ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

X. GUYON
E. LESQUOY
F. SCHAEFFER

Recherche de plans d'expérience adaptés à des hypothèses a priori dans certains cas particuliers

Annales de l'I. H. P., section B, tome 9, nº 4 (1973), p. 369-377
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1973__9_4_369_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. IX, n° 4, 1973, p. 369-377. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Recherche de plans d'expérience adaptés à des hypothèses *a priori* dans certains cas particuliers

par

X. GUYON, E. LESQUOY, F. SCHAEFFER

SUMMARY. — If $\mathbb{R}^T$ is the space of all possible values of the parameter φ of an analysis of variance problem, we shall consider a « model » as a linear subspace V of $\mathbb{R}^T$. This paper gives, in certain particular cases, the answer to the following problem:

What experiences have to be fullfilled so that the functions $A\varphi$ of the mean $\varphi(t)$ of Y_t is estimable, when A belongs to a certain class.

INTRODUCTION

Dans son article [*1*], D. Vaguelsy propose une formulation globale des plans d'expérience en présentant le problème en ces termes : étant donnée une hypothèse *a priori*, quelles sont les expériences à réaliser pour répondre à certains problèmes statistiques : existence d'estimateurs sans biais de certains paramètres, précision de ces estimateurs.

Nous donnons ici quelques exemples de recherche de plans d'expérience adaptés à l'estimation de certains paramètres, dans un modèle fixé.

Si le choix du modèle est fixé par la donnée d'un sous-espace V de R^T (T est l'ensemble des traitements), espace des valeurs possibles de la fonction moyenne φ :

$$\varphi(t) = EY_t, \qquad t \in T$$

on va considérer les deux problèmes suivants :

1) Etant donné le modèle V, quels sont les plans adaptés et minimaux

adaptés qui permettent d'estimer φ (c'est-à-dire d'estimer $\varphi(t)$ pour chaque t).

2) Etant donné le modèle V, quels sont les plans adaptés et adaptés minimaux qui permettent d'estimer φ_1 où φ_1 est la composante de φ sur V_1 relativement à la décomposition $V = V_1 \oplus V_2$.

NOTATIONS. OPÉRATEURS ESTIMABLES

Un plan d'expérience est la donnée du couple (U, s) où

$$\begin{cases} U = \{1, 2, \dots, n\} \text{ est l'ensemble des unités expérimentales,} \\ s : U \to T \text{ associe à la } i^{\text{ème}} \text{ unité le traitement } s(i) \text{ qui lui est appliqué.} \end{cases}$$

Un plan est également caractérisé par l'application linéaire ψ :

$$\psi : V \to R^U \quad \text{définie par} \quad \psi(\varphi) = \varphi \circ s$$

OPÉRATEUR ESTIMABLE

Soit A un opérateur de V dans E, espace vectoriel réel et Y_S le vecteur des observations

$$Y_S = {}^t(Y_{S(1)}, \dots, Y_{s(n)}).$$

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "A"'] \arrow[d, "\psi"] & \\ E & R^U \arrow[l, "\tilde{A}"'] & \Omega \arrow[l, "Y_s"'] \end{tikzcd}$$

On dit que (U, s) rend estimable l'opérateur A si il existe un estimateur linéaire sans biais de $A\varphi$ c'est-à-dire s'il existe $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} : R^U \to E \qquad E(\tilde{A}Y_S) = A\varphi$$

pour tout φ de V, condition équivalente à

$$(1) \qquad \tilde{A} \circ \psi = A \qquad \text{soit} \qquad \ker \psi \subset \ker A.$$

Exemples. — On va réexaminer les deux problèmes d'estimations formulés dans l'introduction, et les reformuler en termes d'opérateurs estimables.

1. Etant donné un modèle V, trouver un plan adapté à l'estimation de la moyenne φ revient à trouver un plan adapté à l'identité I de V. Il sera adapté à l'estimation de tout opérateur de V dans V. Une condition nécessaire et suffisante est l'injectivité de ψ.

2. Considérons la décomposition $V = V_1 \oplus V_2$ du modèle. Le plan est adapté à l'estimation de la composante de la moyenne sur V_1 pour

cette décomposition si l'opérateur P^{V_1} de projection sur V_1 parallèlement à V_2 est estimable.

De plus, tout opérateur A tel que :

$$\ker A \supseteq V_2$$

est estimable pour ce plan.

En effet, si : $\ker A \supseteq V_2$, $V_2 = \ker P^{V_1}$, on a

$$A = G \circ P^{V_1}$$

et $G \circ \widetilde{P^{V_1}}(Y_S)$ estime sans biais $A\varphi$ si $\widetilde{P^{V_1}}Y^S$ est un estimateur sans biais de $P^{V_1}\varphi$.

Remarque. — Il apparaît plus clairement, en utilisant la notion d'opérateur estimable, qu'un plan adapté à l'estimation de $P^{V_1}\varphi$ est adapté à l'estimation de $P^{V'_1}\varphi$ pour tout supplémentaire V'_1 de V_2 dans V. Un tel plan est donc caractérisé par V_2, et non par V_1.

On supposera que l'ensemble des traitements T s'écrit :

$$T = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k \qquad (n \text{ facteurs})$$

ou A_i est l'ensemble des niveaux du $i^{\text{ème}}$ facteur. Un traitement serait donc

$$t = (t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_k),$$

le facteur i est au niveau t_i. On note $K = \{1, 2, \dots, k\}$. R^T est muni du produit scalaire canonique.

Dans la suite, on considérera toujours que la décomposition $V = V_1 \oplus V_2$ est orthogonale, condition qui, d'après la remarque précédente ne limite en rien l'étendue du problème.

* E^I est l'ensemble des fonctions de R^T qui ne dépendent que des niveaux des facteurs A_i, $i \in I$ ou I est une partie de K c'est-à-dire $\varphi \in E^I$ est réalisé si $\varphi(t_I, t_{I^c}) = \varphi(t_I, t'_{I^c})$ pour tout t_I dans A_I $\left(A_I = \prod_{i \in I} A_i\right)$, t_{I^c} et t'_{I^c} dans A_{I^c}.

** Ω_Φ est l'ensemble des fonctions constantes.

*** Ω_I est le sous-espace de E_I qui est le supplémentaire orthogonal de tous les Ω_J, $J \subsetneq I$

$$\left(E_I = \Omega_I \overset{\perp}{\bigoplus} \left(\sum_{J \subsetneq I} \Omega_J\right)\right).$$

On sait que [2] :

$$R^T = \overset{\perp}{\bigoplus_{I \in \mathcal{P}\{1,2,\dots,k\}}} \Omega_I$$

et que φ appartient à Ω_I est équivalent à :

$$\text{pour tout } j \text{ de I,} \quad \sum_{t_j \in A_j} \varphi(t_1, \ldots, t_{j-1}, t_j, t_{j+1}, \ldots, t_n) = 0,$$

ceci, pour tout $t_1, t_2, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_n$, dans $A_1, A_2, \ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots, A_n$.

I. — LE MODÈLE EST COMPLET

On a donc : $V = R^T$, et une décomposition : $V = V_1 \overset{\perp}{\bigoplus} V_1^{\perp}$.
On démontre alors :

PROPOSITION. — *Dès que* V_1 *contient un espace* Ω_I, *un plan adapté à* V_1 *doit être complet, c'est-à-dire*

$$S(U) = T$$

La condition (1) pour l'opérateur P^{V_1}, projection orthogonale sur V_1 est équivalente à (2)

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi \text{ nulle sur } S(U) \text{ et } \varphi \text{ dans V entraîne } \varphi \in V_2 \text{ soit :} \\ \qquad (S(U))^* \cap V \subset V_2 \end{cases}$$

où $(S(U))^* = \{ \varphi \in R^T ; \varphi|_{S(U)} = 0 \}$.
Ici, la condition se réduit à :

$$((S(U))^c)^* \supset V_1 \qquad (\text{on a } V_1 \supset \Omega_I).$$

a) *Cas* $I = \emptyset$:

La fonction 1 ne s'annule pas ; $(S(U))^c$ est donc vide.

b) *Cas* Card $I = 1$.

Alors $I = \{j\}$ et $A_I = A_j = \{ a_1, a_2, \ldots, a_p \}$.
Le système des e_i, où i varie de 1 à $p - 1$, définis par :

$$e_i(t_j, t_{jc}) = \delta_{a_i, t_j} - \frac{1}{p}, \qquad t_j \in A_j$$

est une base de Ω_j.

Supposons $(S(U))^c$ non vide ; soit (t_{j0}, t_{jc}) un élément de $(S(U))^c$. Comme Ω_j est contenu dans $[(S(U))^c]^*$, les éléments de la base sont dans $((S(U))^c)^*$, en particulier si $a_i \neq t_{j0}$:

$$e_i(t_{j0}, t_{jc}) = -\frac{1}{p}$$

ce qui contredit l'hypothèse. Donc $(S(U))^c = \emptyset$. Le plan est complet.

c) *Cas*, Card I > 1.

Supposons que : $S(U)^c \neq \emptyset$.

Soit (t_I, t_{I^c}) un point de $S(U)^c$. Construisons une fonction f de Ω_I, non nulle sur (t_I, t_{I^c}), c'est-à-dire

$$f \in \Omega_I \qquad \text{et} \qquad f \notin [S(U)^c]^*.$$

Si Card I $= r$, $t_I = (t_1, t_2, \ldots, t_r)$. Choisissons un point t'_I

$$t'_I = (t'_1, \ldots, t'_r) \qquad \text{avec} \qquad t'_1 \neq t_1, \ldots, t'_r \neq t_r.$$

Sur les sommets de l'hypercube construit à partir de t_I et t'_I, f prendra les valeurs $+1$ et -1 et sera nulle partout ailleurs, de façon à ce que f soit dans Ω_I. Pour cela, si t^*_I est un tel sommet :

$$t^*_I = (t^*_1, \ldots, t^*_r) \qquad t^*_i = t_i \quad \text{ou} \quad t'_i$$

$$s = \sum_{i=1}^{r} 1_{\{t_i = t^*_i\}}$$

on pose :

$$\begin{cases} f(t^*_I, t^*_c) = (-1)^s \\ f = 0 \qquad \text{ailleurs} \end{cases}$$

Alors f est dans Ω_I et $f(t_I, t_{I^c})$ est égale à 1.

Remarque. — Le cas où V est égal à E_J s'en déduit simplement car supposer φ dans E_J revient à dire que les facteurs de J^c n'ont pas d'action. Le plan d'expérience doit être complet pour les facteurs de J, ceux de J^c étant quelconques.

II. — LE MODÈLE EST ADDITIF : $V = E_I + E_J$ ET $I \cap J = \phi$

Puisque I et J sont disjoints, il suffit de considérer le cas

$$\text{Card I} = 1, \qquad \text{Card J} = 1$$

en regroupant les différents facteurs de I, puis les différents facteurs de J. On pose donc $I = \{i\}$, $J = \{j\}$.

1. Estimation des effets du premier facteur

Dans le cas où Card I = Card J = 1, il s'agit d'estimer la composante de la moyenne sur Ω_I.

Dans le cas ou Card I > 1, si on note E'_I le supplémentaire orthogonal de Ω_Φ dans E_I, il s'agit d'estimer la composante de la moyenne sur E'_I.

On a alors la proposition suivante

PROPOSITION. — S(U) *est un plan adapté à l'estimation de* Ω_I (Card I = 1), *ou de* E'_I (Card I > 1) *dans le modèle* $V = E_I + E_J$ ($I \cap J = \emptyset$) *si et seulement si la projection sur* $A_I \times A_J$ *de* S(U) *est un escalier dont la projection sur* A_I *est* A_I *tout entier.*

DÉFINITION. — *On appelle escalier une suite de points* (u_n, v_n) *de* $A_I \times A_J$ *telle que pour tout* n *on ait soit* $u_n = u_{n+1}$, *soit* $v_n = v_{n+1}$.

Il suffit de se limiter au cas Card I = Card J = 1.

Montrons que la condition est suffisante. Supposons, donc que E est un escalier convenable où $E = P_{A_I \times A_J} S(U)$.

Il existe un entier n tel que (u_n, v_n), (u_{n+1}, v_{n+1}) sont dans E et $v_n = v_{n+1}$; alors si on écrit

$$\varphi = \mu + \varphi_I + \varphi_J \qquad \begin{array}{l} \mu \in \Omega_\Phi \\ \varphi_I \in \Omega_I \quad \text{et} \quad \varphi_J \in \Omega_J \end{array}$$

$$\begin{cases} \mu + \varphi_I(u_n) + \varphi_J(v_n) = 0 \\ \mu + \varphi_I(u_{n+1}) + \varphi_J(v_n) = 0 \end{cases}$$

et alors le système des équations : $\varphi(t) = 0$ pour $t \in E$ entraîne que φ_I est constante sur A_I donc identiquement nulle.

Réciproquement, considérons les deux cas :

a) $P_{A_I} S(U) \neq A_I$, alors la fonction $\varphi = \mu + \varphi_I$ définie par

$$\begin{cases} \varphi_I(t) = -\dfrac{1}{n_2} & (\text{si } t \notin P_{A_I} S(U)) \\ \varphi_I(t) = \dfrac{1}{n_1} & (\text{si } t \in P_{A_I} S(U)) \\ \mu = -\dfrac{1}{n_1}, & n_1 = \text{Card } P_{A_I} S(U),\ n_2 = \text{Card } (A_I \backslash P_{A_I} S(U)) \end{cases}$$

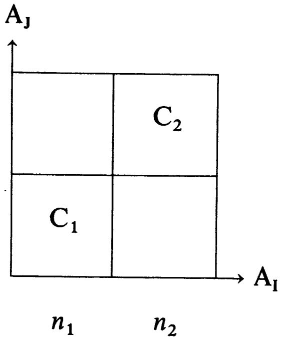
est nulle sur S(U) sans être nulle partout.

b) Si $P_{A_I} S(U) = A_I$ mais $E = P_{A_I \times A_J} S(U)$ n'est pas un escalier. Définissons la relation d'équivalence dans E

$x \mathscr{R} y$: il existe un escalier de E reliant x à y.

Alors E est la réunion de deux parties disjointes C_1 et C_2 telles que C_1 soit une classe d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$ et un point de C_2 ne pouvant être relié à aucun point de C_1.

Puisque $P_{A_I}S(U) = A_I$, il existe $(u, v) \in C_2$



$n_1 = \text{Card } P_{A_I}C_1$

$n_2 = \text{Card } P_{A_I}C_2$

$m_1 = \text{Card } P_{A_I}C_1$

$m_2 = \text{Card } P_{A_I}C_2$

La fonction φ ainsi construite :

$$\begin{cases} \varphi_I(u) = \dfrac{\alpha}{n_1} & \text{si} \quad u \in P_{A_I}C_1 \\[2ex] \varphi_I(u) = -\dfrac{\alpha}{n_2} & \text{si} \quad u \notin P_{A_I}C_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi_J(v) = \dfrac{\beta}{m_1} & \text{si} \quad v \in P_{A_J}C_1 \\[2ex] \varphi_J(v) = -\dfrac{\beta}{m_2} & \text{sinon} \end{cases}$$

et $\varphi = \mu + \varphi_I + \varphi_J$ avec μ, α, β solutions du système :

$$\begin{cases} \mu + \dfrac{\alpha}{n_1} + \dfrac{\beta}{m_1} = 0 \\[2ex] \mu - \dfrac{\alpha}{n_2} - \dfrac{\beta}{m_2} = 0 \end{cases}$$

est nulle sur S(U) et $\varphi_I \neq 0$.

2. Estimation de la moyenne dans le modèle additif

Il découle immédiatement des résultats précédents la proposition suivante, si on veut estimer tout V.

PROPOSITION. — S(U) *est un plan adapté pour estimer la moyenne dans le modèle* $E_I + E_J$ $(I \cap J = \emptyset)$ *si et seulement si la projection sur* $A_I \times A_J$ *de* S(U) *est un escalier dont les projections sur* A_I *et* A_J *sont respectivement* A_I *et* A_J.

III. — GÉNÉRALISATION DU MODÈLE PRÉCÉDENT : $V = E_I + E_J$ ET $I \cap J \neq \phi$

1) $V_1 = V$, ou estimation de la moyenne.

On décompose $E_I + E_J$ en somme directe orthogonale

$$E_I = E_{I\cap J} \oplus F_I, \qquad E_J = E_{I\cap J} \oplus F_J$$
$$E_{I\cap J} = \Omega_\Phi \oplus E'_{I\cap J}$$
$$E_I + E_J = \Omega_\Phi \oplus E'_{I\cap J} \oplus F_I \oplus F_J.$$

La condition (2) s'écrit :

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = \mu + \varphi_I + \varphi_{I\cap J} + \varphi_J \\ \varphi/s(u) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = 0$$

μ constante, $\varphi_I \in F_I$, $\varphi_J \in F_J$, $\varphi_{I\cap J} \in E'_{I\cap J}$. On écrira

$$t = (t_1, t_2, t_3), \qquad t_1 \in A_{I-I\cap J}, \qquad t_2 \in A_{I\cap J}, \qquad t_3 \in A_{J-I\cap J}.$$

Si la trace de $s(u)$ dans chaque plan $\{ t_2 = t_2^0 \}$ est un escalier dont les projections sur $A_{I-I\cap J}$ et $A_{J-I\cap J}$ sont respectivement $A_{I-I\cap J}$ et $A_{J-I\cap J}$ la condition (2) est remplie. En effet une fonction φ_I et F_I est caractérisée par

$$\forall t_2, \qquad \sum_{t_1} \varphi_I(t_1, t_2) = 0.$$

Réciproquement, supposons que pour un t_2^0 la trace de $s(u)$ ne soit pas un escalier. Il existe donc un nombre μ, des fonctions φ_1 et φ_3 telles que

$$\sum_{t_1} \varphi_1(t_1) = 0$$
$$\sum_{t_2} \varphi_3(t_3) = 0$$

$\mu + \varphi_1 + \varphi_3$ et non nulle et s'annule sur la trace dans $\{ t_2 = t_2^0 \}$ de $s(u)$. On définit alors la fonction φ sur $A_{I\cup J}$ par

$$\varphi = \frac{\mu}{n_2} + \varphi_2(t_2) + \varphi_I(t_1, t_2) + \varphi_J(t_2, t_3)$$

avec

$$n_2 = \text{Card } A_{I \cap J}$$

$$\varphi_I(t_1, t_2) = \begin{cases} \varphi_1(t_1) & \text{si} \quad t_2 = t_2^0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\varphi_J(t_2, t_3) = \begin{cases} \varphi_3(t_3) & \text{si} \quad t_2 = t_2^0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\varphi_2(t_2) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{n_2}\mu & \text{si} \quad t_2 = t_2^0 \\ -\dfrac{1}{n_2}\mu & \text{sinon} \end{cases}$$

Ces trois fonctions vérifient les équations qui caractérisent respectivement F_I, F_J et $E'_{I \cap J}$, à savoir

$$(F_I) \qquad \forall t_2 \qquad \sum_{t_1} \varphi_I(t_1, t_2) = 0$$

$$(F_J) \qquad \forall t_2 \qquad \sum_{t_3} \varphi_J(t_2, t_3) = 0$$

$$(E'_{I \cap J}) \qquad \sum_{t_2} \varphi_2(t_2) = 0$$

φ est nulle sur $s(u)$ sans être nulle partout.

PROPOSITION. — *La forme nécessaire et suffisante d'un plan adapté à* $E_I + E_J$ *est donc une famille d'escaliers dans chaque plan* $\{ t_2 = t_2^0 \}$ *dont les projections sur* $A_{I-I \cap J}$ *et* $A_{J-I \cap J}$ *sont respectivement* $A_{I-I \cap J}$ *et* $A_{J-I \cap J}$.

2) $V_1 = F_I$.

Rappelons que F_I est définit par la relation : $E_I = E_{I \cap J} \oplus F_I$. On montre alors par un raisonnement analogue :

PROPOSITION. — La forme nécessaire et suffisante pour que $s(u)$ soit adapté à l'estimation de F_I dans le modèle $E_I + E_J$ est que dans chaque plan $\{ t_2 = t_2^0 \}$ $s(u)$ soit un escalier dont la projection sur $A_{I-I \cap J}$ soit $A_{I-I \cap J}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. VAGUELSY, *Plans d'expérience* (Publication du petit Séminaire de Statistiques).
[2] BARRA, *Notions fondamentales de Statistiques Mathématiques*. Dunod.

(Manuscrit reçu le 5 juin 1973)