ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

P. Y. GLORENNEC
J. PELLAUMAIL

Théorème de Riesz pour des processus réels

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, nº 3 (1974), p. 355-367
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_3_355_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. X, n° 3, 1974, p. 355-367.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Théorème de Riesz pour des processus réels

par

P. Y. GLORENNEC et J. PELLAUMAIL
I. N. S. A., Rennes.
Laboratoire de probabilités : E. R. A. 250

RÉSUMÉ. — Le but essentiel de cette étude est de prouver l'analogue du théorème de Riesz pour une mesure stochastique (cf. [*8*]) ; plus précisément on montre qu'on peut identifier l'espace des mesures stochastiques en moyenne d'ordre p à un espace « faiblement » compact d'applications linéaires continues.

INTRODUCTION

Dans [*8*], on associe, à certains processus, une mesure stochastique, mesure définie sur la tribu des prévisibles et à valeurs dans L_p. Ceci conduit à se demander si on peut prouver, pour une telle mesure stochastique, des propriétés généralisant les propriétés classiques des mesures définies sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$.

Le but essentiel de l'étude qui suit est de généraliser les théorèmes de Riesz et de Paul Levy aux mesures stochastiques : comme dans le cas réel usuel, la démonstration du théorème de Levy ainsi généralisé (proposition A-6), repose sur une propriété de compacité « faible ».

Plus précisément, on montre qu'on peut identifier l'espace des mesures stochastiques en moyenne d'ordre p et un sous-espace fermé de l'espace des applications linéaires continues de $\mathscr{H}$ dans $L_p(\Omega, \mathscr{F}, P)$ où $\mathscr{H}$ désigne l'espace des processus à trajectoires continues muni de la norme de la convergence uniforme (théorème A-2).

Au paragraphe A, on prouve ces résultats quand Ω est un espace quelconque.

Au paragraphe B, on étudie le cas où Ω est un espace topologique et où les tribus $\mathcal{F}_t$ des événements « antérieurs à t » sont liées à la topologie donnée sur Ω.

On peut, dans ce cas, obtenir quelques résultats complémentaires et choisir, pour $\mathcal{H}$, l'espace des processus continus par rapport à l'ensemble des deux variables t et ω, c'est-à-dire un espace plus petit que dans le cas général considéré au paragraphe A.

A. CAS OÙ Ω EST QUELCONQUE

A.1. Données et conventions générales pour le paragraphe A.

Pour tout ce paragraphe A, on se donne :

— *un ensemble des temps* $T = [0, 1]$

— *un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *complet*

— *une famille croissante* $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ *de sous-tribus de* $\mathcal{F}$ *contenant toutes tous les ensembles de mesure nulle de* $\mathcal{F}$. *On suppose que cette famille est continue à droite, c'est-à-dire que, pour tout élément* t *de* T, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$.

Par convention quand on parlera de processus adapté, prévisible, de tribu des prévisibles, etc..., ce sera toujours relativement à la base de processus $(\Omega, \mathcal{F}, P)(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$.

On désignera par $\mathcal{K}$ *l'ensemble des processus* X *déterministes* (*c'est-à-dire que* $X_t(\omega) = X_t(\omega')$ *quels que soient* t, ω, *et* ω') *à trajectoires continues et tels que* $X_0 = 0$.

On désignera par $\mathcal{H}$ *l'ensemble des processus réels bornés adaptés à trajectoires continues, et nuls pour* $t = 0$: *cet espace sera toujours muni de la topologie de la convergence uniforme.*

Pour tout élément t *de* T, *on désignera par* $\mathcal{H}_t$ *le sous-espace de* $\mathcal{H}$ *constitué des processus* h *tels que* $h = h . 1_{\Omega \times [0,t]}$.

On notera L_p l'espace $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et L'_p le dual de L_p c'est-à-dire $L'_p = L_\infty$ si $p = 1$ et $L'_p = L_q$ si $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sauf précision contraire, L_p et L'_p seront munis de leurs topologies usuelles d'espaces de Banach. On notera L^σ_p l'espace L_p muni de sa topologie faible $\sigma(L_p, L'_p)$, et on posera $\langle f, g \rangle = E[f.g]$.

Rappelons que la tribu $\mathcal{F}'$ de parties de $(\Omega \times]0, 1])$ engendrée par les éléments de $\mathcal{H}$ est la tribu des prévisibles (cf., par exemple [*4*]).

A.2. **Théorème.**

On considère les données et conventions indiquées précédemment. Soit p un réel avec p > 1. Soit m une mesure stochastique réelle en moyenne d'ordre p. Soit $(h, g) \rightsquigarrow \hat{m}(h, g)$ *l'application qui à tout élément* (h, g) *de* $(\mathscr{H} \times L'_p)$ *associe le réel* $\hat{m}(h, g) = E\left[g \, . \int_{]0,1]} h \, . \, dm\right] = \left\langle \int_{]0,1]} h \, . \, dm, g \right\rangle$

Cette application $\hat{m}$ *satisfait aux conditions suivantes :*

(i) *elle est bilinéaire continue (comme indiqué précédemment,* $\mathscr{H}$ *étant muni de la topologie de la convergence uniforme et* L'_p *de sa topologie usuelle d'espace de Banach).*

(ii) *Pour tout élément t de* T, *et pour tout couple* (h, g) *appartenant à* $(\mathscr{H}_t \times L'_p)$, $\hat{m}(h, g) = \hat{m}(h, E(g \mid \mathscr{F}_t))$.

(iii) *Pour tout élément* H *de* $\mathscr{F}$, *si h, élément de* $\mathscr{H}$, *est tel que*

$$h = h \, . \, 1_{(\Omega \setminus H) \times ([0,1])} \,, \quad \text{on a } \hat{m}(h, 1_H) = 0$$

(où 1_H *est considéré comme un élément de* L'_p*).*

Réciproquement, soit $\hat{m}$ *une fonction réelle définie sur* $(\mathscr{H} \times L'_p)$ *qui satisfait aux conditions* (i), (ii) *et* (iii) *qui précèdent. Alors* $\hat{m}$ *induit une mesure stochastique m en moyenne d'ordre p unique telle que, pour tout élément* (h, g) *de* $(\mathscr{H} \times L'_p)$, *on ait :*

$$\hat{m}(h, g) = E\left[g \, . \int_{]0,1]} h \, . \, dm\right]$$

On peut donc identifier l'ensemble des mesures stochastiques en moyenne d'ordre p à un sous-espace $\mathscr{M}$ *de* $\mathscr{L}(\mathscr{H}, L'_p \,;\, R)$. *De plus, ce sous-espace* $\mathscr{M}$ *est fermé pour la topologie de la convergence simple donc toute partie bornée de* $\mathscr{M}$ *est relativement compacte pour cette même topologie.*

Preuve :

1) Si m est une mesure stochastique, on vérifie facilement que l'application $\hat{m}$ satisfait aux conditions indiquées. Le problème est donc de prouver la réciproque. Avant cela, et pour éclairer la situation, nous allons associer à $\hat{m}$ une autre application $\bar{m}$. On suppose donc, désormais, que $\hat{m}$ est une application réelle définie sur $(\mathscr{H} \times L'_p)$ qui satisfait aux conditions (*i*), (*ii*) et (*iii*).

Pour tout élément h fixé de $\mathscr{H}$, l'application $g \rightsquigarrow \hat{m}(h, g)$ définit une forme linéaire continue sur L'_p c'est-à-dire un élément de L_p (puisque L_p est réflexif) que l'on notera $\bar{m}(h)$: on a donc, par définition, $\hat{m}(h, g) = \langle \bar{m}(h), g \rangle$.

L'application $h \rightsquigarrow \bar{m}(h)$ est alors une application définie sur $\mathscr{H}$, à valeurs dans L_p et qui satisfait aux conditions (*i'*), (*ii'*) et (*iii'*) suivantes (qui correspondent respectivement aux conditions (*i*), (*ii*) et (*iii*)) :

(*i'*) $\bar{m}$ est linéaire continue, $\mathscr{H}$ étant muni de la norme de la convergence uniforme et L_p étant muni de sa topologie ou, ce qui revient ici au même, de sa topologie d'espace de Banach (cf. par exemple [*3*], chap. IV, paragraphe 5, proposition 7), p. 114.

(*ii'*) Pour tout élément t de T, $\bar{m}(h)$ appartient à $L_p(\Omega, \mathscr{F}_t, P)$ si h appartient à $\mathscr{H}_t$.

(*iii'*) Si H appartient à $\mathscr{F}$ et si h est un élément de $\mathscr{H}$ tel que $h \,.\, 1_{H\times[0,1]} = h$, alors $\bar{m}(h) \,.\, 1_H = \bar{m}(h)$.

Notons que, réciproquement, si on se donne une application $\bar{m}$ définie sur $\mathscr{H}$, à valeurs dans L_p et qui satisfait aux conditions (*i'*), (*ii'*) et (*iii'*) qui précèdent, alors la fonction réelle $\hat{m}$, définie sur $(\mathscr{H} \times L'_p)$ par $\hat{m}(h, g) = \langle \bar{m}(h), g \rangle$, satisfait aux conditions (*i*), (*ii*) et (*iii*).

(Tout ce qui précède se vérifie de façon immédiate).

Pour la suite de la démonstration, on va utiliser la fonction $\bar{m}$.

2) Nous allons maintenant prouver la propriété suivante :

(*iv'*) si $(h_n)_{n>0}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{H}^+$ telle que $h_n \downarrow 0$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \| \bar{m}(h_n) \| = 0$$

(où $\| \bar{m}(h_n) \|$ désigne évidemment la norme de $\bar{m}(h_n)$ dans L_p).

Pour cela, nous allons raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $(h_n)_{n>0}$ d'éléments de $\mathscr{H}$ telle que $h_n \downarrow 0$ et telle que, pour tout n, $\| \bar{m}(h_n) \| \geqslant 4\varepsilon$. Soit a la norme de $\bar{m}$ c'est-à-dire que $a = \operatorname{Sup}_{\|h\|\leqslant 1} . \| \bar{m}(h) \|$.
On pose $b = \operatorname{Sup}_{t,\omega} | h_1(t, \omega) |$.

Pour tout $n > 0$, soit $\sigma(n)$ le temps d'arrêt défini par :

$$\sigma(n) = \inf. \{ t : | h_n(t, \omega) | \geqslant \varepsilon/a \}$$

Soit $A(n) = [\sigma(n) < 1]$.

La suite $(\sigma(n))_{n>0}$ est une suite croissante telle que $A(n) \downarrow \phi$ d'après le théorème de Dini.

Pour tout $n > 0$, soit $u(n)$ le processus h_n arrêté à $\sigma(n)$, c'est-à-dire que :

$$u(n)(t, \omega) = \begin{cases} h_n(t, \omega) & \text{si} \quad t \leqslant \sigma(n)(\omega) \\ h_n(\sigma(n)(\omega), \omega) & \text{si} \quad t \geqslant \sigma(n)(\omega) \end{cases}$$

et soit $v(n) = h_n - u(n)$. On a $| v(n) | \leqslant 2b$.

Les processus $u(n)$ et $v(n)$ appartiennent à $\mathscr{H}$.

De plus $\| u(n) \| \leqslant \varepsilon/a$ donc :

$$\begin{aligned} \| \bar{m}[v(n)] \| &\geqslant \| \bar{m}(h_n) \| - \| \bar{m}[u(n)] \| \\ &\geqslant 4\varepsilon - \varepsilon = 3\varepsilon \end{aligned}$$

Enfin, $v(n) = v(n).1_{A(n)\times T}$ donc

(condition (*iii'*)) $\qquad \bar{m}[v(n)] = 1_{A(n)}.\bar{m}[v(n)]$

On construit alors l'application croissante f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par récurrence de la façon suivante : $f(1) = 1$, puis $f(n)$ étant déterminée, soit $f(n+1)$ un entier supérieur à $f(n)$ tel que

$$\| \bar{m}[v(f(n))].1_{A[f(n+1)]} \| \leqslant \varepsilon$$

Soit $B(n) = A[f(n)]\backslash A[f(n+1)]$. On a

$$\| \bar{m}[v(f(n))].1_{B(n)} \| \geqslant 2\varepsilon$$

Pour alléger les notations, on pose $\bar{v}(n) = v[f(n)]$.

Pour tout $n > 0$, soit ϕ_n le processus défini par

$$\phi_n = \inf_{k>n} [1 - 2^k | \bar{v}(k) |]$$

et

$$\phi_n^+ = \operatorname{Sup}\{0, \phi_n\}.$$

Le processus ϕ_n^+ appartient à $\mathscr{H}$; en effet, si ω appartient à Ω, il existe $j > n$ tel que $\omega \notin A[f(j)]$ donc $\phi_n(\omega)$ est la borne inférieure d'une famille finie de fonctions continues, à savoir

$$\phi_n(\omega) = \inf_{j\geq k>n} [1 - 2^k | \bar{v}(k) |]$$

On pose alors, $w_n = \bar{v}(n).\phi_n^+$. On a

$$\phi_n^+.1_{B(n)\times T} = 1_{B(n)\times T} \qquad \text{donc} \qquad w_n.1_{B(n)\times T} = \bar{v}(n).1_{B(n)\times T}$$

donc

$$\bar{m}(w_n).1_{B(n)} = \bar{m}(v(n)).1_{B(n)}$$

Or $| w_n | \leqslant 2b$ donc $\sum_{n>0} | w_n | \leqslant 1 + 4b$, en effet, si (t, ω) appartient à l'intervalle stochastique $]\sigma(f[n]), \sigma(f[n+1])]$, $w_k(t, \omega) = 0$ pour $k > n$, $| w_n(t, \omega) | \leqslant 2b$ et, ou bien, pour tout $k < n$, $| w_k(t, \omega) | \leqslant 2^{-k}$ ce qui implique $\sum_{k<n} | w_k(t, \omega) | \leqslant 1$, ou bien il existe un $k < n$ tel que $| w_k(t, \omega) | > 2^{-k}$, ce qui implique $w_j(t, \omega) = 0$ pour $j < k$ et $| w_j(t, \omega) | \leqslant 2^{-j}$ pour $j > k$, soit $\sum_{k<n} | w_k(t, \omega) | \leqslant 1 + 2b$.

La famille $(w_n)_{n>0}$ satisfait donc aux deux conditions suivantes :

$$\sum | w_n | \leqslant 1 + 4b \qquad \text{et, pour tout } n, \ \| \bar{m}(w_n).1_{B(n)} \| \geqslant 2\varepsilon$$

On construit alors l'application croissante g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par récurrence de la façon suivante ; $g(1) = 1$ puis, $g(n)$ étant déterminé, soit $g(n+1)$ un entier supérieur à $g(n)$ tel que

$$\left\| \sum_{k \leqslant n} |\bar{m}(w_k)| \cdot 1_{A[f(g(n+1))]} \right\| \leqslant \varepsilon$$

On pose $\bar{w}_n = \sum_{k \leqslant n} w_{g(k)}$.

Pour tout n, $\bar{w}_n$ appartient à $\mathscr{H}$, $|\bar{w}_n(t, \omega)| \leqslant 1 + 4b$ et

$$\begin{aligned} \|\bar{m}(\bar{w}_n)\| &\geqslant \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \sum_{k \leqslant n} \bar{m}(w_{g(k)}) \cdot 1_{B[g(j)]} \right\| \\ &\geqslant \sum_{j=1}^{n} \left(\|\bar{m}(w_{g(j)}) \cdot 1_{B[g(j)]}\| - \left\| \sum_{k<j} \bar{m}(w_{g(k)}) \cdot 1_{B[g(j)]} \right\| \right) \\ &\geqslant n[2\varepsilon - \varepsilon] = n\varepsilon \end{aligned}$$

mais ceci contredit le fait que m est continue.

3) Puisque L_p est un espace réflexif, la condition (iv') suffit pour pouvoir appliquer la méthode du prolongement de Daniell (cf. [6] ou [9]) ; autrement dit, l'application $\bar{m}$ prolonge à une classe $\mathscr{D}$ de fonctions stables par convergence dominée et ce prolongement satisfait au théorème de convergence dominée : on notera encore $\bar{m}$ ce prolongement.

Ce prolongement $\bar{m}$ induit une fonction à valeurs dans L_p définie et fortement σ-additive sur $\mathscr{F}'$, fonction que l'on notera m. Il reste à prouver que m est bien une mesure stochastique en moyenne d'ordre p (cf. [8]-1-B-1). Pour cela, il faut prouver les conditions (i) et (ii) de [8]-1-A-6.

Soit u un élément de $]0, 1]$. Soit $(h_n)_{n>0}$ la suite de fonctions définie pour $1/n < u$, par :

$$h_n(t) = \begin{cases} n.t \quad \text{si} \quad t \leq 1/n \\ 1 \quad \text{si} \quad 1/n \leq t \leq u \\ 1 + n(u-t) \quad \text{si} \quad u \leq t \leq \left(u + \frac{1}{n}\right) \\ 0 \quad \text{si} \quad t \geqslant u + 1/n \end{cases}$$

On pose $g_n(t, \omega) = h_n(t) \cdot 1_{(\Omega \times]0,1])}$. D'après la condition ($ii'$), pour tout $n > \frac{1}{u}$, $\bar{m}(g_n)$ appartient à $L_p(\Omega, \mathscr{F}_{u+1/n}, P)$; on en déduit, par convergence dominée, que $\bar{m}(1_{\Omega \times]0,u]})$ appartient à $L_p\left(\Omega, \mathscr{F}_{u+}\frac{1}{n'}P\right)$ pour tout n

et donc à $L_p(\Omega, \mathscr{F}_u, P)$ puisque la famille $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ a été supposée continue à droite : ceci prouve la condition 1-A-6-(*ii*) de [*8*].

Par ailleurs, soit u un élément de $[0, 1[$ et H un élément de $\mathscr{F}_u$. Soit $(h'_n)_{n>0}$ la suite de fonctions définie par :

$$h'_n(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad t \leqslant u \\ n(t-u) \quad \text{si} \quad u \leqslant t \leqslant (u + 1/n) \\ 1 \quad \text{si} \quad t \geqslant u + 1/n \end{cases}$$

Soit $(g'_n)_{n>0}$ la suite de processus définie par

$$g'_n(t, \omega) = h'_n(t) \,.\, 1_{H \times]u, 1]}$$

D'après la condition (*iii'*), $\bar{m}(g'_n) = 1_H . \bar{m}(g'_n)$; on en déduit par convergence dominée, que $m(H \times]u, 1]) = 1_H . m(H \times]u, 1])$ ce qui est la condition 1-A-6-(*i*) de [*8*]. La fonction m est donc bien une mesure stochastique.

4) On a donc prouvé que l'ensemble des mesures stochastiques en moyenne d'ordre p peut être identifié à un sous-espace $\mathscr{M}^1$ de $\mathscr{L}(\mathscr{H}, L_p)$. On vérifie immédiatement, sur les conditions (*ii'*) et (*iii'*), que ce sous-espace est fermé pour la topologie de la convergence simple, $\mathscr{H}$ étant toujours muni de la norme uniforme et L_p de sa topologie faible.

On sait que toute partie bornée de $\mathscr{L}(\mathscr{H}, L_p^\sigma)$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence simple (cf., par exemple, [*3*], corollaire 3 du théorème 1), p. 65.

Il en est donc de même de toute partie bornée de $\mathscr{M}^1$ puisque $\mathscr{M}^1$ est une partie fermée. La fin du théorème annoncée s'en déduit en utilisant l'isomorphisme de $\mathscr{M}^1$ dans $\mathscr{M}$ qui à $\bar{m}$ associe $\hat{m}$.

A.3. **Remarques.**

a) Si $p = 1$, on peut de même montrer que l'espace des mesures stochastiques en moyenne peut être identifié à un sous-espace $\mathscr{M}$ de l'espace des applications m continues de $\mathscr{H}$ dans $L_1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ qui transforment les parties bornées de $\mathscr{H}$ en parties bornées et équi-intégrables de $L_1(\Omega, \mathscr{F}, P)$; un tel élément m appartient à $\mathscr{M}$ si et seulement si les conditions (*ii*) et (*iii*) du théorème précédent sont satisfaites ; compte tenu du théorème 2-9 de [*2*], la preuve de ceci est rigoureusement identique à celle du théorème précédent.

b) Par définition, le théorème précédent montre qu'on peut identifier l'espace des mesures stochastiques d'ordre p à un sous-espace fermé de fonctions aléatoires linéaires continues d'ordre p (cf., par exemple [*1*], exposé 12).

c) D'après le théorème précédent, on a identifié l'espace des mesures stochastiques en moyenne d'ordre p comme un sous-espace $\mathcal{M}$ de $\mathcal{L}(\mathcal{H}, L_p, \mathbb{R})$; il revient au même de dire que cet espace peut être identifié à un sous-espace de $(\mathcal{H} \otimes_\pi L_p)'$ (dual topologique de $\mathcal{H} \otimes L_p$ muni de sa norme projective).

d) Il est bien évident qu'en identifiant les mesures stochastiques en moyenne d'ordre p, on identifie une classe importante de processus, à savoir les processus de répartition en moyenne d'ordre p (cf. [*8*]).

A.4. **Notations : $\mathcal{S}_p$ et $\mathcal{R}_p$.**

Soit $p \geqslant 1$.

Soit X un processus réel tel que, pour tout élément t de T, X_t appartient à L_p. Soit x la fonction définie sur l'algèbre engendrée par les intervalles de $]0, 1]$ par $x(]s, t]) = X_t - X_s$.

On dira que X *appartient à* $\mathcal{S}_p$ *si* x *admet un prolongement à la tribu des boréliens de* T, *prolongement* σ*-additif pour la topologie de* L_p. *On dira que* X *appartient à* $\mathcal{R}_p$ *si* X *est un processus de répartition en moyenne d'ordre* p (*cf.* [*8*]).

On a évidemment $\mathcal{S}_p \subset \mathcal{R}_p$ et $p \leqslant p'$ implique $\mathcal{S}_{p'} \subset \mathcal{S}_p$ et $\mathcal{R}_{p'} \subset \mathcal{R}_p$. En général, $\mathcal{S}_p$ est différent de $\mathcal{R}_p$ (cf. [*8*]), III-F, p. 84.

A.5. **Notation $\phi_X(.)$: fonction caractéristique associée à un processus.**

Soit X *un processus appartenant à* $\mathcal{S}_1$ (*cf. précédemment*). *On notera* $\phi_X(u)$ *le « processus » (non adapté) admettant* $\mathbb{R}$ *comme ensemble des temps, basé sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *et défini par* $\phi_X(u) = \int_T e^{iut} dX_t$

A.6. **Proposition.**

Soient $p > 1$ *et* $a > 0$. *Soit* $(X^n)_{n>0}$ *une suite de processus appartenant à* $\mathcal{S}_p$ (*resp.* $\mathcal{R}_p$) (*cf.* A.4), *telle que, quels que soient* $n > 0$ *et* $h \in \mathcal{H}$ (*resp.* $h \in \mathcal{K}$) (*cf.* A.1), $\left\| \int h . dX^n \right\|_p \leqslant a$ *si* $\operatorname{Sup}_{t, \omega} | h(t, \omega) | \leqslant 1$. *Soit* X *un processus appartetenant à* $\mathcal{S}_1$.

Alors, la suite $(X^n)_{n>0}$ *converge vers le processus* X *au sens* $\int h dX^n$ *converge faiblement dans* L_p *vers* $\int h dX$ *pour tout élément* h *de* $\mathcal{H}$ (*resp. de* $\mathcal{K}$) *si et* *seulement si, pour tout élément u de* $\mathbb{R}$, $\phi_{X^n}(u)$ *converge faiblement dans* L_p *vers* $\phi_X(u)$. *Dans ce cas* X *appartient à* $\mathcal{S}_p$ *(resp.* $\mathcal{R}_p$*).*

Preuve :

1) La convergence indiquée des processus (X^n) vers le processus X implique évidemment la convergence des « fonctions caractéristiques » : le problème est de prouver la réciproque.

2) D'après les hypothèses, les processus X^n appartiennent à une partie « faiblement bornée » et donc « faiblement relativement compacte » comme indiqué au théorème A.2. On peut donc extraire une sous-suite $X^{n(k)}$ qui converge « faiblement » vers Y : d'après le 1), $\phi_{X^{n(k)}}$ converge vers ϕ_X ; mais ceci implique X = Y (on prouve facilement que, comme dans le cas réel, ϕ_X caractérise la « mesure » associée au processus X, qu'il s'agisse de la mesure stochastique définie sur la tribu des prévisibles ou de la mesure définie sur les boréliens de T comme indiqué en A.4). On en déduit que X appartient à $\mathcal{S}_p$ (resp. $\mathcal{R}_p$). De plus, toute sous-suite extraite de la suite $(X^n)_{n>0}$ admet une sous sous-suite qui converge vers X au sens indiqué : on en déduit la même convergence pour la suite initiale $(X^n)_{n>0}$.

A.7. **Remarque.**

Soient $p > 1$ et $a > 0$.

Soit X un processus qui appartient à $\mathcal{S}_1$. Soit $(X^n)_{n>0}$ une suite de processus appartenant à $\mathcal{S}_p$ (resp. $\mathcal{R}_p$) telle que, quels que soient $n > 0$ et $h \in \mathcal{H}$ (resp. $h \in \mathcal{K}$), $\left\| \int h.dX^n \right\| \leqslant a$. On suppose que, pour tout h appartenant à $\mathcal{K}$, $\int hdX^n$ converge faiblement dans L_1 vers $\int hdX$. La proposition qui précède montre alors que X appartient à $\mathcal{S}_p$ (resp. $\mathcal{R}_p$) et que, pour tout élément h de $\mathcal{K}$ (resp. de $\mathcal{H}$), $\int hdX^n$ converge faiblement dans L_p vers $\int h.dX$.

B. CAS OÙ Ω EST UN ESPACE TOPOLOGIQUE

B.1. **Introduction.**

On va supposer, dans ce paragraphe B, que Ω est un espace topologique, et que les tribus $(\mathcal{F}_t)$ sont associées à certaines classes de fonctions continues sur Ω.

Pour faciliter la lecture, ce paragraphe est, dans une certaine mesure, rédigé indépendamment du paragraphe précédent : ceci conduit à quelques répétitions de détail.

B.2. **Données et notations pour le paragraphe B.**

On pose $T = [0, 1]$. On désignera par p un réel strictement supérieur à 1. On se donne :

— un espace topologique Ω ; on pose $\Omega' = \Omega \times]0, 1]$ muni de la topologie produit de la topologie donnée sur Ω et de la topologie usuelle sur $]0, 1]$,

— une famille croissante $(\mathcal{G}_t)_{t\in T}$ de famille de fonctions réelles définies et continues sur Ω.

Pour tout élément t de T, on désignera par $\mathcal{F}_t$ la tribu de parties de Ω engendrée par les éléments de $\mathcal{G}_t$.

Pour alléger l'écriture, on posera $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1$ et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$. On désigne par P une probabilité sur $\mathcal{F}$.

On désignera par $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions f réelles définies et continues sur Ω', nulles pour $t = 0$ et telles que le processus $(X_t(\omega))_{t\in T}$ défini par $X_t(\omega) = f(\omega, t)$ soit adapté par rapport à la famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$.

Quand on considérera une topologie sur $\mathcal{G}_t$, (resp. $\mathcal{H}$), il s'agira toujours de la topologie de la convergence uniforme : l'espace de Banach complété de $\mathcal{G}_t$ pour cette topologie sera noté $\bar{\mathcal{G}}_t$.

Quand on parlera de mesures stochastiques (cf. [*8*]), ce sera toujours relativement à la « base de processus » $(\Omega, \mathcal{F}, P(\mathcal{F}_{t^+})_{t\in T})$ (insistons sur le fait qu'on prend les tribus $\mathcal{F}_{t^+}$ et non pas les tribus $\mathcal{F}_t$).

Pour tout élément t de T, on désignera par $\mathcal{H}_t$ l'ensemble des éléments h de $\mathcal{H}$ tels que $h(\omega, s) = 0$ si $s > t$.

On notera L_p l'espace $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni de sa topologie usuelle d'espace de Banach et L_p^σ l'espace $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni de la topologie $\sigma(L_p, L'_p)$ où L'_p est le dual de L_p.

B.3. **Proposition.**

La tribu $\mathcal{F}'$ de parties de $(\Omega \times T)$ engendrée par les éléments de $\mathcal{H}$ est la tribu des prévisibles relativement à la famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ (ou, ce qui revient au même, relativement à la famille $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\in T}$).

Preuve. — Le fait que les éléments de $\mathcal{H}$ sont mesurables par rapport à la tribu des prévisibles est connu. Il s'agit de prouver la réciproque.

Soient u et v deux éléments de T avec $0 < u < v \leqslant 1$.

Soit $(h_n)_{n>0}$ la suite de fonctions définie sur T par

$$h_n(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < u - 1/n \text{ ou si } t > v + 1/n \\ 1 \text{ si } u \leqslant t \leqslant v \\ n.\left(t - u + \dfrac{1}{n}\right) \text{ si } u - \dfrac{1}{n} < t < u \\ n.\left(-t + v + \dfrac{1}{n}\right) \text{ si } v < t < v + \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Soit w un élément de T avec $w < u$. Soit g un élément de $\mathscr{G}_w$ et soit $(g_n)_{n>0}$ la suite de fonctions définies sur $(\Omega \times \mathrm{T})$ par $g_n(\omega, t) = g(\omega).h_n(t)$. Pour $\frac{1}{n} < u - w$, g_n appartient à $\mathscr{H}$.

Le processus $X_t(\omega)$ défini par $X_t(\omega) = g(\omega).1_{[u,v]} = \lim_{n\to\infty} g_n(\omega, t)$ est donc $\mathscr{F}'$-mesurable. Il en résulte, par définition de $\mathscr{F}_w$, que $\mathrm{H} \times [u, v]$ appartient à $\mathscr{F}'$ si H appartient à $\mathscr{F}_w$. Mais ceci implique que $\mathscr{F}'$ contient la tribu des prévisibles puisque celle-ci est engendrée par les « rectangles » $\mathrm{H} \times [u, v]$ avec $\mathrm{H} \in \mathscr{F}_w$ et $w < u < v$.

B.4. **Théorème.**

Le théorème A.2. *reste exact avec les notations et hypothèses indiquées en* B.2.

Preuve. — On considère l'application $\bar{m}$ comme en A.2 et on prouve de même qu'on peut appliquer la méthode du prolongement de Daniell, et donc prolonger $\bar{m}$ à une classe $\mathscr{D}$ de fonctions stables par convergence dominée.

D'après la proposition qui précède, $\mathscr{D}$ contient les fonctions 1_A pour $\mathrm{A} \in \mathscr{F}'$; le prolongement $\bar{m}$ induit donc une fonction à valeurs dans $\mathrm{L}_p(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ définie et fortement σ-additive sur $\mathscr{F}'$, fonction que l'on notera m. Il reste à prouver que m est bien une mesure stochastique.

Soit (w, u, v) trois éléments de T avec $w < u < v$; soit $\mathrm{H} \in \mathscr{F}_w$. Soit $(h_n)_{n>0}$ la suite de fonctions définie comme dans la preuve de la proposition précédente. Par convergence dominée, on a :

$$\bar{m}(\mathrm{H} \times [u, v]) = \lim_{n\to\infty} \bar{m}(1_{\mathrm{H}\times\mathrm{T}}.h_n)$$

mais pour tout n, $\bar{m}(1_{\mathrm{H}\times\mathrm{T}}.h_n)$ appartient à $\mathrm{L}_p(\Omega, \mathscr{F}_{v+1/n}, \mathrm{P})$ (d'après (*ii*) et par convergence dominée). On en déduit facilement que $\bar{m}(\mathrm{H} \times [u, v])$ appartient à $\mathrm{L}_p(\Omega, \mathscr{F}_{v^+}, \mathrm{P})$ (c'est ici qu'apparaît l'utilité de considérer les tribus $\mathscr{F}_{t^+}$ et non les tribus $\mathscr{F}_t$). Enfin, si K appartient à $\mathscr{F}_{u^-}$, par convergence dominée, $\bar{m}(K \times]u, v] = \lim_{n \to \infty} . \bar{m}\left(K \times \left[u + \frac{1}{n}, v\right]\right)$ donc $\bar{m}(K \times]u, v])$ appartient à $L_p(\Omega, \mathscr{F}_{v^+}, P)$ ce qui est la condition 1.A.6.(*ii*) de [*8*].

Par ailleurs, pour toute fonction réelle g définie sur Ω, soit $S(g) = \{ \omega : g(\omega) \neq 0 \}$. Soient w, u et v trois éléments de T tels que $w < u < v$. Soit $\mathscr{C}$ la classe des fonctions g appartenant à $L_\infty(\Omega, \mathscr{F}_w, P)$ telles que $\bar{m}(g . 1_{]u,v]}) = 1_{S(g)} . \bar{m}(g . 1_{]u,v]})$.

En utilisant la condition (*iii*) et les processus $h_n(t).g(\omega)$, on prouve, par convergence dominée, que $\mathscr{C}$ contient les fonctions g pour $g \in \mathscr{G}_w$.

On vérifie facilement que $\mathscr{C}$ est une classe monotone (croissante et décroissante) (par convergence dominée et parce que m est continue). On en déduit que $\mathscr{C}$ contient les fonctions 1_H pour H élément de $\mathscr{F}_w$ et donc pour H élément de $\mathscr{F}_{u^-}$. Ceci prouve la condition 1.A.7.(*i'*) de [*8*] et donc la condition 1.A.6.(*i*) de [*8*]. La fonction m est donc bien une mesure stochastique.

On achève la démonstration comme en A.2.

B.5. **Remarque.**

La proposition A.6 et la remarque A.7 du paragraphe précédent, restent évidemment exactes sous les hypothèses adoptées dans le présent paragraphe.

B.6. **Remarque : cas où Ω est compact.**

Supposons Ω compact.

Soit m une mesure réelle définie sur la tribu des prévisibles (pour l'intérêt d'une telle mesure, cf. [5] dans le cas positif ou [*8*] dans le cas général). Pour tout élément h de $\mathscr{H}$, soit $m(h) = \int h . dm$; l'application $h \rightsquigarrow m(h)$ ainsi définie est linéaire et continue ($\mathscr{H}$ étant toujours muni de la topologie de la convergence uniforme). Réciproquement, soit $\hat{m}$ une forme linéaire définie et continue sur $\mathscr{H}$; alors il existe une mesure réelle unique définie sur la tribu des prévisibles, et telle que, pour tout élément h de $\mathscr{H}$, $\hat{m}(h) = \int h . dm$ (on prouve cette réciproque à l'aide du prolongement de Daniell).

Notons que m peut charger des processus évanescents même si $\hat{m}(h) = \int h . dm$ est nul pour tous les éléments évanescents h de K.

B.7. Contre-exemple.

Le but du contre-exemple qui suit est de montrer que la remarque qui précède n'est plus exacte si Ω n'est pas compact. Plus précisément, on peut alors trouver un élément du dual de $\mathscr{H}$ qui n'induit pas une mesure sur la tribu des prévisibles.

On prend $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la topologie discrète. Soit $\mathscr{U}$ un ultra-filtre sur $\mathbb{N}$. A tout élément h de $\mathscr{H}$, on associe $m(h) = \lim_{\mathscr{U}} h_1(n)$ où $h_1(n)$ désigne la valeur du processus h à l'instant $t = 1$ et au point $\omega = n$. m est évidemment un élément du dual $\mathscr{H}'$ de $\mathscr{H}$ et pourtant m ne satisfait pas à l'analogue de la condition (iv') utilisée dans la preuve du théorème A.2. En effet, soit (h_n) la suite de processus définis par, quel que soit t, $h_n(t, \omega) = 1$ si $\omega \geqslant n$ et $h_n(t, \omega) = 0$ si $\omega < n$. On a $h_n \downarrow 0$ et $\lim_{n \to \infty} . m(h_n) = 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BADRIKIAN, Séminaire sur les fonctions aléatoires linéaires et les mesures cylindriques, VII, 1970, Springer-Verlag, *Lecture Notes*, n° 139.

[2] R. G. BARTLE, N. DUNFORD and J. SCHWARTZ, Weak compactness and vector measures. *Canadian J. Math.*, t. **7**, 1955, p. 289-305.

[3] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, chapitres 3 et 4, Hermann, Paris, 1967.

[4] DELLACHERIE, *Capacités et processus stochastiques*. Springer-Verlag, 1972.

[5] C. DOLEANS, Existence du processus croissant naturel associé à un potentiel de classe (D). *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw.*, t. **9**, 1968, p. 309-314.

[6] I. KLUVANEK, Completion of vector measures spaces. *Rev. Roumaine, Math. Pures Appl.*, t. **12**, 1967, n° 10, p. 1483-1488.

[7] M. MÉTIVIER, Stochastic integral and vector valued measures. *Proceedings of the european meeting of statistical*, Budapest, Sept. 1972.

[8] J. PELLAUMAIL, *Sur l'intégrale stochastique et la décomposition de Doob-Meyer*. Astérique n° 9. Société Mathématique de France, 11, rue Pierre et Marie-Curie, 1973.

[9] J. PELLAUMAIL, Intégrale de Daniell à valeurs dans un groupe. *Revue Roumaine, Math. Pures Appl.*, t. **16**, 1971, n° 8, p. 1227-1236, Bucarest.

[10] E. THOMAS, L'intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, t. **20**, fasc. 2, 1970.

(Manuscrit reçu le 9 octobre 1974)