ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

H. HEINICH

Intégration dans certains espaces de Riesz à distance concave

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, nº 2 (1974), p. 185-200

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_2_185_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. X, n° 2, 1974, p. 185-200.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Intégration dans certains espaces de Riesz à distance concave

par

H. HEINICH

Université, Paris-6[e], Laboratoire de Calcul des Probabilités,
Tour 56, 9, quai Saint-Bernard, 75230 Paris, Cedex 05

0. INTRODUCTION

Pour une suite $\{\phi_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ d'applications mesurables, positives, étagées d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ dans E, espace de Riesz, on peut définir, pour chaque n, $\int \phi_n d\mathrm{P}$ comme élément de E ; mais il est faux, en général, que $\int \phi_n d\mathrm{P}$ converge vers 0, dans E, même si la suite $\{\phi_n\}$ converge uniformément. Néanmoins, voir exemples à la fin, il se peut que cette propriété ait lieu si les ϕ_n sont uniformément majorées par un $e \in \mathrm{E}$: d'où l'idée d'introduire une « tronquature » dans E. Par ailleurs même si E est non localement convexe, la trace de sa topologie sur certains ensembles latticiellement bornés peut être équivalente à celle d'un espace localement convexe : d'où la possibilité d'extension de théorèmes usuels.

I. ESPACE DES FONCTIONS INTÉGRABLES

Soit E un espace de Riesz, nous écrirons $e \vee e' = \sup(e, e')$; $e \wedge e' = \inf(e, e')$; $e^+ = e \vee 0$; $e^- = e^+ - e$ et $|e| = e^+ + e^-$. Pour $e_0 \in \mathrm{E}^+$ on posera $e \underset{\wedge}{\perp} e_0 = (e^+ \wedge e_0) - (e^- \wedge e_0)$ — tronquature de e à e_0 —.

Nous supposerons que E est complet pour la topologie induite par une distance concave, compatible avec sa structure d'espace de Riesz : si

$(e_i)_{i=1,\dots,n} \subset E^+$ et $(\alpha_i)_{i=1,\dots,n} \subset R^+$ avec $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ alors

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i d(e_i, 0) \leq d\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, 0\right)$$

de plus $d(e, 0) = d(|e|, 0)$ et on notera parfois $d(e)$ pour $d(e, 0)$.

Nous supposons qu'il existe une suite $\{ e_n^* \}$ *croissante d'éléments de* E^+ *telle que, pour tout* $e \in E$, $e \curlywedge e_n^* \to e$.

$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ étant un espace de probabilité complet on désignera par : $\mathscr{E}(E)$ l'espace vectoriel des fonctions étagées $\mathscr{A}$-mesurables de Ω dans E ;

$\mathscr{V}(E)$ l'espace vectoriel des variables aléatoires (v. a.) à valeurs dans E. C'est-à-dire les limites P-p. p. de suites de fonctions étagées (on peut aussi considérer des limites P-presque uniforme — Egoroff —).

Remarquons : si $\phi = \Sigma e_i 1_{A_i} \in \mathscr{E}(E)$ alors

$$\phi \curlywedge e_n^* = \sum_i e_i \curlywedge e_n^* 1_{A_i} \in \mathscr{E}(E)$$

et de même si $f \in \mathscr{V}(E)$ alors $f \curlywedge e_n^* \in \mathscr{V}(E)$.

Pour $\phi = \sum_1^p e_i 1_{A_i} \in \mathscr{E}(E)$ posons :

$$\int_A \phi dP = \sum_1^p e_i P(A_i A)$$

$$N(\phi) = d\left(\int |\phi| dP, 0\right) \quad \text{et} \quad N_n(\phi) = N(\phi \curlywedge e_n^*).$$

Les relations $|e + e'| \leq |e| + |e'|$ et, si e et e' positifs, $d(e) \leq d(e + e')$; $(e + e') \wedge e_n^* \leq e \wedge e_n^* + e' \wedge e_n^+$ montrent que N et N_n sont sous-additives.

PROPOSITION 1. — *Si la suite* $\{ \phi_n \}_{n \in N} \subset \mathscr{E}(E)$ *est telle que*

$$\sum_n N(\phi_n) < +\infty \quad \textit{alors} \quad \sum_n d(\phi_n) < +\infty \quad \text{P-p. p.}$$

En effet cela résulte de l'inégalité $\int d(\phi)dP \leq N(\phi)$ application directe de la concavité de $d(.,0)$.

Nous supposerons que la condition suivante est réalisée :

$$(*)\begin{cases} . \text{ si } \{\phi_p\}_{p\in N} \text{ est une suite d'éléments de } \mathscr{E}(E) \text{ telle que, pour un certain } n, \text{ on ait : } |\phi_p(\omega)| \leq e_n^* \text{ tout } p \text{ et tout } \omega\in\Omega, \\ . \text{ et } \phi_p \to 0 \text{ P-p. p. Alors } N(\phi_p) \to 0. \end{cases}$$

Remarques :

. A la place de $N_n(\phi)$ nous pouvons considérer $N_n^*(\phi) = N(|\phi| \wedge e_n^*)$ expression analogue pour la suite.

. La propriété $(*)$ est équivalente à :

$$(**)\begin{cases} N \text{ est continue de } \mathscr{E}_n \text{ dans R quand sur l'espace} \\ \mathscr{E}_n = \{\phi : \phi\in\mathscr{E}(E) \quad \text{et} \quad |\phi(\omega)| \leq e_n^*\} \\ \text{on considère la topologie de la convergence uniforme.} \end{cases}$$

En effet, montrons que $(**) \Rightarrow (*)$: soit $\{\phi_p\}_{p\in N} \subset \mathscr{E}_n$ telle que $\phi_p \to 0$ P-p. p. pour p tendant vers l'infini; alors $\forall\varepsilon\exists A$ avec $P(A^c) \leq \varepsilon$ et sur A la convergence a lieu uniformément (Egoroff) donc $N(\phi_p|_A)$ tend vers 0.

Or $N(\phi_p|_{A^c}) \leq N(e_n^*|_{A^c}) = d(e_n^* P(A^c)) \leq \varepsilon'.d(e_n^*)$ ce qui montre la relation $(*)$.

PROPOSITION 2. — *Si $\{\phi_p\}_{p\in N}$ est une suite $\subset \mathscr{E}_n$ telle que $\phi_p \to f$ P-p. p. quand p tend vers l'infini; alors on peut définir*

$$\int_A f dP = \lim_p \int_A \phi_p dP \qquad \text{et} \qquad N(f) = \lim_p N(\phi_p)$$

Démonstration : $\phi_p - \phi_q \to 0$ P-p. p. et $|\phi_p - \phi_q| \leq 2e_n^*$ donc $\forall\varepsilon$, $\exists A$ avec $P(A^c) \leq \varepsilon$ et, sur A, $\{\phi_p - \phi_q\}$ converge uniformément vers 0, donc $N((\phi_p - \phi_q)|_A) \leq \varepsilon'$ si p et $q \geq P(\varepsilon', A)$ et $N((\phi_p - \phi_q)|_{A^c}) \leq N(2e_n^*|_{A^c}) \leq \varepsilon'$ si $\varepsilon \leq \varepsilon(\varepsilon')$.

La suite $N(\phi_p)$ est donc convergente. Il est aisé de voir que sa limite $N(f)$ est en fait indépendante de la suite $\{\phi_p\}$. Cette propriété s'étend de la manière suivante :

si $\phi_p \curlywedge e_n^* \to f \curlywedge e_n^*$ p. p. alors on peut définir

$$\int_A f \curlywedge e_n^* dP,$$

$N_n(f)$ et de plus $N_n(f - \phi_p) \to 0$ quand $p \to \infty$.

PROPOSITION 3. — *Si* $\sum_p N(\phi_p) < +\infty$ *alors*

$$N_n\Big(\sum_p \phi_p\Big) \leq \sum_p N_n(\phi_p) \leq \sum_p N(\phi_p)$$

L'existence de $\Sigma\phi_p$ est justifiée par la proposition 1 et l'inégalité résulte de la proposition 2.

DÉFINITIONS :

. Une suite $\{\phi_p\} \subset \mathscr{E}(E)$ sera dite associée à $f \in \mathscr{V}(E)$ si

$$\lim_p (\sup_n N_n(f - \phi_p)) = 0 .$$

. On désignera par L(E) l'espace des classes — modulo la relation d'égalité P-p. p. — de v. a. admettant une suite associée. Enonçons quelques propriétés.

. $\mathscr{E}(E) \subset L(E)$ il suffit de prendre $\{\phi_p \equiv \phi\}$.

. Si $\{\phi_p\}$ est associée à 0 alors $N(\phi_p) \to 0$. Cela résulte de $N_n(\phi) \to N(\phi)$ quand $n \to \infty$.

. Si $\{\phi_p\}$ est associée à f alors $N(\phi_p - \phi_q) \to 0$. En effet $N_n(\phi_p - \phi_q) \leq N_n(\phi_p - f) + N_n(f - \phi_q) \leq \varepsilon$ si $p, q \geq P_\varepsilon$ $\forall n$.

Nous pouvons alors définir $\int_A f dP = \lim_p \int_A \phi_p dP$, $N(f) = \lim_p N(\phi_p)$ si $\{\psi_p\}$ est une autre suite associée à f alors $\{\phi_p - \psi_p\}$ est associée à 0 : ce qui montre que $\int_A f dP$ et $N(f)$ sont bien définies. Par ailleurs la suite $\{\phi_p - \phi_q\}_p$ est associée à $f - \phi_q$ donc $\lim_p N(\phi_p - \phi_q) = N(f - \phi_q)$ et en récapitulant :

Pour toute fonction $f \in L(E)$ les expressions suivantes ont un sens $\int_A f dP$, $N(f) = d\Big(\int |f| dP, 0\Big)$ et il existe une suite $\{\phi_p\} \subset \mathscr{E}(E)$ — suite associée — telle que $N(f - \phi_p) \to 0$.

PROPOSITION 4. — *Si* $\{\phi_p\}$ *est associée à* f *il existe une sous-suite extraite* $\{\phi_{p_i}\}$ *telle que* $\phi_{p_i} \to f$ P-p. p.

Démonstration. — On peut extraire une sous-suite ϕ_{p_i} telle que

$$\sum_i N(\phi_{p_{i+1}} - \phi_{p_i}) < +\infty$$

et la suite ϕ_{p_i} converge p. p. vers une fonction g et lui est associée car

$$N_n(\phi_{p_i} - g) \leq \sum_{j \geq i} N(\phi_{p_{j+1}} - \phi_{p_j})$$

— proposition 3 — et ainsi $f = g$ p. p. — application de la proposition 1 —.

PROPOSITION 5. — *Si* $\sum_n N(f_n) < +\infty$ *alors* $\Sigma d(f_n) < +\infty$ P-p. p.

Démonstration. — Soient $\varepsilon = \sum_n \varepsilon_n$ et $\{\phi_n^p\}_p$ associée à f_n ; on peut supposer $\phi_n^p \to f_n$ p. p. — proposition 4 — donc la convergence existe P-presque uniformément : $\exists A_n$ avec $P(A_n^c) \leq \varepsilon_n$ et $\sup_{\omega \in A_n} d(\phi_n^p(\omega), f_n(\omega)) \leq \varepsilon_n$ si $p \geq p_{\varepsilon_n}$. On peut supposer en outre p_{ε_n} suffisamment grand pour que $N(f_n - \phi_n^{p_{\varepsilon_n}}) \leq \varepsilon_n$. Soit $A = \bigcap_n A_n$, $P(A^c) \leq \varepsilon$ et comme $\sum_n N(\phi_n^{p_{\varepsilon_n}}) < +\infty$ (proposition 1) $\sum_n d(\phi_n^{p_{\varepsilon_n}}) < +\infty$ p. p., on a pour presque tout $\omega \in A$, $\sum_n d(f_n(\omega)) < +\infty$. On a montré que pour tout $\varepsilon > 0$ $\exists A$ avec $P(A^c) \leq \varepsilon$ et sur A, $\sum_n d(f_n) < +\infty$ c'est bien la proposition. Citons en application :

Si f_n tend vers f dans L(E) c'est-à-dire que $N(f - f_n)$ tend vers 0 alors il existe une sous-suite telle que $f_{n_i} \to f$ P-p. p.

PROPOSITION 6. — *Pour tout* $e \in E$ *l'application* $f \to f.e$ *est linéaire continue de* $L^1(R)$ *dans* L(E).

En effet si $f \in \mathscr{E}(R)$ alors $f.e \in \mathscr{E}(E)$ et $N(f.e) = d(e \| f \|_{L^1})$ et si $\{f_n\}$ est une suite $\subset \mathscr{E}(R)$ convergent vers f. P-p. p. et dans L^1 la limite $f.e$ est une v. a. admettant $\{f_n.e\}_n$ comme suite associée, la continuité est immédiate.

THÉORÈME 1. — *Si* $\mathscr{B}$ *est une algèbre engendrant* $\mathscr{A}$ *alors* $\mathscr{E}_{\mathscr{B}}(E)$ *— étagées* $\mathscr{B}$*-mesurables — est dense dans l'espace de Riesz métrisable complet* L(E).

Démonstration. — De $a^+ - b^+ = \frac{1}{2}(|a| - |b| + a - b)$ on déduit l'inégalité $|a^+ - b^+| \leq |a - b|$ qui montre que si $\{\phi_p\}$ est associée à f alors $\{\phi_p^+\}$ est associée à f^+ donc si $f \in L(E)$ alors f^+, f^- et $|f| \in L(E)$ qui est donc un espace de Riesz. Pour montrer que $\mathscr{E}_{\mathscr{B}}(E)$ est dense dans $\mathscr{E}(E)$ — qui est lui-même dense dans l'espace L(E) complet (propositions précédentes) — il suffit de remarquer qu'il existe une suite $\{f_n\}$ de fonctions $\mathscr{B}$-mesurables telles que $f_n \to 1_A$ dans L^1 et P-p. p. donc $f_n . e \to e|_A$ dans L(E).

PROPOSITION 7. — *La suite* $\{f \curlywedge e_n^*\}_n$ *converge vers* f *dans* L(E) *pour toute fonction* $f \in L(E)$.

Démonstration. — Etablissons auparavant l'inégalité

$$|a \curlywedge e - b \curlywedge e| \leq 2|a - b|$$

en utilisant $x \wedge y = y - (y - x)^+$ on obtient

$$\begin{aligned}|a \curlywedge e - b \curlywedge e| &= |(e - a^-)^+ - (e - a^+)^+ + (e - b^+)^+ - (e - b^-)^+| \\ &\leq |(e - a)^+ - (e - b^-)^+| + |(e - b^+)^+ - (e - a^+)^+|\end{aligned}$$

avec l'inégalité $|x^+ - y^+| \leq |x - y|$ il vient

$$|a \curlywedge e - b \curlywedge e| \leq |b^- - a^-| + |b^+ - a^+| \leq 2|a - b|.$$

On remarque ensuite que l'ensemble $\bigcup_n \mathscr{E}_n$ est dense dans $\mathscr{E}(E)$ donc dans L(E). Ainsi pour toute fonction $f \in L(E)$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0 et $\phi \in \mathscr{E}(E)$ avec $|\phi| \leq e_{n_0}^*$ et $N(f - \phi) \leq \varepsilon$. Avec l'inégalité précédente on voit que : $|f \curlywedge e_n^* - \phi \curlywedge e_n^*| \leq 2|f - \phi|$ donc

$$N(f - f \curlywedge e_n^*) \leq 3N(3|f - \phi|) + N(\phi - \phi \curlywedge e_n^*) \leq \varepsilon',$$

le dernier terme étant nul pour $n \geq n_0$.

THÉORÈME 2. — *Convergence dominée :*

Si la suite $\{f_n\} \subset L(E)$ *est telle que* $f_n \to 0$ P-p. p. *et qu'il existe* $f \in L(E)$ *avec* $|f_n| \leq f$; *alors* $N(f_n) \to 0$.

Démonstration :

. Nous allons montrer d'abord que si $f \in L(E)$ et $|f| \leq e$ il existe $\{\Phi_n\}_n \subset \mathscr{E}(E)$ avec $|\Phi_n| \leq e$ et $\Phi_n \to f$ dans L(E).

En effet soit $\{\phi_n\}_n$ associée à f, posons $\Phi_n = \phi_n \curlywedge e$. Alors

$$|\Phi_n - \Phi_n| = |\phi_n \curlywedge e - \phi_m \curlywedge e| \leq 2|\phi_n - \phi_n|$$

montre que la suite $\{ \Phi_n \}$ est de Cauchy dans L(E) et comme elle converge p. p. vers f sa limite dans L(E) est bien f.

. Montrons maintenant que si $\{ f_n \}_n \subset$ L(E) est telle que $f_n \to 0$ p. p. et $| f_n | \leq e^*_{n_0}$ — tout n — alors $N(f_n) \to 0$. Soit $\{ \phi^p_n \}_p$ une suite associée à f_n telle que $| \phi^p_n | \leq e^*_{n_0}$ et convergent p. p. vers f_n. La convergence p. p. étant équivalente à la convergence P-presque uniforme on peut écrire : $\forall \varepsilon$ il existe A_0 avec $P(A^c_0) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et sur A_0 la suite $\{ f_n \}$ converge uniformément vers 0 : $\sup\limits_{A_0} d(f_n) \to 0$.

Il existe aussi une suite $\{ A_n \}$ avec $P(A^c_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ et sur A_n, $\{ \phi^p_n \}_p$ converge uniformément vers f_n. On détermine ainsi une suite $p_{(n)}$ telle que :

$$N(f_n - \phi^{p(n)}_n) \leq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \sup_{A_n} d(f_n - \phi^{p(n)}_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Soit $A = A_0 \cap \left(\bigcap\limits_n A_n \right)$ Alors $P(A^c) \leq \varepsilon$ et $\phi^{p(n)}_n$ converge uniformément vers 0 sur A ; donc la suite $\{ \phi^{p(n)}_n \}$ converge P-p. p. vers 0 et comme $| \phi^{p(n)}_n | \leq e^*_{n_0}$ on a $N(\phi^{p(n)}_n) \to 0$ ce qui montre que $N(f_n) \to 0$.

Achevons la démonstration :

$$\text{si} \quad 0 \leq a \leq b \quad \text{alors} \quad | a - a \wedge e | = (a - e)^+ \leq | b - b \wedge e |$$

d'où

$$\begin{aligned} N(f_n) &\leq N(| f_n | - | f_n | \curlywedge e) + N(| f_n | \curlywedge e) \\ &\leq N(f - f \curlywedge e) + N(| f_n | \wedge e) \end{aligned}$$

or d'après la proposition 7 on peut choisir $e = e^*_{n_0}$ tel que

$$N(f - f \curlywedge e^*_{n_0}) \leq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad N(f_n) \leq \varepsilon + N(| f_n | \wedge e^*_{n_0})$$

donc $\limsup\limits_n N(f_n) \leq \varepsilon$.

DÉFINITION. — Une suite $\{ f_p \}_p \subset$ L(E) est dite équi-intégrable si :

$$\text{(1)} \qquad \lim_n \left[\sup_p N(f_p \, 1_{(|f_p| \leq e^*_n)^c}) \right] = 0 .$$

PROPOSITION 8. — *Les relations suivantes sont équivalentes*

. *La suite* $\{ f_p \}$ *vérifie* (1) — *est équi-intégrable* —.

. *La suite* $\{ f_p \}$ *vérifie* (2) : $\lim\limits_n \left[\sup\limits_p N(f_p - f_p \curlywedge e^*_n) \right] = 0$.

. *La suite* $\{ f_p \}$ *vérifie* (3) : $\lim\limits_{n,n} \left[\sup\limits_p N(f_p \curlywedge e^*_n - f_p \curlywedge e^*_m) \right] = 0$.

Démonstration. — L'inégalité

$$N(f_p \curlywedge e_n^* - f_p \curlywedge e_m^*) \leq N(f_p - f_p \curlywedge e_n^*) + N(f_p - f_p \curlywedge e_m^*)$$

montre que (2) $\Rightarrow$ (3).

Etablissons la réciproque : la proposition 7 permet de trouver une suite $\{ n_p \}$ de termes aussi grands que l'on veut telle que, pour tout p, $N(f_p - f_p \curlywedge e_{n_p}^*) \leq \varepsilon$.

On utilise alors l'inégalité :

$$N(f_p - f_p \curlywedge e_n^*) \leq N(f_p - f_p \curlywedge e_{n_p}^*) + N(f_p \curlywedge e_{n_p}^* - f_p \curlywedge e_n^*)$$

pour montrer que (3) $\Rightarrow$ (2).

Montrons que (1) $\Rightarrow$ (2).

La relation $f \curlywedge e = f \,|_{(|f| \leq e)} + f \curlywedge e \,|_{(|f| \leq e)^c}$ implique

$$\begin{aligned} |f_p - f_p \curlywedge e_n^*| &\leq |f_p - f_p \,|_{(|f_p| \leq e_n^*)}| + 2 |f_p| \,|_{(|f_p| \leq e_n^*)^c} \\ &\leq 3 |f_p| \,|_{(|f_p| \leq e_n^*)^c} \end{aligned}$$

et

$$N(f_p - f_p \curlywedge e_n^*) \leq N(3 f_p \,|_{(|f_p| \leq e_n^*)^c}) .$$

Montrons enfin que (2) $\Rightarrow$ (1).

Pour toute fonction $f \in L(E)$ le théorème 2 implique que la suite $\{ f \,|_{(|f| \leq e_n^*)} \}_n$ converge vers f dans L(E) et on détermine ainsi une suite $\{ n_p \}$ telle que — ε fixé > 0 —

$$\sup_p N(f_p - f_p \,|_{(|f_p| \leq e_{n_p}^*)}) \leq \varepsilon$$

comme

$$N(f_p \,|_{(|f_p| \leq e_n^*)^c}) \leq N(f_p - f_p \,|_{(|f_p| \leq e_{n_p}^*)}) + N(f_p \,|_{(|f_p| \leq e_{n_p}^*)} - f_p \,|_{(|f_p| \leq e_n^*)})$$

on obtient bien (1) si la relation (2) est satisfaite et la suite $\{ n_p \}$ formée de termes suffisamment grands.

Remarque. — Il est aisé de vérifier, comme dans le cas réel, la propriété suivante :

si $\{ f_p \}$ est une suite équi-intégrable alors

$$\sup_p N(f_p) < +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{P(A) \to 0} [\sup_p N(f_p \,|_A)] = 0 .$$

PROPOSITION 9. — *Pour toute fonction $f \in L(E)$, l'application* $A \to \int_A f dP$ *est une mesure à valeurs dans* E.

En effet cette propriété étant évidente pour $\phi \in \mathscr{E}(E)$ il suffit d'approcher f par une suite associée $\{ \phi_n \}_n \subset \mathscr{E}(E)$.

II. MARTINGALES A VALEURS DANS E

A. Espérance conditionnelle

Soit $\mathscr{B}$ une sous-tribu de $\mathscr{A}$. Posons $E^{\mathscr{B}}(e\,1_A) = e.E^{\mathscr{B}}(1_A)$, ce qui permet de définir $E^{\mathscr{B}}(\phi)$ par linéarité pour $\phi \in \mathscr{E}(E)$; $E^{\mathscr{B}}(\phi) \in L(E)$ d'après la proposition 6 et on a :

$$\int_B E^{\mathscr{B}}(\phi)dP = \int_B \phi dP \qquad \text{si} \qquad B \in \mathscr{B}$$

$$N(E^{\mathscr{B}}(\phi)) \leq N(\phi).$$

Ce qui montre que si $\{ \phi_n \}$ est une suite de Cauchy dans L(E) il en est de même pour $\{ E^{\mathscr{B}}(\phi_n) \}$.

Par prolongement $E^{\mathscr{B}}$ devient un opérateur linéaire, continu, positif de L(E) dans L(E) — de $L_{\mathscr{A}}(E)$ sur $L_{\mathscr{B}}(E)$ — vérifiant $N(E^{\mathscr{B}}(f)) \leq N(f)$ avec égalité si $f \geqslant 0$ et $E^{\mathscr{B}}(d(f)) \leq d(E^{\mathscr{B}} \mid f \mid)$ p. p. cette dernière inégalité résulte de la concavité de $d(.)$.

THÉORÈME 3. — *Martingales simples.*

Soit $\{ \mathscr{B}_n \}$ une suite croissante de sous-tribus telle que

$$\mathscr{A} = \sigma\left(\mathscr{B} = \bigcup_n \mathscr{B}_n\right).$$

Alors quelle que soit $f \in L(E)$ la suite $\{ E^{\mathscr{B}_n}(f) \}_n$ tend vers f dans L(E) *et* P-p. p.

Démonstration :

a) Montrons la convergence dans L(E).

On utilise le fait que $\mathscr{E}_{\mathscr{B}}(E)$ est dense dans L(E) — théorème 1 — et l'inégalité :

$$N(E^{\mathscr{B}_n}(f) - f) \leq N(E^{\mathscr{B}_n}(f - \phi)) + N(f - \phi) + N(E^{\mathscr{B}_n}(\phi) - \phi)$$

or si $\phi \in \mathscr{E}_{\mathscr{B}}(E)$ $E^{\mathscr{B}_n}(\phi) = \phi$ pour n grand et on peut choisir ϕ de manière que $N(\phi - f)$ soit aussi petit que l'on veut.

b) Montrons la convergence P-p. p.

Il existe une suite $\{ \phi_p \}_p$ de fonctions telle que :

$$\phi_p \to f \quad \text{P-p. p.} \qquad \text{et} \qquad \phi_p \quad \mathscr{B}_p\text{-mesurable pour tout } p.$$

Posons $X_p = d(\mid f - \phi_p \mid)$ et $X_p^n = d(E^{\mathscr{B}_n}(\mid f - \phi_p \mid))$. On a : $X_p^n \geqslant E^{\mathscr{B}_n}(X_p)$

— concavité de la distance d — et donc $E^{\mathscr{B}_n}(X_p^{n+1}) \leq X_p^n$, ce qui s'exprime en disant que $\{ X_p^n \}_n$ est une surmartingale positive donc converge P-p. p. vers X_p^∞. Or d'après a)

$$E^{\mathscr{B}_n}(|f - \phi_p|) \to |f - \phi_p| \qquad \text{dans L(E) pour} \qquad n \to \infty$$

il existe alors, proposition 5, une sous-suite extraite telle que :

$$E^{\mathscr{B}_{n_i}}(|f - \phi_p|) \to |f - \phi_p| \qquad \text{P-p. p.;}$$

ainsi $X_p^{n_i} \to X_p$ P-p. p. et par conséquent $X_p^\infty = X_p$ P-p. p.

De la relation $d(E^{\mathscr{B}_n}(f) - \phi_p) \leq X_p^n$ si $n \geq p$ qui suit de $|E^{\mathscr{B}}(.)| \leq E^{\mathscr{B}}(|.|)$ on déduit :

$$d(E^{\mathscr{B}_n}(f), f) \leq X_p^n + d(\phi_p, f) \qquad \text{si} \qquad n \geq p$$

et

$$\lim_n \sup d(E^{\mathscr{B}_n}(f), f) \leq 2d(\phi_p, f)$$

comme $d(\phi_p, f) \to 0$ P-p. p. on obtient le résultat.

COROLLAIRE. — *Pour* $f \in L(E)$ *on a l'équivalence*

$$\int_A f dP \geqslant 0 \qquad \textit{tout} \qquad A \in \mathscr{A} \Leftrightarrow f \geq 0 \quad \text{P-p. p.}$$

En effet cette propriété est vraie pour toute fonction de $\mathscr{E}(E)$ ou pour toute tribu finie. Si $f \in L(E)$ soit $\mathscr{A}_f$ la moins fine des tribus rendant f mesurable alors $\mathscr{A}_f = \sigma\left(\bigcup_n \mathscr{B}_n\right)$ où $\{ \mathscr{B}_n \}_n$ est une suite croissante de tribus finies, donc $E^{\mathscr{B}_n}(f) \geq 0$ pour tout n et il en est donc de même pour f.

En application directe du théorème 3 on obtient la loi forte des grands nombres :

THÉORÈME 4. — *Soit* $\{ X_n \}_n$ *une suite* $\subset$ L(E) *de* v. a. *indépendantes et équi-distribuées alors* $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n \to \int X dP$ p. p. *et dans* L(E).

B. Martingales.

DÉFINITIONS. — Une suite $\{ X_p \}_p \subset \mathscr{V}(E)$ est dite adaptée à une suite croissante de tribus $\{ \mathscr{B}_p \}_p$ si pour tout p, X_p est $\mathscr{B}_p$-mesurable.

Une suite adaptée $\{ X_p \{ \subset L(E)$ est une martingale — respectivement sur ou sous-martingale — si pour tout p, $E^{\mathscr{B}_p}(X_{p+1}) = X_p$ P-p. p. — respectivement $\leq$ ou $\geq$ p. p. —.

PROPOSITION 10. — *Si* $\{ X_p \}$ *est une martingale équi-intégrable alors la suite de mesures* $\{ \mu_p \}_p$, *où* $\mu_p(A) = \int_A X_p dP$, *converge vers une mesure* μ *à valeurs dans* E *et de plus pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* η *tel que :*

$$P(A) \leq \eta \Rightarrow \sup_p d(\mu_p(A)) \leq \varepsilon .$$

Il s'agit d'une application du théorème de Vitali-Hahn-Saks sur la convergence des mesures à valeurs dans un groupe topologique. En effet l'ensemble des A tel que $\mu_p(A)$ converge lorsque $p \to \infty$ contient évidemment $\bigcup_p \mathscr{B}_p$ et grâce à l'équi-intégrabilité — remarque suivant la proposition 8 — on est assuré de la convergence sur la tribu engendrée.

Pour établir la convergence d'une martingale la difficulté, comme dans le cas vectoriel, consiste à identifier une v. a. X telle que $E^{\mathscr{B}_p}(X) = X_p$ p. p. Nous sommes conduit à une hypothèse supplémentaire sur l'espace de Riesz E. Si on désigne par $B_n = \{ e : e \in E \text{ et } | e | \leq e_n^* \}$ et F le sous-espace vectoriel engendré par $\bigcup_n B_n$: hypothèse de « compacité faible ».

« *Nous supposerons qu'il existe une topologie normée sur* F, *compatible avec la structure d'ordre et telle que, pour chaque n, sa trace sur* B_n *soit équivalente à celle induite par la topologie de* E, *et qu'enfin,* B_n *soit faiblement compact* ».

Sous cette hypothèse on obtient le résultat principal :

THÉORÈME 5. — Pour qu'une martingale $\{ X_p \}$ converge P-p. p. et dans L(E) vers une v. a. X, il faut et il suffit qu'elle soit équi-intégrable et alors, $X_p = E^{\mathscr{B}_p}(X)$ P-p. p.

La démonstration de ce théorème repose sur trois lemmes.

LEMME 1. — Toute sur-martingale positive et équi-intégrable est convergente dans L(E).

Démonstration. — Soit $\{ X_p \}$ une telle sur-martingale. La suite $\{ Y_p = X_p \wedge e_n^* \}$ est une sur-martingale à valeurs dans F. Soit μ_p la mesure vectorielle associée à Y_p ; on a $| \mu_p(A) | \leqslant e_n^* P(A)$. La suite $\{ \mu_p(A) \}$ converge faiblement dans l'espace F : en effet si $u \in (F')^+$ — forme linéaire positive — $\{ \langle u, Y_p \rangle \}_p$ est une sur-martingale réelle équi-intégrable donc $\{ \mu_p(A) \}_p$ ne possède qu'un point adhérent soit $\mu(A)$. μ est une mesure à valeurs dans $B_n \subset \hat{F}$ — complété de F — en effet $\langle u, \mu \rangle$ est une mesure réelle et le théorème de Pettis assure l'équivalence entre mesure faible et forte. En outre, on a encore la relation $|\mu(A)| \leqslant e_n^* P(A)$ donc μ se prolonge en une application linéaire continue faiblement compacte de $L_P^1(R)$ dans $\hat{F}$ et d'après le théorème de Dundford-Pettis-Phillips, il existe une fonction Y intégrable à valeurs dans $\hat{F}$ telle que $\mu(A) = \int_A Y dP$.

Montrons que $Y \subset B_n$ P-p. p. : cela résulte de l'égalité :

$$\left| \int_A Y dP \right| \leqslant \int_A e_n^* dP$$

qui entraîne $|Y| \leqslant e_n^*$ P-p. p. — démonstration analogue à celle du corollaire du théorème 3 —.

Montrons que $\mu_p(A)$ tend vers $\mu(A)$ fortement dans F ou dans E.

Pour tout $B \in \bigcup_p \mathscr{B}_p$ la suite $\{ \mu_p(B) \}_p$ est monotone à partir d'un certain rang donc converge fortement vers $\mu(B)$ — propriété d'Orlicz — de plus comme : $|\mu_p(A \triangle B)| \leqslant e_n^* P(A \triangle B)$ on en déduit que $\mu_p(A)$ converge fortement vers $\mu(A)$ pour tout $A \in \mathscr{A} = \sigma\left(\bigcup_p \mathscr{B}_p\right)$.

Montrons que Y_p tend vers Y dans L(E). On établit que $E^{\mathscr{B}_p}(Y) \leqslant Y_p$ et que $N(Y_p - E^{\mathscr{B}_p}(Y))$ tend vers 0 car $\int Y_p - E^{\mathscr{B}_p}(Y)$ tend vers 0. L'inégalité :

$$N(Y - Y_p) \leqslant N(Y - E^{\mathscr{B}_p}(Y)) + N(Y_p - E^{\mathscr{B}_p}(Y))$$

montre que Y_p tend vers Y dans L(E).

On a établi le scholie :

Quel que soit e_n^* il existe $Y_{e_n^*} \in L(E)$ telle que la suite

$$\{ X_p \curlywedge e_n^* \}_p \qquad \text{converge vers } Y_{e_n^*} \text{ dans } L(E).$$

Il est clair que $Y_{e_{n+1}^*} \curlywedge e_n^* = Y_{e_n^*}$ P-p. p.

Montrons que la suite $\{ Y_{e_n^*} \}$ converge dans L(E).

Considérons l'inégalité :

$$\begin{aligned} N(Y_{e_n^*} - Y_{e_m^*}) \leqslant {} & N(Y_{e_n^*} - X_p \curlywedge e_n^*) \\ & + N(X_p \curlywedge e_n^* - X_p \curlywedge e_m^*) + N(X_p \curlywedge e_m^* - Y_{e_m^*}) \end{aligned}$$

— le premier terme du second membre est $\leqslant \varepsilon$ si $p \geqslant P(\varepsilon, n)$ — scholie —,

— le second terme est $\leqslant \varepsilon$ si $n, m \geqslant N(\varepsilon)$ pour tout p — condition (3) de l'équi-intégrabilité —,

— le troisième terme est $\leqslant \varepsilon$ si $p \geqslant P(\varepsilon, m)$ — scholie —.

Donc $\{ Y_{e_n^*} \}$ est bien une suite de Cauchy dans L(E). Soit X sa limite, l'inégalité :

$$N(X - X_p) \leqslant N(X - Y_{e_n^*}) + N(Y_{e_n^*} - X_p \curlywedge e_n^*) + N(X_p \curlywedge e_n^* - X_p)$$

montre que X_p tend vers X dans L(E).

LEMME 2. — Soit $\{ f_p \}$ une suite monotone croissante de fonctions positives intégrables telle qu'il existe $g \in L(E)$ avec $f_p \leqslant g$. Alors il existe $f \in L(E)$: f_p tend vers f dans L(E) et P-p. p.

Démonstration. — Il est clair que pour tout n la suite $\{ f_p \wedge e_n^* \}_p$ est P-p. p. convergente vers une fonction f_n et que cette convergence à lieu aussi dans L(E) : pour tout $n \{ f_p \wedge e_n^* \}_p$ est de Cauchy. Par ailleurs la condition $f_p \leqslant g$ montre que $\{ f_p \}$ est équi-intégrable ; enfin l'inégalité :

$$N(f_p - f_k) \leqslant N(f_p - f_p \curlywedge e_n^*) + N(f_p \curlywedge e_n^* - f_k \curlywedge e_n^*) + N(f_k \curlywedge e_n^* - f_k)$$

montre que la suite $\{ f_p \}$ est de Cauchy. Il est clair en outre que la convergence est aussi P-p. p.

LEMME 3. — Toute sous-martingale positive équi-intégrable est convergente dans L(E).

Soit $\{ X_m \}$ une telle sous-martingale. Posons

$$Z_{m,k}^n = E^n(X_m) \curlywedge e_k^*$$

où $E^n = E^{\mathscr{B}_n}$. Nous avons $Z_{m,k}^n \leqslant e_k^*$ et $Z_{m+1,k}^n \geqslant Z_{m,k}^n$ si $m \geqslant n$ donc — compacité faible — $Z_{m,k}^n$ converge, pour $m\, \infty$, vers une v. a. $Z^n{}_{,k}$ dans L(E) et P-p. p. La suite $\{ Z^n{}_{,k} \}_k$ est croissante et dans l'égalité :

$$\int Z^n{}_{,k} - Z^n{}_{,j} dP = \lim_m \int [E^n(X_m) \curlywedge e_k^* - E^n(X_m) \curlywedge e_j^*] dP$$

on reconnaît au second membre la formulation (3) de l'équi-intégrabilité — proposition 8 — d'où $\{ Z^n{}_{,k} \}_k$ est une suite de Cauchy et converge, pour $k\infty$, vers une v. a. Z^n, on a de plus une convergence P-p. p. Par ailleurs $Z_{m,k}^n \leqslant Z^n$ pour tout k et $m \geqslant n$ et $Z_{m,k}^n$ croît, pour $k\infty$, vers $Z_m^n = E^n(X_m)$. La suite de fonctions $\{ Z_m^n \}_m$ vérifie les conditions du lemme 2 donc converge P-p. p. et dans L(E) ; il est alors aisée de voir que la limite n'est autre que Z^n : on a

$$\lim_m [\lim_k (Z_{m,k}^n)] = \lim_k [\lim_m (Z_{m,k}^n)]$$

En utilisant alors le théorème de convergence dominée on obtient pour $A \in \mathscr{B}_{n-1}$:

$$\int_A Z^n dP = \int_A Z^{n-1} dP$$

Z^n est une martingale positive vérifiant $Z^n \geqslant X_n$. Si $Y_n = Z^n - X_n$ alors $\{ Y_n \}$ et $\{ Z^n \}$ vérifient les conditions du lemme 1 et par conséquent convergent dans L(E). Il en est de même pour $\{ X_n \}$.

Achevons la démonstration du théorème :

Soit $\{ X_n \}$ une martingale équi-intégrable, alors $\{ X_n^+ \}$ et $\{ X_n^- \}$ sont deux sous-martingales positives équi-intégrables donc — lemme 3 — X_n converge dans L(E) vers une v. a. X. Il est clair que $E^{\mathscr{B}_n}(X) = X_n$ P-p. p. Le théorème 3 assure la convergence P-p. p.

Réciproquement montrons que si la martingale $\{ X_p \}$ converge P-p. p. et dans L(E), vers X, elle est équi-intégrable.

Pour cela remarquons tout d'abord que, vu l'hypothèse,

$$A \in \mathscr{B}_p \Rightarrow \int_A X dP = \lim_n \int_A X_n dP = \int_A X_p dP$$

donc que $X_p = E^{\mathscr{B}_p}(X)$. Si maintenant une fonction $\phi \in \mathscr{E}(E)$ est telle que $|\phi| \leq e_n^*$ alors la martingale $\{ E^{\mathscr{B}_p}(\phi) \}_p$ est évidemment équi-intégrable.

On a vu dans la démonstration de la proposition 7, que pour tout $X \in L(E)$ et tout $\varepsilon > 0$, $\exists \phi \in \mathscr{E}(E)$ telle que $|\phi| \leq e_{n_0}^*$ et $N(X - \phi) \leq \varepsilon$, et $|X_p \curlywedge e_n^* - \phi \curlywedge e_n^*| \leq 2|X_p - \phi|$, on a

$$N(X_p \curlywedge e_m^* - X_p \curlywedge e_n^*) \leq 2N(2|X_p - \phi|) + N(\phi \curlywedge e_n^* - \phi \curlywedge e_m^*)$$

c'est bien l'équi-intégrabilité sous sa condition équivalente (3).

Remarques :

1) Si E vérifie l'hypothèse de « compacité faible » alors la condition d'intégrabilité (**) est satisfaite. En effet si une suite $\{ \phi_p \}$ de fonctions étagées à valeurs dans $B_n \subset \hat{F}$ — $\hat{F}$ Banach — converge uniformément vers 0 alors $\| \phi_p \|_{L^1_P(\hat{F})} \to 0$.

La relation $\| \phi_p(\omega) \|_F \leq \| e_n^* \|_F$ permet d'affirmer que

$$\int \| \phi_p(\omega) \| \, dP(\omega) \to 0$$

— théorème de convergence dominée — donc $\int |\phi_p| \, dP$ tend vers 0 dans B_n donc dans E.

2) Nous pouvons définir aisément la notion de martingale $\{ X_t \}_{t \in T}$ où T est un ensemble filtrant à droite. En suivant la remarque de (2), p. 119, le théorème 5 reste vrai ; à l'exception de la convergence p. p.

3) Une mesure vectorielle positive, μ, à valeurs dans E est dite absolument continue par rapport à P si :

$$\mu = \bigvee_n (\mu \wedge e_n^* P) \quad \text{cette relation implique} \quad P(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0.$$

Nous obtenons le résultat suivant (*).

COROLLAIRE. — *Théorème de Radon-Nikodym.*

Soit μ une mesure vectorielle positive à valeurs dans E, *absolument continue par rapport à* P. *Il existe une v. a. intégrable* $X : \Omega \to E$, *unique* p. p., *telle que :*

$$\mu(A) = \int_A X dP \qquad \textit{tout} \qquad A \in \mathscr{A}.$$

III. EXEMPLES

α — Soit $l^p(N)$ l'espace des suites $x = (x_k)_{k \in N}$ de puissance $p^{\text{ième}}$ sommable avec la distance $d(x, 0) = \sum_k |x_k|^p$ qui est concave si $p \in]0, 1]$.

Posons $e_n^* = \{ n . 1_{[0,n]}(k) \}_k$.

Montrons que $d(x, x \curlywedge e_n^*) \to 0$, $x \in l^p(N)$

$$d(x, x \curlywedge e_n^*) = \sum_k | x_k - x_k \curlywedge n |_{[0,n]}(k) |^p .$$

Soit k_n le plus grand k tel que la relation « $|x_m| \leq n . 1_{[0,n]}(m)$ » soit vraie pour tout $m \leq k$, alors $d(x, x \curlywedge e_n^*) = \sum_{k \geq k_n} | . |^p$.

La suite $\{ k_n \}$ est monotone croissante ; si il existait n_0 tel que $k_n = k_{n_0}$ $n \geqslant n_0$ — suite stationnaire — on aurait $k_{n_0} + 1 > k_n$ pour $n \geqslant n_0$ donc $| x_{k_{n_0}+1} | \geq n$ dès que $n \geq (k_{n_0} + 1) \vee n_0$ ce qui est impossible et $k_n \to +\infty$ donc $d(x, x \curlywedge e_n) \to 0$ quand $n \to \infty$.

L'espace vectoriel F engendré par les B_n est formé des suites dont tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang, on peut donc considérer F comme un sous-espace vectoriel dense dans $l^1(N)$ — Banach —. Chaque B_n est alors faiblement compact.

(*) Mesures à valeurs dans un Banach complètement réticulé. H. Heinich, *Annales de l'Institut Henri Poincaré.*

L'injection de l^p dans l^1 étant continue il ne reste qu'à démontrer que si une suite $\{ x^n \}_n \subset B_{n_0}$ converge dans l^1 elle converge dans l^p ce qui est immédiat par le théorème de convergence dominée.

$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ étant un espace de probabilité, posons $e_n^* = n$ — v. a. r. constante.

β — L'espace de Riesz $L_P^p(\Omega, \mathscr{A}, P)$ des classes de fonctions mesurables de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrables, munies de la distance $d(f, 0) = \int | f |^p dP$ concave si $0 < p \leq 1$ vérifie aussi les conditions précédentes.

En effet $| f - f \curlywedge n |^p \leq (2 | f |)^p$ et il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée pour voir que $d(f, f \curlywedge n) \to 0$.

L'espace F est l'espace des classes de fonctions mesurables bornées et peut être considéré comme un sous-espace de L_P^1, l'inégalité

$$\int | f |^p dP \leq \left(\int | f | dP \right)^p$$

valable si $p \in]0, 1]$ montre que l'injection de L^1 dans L^p est continue. Il est clair que sa restriction à B_n est bicontinue et qu'en outre B_n est faiblement compact dans L_P^1.

γ — L'espace de Riesz L_P^0 des classes d'équivalence de fonctions mesurables avec la distance concave

$$d(f) = E(| f | \wedge 1) = \int | f | \wedge 1 dP$$

vérifie aussi les conditions : il suffit de remarquer que sur tout ensemble uniformément borné par une fonction intégrable — en particulier les constantes — la topologie de la convergence en probabilité et celle de L_P^1 sont identiques.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] BOURBAKI, *Intégration*, livre 6, chapitre 2 : espaces de Riesz, Hermann, 1952.
[*2*] MEYER, *Probabilités et potentiel*, Publication de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, Hermann, 1966.
[*3*] J. NEVEU, *Martingales à temps discret*, Masson, 1972.

(Manuscrit reçu le 3 mai 1974).