ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

CLAUDE KIPNIS

Majoration des semi-groupes de contractions de L1 et applications

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, nº 4 (1974), p. 369-384

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_4_369_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. X, n° 4, 1974, p. 369-384. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Majoration des semi-groupes de contractions de L^1 et applications

par

Claude KIPNIS

Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique,
17, rue Descartes, 75230 Paris Cedex 05

ABSTRACT. — In order to deduce from the positive case, maximal ergodic lemmas in the non positive case, we study the existence of a dominating positive semi-group. Namely we prove that every contraction semi-group on « L^1 » is dominated by a unique minimal semi-group of positive contractions. A similar result is also obtained for resolvents. The third paragraph is devoted to applications in ergodic theory.

INTRODUCTION

En 1971, Akcoglu et Brunel [2] ont donné une nouvelle démonstration du théorème ergodique quotient général de Chacon-Ornstein. Un outil essentiel pour cela est l'existence du module linéaire d'un opérateur défini par Chacon et Krengel [5] [8]. Leur démonstration peut se transposer au cas d'un semi-groupe à un paramètre réel, quitte à introduire l'analogue, pour les semi-groupes, des modules linéaires. Le résultat essentiel de ce travail est le suivant : à tout semi-groupe de contractions d'un espace L^1, on associe un semi-groupe de contractions positives, majorant-minimal, dans un sens à préciser.

Nous rappelons au paragraphe 1 les principales propriétés des modules linéaires ainsi que leur comportement lors des passages à la limite.

Au paragraphe 2 nous établissons l'existence et l'unicité du semi-groupe majorant ainsi qu'un résultat analogue pour les familles pseudo-résolvantes. En dernier lieu nous étudions la continuité de ce semi-groupe pour différentes topologies. Dans le cas où le semi-groupe de départ est (C_0), ces résultats coïncident avec ceux de Y. Kubokawa [*10*].

Au paragraphe 3, consacré à quelques applications, nous utilisons le théorème de majoration pour démontrer des lemmes maximaux : le théorème ergodique quotient général, le théorème ergodique local de type abélien et un théorème local pour les semi-groupes s'en déduisent.

Je tiens à remercier ici A. Brunel et D. Revuz qui ont bien voulu s'intéresser à ce travail, ainsi que S. Tsurumi pour de fructueuses conversations à ce sujet.

I. MODULES LINÉAIRES

A. Rappels sur L^1 et L^∞.

Dans la suite de ce travail nous aurons besoin à plusieurs reprises de certaines propriétés de L^1. Nous les rappelons donc ci-dessous, ainsi que certaines notations dont nous ferons librement usage.

1. Soit m une mesure σ-finie sur l'espace $(X, \mathscr{A})$. Nous noterons :

$L^1_{\mathbb{C}}(m)$ l'espace de Banach des classes de fonctions à valeurs complexes de module intégrable.

L^1_+ le cône convexe des fonctions de $L^1_{\mathbb{C}}$ vérifiant $f \geq 0$ m-p. s.

$L^1_{\mathbb{R}}$ les classes de fonctions, vérifiant $\mathrm{Im} f = 0$ m-p. s.

$L^1(A)$ les fonctions vérifiant $(f \neq 0) \subset A$ m-p. s.

Munissons $L^1_{\mathbb{R}}$ de la structure d'ordre partiel $\succcurlyeq$ définie par $f \succcurlyeq g$ si $f \geq g$ m-p. s. $L^1_{\mathbb{R}}$ a alors une structure d'espace vectoriel topologique ordonné, de cône positif L^1_+, compatible avec la topologie définie par la norme.

2. Muni de cette structure d'ordre, $L^1_{\mathbb{R}}$ est un espace de Riesz complètement réticulé : c'est-à-dire que toute partie majorée non vide de $L^1_{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure dans $L^1_{\mathbb{R}}$.

Notons aussi au passage le *lemme de « localisation »* :

Soit $H \subset L^1_+$ admettant une borne supérieure g ; soit A tel que pour tout f de H on ait $(f \neq 0) \subset A$ m-p. s. alors on a aussi $(g \neq 0) \subset A$ m-p. s. Enfin nous utiliserons le

LEMME. — Soient $p \in L^1_+$ et l'ensemble $(p > 0) = A$. Alors les fonctions $f \in L^1_+$ vérifiant $f \leq p$ forment un sous-ensemble total de $L^1(A)$.

Preuve. — Soit $g \in L^1_+(A)$. Posons pour tout k de $\mathbb{N}$ $H_k = \{ g \geq kp \}$. Puisque $(g > 0) \subset A = (p > 0)$, on a : $m(H_k) \downarrow 0$. Donc, par le théorème de Lebesgue, pour tout ε, il existe un k tel que $\int_{H_k} g\,dm \leq \varepsilon$. Or g s'écrit :

$$g = g1_{H_k} + g1_{H_k^c} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{k} g1_{H_k^c} \leq p.$$

Le théorème suit par linéarité.

B. Modules linéaires.

Soit T un opérateur de L^1_C ; nous dirons que T est positif si T envoie le cône L^1_+ dans lui-même. Dans [5] Chacon et Krengel ont démontré le

Théorème. — Soit T un opérateur de L^1. Il existe un unique opérateur positif, noté $|T|$, vérifiant les propriétés suivantes :

a. pour toute fonction f de L^1, $|Tf| \leq |T||f|$

b. si un opérateur positif U vérifie, pour toute fonction f de L^1 la même inégalité $U|f| \geq |Tf|$, alors $U|f| \geq |T||f|$.

Proposition. — Soit T un opérateur continu de L^1, alors

1. $T \geq 0 \Rightarrow T = |T|$
2. $\||T|\| = \|T\|$

Si T_1 et T_2 sont deux opérateurs de L^1 :

3. $|T_1 + T_2| \leq |T_1| + |T_2|$
4. $|T_1 T_2| \leq |T_1||T_2|$
5. $|T_1 - T_2| \geq ||T_1| - |T_2||$.

Corollaire. — L'application : $T \mapsto |T|$ est continue dans la topologie *uniforme* des opérateurs.

Par contre, le fait que l'on ait pour toute fonction f de L^1 $\lim \|T_n f - Tf\|$ n'implique pas que l'on ait, $g \in L^1$, $\lim \||T_n|g - |T|g\| = 0$ [5].

Cependant nous avons le résultat de « minoration » des limites suivant [*8*].

Théorème. — Soit T_n convergeant vers T dans la topologie forte des opérateurs, alors pour toute $f \in L^1_+$, on a aussi :

$$\lim_{n \to 0} \|(|T_n|f - |T|f)^-\| = 0.$$

Corollaire. — Soient T_n convergeant vers T et $f \in L^1_+$ vérifiant $\overline{\lim} \||T_n|f\| \leq \||T|f\|$, alors on a aussi

$$\lim_{n \to +\infty} \||T_n|f - |T|f\| = 0.$$

Preuve. — Il suffit d'après le théorème précédent de prouver $\lim \| (|T_n| f - |T| f)^+ \| = 0$. Or

$$|T_n| f = |T_n| f - |T| f + |T| f$$
$$= |T| f + (|T_n| f - |T| f)^+ - (|T_n| f - |T| f)^-$$
$$\| |T| f \| \geq \overline{\lim} \| |T_n| f \| = \| |T| f \| + \overline{\lim} \| (|T_n| f - |T| f)^+ \|$$

ce qui nécessite $\overline{\lim} \| (|T_n| f - |T| f)^+ \| = 0$.

II. MAJORATION DES SEMI-GROUPES ET RÉSOLVANTES

A. Dans le cas d'une contraction de $L^1_{\mathbb{C}}$, Akcoglu et Brunel [3] ont prouvé, à l'aide de l'opérateur $\tau = |T|$, un théorème ergodique quotient. La technique employée pour prouver ce théorème consiste à se ramener au cas positif (théorème de Chacon-Ornstein) en remarquant que le semi-groupe $(\tau^n)_{n \geq 0}$ « majore » le semi-groupe $(T^n)_{n \geq 0}$ au sens suivant : pour tout $n \geq 0$ et tout $f \in L^1$ on a $|T^n f| \leq \tau^n |f|$.

Dans le cas discret le semi-groupe (τ^n) s'introduit naturellement comme *le plus petit* semi-groupe positif majorant (T^n). Par analogie dans le cas continu on désirerait prendre comme semi-groupe majorant la famille $(\mathcal{T}_t)$ des modules linéaires des $(T_t)_{t \geq 0}$. Malheureusement en général on n'a que l'inégalité $\mathcal{T}_{t+s} \leq \mathcal{T}_t \mathcal{T}_s$ qui peut être stricte.

Néanmoins, dans le cas d'un semi-groupe de contractions, on peut construire un plus petit semi-groupe majorant.

THÉORÈME. — Soit $(T_t)t > 0$ (resp. $t \geq 0$) un semi-groupe de contractions de L^1, alors il existe un unique semi-groupe de contractions positives défini pour $t > 0$ (resp. $t \geq 0$), noté S_t, vérifiant :

a. pour toute fonction f de L^1, on a $|T_t f| \leq S_t |f|$,

b. si U_t est un semi-groupe de contractions positives vérifiant pour $f \in L^1$, $|T_t f| \leq U_t |f|$, alors nécessairement $U_t |f| \geq S_t |f|$ m-p. s. pour tout t.

Preuve. — Soit $t > 0$ fixé. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[0, t]$ $(s) \in \mathcal{S} = 0 < s_1 < \ldots < s_n = t$. Définissons sur $\mathcal{S}$ l'ordre $\succ$ de la manière suivante : on dit que $(s) \succ (s')$ si et seulement si (s) est un raffinement de (s'). Avec cet ordre, $\mathcal{S}$ est filtrant croissant. Posons, pour $f \in L^1_+$ fixé et (s) dans $\mathcal{S}$

$$P_{(s)} = \mathcal{T}_{s_1} \mathcal{T}_{s_2 - s_1} \ldots \mathcal{T}_{s_n - s_{n-1}} f$$

qui est un élément de L^1_+ et de plus l'application définie sur $\mathcal{S}$, $(s) \in \mathcal{S} \mapsto \Phi_{(s)}$

est monotone croissante. On le vérifie facilement en rajoutant un point à la subdivision (s) grâce à l'inégalité $\mathcal{T}_{t+s} \leq \mathcal{T}_t \mathcal{T}_s$. Comme de plus : $\| \mathcal{T}_t \| = \| T_t \| \leq 1$ pour tout $t > 0$, on voit que $\Phi_{(s)}$ vérifie $\| \Phi_{(s)} \|_1 \leq \| f \|_1$. On pose alors

$$S_t f = \sup \Phi_{(s)} = \lim_{\mathcal{S}} \uparrow \Phi_{(s)} .$$

1. S_t est une contraction positive de L^1.

2. S_t est additif et positivement homogène sur L^1_+ (l'homogénéité est évidente). Montrons l'additivité ; soient $f, g \in L^1_+$ on a :

$$\begin{aligned} \| S_t(f+g) - S_t f - S_t g \| \leq & \| S_t(f+g) - \mathcal{T}_{\alpha_1} \dots \mathcal{T}_{\alpha_n}(f+g) \| \\ & + \| S_t f - \mathcal{T}_{\alpha_1} \dots \mathcal{T}_{\alpha_n} f \| \\ & + \| S_t g - \mathcal{T}_{\alpha_1} \dots \mathcal{T}_{\alpha_n} g \| . \end{aligned}$$

Prenant une subdivision suffisamment fine de $[0, t]$, $\varepsilon > 0$ étant donné :

$$\| S_t(f+g) - S_t f - S_t g \| \leq \varepsilon .$$

3. $S_t \circ S_{t'} = S_{t+t'}$.

Remarquons que si $0 < s_1 < s_2 \dots < s_n = t\,(s)$

$$0 < s'_1 < s'_2 < \dots < s'_k = t'(s')$$

Alors $(s) * (s') = 0 < s_1 < \dots < s_n = t < t + s'_1 < \dots < t + s'_k = t + t'$ est une subdivision de $[0, t+t']$ (l'opération est non commutative).

Soient $\varepsilon > 0$ et $f \in L^1_+$, il existe s_ε et s'_ε tels que si $s \succ s_\varepsilon$ et $s' \succ s_\varepsilon$ on ait :

$$\begin{aligned} &\| S_t f - \mathcal{T}_{t_1} \dots \mathcal{T}_{t_n} f \| \leq \varepsilon \qquad \text{où} \qquad t_i = s_i - s_{i-1} \\ &\| S_{t'} S_t f - \mathcal{T}_{t_1} \dots \mathcal{T}_{t_k} S_t f \| \leq \varepsilon \qquad t'_i = s'_i - s'_{i-1} . \end{aligned}$$

Prenons $s''_\varepsilon \succ s_\varepsilon * s'_\varepsilon$ telle que pour $s \succ s''_\varepsilon$

$$\| S_{t+t'} f - \mathcal{T}_{t_1} \dots \mathcal{T}_{t_q} f \| < \varepsilon .$$

Alors puisque pour tout t, $\mathcal{T}_t$ est une contraction :

$$\begin{aligned} \| S_{t+t'} f - S_t . S_{t'} f \| \leq & \| S_{t+t'} f - \mathcal{T}_{t_1} \dots \mathcal{T}_{t_q} f \| \\ & + \| \mathcal{T}_{t_1} \dots \mathcal{T}_{t_k} \mathcal{T}_{t_{k+1}} \dots \mathcal{T}_{t_p} f - \mathcal{T}_{t_1} \dots \mathcal{T}_{t_k} S_{t'} f \| \\ & + \| \mathcal{T}_{t_1} \dots \mathcal{T}_{t_k} S_{t'} f - S_t . S_{t'} f \| \\ \leq & \; 3\varepsilon . \end{aligned}$$

4. Si le semi-groupe T_t est défini pour $t \geq 0$, alors le module linéaire de T_0, soit $\mathcal{T}_0$, vérifie toute fonction p de L^1_+ et tout réel positif t : $\mathcal{T}_0 \mathcal{T}_t p \geq \mathcal{T}_t p$ et donc $\mathcal{T}_0 \mathcal{T}_t = \mathcal{T}_t$.

Si nous posons alors $S'_0 = \mathcal{T}_0$, et pour toute subdivision (s)

$$P'_{(s)} = \mathcal{T}_{s_1} \mathcal{T}_{s_2 - s_1} \dots \mathcal{T}_{s_n - s_{n-1}} \mathcal{T}_0 f,$$

et S'_t la limite suivant le filtre des sections de P'_s, le même raisonnement que précédemment montre que S'_t est un semi-groupe.

5. En dernier lieu S_t vérifie bien la propriété b de minimalité : si U_t vérifie pour f de L^1 $|T_t f| \leq U_t|f|$, alors

$$U_t|f| = U_{t_1} \ldots U_{t_n}|f| \geq \mathscr{T}_{t_1} \ldots \mathscr{T}_{t_n}|f|$$

d'après la caractérisation du module linéaire. ■

Par ailleurs, le semi-groupe ainsi obtenu est aussi régulier que T_t l'est comme le prouve le

THÉORÈME. — Soit S_t le semi-groupe positif associé au semi-groupe de contractions de L^1, T_t. Alors :

1) Si T_t est continu à droite dans la topologie forte des opérateurs pour $t > 0$ (resp. $t \geq 0$), alors S_t est continu à droite sur $t > 0$ (resp. $t \geq 0$).

2) Si T_t est continu à droite dans la topologie uniforme des opérateurs, alors S_t aussi.

Preuve. — 2) On vérifie que si le semi-groupe T_t est de la forme e^{tA} pour A opérateur borné de L^1, on a alors $|T_t| \leq S_t \leq e^{t(|A+\lambda I|-\lambda I)}$ pour tout nombre $\lambda > 0$ et la continuité en norme s'ensuit.

1) Notons d'abord que l'application $t \to \mathscr{T}_t$ est continue à droite pour tout $t > 0$ (resp. $t \geq 0$). En effet, soit $t_0 \geq 0$, on a pour tout $s > 0$ et tout élément f de L^1_+ : $\mathscr{T}_{t_0+s}f \leq \mathscr{T}_s\mathscr{T}_{t_0}f$ et donc $\|\mathscr{T}_{t_0+s}f\| \leq \|\mathscr{T}_{t_0}f\|$. L'assertion résulte alors du Corollaire; pour prouver la continuité forte, il suffit de montrer, pour f non négative, $\lim \|(S_tf - S_{t+s}f)^+\| = 0$ quand s tend vers 0.

Or par définition de $S_{t+s}f$ on a :

$$(S_tf - S_{t+s}f)^+ \leq (S_tf - \mathscr{T}_{s+t_1}\mathscr{T}_{t_2} \ldots \mathscr{T}_{t_p}f)^+$$

pour tout découpage $(t_1, \ldots, t_p)$ de $[0, t]$. De plus $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe un découpage $t_1, \ldots, t_p$ tel que $\|S_tf - \mathscr{T}_{t_1} \ldots \mathscr{T}_{t_p}f\| \leq \varepsilon$. D'où :

$$\begin{aligned}\|(S_tf - S_{t+s}f)^+\| &\leq \|S_tf - \mathscr{T}_{s+t_1} \ldots \mathscr{T}_{t_p}f\| \\ &\leq \varepsilon + \|\mathscr{T}_{t_1} \ldots \mathscr{T}_{t_p}f - \mathscr{T}_{s+t_1} \ldots \mathscr{T}_{t_p}f\|.\end{aligned}$$

En faisant tendre s vers 0, par continuité à droite de $\mathscr{T}_t$ on tire $\lim \|(S_tf - S_{t+s}f)^+\| = 0$.

Remarque. — 1) On sait que tout semi-groupe (C_0) vérifie une inégalité du type $\|T_t\| \leq Me^{\omega t}$. Il est facile de voir que la majoration exponentielle $e^{\omega t}$ n'apporte pas de difficulté supplémentaire : $(e^{-\omega t}T_t)$ est alors à contraction...).

Par contre, l'hypothèse $M \leq 1$ est essentielle.

Considérons en effet l'exemple suivant :

Soient $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathscr{A}$ la tribu $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, $m = \sum_{n \geq 0} \delta_n$ la mesure de comptage ;

$L^1(\Omega, \mathscr{A}, m)$ est alors $l^1(\mathbb{N})$. Considérons le semi-groupe T_t défini comme suit: si $x = (x_n)$ alors $y = T_t x$ est la suite (y_n) définie par :

$$y_{2p} = x_{2p} \cos pt - x_{2p+1} \sin pt$$
$$y_{2p+1} = x_{2p} \sin pt + x_{2p+1} \cos pt .$$

On voit facilement alors que pour t *irrationnel* $\| T_t \| = \sqrt{2}$. Mais dans ce cas le module linéaire $\mathscr{T}_t$ est l'opérateur défini par $(\mathscr{T}_t x) = z$

$$z_{2p} = x_{2p} | \cos pt | + x_{2p+1} | \sin pt |$$
$$z_{2p+1} = x_{2p} | \sin pt | + x_{2p+1} | \cos pt | .$$

Soit $e_p = (x_p^k)$ avec

$$\begin{cases} x_p = 1 \quad \text{si} \quad k = 2p \qquad \text{ou} \qquad k = 2p + 1 \\ \quad = 0 \ \text{sinon} . \end{cases}$$

Alors e_p est propre pour $\mathscr{T}_t$, c'est-à-dire

$$\mathscr{T}_t e_p = (| \cos pt | + \sin pt |) e_p \quad \text{pour } \textit{tout } t.$$

Mais supposons maintenant qu'il existe un semi-groupe S_t positif majorant $\mathscr{T}_t$. Alors nécessairement, pour tout n, $S_t \geq (\mathscr{T}_{t/n})^n$. De

$$(\mathscr{T}_{t/n})^n ep = \left(\left| \cos \frac{pt}{n} \right| + \left| \sin \frac{pt}{n} \right| \right)^n e_p$$

on tire :

$$\| S_t \| \geq \left(\left| \cos \frac{pt}{n} \right| + \left| \sin \frac{pt}{n} \right| \right)^n .$$

Faisant tendre n vers l'infini, on a donc $\| S_t \| \geq e^{pt}$ et ceci pour tout p, ce qui est contradictoire avec la continuité de S_t.

Le semi-groupe T_t *n'admet pas de majorant.*

2) Dans le cas où le semi-groupe est continu à l'origine, ce théorème peut se démontrer d'une autre façon en construisant S_t sur les dyadiques, c'est-à-dire :

Soit D l'ensemble des dyadiques, D_p ceux qui peuvent s'écrire $\dfrac{k}{2p}$. On considère les semi-groupes *discrets* définis sur D_p comme suit: si $\dfrac{k}{2^p} = d \in D_p$, on pose $L_d^p = (\mathscr{T}_{2^{-p}})^k$.

On remarque que $f \in L_+^1$ et $d \in D_p \subset D_{p+k}$ vérifient l'inégalité $L_d^p f \leq L_d^{p+k} f$. On pose alors:

$$S_d f = \lim_{n \to \infty} L_d^{p+n} f.$$

S_d est alors un semi-groupe positif majorant (T_t) « sur les dyadiques ». On vérifie (mêmes calculs) que, pour tout $f \in L_+^1$,

$$\lim_{d \to 0^+} \| S_d f - f \| = 0$$

et on prolonge par continuité $(S_d)_{d\in D}$ en $(S_t)_{t\geq 0}$. (T_t) étant (C_0) on a alors par une extraction de sous-suite, pour tout $f \in L^1$:

$$S_t |f| \leq |T_t f|.$$

Ce théorème a été démontré indépendamment par Y. Kubokawa avec une démonstration analogue à celle ci-dessus (non encore publiée, elle m'a été aimablement montrée par M. S. Tsurumi). Kubokawa utilise ce théorème pour démontrer un théorème limite local [*10*].

B. Les résolvantes sont à beaucoup de points de vue très proches des semi-groupes. Nous avons donc un théorème analogue pour celles-ci :

THÉORÈME. — Soit (V_λ) une résolvante à contraction (i. e. $\lambda > 0$, $\|\lambda V_\lambda\| \leq 1$), alors il existe une plus petite résolvante notée W_λ, sous-markovienne « majorant » V_k, c'est-à-dire vérifiant, pour tout λ et tout $f \in L^1$

$$|V_\lambda f| \leq W_\lambda |f|.$$

Preuve. — Soit (V_λ) une résolvante à contraction ; $(v_\lambda)_{\lambda>0}$ la famille des modules linéaires qui vérifie l'inégalité $v_\lambda - v_\mu \leq |\mu - \lambda| v_\lambda v_\mu$. Fixons μ et considérons pour $0 < \lambda < 2\mu$, les opérateurs W_λ^μ définis par :

$$W_\lambda^\mu = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n (v_\mu)^{n+1}.$$

Alors :

1) $\lambda \in]0, 2\mu[\qquad \|\lambda W_\lambda^\mu\| \leq 1$
2) W_λ^μ est positif pour tout $\lambda \in]0, \mu]$
3) $W_\mu^\mu = v_\mu$
4) $W_\lambda^\mu - W_{\lambda'}^\mu = (\lambda' - \lambda) W_\lambda^\mu W_{\lambda'}^\mu$, pour tous λ, $\lambda' \in]0, 2\mu[$.

Ceci résulte de la caractérisation de W_λ^μ par la formule

$$(I + (\mu - \lambda) W_\lambda^\mu)(I - (\mu - \lambda) v_\mu) = I$$

soit $W_\lambda^\mu = \dfrac{1}{(\mu - \lambda)} [(I - (\mu - \lambda) v_\mu)^{-1} - I]$ et d'un calcul simple.

5) Soit λ fixé et $\mu' \geq \mu \geq \lambda$. On tire de $v_\mu - v_{\mu'} \leq (\mu' - \mu) v_\mu v_{\mu'}$ l'inégalité $v'_\mu \leq W_{\mu'}^\mu$, et puisque $W_\lambda^{\mu'} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n (W_\mu^{\mu'})^{n+1}$ finalement :

$$W_\lambda^\mu = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n (v_\mu)^{n+1} \leq W_\lambda^{\mu'}.$$

6) On pose alors, pour $f \in L^1_+$,

$$W_\lambda f = \lim_{\mu \geq \lambda} \uparrow W^\mu_\lambda f = \sup_{\mu \geq \lambda} W^\mu_\lambda f.$$

Il est facile de voir que ceci définit un opérateur positif additif et positivement homogène sur L^1_+, qui forme une résolvante majorant (V_λ) puisque

$$| V_\lambda f | \leq v_\lambda | f | \leq W_\lambda | f |.$$

7) Enfin, si R_λ est une résolvante sous-markovienne majorant V_λ alors, pour tout $\lambda > 0$, $R_\lambda \geq v_\lambda$ et puisque R_λ vérifie $R_\lambda = \Sigma(\mu - \lambda)^n (R_\mu)^{n+1}$ $(\mu \geq \lambda)$, $R_\lambda \geq W^\mu_\lambda$.

On sait d'autre part que si P_t est un semi-groupe à contraction (C_0) et (R_λ) sa résolvante, alors P_t est positif si et seulement si R_λ est positive. En effet, on a [*4*] :

$$f \in L^1_+ \; P_t f = s.\lim_{\lambda \to \infty} e^{-\lambda t} \sum_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} (\lambda R_\lambda)^k f.$$

Dans ce cas, les deux constructions sont équivalentes :

Proposition. — Soient $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe à contraction (C_0), (S_t) le plus petit semi-groupe positif le majorant ; soient d'autre part (V_λ) la résolvante de (T_t), (W_λ) la majorante de (V_λ). Alors W_λ est la résolvante de (S_t).

Preuve. — Soient (R_λ) la résolvante de (S_t) et $p \in L^1_+$:

$$R_\lambda p = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_t p dt \geq \int_0^\infty e^{-\lambda t} | T_t p | dt \geq \left| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t p dt \right|$$

d'où $R_\lambda p \geq W_\lambda p$. Inversement, V_λ étant la résolvante du semi-groupe T_t, on a $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \lambda V_\lambda f = f$ pour toute f de L^1, et donc $\lim \lambda W_\lambda f = f$. D'après le théorème de Hille-Yosida, W_λ est la résolvante d'un semi-groupe positif P_t et l'on a, pour toute fonction p de L^1_+ :

$$P_t p = \lim_{\lambda \to \infty} e^{-\lambda t} \sum_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} (\lambda W_\lambda)^k_p \text{ dans } L^1.$$

Mais pour tout $\lambda > 0$,

$$e^{-\lambda t} \sum_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} (\lambda W_\lambda) p \geq e^{-\lambda t} \sum_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} | (\lambda V_\lambda)^k_p |$$

$$\geq \left| e^{-\lambda t} \sum_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} (\lambda V_\lambda)^k_p \right|.$$

Et, quitte à extraire une sous-suite, on voit par passage à la limite que $P_t p \geq |T_t p|$.

S_t étant minimal, par intégration on a, $p \in L^1_+$:

$$R_\lambda p \leq W_\lambda p. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

III. APPLICATIONS

A. Théorème ergodique quotient.

Soit (T_t) un semi-groupe C_0 d'opérateurs de L^1. L'application $t \to T_t f$ de $\mathbb{R}_+$ dans L^1 étant continue, on sait définir l'intégrale de Bochner [*11*] notée $\int_0^T T_s f ds$ qui est un élément de l'espace de Banach L^1 et vérifie les propriétés usuelles de l'intégrale. Dans ce cas un théorème de Dunford et Schwartz [7] montre qu'il existe une « bonne version » de $T_t f$, c'est-à-dire une fonction $G : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{C}$ mesurable qui vérifie

1) pour tout t de $\mathbb{R}_+$, $G(t,.) = T_t f$ dans L^1

2) pour presque tout ω de Ω, la fonction $t \to G(t, \omega)$ est intégrable sur tout intervalle $[0, T]$

3) $\omega \to \int_0^T G(t, \omega) dt$ est un représentant de $\int_0^T T_t f dt$.

Désormais, il sera entendu que, lorsque nous étudierons la convergence d'une expression du type $\int_0^T T_s f \Big/ \int_0^T p_s ds$, nous prendrons le représentant déterminé par les « bonnes versions » respectives de $T_s f$ et p_s. Ces représentations particulières ont des propriétés de continuité qui permettent de vérifier que des ensembles du type $\left(\int_0^\infty p_s ds > 0 \right)$ sont mesurables

Par ailleurs, il est facile de montrer que pour un semi-groupe (T_t) de contractions positives continu à l'origine on a pour toute fonction positive p $\left(\int_0^u T_s p ds > 0 \right) \supset (p > 0)$. On vérifie alors aisément que l'espace se décompose en deux parties C et D, respectivement partie conservative et dissipative sous le semi-groupe, et que $\int_0^{+\infty} T_s p$ est finie p. s. sur D et infinie p. s. sur C. On vérifie aussi que si C_t désigne la partie conservative sous l'opérateur T_t, alors $C = C_t$ pour tout réel t.

Rappelons que l'on dit qu'un ensemble A est invariant sous le semi-groupe T_t si pour tout t, $T_t(L^1(A)) \subset L^1(A)$: dans le cas d'un semi-groupe positif, C est invariant et les sous-ensembles de C invariants forment une sous-tribu $\mathcal{T}$ de la tribu des sous-ensembles mesurables de C. Les propriétés caractérisant les fonctions invariantes sous le semi-groupe dual de T_t noté T_t^* comme les fonctions dont la restriction à C est $\mathcal{T}$-mesurable sont encore valables. Dans le cas où T_t est non positif, nous notons S_t son majorant, et C la partie conservative de S_t. Dans ces conditions on voit que la démonstration de Brunel-Akcoglu s'adapte au cas continu, quitte à remarquer que l'on a (puisque $C_t = C$ pour tout t) :

LEMME. — Si $h \in L^\infty$ et si pour tout t, $T_t^* h = h$, alors on a $S_t^* |h| = |h|$ sur C. Et par conséquent nous en tirons le :

THÉORÈME DE REPRÉSENTATION. — Soit (T_t) un semi-groupe de contraction de $L^1_{\mathbb{C}}$, (S_t) le semi-groupe positif associé, $\mathcal{T}$ la tribu des invariants. Alors il existe $\Gamma \in \mathcal{T}$ et $s \in L^\infty(\Gamma)$ tels que :

1) $|s| = 1$ p. s. sur Γ et pour tout réel t et toute fonction f de $L^1(\Gamma)$, $T_t f = \bar{s} S_t(sf)$ (où $\bar{s}$ désigne le complexe conjugué de s).

2) Si $\Delta = C \backslash \Gamma$ et A est le générateur infinitésimal de T_t, $A(D(A) \cap L^1(\Gamma))$ est dense dans $L^1(\Delta)$.

3) La partition $C = \Gamma + \Delta$.

4) r possède les propriétés de s si et seulement si il existe une fonction l de $L^\infty(\Gamma)$, $|l| = l$ vérifient, pour tout t, $S_t^* l = l$ p. s. sur Γ et telle que $r = sl$.

Preuve. — Le seul point à démontrer est 2).

Soit L une forme linéaire continue sur $L^1(\Delta)$ qui s'annule sur $A(D(A) \cap L^1(\Delta))$. Par Hahn-Banach, cette forme linéaire s'étend en une forme linéaire continue sur L^1, notée encore L. Soit $h \in L^\infty(\Delta)$, telle que $L(f) = \langle f, h \rangle_m$. On a donc pour toute f de $D(A) \cap L^1(\Delta)$, $\langle Af, h \rangle = 0$. Posons, f et h étant fixés, $u(t) = \langle T_t f, h \rangle$. Puisque $f \in D(A) \cap L^1(\Delta)$, $T_s f \in D(A) \cap L^1(\Delta)$ pour tout s et donc $u'(s) = \langle AT_s f, h \rangle = 0$. La fonction $u(s)$ est donc constante et égale à $\langle f, h \rangle$. Par densité de D(A) on a donc, pour toute fonction f de $L^1(\Delta)$, $\langle f, T_t^* h \rangle = \langle T_t f, h \rangle = \langle f, h \rangle$. En conséquence on a $T_t^* h = h$ et, par construction de Γ comme le plus grand ensemble invariant sur lequel il y a une solution non triviale à cette question, $h = 0$, cf. [2].

On en tire alors, en suivant Akcoglu et Brunel, le :

THÉORÈME. — Soit (T_t) un semi-groupe (C_0) de contractions de $L^1_{\mathbb{C}}$, et soit (p_s) une famille admissible. Alors, si $f \in L^1$,

$$\lim \frac{\int_0^t T_u f du}{\int_0^t p_u du} \text{ existe et est fini p. s.}$$

sur l'ensemble $\left(\int_0^\infty p_s ds > 0 \right)$.
Et de la démonstration de ce théorème, on déduit :

THÉORÈME (IDENTIFICATION). — Soit $s \in L^\infty$ servant à la représentation de (T_t). Alors, si $f \in L^1$ et $A \in \underline{\underline{\mathcal{T}}}$, $\lim\limits_{\underline{\underline{t \to \infty}}} \int_A sT_t f dm$ existe ; si $p \in L^1_+$ est strictement positive, $sD(f, p)$ est $\underline{\underline{\mathcal{T}}}$-mesurable et, pour tout ensemble A de $\underline{\underline{\mathcal{T}}}$:

$$\int_A sD(f, p) p dm = \lim_{t \to \infty} \int sT_t f dm.$$

B. Théorème ergodique local.

Soit T_t un semi-groupe de contraction de L^1, continu sur $\mathbb{R}_+$. Dans le cas où le semi-groupe est positif Krengel [9] a démontré un théorème ergodique local. Nous démontrons ici son analogue non positif. Pour cela nous aurons besoin du lemme maximal suivant :

LEMME. — Soit (S_t) un semi-groupe de contractions positives fortement continu, alors si $E_f = \bigcup_t \left(\int_0^t S_u f du > 0 \right)$, f vérifie $\int_{E_f} S_0 f \geq 0$.

Démonstration. — C'est une conséquence du lemme discret si on remarque que, puisque nous ne considérons que les « bonnes versions » de $S_t f$, nous avons l'égalité :

$$\bigcup_{A=0}^{\infty} \left(\int_0^A S_t f > 0 \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^{k/2^n} S_t f > 0 \right)$$

et que, par hypothèse, $\frac{1}{t} \int_0^t S_s f ds \to S_0 f$ dans la topologie de L^1.

THÉORÈME ERGODIQUE LOCAL. — Soient $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de contractions de L^1, alors, pour toute fonction $f\in L^1$,

$$\lim \frac{1}{t}\int_0^t T_s f\, ds = T_0 f\; ps.$$

Preuve. — Soit $p\in L^1_+$ strictement positive sur X, et soit $h = \int_0^T S_t p\,dt$. Il est facile de montrer que

$$\lim_{u\to 0}\frac{1}{u}\int_0^u S_v h\, dv = S_0 h = h\; ps,$$

grâce à l'intégrabilité x par x.

D'autre part, il est clair que S_t majorant T_t, on peut supposer que $(h > 0) = X$. Dans ces conditions le théorème est équivalent à prouver que

$$\lim \frac{\displaystyle\int_0^u T_s f\, ds}{\displaystyle\int_0^u S_s h\, ds} = \frac{T_0 f}{h}\, ps\,.$$

Ce résultat est évident pour les fonctions du type $\int_0^a T_s f\,ds$ qui sont denses dans $T_0(L^1)$, puisque $\frac{1}{a}\int_0^a T_s f\,ds$ tend dans L^1 vers $T_0 f$. Puisque

$$\int_0^t T_s f\, ds = \int_0^t T_s T_0 f\, ds\,,$$

il suffit de montrer que les fonctions ayant une limite forment un ensemble fermé dans L^1. Ceci résulte du lemme ergodique maximal. Prenons, f et h étant fixées, une suite f_n vérifiant

— f_n tend vers $T_0 f$ dans L^1 et presque sûrement

— $T_0 f_n = f_n$ et la limite, lorsque t tend vers 0, de $\frac{1}{t}\int_0^t T_s f_n\, ds$ existe presque sûrement.

Alors, pour tout n, on a :

$$\left(\overline{\lim}\left|\frac{\displaystyle\int_0^t T_s f}{\displaystyle\int_0^t S_s h} - \frac{T_0 f}{h}\right| > \lambda\right) \subset \left(\overline{\lim}\left|\frac{\displaystyle\int_0^t T_s f}{\displaystyle\int_0^t S_s h} - \frac{\displaystyle\int_0^t T_s f_n}{\displaystyle\int_0^t S_s h}\right| > \frac{\lambda}{2}\right)$$
$$\cup\left(\overline{\lim}\left|\frac{\displaystyle\int_0^t T_s f_n}{\displaystyle\int_0^t S_s h} - \frac{T_0 f_n}{h}\right| > \frac{\lambda}{2}\right) \cup \left(\left|\frac{T_0 f_n}{h} - \frac{T_0 f}{h}\right| > \frac{\lambda}{2}\right).$$

Posons, pour tout ensemble A-mesurable, $\mu_h(A) = \int_A h d\mu$. Du lemme maximal nous tirons pour le premier terme :

$$\mu_h \left[\overline{\lim} \frac{\left| \int_0^t T_s(f - f_n) ds \right|}{\int_0^t S_s h ds} > \frac{\lambda}{2} \right] \leq \frac{2}{\lambda} \| f - f_n \| .$$

Par hypothèse, le second terme est presque sûrement vide et le troisième terme donne, puisque T_0 est une contraction,

$$\mu_h \left[\frac{| T_0 f_n - T_0 f |}{h} > \frac{\lambda}{2} \right] \leq \frac{2}{\lambda} \| f - f_n \| . \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

C. **Théorème ergodique local de type abélien.**

Soit $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$ une résolvante à contractions sur $L^1_{\mathbb{C}}$, nous supposerons que cette résolvante est (L_∞), c'est-à-dire vérifie $s - \lim \lambda V_\lambda = \mathrm{Id}$ quand λ tend vers l'infini. Si nous notons W_λ la résolvante positive associée à V_λ, W_λ est aussi (L_∞). Du fait de l'analyticité de la fonction à valeur $L^1 : \lambda \to \lambda V_\lambda f$, il existe pour toute fonction f une représentation $F(\lambda, x)$ avec les propriétés

a. Pour tout λ, $F(\lambda, x) = V_\lambda f ps.$

b. Pour tout x, la fonction $\lambda \to F(\lambda, x)$ est continue de $\mathbb{R}^*_+$ dans $\mathbb{C}$. Nous nous occupons désormais de la convergence quand λ tend vers l'infini des expressions $\lambda F(\lambda, x)$ que nous notons abusivement $\lambda V_\lambda f(x)$.

Nous aurons besoin dû théorème ergodique maximal dû à Mokobodzki [*11*] [*12*] dans un cadre légèrement différent.

THÉORÈME. — Soit V_λ une résolvante sous-markovienne, p une fonction strictement positive vérifiant $\lambda V_\lambda p \leq p$, alors pour toute fonction positive φ on a :

$$V_0 \varphi \geq V_0 [p . 1_{\{ \overline{\lim} \lambda V_\lambda \varphi \geq \lambda V_\lambda (p) \}}] .$$

Enfin nous ferons l'hypothèse d'irréductibilité suivante : si p est élément de L^1_+, alors $W_0 p = 0$ équivaut à $p = 0$.

THÉORÈME. — Soit V_λ une résolvante à contraction vérifiant les hypothèses précédentes : pour toute fonction f de L^1 on a presque sûrement, quand λ tend vers l'infini, $\lim \lambda V_\lambda f(x) = f(x)$.

Preuve. — Si $f = V_0 q$, alors l'équation résolvante s'écrit

$$V_0 q - V_\lambda q = \lambda V_\lambda V_0 q .$$

Mais W_λ vérifie $|V_\lambda q| \leq W_\lambda |q|$ et $\lim W_\lambda |q| = 0$ presque sûrement puisque la fonction $\lambda \to W_\lambda |q|$ est décroissante. La limite existe donc presque partout, et $\lim \lambda V_\lambda V_0 q = V_0 q$.

Si $f = V_\lambda q$, on applique le même raisonnement à la résolvante définie par $V'_\mu = V_{\lambda+\mu}$ pour $\mu > 0$.

Soit maintenant f quelconque de L^1, par l'hypothèse (L_∞) il existe une suite λ_n telle que $f_n = \lambda_n V_{\lambda_n} f$ tende vers f dans L^1 et presque sûrement. Soit p une fonction strictement positive de L^1 vérifiant $\lambda W_\lambda p \leq p$ (il suffit de prendre $W_0 q$ pour q de L^1_+, strictement positive). Posons pour tout $\varepsilon > 0$:

$$E(\varepsilon, f) = \{ x \,;\, \overline{\lim} \, |\lambda V_\lambda f(x) - f(x)| > \varepsilon p(x) \}.$$

Des inégalités $\overline{\lim} \, |\lambda V_\lambda f - f| \leq \overline{\lim} \, |\lambda V_\lambda (f - f_n)| + \overline{\lim} \, |\lambda V_\lambda f_n - f_n| + |f - f_n|$ et $|\lambda V_\lambda (f - f_n)| \leq \lambda W_\lambda |f - f_n|$, nous tirons pour tout entier n :

$$E(f, \varepsilon) \subset \left(|f - f_n| > \frac{\varepsilon}{3} p \right) \cup \left(\overline{\lim} \, \lambda W_\lambda |f - f_n) > \frac{\varepsilon}{3} p \right).$$

Par le choix de f_n : $\overline{\lim} \, m \left\{ |f - f_n| > \frac{\varepsilon}{3} p \right\} = 0$ et grâce au théorème de Mokobodzki, si on pose :

$$A(n, \varepsilon) = \left\{ \overline{\lim} \, \lambda W_\lambda |f - f_n) > \frac{\varepsilon}{3} p \right\}$$

$$\frac{3}{\varepsilon} W_0 |f - f_n) \geq W_0(p \,.\, 1_{A(n,\varepsilon)})$$

et donc en passant à la limite $W_0(p \,.\, 1_{E(f,\varepsilon)}) = 0$, soit par irréductibilité $E(f, \varepsilon) = \emptyset$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. A. Akcoglu, Pointwise Ergodic Theorems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **125**, 1966, p. 296-309.

[2] M. A. Akcoglu et A. Brunel, Contractions on L^1-spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **155**, 1971, p. 315-325.

[3] P. L. Butzer, *Semi-groups of operators and approximation*, Springer, 1967.

[4] R. V. Chacon, Convergence of operators averages, *Proc. Internat. Symp. Ergodic Theory*, Tulane University, Academic Press, New York, 1963.

[5] R. V. Chacon et U. Krengel, Linear modulus of an operator. *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **15**, 1964, p. 553-559.

[6] R. V. Chacon et D. S. Ornstein, A general ergodic theorem, *Illinois J. Math.*, t. **4**, 1960, p. 153-160.

[7] N. Dunford et J. T. Schwartz, *Linear operators*, Part 1, New York 1957.

[8] U. Krengel, Über den Absolutbetrag stetiger linearer Operatoren und seine Anwendung auf ergodische Zerlegungen, *Math. Scnd.*, t. **13**, 1963, p. 151-187.

[9] U. KRENGEL, A local ergodic theorem, *Invent. Math.*, t. **6**, 1969, p. 329-333.
[10] Y. KUBOKAWA, *à paraître.*
[11] P. A. MEYER, *Le théorème de dérivation par rapport à une résolvante*, Bourbaki, 1972/1973 (No 422).
[12] G. MOKOBODZKI, Densité relative de deux potentiels comparables, Séminaire de Proba IV, *Lecture Notes*, No 124, 1970.
[13] K. YOSIDA, *Functional analysis*, Springer.

(Manuscrit reçu le 11 octobre 1974)