donc $g_1 - g_2$ est constante d'après (1).

On pose $L_\gamma = \{ f \in L(X), \gamma(f) = 0 \}$, $L^b_\gamma = \{ f \in L^b(X), \gamma(f) = 0 \}$ et et $\mathscr{L}^\infty$ désigne l'espace des fonctions numériques sur X, $\mathscr{X}$-mesurables ; $(L_\gamma, [\ ])$ est un espace de Banach, car

$$| f(x) | = \left| \int (f(x) - f(y)) \gamma(dy) \right| \leqslant [f] \int d(x, y) \gamma(dy).$$

On désigne par $\mathscr{B}$ l'ensemble des fonctions numériques lipschitziennes sur X et nulles hors d'un borné, et $\mathscr{B}_\gamma = \{ f \in \mathscr{B}$ et $\gamma(f) = 0 \}$.

Dans la suite de ce paragraphe nous n'utiliserons que la topologie de la norme de l'espace de Banach $(L_\gamma, [\ ])$, et la topologie faible $\sigma(\mathscr{L}^\infty, \mathscr{M}^b)$ ($\mathscr{M}^b$ désigne l'espace des mesures bornées sur X).

PROPOSITION 6. — *L'opérateur potentiel* V *de la chaîne* N *a les propriétés suivantes :*

1) $[Vf] \leqslant \dfrac{1}{\alpha + 1 - \theta} [(I + \alpha V) f]$ *pour tous* $\alpha \geqslant 0$ *et* $f \in L_\gamma$, *et* V *est une bijection de* L_γ.

2) *Posons* $\mathscr{V} = \{ f \in L^b_\gamma, Vf \in L^b_\gamma \}$. *Alors* $\bar{\mathscr{V}}$ *(adhérence dans* L_γ*) est stable par* V.

3) *(Principe semi-complet du maximum).*
Si $f \in L_\gamma$ *n'est pas* γ*-négligeable, alors* $Vf - f \leqslant \sup_{f>0} Vf$.
4) *(Principe du maximum récurrent).*
Soient A *un ouvert de* X *tel que* $\gamma(A) > 0$, $f_i \in L_\gamma^b$ *un filtre tel que* $Vf_i \in L_\gamma^b$ *et qu'existent* $\varphi \in \mathscr{L}^\infty$ *et* $\psi \in \mathscr{L}^\infty$ *avec* $\lim_i f_i = \varphi$ *et* $\lim_i Vf_i = \psi$ *pour la topologie* $\sigma(\mathscr{L}^\infty, \mathscr{M}^b)$ *et que* $\{\varphi > 0\} \subset A$. *Alors* $\psi - \varphi \leqslant \sup_A \psi$.

Démonstration :

1) Posons $P_t = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} N^n$ si $t \geqslant 0$ et $V_\alpha = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t dt$ si $\alpha > 0$. Pour tous $f \in L(X)$, $t > 0$ et $\alpha > 0$, on a $P_t f \in L(X)$ (car (1) montre que pour tout $x \in X$ la suite $\left\{ \int d(x, y) N^n(x, dy) \right\}$ est bornée), $V_\alpha f \in L(X)$ et

$$(4) \qquad [P_t f] \leqslant e^{-(1-\theta)t}[f] \qquad \text{et} \qquad [V_\alpha f] \leqslant \frac{1}{\alpha + 1 - \theta}[f].$$

Ensuite (P_t) est un semi-groupe fortement continu sur L_γ, admettant $N - I$ pour générateur. Donc

$$(5) \qquad V_\alpha(\alpha - (N - I)) = I \qquad \text{sur} \qquad L_\gamma$$

d'où

$$(6) \qquad V_\alpha(I + \alpha V) \quad = V \qquad \text{sur} \qquad L_\gamma$$

et par conséquent d'après (4) on a

$$[Vf] \leqslant \frac{1}{\alpha + 1 - \theta}[(I + \alpha V)f].$$

De (6) et (4) il résulte que $\lim_{\alpha \downarrow 0} V_\alpha f = Vf$ si $f \in L_\gamma$, donc

$$(I - N)V = I = V(I - N) \qquad \text{sur} \qquad L_\gamma,$$

d'après (5). Ceci montre que V est une bijection de L_γ.

2) La relation $V = V_\alpha + V\alpha V_\alpha$ sur L_γ montre que si $f \in \mathscr{V}$ alors $V\alpha V_\alpha f \in \mathscr{L}^\infty$ car $V_\alpha f \in \mathscr{L}^\infty$, donc $\alpha V_\alpha f \in \mathscr{V}$. Or on a vu que $\lim_{\alpha \downarrow 0} V_\alpha f = Vf$ si $f \in L_\gamma$, donc $Vf \in \bar{\mathscr{V}}$ si $f \in \mathscr{V}$.

3) D'après la remarque 1 suivant le théorème 4 de [9] (qui est applicable car $|Vf| \leqslant u + vd(., a)$ avec $u, v \in \mathbb{R}_+$ et $a \in X$), si $f \in L_\gamma$ n'est pas γ-négligeable, alors $Vf - f \leqslant \sup_{f>0} Vf$ car $\{f > 0\}$ n'étant pas négligeable, est récurrent d'après le corollaire de la proposition 4.

En particulier, si de plus $f \in \mathscr{B}_\gamma$ alors $\{ f > 0 \}$ est borné (relativement à d) donc $\sup_{f>0} Vf < +\infty$, par conséquent Vf est bornée supérieurement ainsi que $V(-f)$, donc $Vf \in \mathscr{L}^\infty$.

4) D'après le corollaire de la proposition 4, A est récurrent ; donc la conclusion résulte directement du théorème 3 de [9].

Remarques :

1) Si $f \in L_\gamma$ est nulle sur le support de γ, il en est de même de Vf. En effet $\int | N^n f | \, d\gamma \leqslant \int | f | \, d\gamma$ et $Vf = \sum_{n \in \mathbb{N}} N^n f$.

2) En général Vf n'est pas borné si f l'est. Dans l'exemple de la remarque 2) du paragraphe 1, $Vf(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ si $f \in L(X)$ et $f(0) = 0$. En particulier si $f(x) = x$ sur $[-1, +1]$, $f(x) = -1$ sur $]-\infty, -1]$ et $f(x) = 1$ sur $[1, +\infty[$, alors $Vf(2^p) \geqslant p$ ($p \in \mathbb{N}$), donc Vf n'est pas borné.

Réciproquement, on a la

PROPOSITION 7. — *Soient γ une probabilité sur $(X, \mathscr{X})$ telle que $d(a, .) \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{X} ; \gamma)$ pour tout $a \in X$, $\mathscr{V}$ un sous-espace vectoriel de L_γ^b tel que $\mathscr{B}_\gamma \subset \mathscr{V}$ et V une application linéaire de $\bar{\mathscr{V}}$ dans $\bar{\mathscr{V}}$ (l'adhérence de $\mathscr{V}$ dans L_γ) tels que*

0) $V(\mathscr{V}) \subset \bar{\mathscr{V}} \cap \mathscr{L}^\infty$.

1) *Il existe $\theta' \in]0, 1]$ tel que*

$$[Vf] \leqslant \frac{1}{\alpha + \theta'} [(I + \alpha V)f]$$

pour tous $\alpha \geqslant 0$ et $f \in \mathscr{V}$.

2) $Vf \leqslant \sup_{f>0} Vf$ *pour tout $f \in \bar{\mathscr{V}}$ tel que* $\sup f > 0$.

3) *Soient $f_i \in \mathscr{V}$ un filtre, φ et $\psi \in \mathscr{L}^\infty$ tels que $\lim_i f_i = \varphi$ et $\lim_i Vf_i = \psi$ pour la topologie $\sigma(\mathscr{L}^\infty, \mathscr{M}^b)$. Alors il existe des $x_n \in X$ tels que* $\lim_{n \uparrow \infty} \psi(x_n) = \sup \psi$ et $\lim_{n \uparrow \infty} \varphi(x_n) \geqslant 0$.

Alors il existe une unique résolvante markovienne mesurable $(V_\alpha)_{\alpha > 0}$ sur $(X, \mathscr{X})$ laissant $L^b(X)$ invariant et telle que $[V_\alpha f] \leqslant \frac{1}{\alpha + \theta'} [f]$ pour tous $\alpha > 0$ et $f \in L^b(X)$, et que $\lim_{\alpha \downarrow 0} [Vf - V_\alpha f] = 0$ si $f \in \mathscr{V}$; γ est invariante par αV_α et pour tous $x_1, x_2 \in X$ on a $d(x_1, .) \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{X} ; V_\alpha(x_2, dy))$ ($\alpha > 0$).

Démonstration :

a) L'hypothèse 1) montre que V est un opérateur codissipatif (voir [*4*]) et borné sur ($\bar{\mathscr{V}}$, [ ]). Il existe donc une unique résolvante de contraction $(U_\alpha)_{\alpha>0}$ sur $\bar{\mathscr{V}}$ telle que $\lim_{\alpha\downarrow 0} [Vf - U_\alpha f] = 0$ et $[U_\alpha f] \leqslant \frac{1}{\alpha+\theta'}[f]$ pour tout $f \in \bar{\mathscr{V}}$.

b) Si $f \in \bar{\mathscr{V}}$, alors

$$V(f - \alpha U_\alpha f) = U_\alpha f, \tag{7}$$

donc d'après 2) on a

$$\alpha U_\alpha f \leqslant \sup_{f-\alpha U_\alpha f>0} \alpha U_\alpha f \leqslant \sup f$$

si $\sup(f - \alpha U_\alpha f) > 0$, sinon $f \leqslant \alpha U_\alpha f$; or d'après *a*), on a

$$[f] \leqslant \alpha[U_\alpha f] \leqslant \frac{\alpha}{\alpha+\theta'}[f],$$

d'où $[f] = 0$, or $\gamma(f) = 0$ d'où $f = 0$. Donc $\alpha U_\alpha f \leqslant \sup f$ pour tout $f \in \bar{\mathscr{V}}$, d'où $U_\alpha(\bar{\mathscr{V}} \cap \mathscr{L}^\infty) \subset \mathscr{L}^\infty$.

c) Soit $f_i \in \bar{\mathscr{V}} \cap \mathscr{L}^\infty$ un filtre tel que $\lim_i f_i = \varphi \in \mathscr{L}^\infty$ et $\lim_i \alpha U_\alpha f_i = \psi \in \mathscr{L}^\infty$ pour $\sigma(\mathscr{L}^\infty, \mathscr{M}^b)$. D'après (7) et 3), il existe une suite $x_n \in X$ telle que $\lim \psi(x_n) = \sup \psi$ et $\lim(\varphi(x_n) - \psi(x_n)) \geqslant 0$, d'où

$$\psi \leqslant \sup \varphi \tag{8}$$

En particulier, si $\varphi = 0$ alors $\psi = 0$, ce qui montre que $U_\alpha \mid \bar{\mathscr{V}} \cap \mathscr{L}^\infty$ est fermable dans $\mathscr{L}^\infty$ pour $\sigma(\mathscr{L}^\infty, \mathscr{M}^b)$. Désignons par $\underline{V}_\alpha$ cette fermeture, dont le domaine $D(\underline{V}_\alpha)$ est contenu dans $\{ f \in \mathscr{L}^\infty, \gamma(f) = 0 \}$ et soit V_α le prolongement linéaire de $\underline{V}_\alpha$ à $D(\underline{V}_\alpha) \oplus \mathbb{R}1_X$ tel que $\alpha V_\alpha 1_X = 1_X$.

Pour tout $f \in D(V_\alpha)$, on a $f - \gamma(f)1_X \in D(\underline{V}_\alpha)$ et

$$\alpha V_\alpha(f - \gamma(f)1_X) \leqslant \sup(f - \gamma(f)1_X)$$

d'après (8), d'où $\alpha V_\alpha f \leqslant \sup f$.

Montrons que $\mathscr{B} \subset D(V_\alpha)$. En effet si $a \in \mathscr{B}$ et $f \in \mathscr{B}$, on a $f - \frac{\gamma(f)}{\gamma(a)} a \in \mathscr{B}_\gamma \subset \mathscr{V}$ et il existe une suite $a_n \uparrow 1_X$ telle que $\lim [a_n] = 0$, d'où

$$\lim_{n\uparrow\infty} \left[f - \frac{\gamma(f)}{\gamma(a_n)} a_n - (f - \gamma(f)1_X) \right] = \lim_{n\uparrow\infty} \frac{\gamma(f)}{\gamma(a_n)} [a_n] = 0,$$

donc $f - \gamma(f)1_X \in \bar{\mathscr{V}} \cap \mathscr{L}^\infty$ et $f \in D(V_\alpha)$.

Si $f_n \in \mathscr{B} \subset D(V_\alpha)$ et $f_n \downarrow 0$, alors $V_\alpha f_n \downarrow$ car V_α est positif et la limite est 0 d'après (8), donc d'après le théorème de Daniell, la restriction de αV_α à $\mathscr{B}$ est la restriction à $\mathscr{B}$ d'un noyau sous-markovien sur $(X, \mathscr{X})$, d'où $D(V_\alpha) = \mathscr{L}^\infty$ et ce noyau est en fait markovien.

La probabilité γ est invariante par αV_α par construction, donc si $f \in L^b$ alors $\int \alpha V_\alpha f d\gamma = \int f d\gamma$, d'où $\int \alpha V_\alpha(d(a, .))d\gamma < +\infty$ pour tout $a \in X$, donc $\alpha V_\alpha(x, d(a, .)) < +\infty$ pour γ-presque tout x, mais $x \mapsto \alpha V_\alpha(x, d(a, .))$ étant lipschitzienne elle est finie partout.

Remarque. — Si λ est une mesure bornée telle que $\lambda(1_X) = 0$ et que $\int d(x, y) | \lambda | (dy) < +\infty$ pour tout $x \in X$, j'ignore s'il existe une mesure bornée μ telle que $\mu(I - N) = \lambda$. Cependant pour tout $f \in L(X)$, on a

$$| \langle \lambda, N^n f \rangle | \leqslant \frac{\theta^n}{1-\theta}[f] \int \left(\int d(x, y) N(x, dy) \right) | \lambda | (dx) .$$

IV. APPLICATIONS

Soient H un espace de Hilbert séparable et V un sous-espace vectoriel dense de H muni d'une norme plus fine que celle de H, pour laquelle V est un espace de Banach reflexif séparable. On désigne par $\| . \|$ (resp. $| . |$, $\| . \|'$) la norme de V (resp. H, V'), par $(. , .)$ le produit scalaire de H et par $\langle . , . \rangle$ la forme bilinéaire canonique sur $V \times V'$.

Soient A une application de V dans V', B une application localement lipschitzienne de V dans $\underline{L}(H)$ ($\underline{L}(H)$ désigne l'ensemble des applications linéaires continues de H dans lui-même) et Q un opérateur nucléaire symétrique positif sur H tels que

(*i*) la restriction de A aux droites est continue lorsque V' est muni de la topologie faible,

(*j*) il existe $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $x \in V$ on ait $\| Ax \|' \leqslant a + b \| x \|$,

(*k*) il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\theta > 0$ tels que pour tout $x \in V$ on ait

$$\theta \| x \|^2 \leqslant \lambda | x |^2 + 2 \langle x, Ax \rangle - \mathrm{Tr}\, B(x)QB(x)^*$$

(Tr U désigne la somme des valeurs propres de l'opérateur nucléaire U),

(*l*) pour tous $x \in V$ et $y \in V$ on a

$$0 \leqslant \lambda | x - y |^2 + 2 \langle x - y, Ax - Ay \rangle - \mathrm{Tr}\, (B(x) - B(y))Q(B(x) - B(y))^*$$

Étant donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et $(W_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien à valeurs dans H de covariance Q, posons

$$\mathscr{H} = L^2(\Omega, \mathscr{A}, P\,;\, H) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{V} = L^2(\Omega, \mathscr{A}, P\,;\, V)\,.$$

D'après [8], pour tout $x \in H$ l'équation

$$y_t^x = x + \int_0^t B(y_s^x).dW_s - \int_0^t A(y_s^x)ds \tag{9}$$

admet une solution unique $y^x \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+\,;\,\mathscr{V}) \cap \mathscr{C}(\mathbb{R}_+\,;\,\mathscr{H})$ $\left(L^2_{loc}(\mathbb{R}_+\,;\,\mathscr{V})\right.$ est l'espace des classes de fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathscr{V}$ dont la restriction à tout intervalle $[0, T]$ est dans $L^2([0, T]\,;\,\mathscr{V})$ $(T > 0)$).

PROPOSITION 8. — *Outre les hypothèses précédentes, on suppose qu'existe* $\lambda' > 0$ *tel que pour tous* x *et* $y \in V$ *on ait*

$$\lambda' \,|\, x - y \,|^2 \leqslant 2 \langle x - y, Ax - Ay \rangle - \mathrm{Tr}\,(B(x) - B(y))Q(B(x) - b(y))^*.$$

Alors pour tout $t > 0$ *la probabilité de transition* N_t *sur* H *telle que pour tous* $f \in L^b(H)$ *et* $x \in H$ *on ait* $N_t f(x) = Ef \circ y_t^x$ *(Si* $g \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *on pose* $Eg = \int g dP$ *) vérifie les hypothèses du théorème* 1 *avec* $\theta = e^{-\frac{\lambda' t}{2}}$.

Démonstration. — Étant donnés x_1 et $x_2 \in H$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$y_t^{x_2} - y_t^{x_1} = x_2 - x_1 + \int_0^t (B(y_s^{x_2}) - B(y_s^{x_1})).dW_s - \int_0^t (A(y_s^{x_2}) - A(y_s^{x_1}))ds\,.$$

D'où d'après la formule de Itô (voir [8])

$$\begin{aligned} E\,|\, y_t^{x_2} - y_t^{x_1} \,|^2 = |\, x_2 - x_1 \,|^2 &+ \int_0^t E\,\mathrm{Tr}\,(B(y_s^{x_2}) - B(y_s^{x_1}))Q(B(y_s^{x_2}) - B(y_s^{x_1}))^* ds \\ &- \int_0^t 2E \langle y_s^{x_2} - y_s^{x_1}, A(y_s^{x_2}) - A(y_s^{x_1}) \rangle\, ds\,, \end{aligned}$$

donc

$$E\,|\, y_t^{x_2} - y_t^{x_1} \,|^2 \leqslant |\, x_2 - x_1 \,|^2 - \lambda' \int_0^t E\,|\, y_s^{x_2} - y_s^{x_1} \,|^2 ds$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, d'où

$$E\,|\, y_t^{x_2} - y_t^{x_1} \,|^2 \leqslant e^{-\lambda' t}\,|\, x_2 - x_1 \,|^2\,. \tag{10}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Si $f \in L^b(H)$, x_1 et $x_2 \in H$, on a

$$\begin{aligned} |\, N_t f(x_2) - N_t f(x_1) \,| &\leqslant E\,|\, f \circ y_t^{x_2} - f \circ y_t^{x_1} \,| \\ &\leqslant (E\,|\, f \circ y_t^{x_2} - f \circ y_t^{x_1} \,|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant e^{-\frac{\lambda'}{2} t}[f]\,|\, x_2 - x_1 \,| \end{aligned}$$

d'après (10). D'autre part $y_t^x \in L^2(\Omega, \mathscr{A}, P ; H)$, donc pour tout $x \in H$, $y \mapsto |y|$ est $N_t(x, dy)$-intégrable.

PROPOSITION 9. — *Outre les hypothèses de la proposition 8, on suppose que la famille* $(N_t)_{t>0}$ *est un semi-groupe* [*Ceci est réalisé si* $V = H$ *et* A *est localement lipschitzien* (*voir* [*11*]), *ou si* $B(x)$ *est l'application identique pour tout* $x \in V$ *(on utilise la méthode de résolution de* (9) *de* [*1*] *où les approximants sont des chaînes de Markov), et vraisemblablement dans tous les cas ; voir aussi* [*10*]]. *Alors le semi-groupe* $(N_t)_{t>0}$ *admet une probabilité invariante et une seule, notée* γ. *Si de plus il existe* $\lambda'' > 0$ *et* $q \geqslant 0$ *tels que pour tout* $x \in V$ *on ait*

$$(11) \qquad \lambda''|x|^2 - q \leqslant 2\langle x, Ax\rangle - \operatorname{Tr} B(x)QB(x)^*$$

alors $\int |y|^2\gamma(dy) \leqslant \frac{q}{\lambda''}$ *et pour tous* $x \in H$ *et* $f \in \mathscr{C}^b(H)$ ($\mathscr{C}^b(H)$ *est l'ensemble des fonctions numériques continues et bornées sur* H) *on a* $\lim_{t\uparrow\infty} N_t f(x) = \gamma(f)$.

Démonstration. — D'après le théorème 1 et la proposition 8, le noyau N_t admet une probabilité invariante et une seule γ_t pour $t > 0$, et pour tous $x \in H$ et $f \in \mathscr{C}^b(H)$ on a $\lim_{n\uparrow\infty} N_{nt}f(x) = \gamma_t(f)$. De plus si $f \in L^b(H)$ la convergence est uniforme sur tout borné ; en effet on a

$$|N_{nt}f(x) - N_{nt}f(y)| \leqslant e^{-\frac{\lambda'}{2}nt}[f]\,|x - y|$$

Pour tous $s > 0$ et $f \in L^b(H)$, on a

$$\int f d\gamma_t = \lim_{n\uparrow\infty} N_s(N_{nt}f) = \lim_{n\uparrow\infty} N_{nt}(N_s f) = \int N_s f d\gamma_t,$$

ce qui montre que γ_t est invariante par N_s, d'où $\gamma_t = \gamma_s$; désignons par γ cette probabilité.

On fait maintenant l'hypothèse supplémentaire (11). D'après [*8*], l'unique solution y_t^x de (9) vérifie

$$E|y_t^x|^2 = |x|^2 + \int_0^t E \operatorname{Tr} B(y_s^x)QB(y_s^x)^* ds - 2\int_0^t E\langle y_s^x, Ay_s^x\rangle\, ds,$$

d'où d'après (11)

$$E|y_t^x|^2 \leqslant |x|^2 + tq - \lambda''\int_0^t E|y_s^x|^2 ds,$$

donc

$$(12) \qquad \int |z|^2 N_t(x, dz) = E|y_t^x|^2 \leqslant |x|^2 e^{-\lambda'' t} + q\frac{1 - e^{-\lambda'' t}}{\lambda''}$$

et

$$\int |z|^2 \gamma(dz) \leqslant \lim_{n \uparrow \infty} \int |z|^2 \mathrm{N}_{nt}(x, dz) \leqslant \frac{q}{\lambda''}.$$

D'après (12), on a $\sup_{t \geqslant 0} \int |z|^2 \mathrm{N}_t(x, dz) < +\infty$, donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une boule $\mathrm{B}_{\mathrm{R}^\varepsilon} = \{ z, |z| \leqslant \mathrm{R}^\varepsilon \}$ telle que $\sup_{t \geqslant 0} \mathrm{N}_t 1_{(\mathrm{B}_{\mathrm{R}^\varepsilon})^c}(x) \leqslant \varepsilon$. Si $f \in \mathrm{L}^b(\mathrm{H})$ et $t \geqslant n$, on a

$$|\mathrm{N}_t f(x) - \gamma(f)| = |\mathrm{N}_{t-n}(\mathrm{N}_n f - \gamma(f)1_{\mathrm{X}})(x)| \leqslant \varepsilon \times 2 \| f \|_\infty + \sup_{y \in \mathrm{B}_{\mathrm{R}^\varepsilon}} |\mathrm{N}_n f(y) - \gamma(f)|,$$

or on a vu que $\lim_{n \uparrow \infty} \mathrm{N}_n f = \gamma(f) 1_{\mathrm{X}}$ uniformément sur tout borné, d'où $\lim_{t \uparrow \infty} \mathrm{N}_t f(x) = \gamma(f)$.

Lorsque A est linéaire et $\mathrm{B}(x)$ est l'identité de H pour tout $x \in \mathrm{V}$, on peut préciser les relations entre les propriétés asymptotiques des semi-groupes $(\mathrm{N}_t)_{t>0}$ et $\mathrm{S}_t = e^{-t\tilde{\mathrm{A}}}$, où $\tilde{\mathrm{A}}$ est l'opérateur non borné sur H de domaine $\{ x \in \mathrm{V} ; \mathrm{A}x \in \mathrm{H} \}$ et coïncidant avec A sur ce domaine. Si λ est une probabilité sur H et $a \in \mathrm{H}$, on désigne par λ sa transformée de Fourier et par $\tau_a(\lambda)$ l'image de λ par l'application $x \mapsto x + a$.

Dans ce cas, on montre que $\mathrm{N}_t(x, dy) = \tau_{\mathrm{S}_t x}(\lambda_t)(dy)$ où λ_t est la probabilité dont la transformée de Fourier est $\xi \mapsto e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \tilde{\mathrm{Q}}(\mathrm{S}_s^* \xi) ds}$, $\tilde{\mathrm{Q}}$ désignant la forme quadratique $\xi \mapsto (\xi, \mathrm{Q}\xi)$.

THÉORÈME 10. — *Soient* H *un espace de Hilbert séparable,* $\tilde{\mathrm{Q}}$ *une forme quadratique positive nucléaire sur* H *et* (S_t) *un semi-groupe fortement continu sur* H. *Désignons par* (N_t) *le semi-groupe de noyaux* $\tau_{\mathrm{S}_t x}(\gamma_t)(dy)$, *où* γ_t *est la probabilité dont la transformée de Fourier est* $\xi \mapsto e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \tilde{\mathrm{Q}}(\mathrm{S}_s^* \xi) ds}$.

Pour qu'existe une probabilité γ *telle que pour tout* $x \in \mathrm{H}$, $\mathrm{N}_t(x, dy)$ *converge étroitement vers* γ *lorsque* $t \uparrow \infty$, *il faut et il suffit que* $\lim_{t \uparrow \infty} |\mathrm{S}_t x| = 0$ *pour tout* $x \in \mathrm{H}$, *que* $\mathrm{R}(\xi) = \int_0^\infty \tilde{\mathrm{Q}}(\mathrm{S}_s^* \xi) ds < +\infty$ *pour tout* $\xi \in \mathrm{H}$ *et que* R *soit nucléaire.*

S'il en est ainsi, γ *est l'unique probabilité invariante par* (N_t) *et* $\hat{\gamma} = e^{-\frac{1}{2}\mathrm{R}}$.

Nécessité.

Soit $x \in \mathrm{H}$ et supposons que $\mathrm{N}_t(x, dy)$ converge étroitement vers γ lorsque $t \uparrow \infty$. Pour tout $\xi \in \mathrm{H}$, on a

$$\lim_{t \uparrow \infty} e^{i(\mathrm{S}_t x, \xi)} e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \tilde{\mathrm{Q}}(\mathrm{S}_s^* \xi) ds} = \hat{\gamma}(\xi),$$

d'où

$$|\hat{\gamma}(\xi)| = e^{-\frac{1}{2}\lim_{t\uparrow\infty}\int_0^t \tilde{Q}(S_s^*\xi)ds} \tag{13}$$

L'ensemble M des ξ tels que $\lim_{t\uparrow\infty}\int_0^t \tilde{Q}(S_s^*\xi)ds < +\infty$ est un sous-espace vectoriel de H. Donc si $M \neq H$, $H \setminus M$ est dense dans H ; or si $\xi \notin M$ on a $\hat{\gamma}(\xi) = 0$ d'après (13), d'où $\gamma = 0$ par continuité, ce qui est absurde. Donc pour tout $\xi \in H$, on a $R(\xi) = \int_0^\infty \tilde{Q}(S_s^*\xi)ds < +\infty$ et $|\hat{\gamma}| = e^{-\frac{1}{2}R}$, donc R est nucléaire (voir [2]).

Il est clair que γ est invariante et que la probabilité λ telle que $\hat{\lambda} = e^{-\frac{1}{2}R}$ est invariante. Comme l'hypothèse entraîne l'unicité, on a $\hat{\gamma} = e^{-\frac{1}{2}R}$ d'où $\lim_{t\uparrow\infty} e^{i(S_t x, \xi)} = 1$. Donc il existe $p(x, \xi) \in \mathbb{Z}$ tel que $\lim_{t\uparrow\infty}(S_t x, \xi) = 2\pi p(x, \xi)$. Or p est une forme bilinéaire mesurable à valeurs dans $\mathbb{Z}$, donc nulle, ce qui montre que $\lim_{t\uparrow\infty} S_t x = 0$ faiblement, et en particulier $\sup_{t\geq 0}|S_t x| = a < +\infty$. Montrons que $\lim_{t\uparrow\infty}|S_t x| = 0$. Soit λ_t la probabilité sur H dont la transformée de Fourier est $e^{-\frac{1}{2}\int_t^\infty \tilde{Q}\circ S_s^* ds.}$. On a

$$\int |x|^2 \lambda_t(dx) = \operatorname{Tr}\int_t^\infty \tilde{Q}\circ S_s^* ds.$$

Or

$$\lim_{t\uparrow\infty} \operatorname{Tr}\int_t^\infty \tilde{Q}\circ S_s^* ds = 0,$$

donc

$$\lim_{t\uparrow\infty}\int_{|x|>r}\lambda_t(dx) = 0 \tag{14}$$

pour tout $r > 0$, ce qui prouve que $\lim_{t\uparrow\infty}\lambda_t = \varepsilon_0$ étroitement, où ε_0 est la probabilité de Dirac en 0. D'autre part, $\gamma = \gamma_t * \lambda_t$ donc

$$\int f d\gamma - \int f d\gamma_t = \int \left\{ \int [f(x+y) - f(x)]\lambda_t(dy) \right\} \gamma_t(dx)$$

pour toute fonction numérique borélienne bornée f, d'où

$$\left| \int f d\gamma - \int f d\gamma_t \right| \leq 2\|f\|_\infty \int_{|y|\geq r}\lambda_t(dy) + \sup_{|a-b|\leq r}|f(a) - f(b)|, \tag{15}$$

et

$$(16)\quad \left| \int [f(y + S_t x) - f(y)]\gamma(dy) - \int [f(y + S_t x) - f(y)]\gamma_t(dy) \right| \leqslant 4 \| f \|_\infty \int_{|y| \geqslant r} \lambda_t(dy) + 2 \sup_{|a-b| \leqslant r} | f(a) - f(b) | .$$

Par hypothèse $\lim_{t\uparrow\infty} \int f d\tau_{S_t x}(\gamma_t) = \int f d\gamma$ pour $f \in \mathscr{C}^b(H)$ et $\lim_{t\uparrow\infty} \int f d\gamma_t = \int f d\gamma$ d'après (14) et (15), si f est une fonction numérique uniformément continue et bornée. Donc $\lim_{t\uparrow\infty} \int f(y + S_t x)\gamma(dy) = \int f d\gamma$ d'après (16) et (14), si f est une fonction numérique uniformément continue et bornée, ce qui prouve que $\lim_{t\uparrow\infty} \tau_{S_t x}(\gamma) = \gamma$ étroitement.

L'ensemble $\{ \tau_{S_t x}(\gamma), t \in \mathbb{R}_+ \}$ vérifiant la condition de Prokhorov, il existe un compact K tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ on ait $\int_{K - S_t x} d\gamma > \frac{1}{2}$ et $\int_K d\gamma > \frac{1}{2}$, d'où $K - S_t x \cap K \neq \emptyset$, c'est-à-dire $S_t x \in K - K$.

Pour toute suite $t_n \uparrow \infty$, la suite $S_{t_n} x$ est donc relativement compacte et converge faiblement vers 0 lorsque $n \uparrow \infty$. Donc il existe une sous-suite $t_{n'} \uparrow \infty$ telle que $\lim_{n\uparrow\infty} | S_{t_{n'}} x | = 0$; d'où $\lim_{t\uparrow\infty} | S_t x | = 0$.

Suffisance

Avec les notations précédentes, on doit montrer que si $\lim_{t\uparrow\infty} | S_t x | = 0$, alors

$$(17)\qquad \lim_{t\uparrow\infty} \int f(y + S_t x)\gamma_t(dy) = \int f d\gamma$$

pour tout $f \in \mathscr{C}^b(H)$. Or $(\gamma_t)_{t \geqslant 0}$ vérifie la condition de Prokhorov. En effet soit u l'opérateur nucléaire symétrique $\geqslant 0$ sur H tel que $R(x) = (x, ux)$ pour tout $x \in H$, et (e_n) une base orthonormale de H telle que $ux = \sum_n \lambda_n(x, e_n)e_n$ avec $\lambda_n \geqslant 0$ et $\sum_n \lambda_n < +\infty$, pour tout $x \in H$. On a

$$\int | ux |^2 \gamma_t(dx) = \sum_n \lambda_n^2 \int (x, e_n)^2 \gamma_t(dx) \leqslant \sum_n \lambda_n^2 \int (x, e_n)^2 \gamma(dx),$$

d'où

$$\sup_{t \geqslant 0} \int | ux |^2 \gamma_t(dx) \leqslant \sum_n \lambda_n^3 < +\infty.$$

Or u étant compact ceci montre que $(\gamma_t)_{t\geq 0}$ vérifie la condition de Prokhorov. De plus $\lim_{t\uparrow\infty} \gamma_t = \gamma$ simplement, donc $\lim_{t\uparrow\infty} \gamma_t = \gamma$ étroitement. D'autre part la famille $f(.+S_t x)$ converge uniformément sur tout compact vers f lorsque $t \uparrow +\infty$, si $f \in \mathscr{C}^b(\mathrm{H})$, d'où (17).

Remarques.

Supposons que $\mathrm{V} = \mathrm{H}$, $\mathrm{A} = \theta \mathrm{I}$ avec $\theta > 0$, que Q soit injective et H de dimension infinie. Alors les hypothèses du théorème 10 sont satisfaites.

1) Si $t > 0$ la probabilité de transition N_t ne vérifie pas la condition de Harris. Sinon pour tout $x \in \mathrm{H}$ on aurait $\gamma \ll \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \mathrm{N}_{nt}(x, .)$ (On écrit $\lambda \ll \mu$ si λ est absolument continue par rapport à μ). On sait qu'existe $a \in \mathrm{H}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $s > 0$, γ_{nt} et $\tau_a(\gamma_{nt})$ sont étrangères et que pour tous $b \in \mathrm{H}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ avec $m \neq n$, γ_{nt} et $\tau_b(\gamma_{mt})$ sont étrangères. Donc $\lambda = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \mathrm{N}_{nt}(0, .)$ et $\lambda' = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \mathrm{N}_{nt}(a, .)$ sont étrangères ; or $\gamma \ll \lambda$ et $\gamma \ll \lambda'$ ce qui est contradictoire.

2) Soit (e_n) une base orthonormale de H diagonalisant Q. Le plongement canonique de H dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ déterminé par (e_n) permet de prolonger chaque N_t en une probabilité de transition $\underline{\mathrm{N}_t}$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Comme l'image $\underline{\gamma_t}$ (resp. $\underline{\gamma}$) de γ_t (resp. γ) sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un produit tensoriel dénombrable de probabilités gaussiennes sur $\mathbb{R}$, $\underline{\mathrm{N}_t}$ est un produit tensoriel dénombrable de probabilités de transition vérifiant la condition de Harris. Si $\mathscr{X}_n$ est la tribu engendrée par les n premières coordonnées, $\mathscr{X}_n$ est invariante par $\underline{\mathrm{N}_t}$ et la restriction de $\underline{\mathrm{N}_t}$ à $\mathscr{X}_n$ vérifie la condition de Harris pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Soient $(\mathrm{X}, +)$ un groupe abélien topologique métrisable séparable et d une distance invariante par translation sur X, induisant la topologie et pour laquelle X est complet, λ une probabilité sur X telle que $\int d(0, x)\lambda(dx) < +\infty$ et S une application θ-lipschitzienne de X dans X. Alors la probabilité de transition $\mathrm{N}f(x) = \int f(y + \mathrm{S}x)\lambda(dy)$ vérifie les hypothèses du théorème 1. Les probabilités de transition N_t du théorème 8 sont de ce type ($t > 0$).

4) Lorsque H est de dimension finie et le générateur invariant par rotation la condition de la proposition 7 est à peine plus forte que celle de Khasminskii (voir [*5*]).

5) On trouvera dans [*10*] la détermination des probabilités invariantes

d'une diffusion sur un espace de Hilbert, d'un type différent de celles étudiées ici.

6) Signalons une application de la proposition 7 par Doss dans [*3*], en vue de l'étude de certaines probabilités quasi-invariantes sur un espace de Hilbert.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] A. BENSOUSSAN et R. TEMAM, Équations aux dérivées partielles stochastiques. *Israël J. of Math.*, t. **11**, n° 1, 1972.

[*2*] N. BOURBAKI, Intégration, chapitre 9.

[*3*] H. DOSS, *Quelques propriétés des processus de diffusion à valeurs dans un espace de Hilbert.* Thèse de 3e cycle, Paris VI, 1975.

[*4*] F. HIRSCH, Familles résolvantes, générateurs, cogénérateurs, potentiels. *Annales Inst. Fourier*, t. XXII, n° 1, 1972.

[*5*] R. Z. KHASMINSKII, Ergodic properties of recurrent diffusion processes. *Th. Prob. Appl.*, t. **5**, 1960, p. 179-196.

[*6*] J. NEVEU, *Bases mathématiques du calcul des probabilités.*

[*7*] J. NEVEU, Potentiel markovien récurrent des chaînes de Harris. *Ann. Inst. Fourier*, t. **22**, n° 2, 1972, p. 85-130.

[*8*] E. PARDOUX, *Équations aux dérivées partielles non linéaires.* Thèse, Orsay, 1975.

[*9*] C. SUNYACH, Étude des potentiels récurrents *(à paraître).*

[*10*] M. VIOT, Thèse, Orsay, 1975.

[*11*] M. YOR, Existence et unicité de diffusions à valeurs dans un espace de Hilbert. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, B-X, n° 1, 1974, p. 55-88.

(Manuscrit reçu le 31 octobre 1975)