ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN-YVES OUVRARD

Martingales locales et théorème de Girsanov dans les espaces de Hilbert réels séparables

Annales de l'I. H. P., section B, tome 9, nº 4 (1973), p. 351-368
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1973__9_4_351_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. IX, n° 4, 1973, p. 351-368. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Martingales locales et théorème de Girsanov dans les espaces de Hilbert réels séparables

par

Jean-Yves OUVRARD
Département de Mathématiques. Université de Caen,
Esplanade de la Paix, 14000 Caen

SUMMARY. — We generalize the results announced in [*12*] to the case of local martingales which take their values in a real separable Hilbert space. In same time, we give a new proof for these results.

Le but de cet article est de généraliser les résultats de [*12*] aux martingales locales à valeurs dans un espace de Hilbert réel séparable introduites dans [*8*], ainsi que de donner une nouvelle démonstration de ces résultats.

Dans le chapitre I, tout en fixant les notations, on rappelle brièvement les résultats de [*8*] utilisés par la suite. On donne aussi une caractérisation du mouvement brownien hilbertien comme martingale.

Le chapitre II est consacré à l'étude du processus Z^h associé à deux processus M et A. On étudie les relations entre la martingale de M et la naturalité de A d'une part et la martingalité de Z^h d'autre part.

Dans le chapitre III, on démontre une généralisation d'un théorème de Girsanov pour des martingales locales hilbertiennes. On en déduit les résultats annoncés dans [*12*].

Je tiens à remercier M. le Professeur METIVIER pour les suggestions précieuses qu'il m'a faites au cours de l'élaboration de ce travail.

I. NOTATIONS. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

On se donne une base de processus $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, \mathrm{P})$, la famille des sous-tribus $\mathscr{F}_t$ (supposées complètes) étant continue à droite.

Si $\mathbb{H}$ est un espace de Hilbert réel séparable, on note $\mathscr{M}_2^c(\mathbb{H})$ (resp. $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^c(\mathbb{H})$, $\mathscr{M}_{\mathrm{loc},2}^c(\mathbb{H})$) l'ensemble des martingales à valeurs dans $\mathbb{H}$ fortement continues, de carré intégrable (resp. locales, locales telles que leurs localisées soient de carré intégrable).

On précisera la probabilité de référence s'il y a doute.

Exemple : $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{H}\ ; \mathrm{P})$.

Par la suite $\mathbb{H}$ désignera un espace de Hilbert réel, séparable et on l'identifiera à son dual.

1. Rappels sur les produits tensoriels d'espaces hilbertiens

On note $\mathbb{H} \hat{\otimes}_{\mathrm{T}} \mathbb{H}$ le produit tensoriel projectif complété pour la norme trace $\|\ .\ \|_{\mathrm{T}}$ de l'espace $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ (cf. [*16*]). Le produit tensoriel hilbertien (cf. [*10*]) est noté $\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H}$. On rappelle qu'étant donné un élément A de $\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H}$ il lui correspond un opérateur nucléaire unique $\tilde{\mathrm{A}}$ de $\mathscr{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ tel que :

$$\forall h \in \mathbb{H}, \qquad \forall g \in \mathbb{H} \qquad \langle \tilde{\mathrm{A}}h, g \rangle_{\mathbb{H}} = \langle h \otimes g, \mathrm{A} \rangle_{\mathbb{H}\hat{\otimes}\mathbb{H}}$$

En particulier :

$$\langle \mathrm{A}, h \otimes h \rangle_{\mathbb{H}\hat{\otimes}\mathbb{H}} = \langle \tilde{\mathrm{A}}h, h \rangle_{\mathbb{H}} = \mathrm{tr}\ [(\tilde{\mathrm{A}}h) \otimes h] = \mathrm{tr}\ \mathrm{A}h \otimes h$$

2. Mesures stochastiques, martingales (locales) à valeurs dans $\mathbb{H}$ et intégrales stochastiques

On va résumer brièvement la théorie de l'intégrale stochastique hilbertienne construite récemment par M. Metivier (cf. [*5*] [*6*] [*7*] [*8*]).

Sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ on définit l'ensemble $\mathscr{R}$ des rectangles prévisibles $]s, t] \times \mathrm{F}$ ou $s < t$ et $\mathrm{F} \in \mathscr{F}_s$. $\mathscr{R}$ est un semi-anneau. On note $\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{T}(\mathscr{A})$) le δ-anneau (resp. la tribu) engendrée par $\mathscr{A}$. $\mathscr{T}(\mathscr{A})$ est la tribu des prévisibles.

Si $\sigma = (\sigma_n)$ est une suite de temps d'arrêts finis, strictement croissante, telle que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$. p. s., nous noterons $\mathscr{A}_0$ le δ-anneau $\mathscr{A}_\sigma = \bigcup_n]0, \sigma_n] \cap \mathscr{A}$.

On note $]0, \sigma_n]$ l'intervalle stochastique $\{ (t, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \mid 0 < t \leqslant \sigma_n(\omega) \}$

1.2.1. DÉFINITIONS. — On appelle mesure stochastique sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ de puissance 2-intégrable une mesure m sur le δ-anneau $\mathscr{A}$ à valeurs dans $L^2_{\mathbb{H}}(\Omega, \mathscr{F}, P)$ telle que :

$$\text{(S)} \qquad \forall]s, t] \times F \in \mathscr{R} \qquad m(]s, t] \times F) = 1_F m(]s, t] \times \Omega) \in L^2_{\mathbb{H}}(\Omega, \mathscr{F}_t, P).$$

— On appelle mesure stochastique locale une application de $\mathscr{A}$ dans l'espace des variables aléatoires muni de la topologie de la convergence en probabilité $L^0_{\mathbb{H}}(\Omega, \mathscr{F}, P)$ telle qu'existe une suite $\sigma = (\sigma_n)$ « localisante » pour laquelle m restreinte à $\mathscr{A} \cap]0, \sigma_n]$ est une mesure stochastique (pour tout n).

1.2.2. DÉFINITION. — Soit E un espace de Banach réflexif séparable. On appelle processus naturel, un processus V à valeurs dans E vérifiant $V_0 = 0$, tel que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $V_t \in L^1_E(\Omega, \mathscr{F}_t, P)$ et

a) Pour tout ω, l'application $t \to V(t, \omega)$ engendre une mesure aléatoire $v(\omega)$ à valeurs dans E sur les boréliens bornés de $\mathbb{R}^+$, telle que l'application $A \to E\left[\int 1_A(s, \omega)v(ds, .)\right]$ définisse une mesure vectorielle α sur $\mathscr{A}$ à variation finie.

b) Pour tout $F \in \mathscr{F}_t$

$$E(1_F . V_t) = \int_{]0,t] \times \Omega} E(1_F \mid \mathscr{F}_u)^-(\omega)\alpha(du, d\omega)$$

où $((E1_F \mid \mathscr{F}_u)^-)_{u \in \mathbb{R}^+}$ désigne la régularisée à gauche de la martingale $(E1_F \mid \mathscr{F}_u)_{u \in \mathbb{R}^+}$.

Les théorèmes suivants (démontrés dans [*8*]) sont résumés dans [*5*] [*6*] et [*7*] et condensés ici sous la forme suivante :

1.2.3. THÉORÈME. — Soit M une martingale à valeurs dans $\mathbb{H}$, continue à droite telle que $\| M_t \|^2$ soit intégrable pour tout t. Posons :

$$\forall F \in \mathscr{F}_s, \qquad s < t \qquad \begin{aligned} m(]s, t] \times F) &= 1_F(M_t - M_s) \\ \alpha(]s, t] \times F) &= E1_F(M_t - M_s)^{\otimes 2} \\ \lambda &= \operatorname{tr} \alpha \end{aligned}$$

1) Alors m se prolonge en une mesure stochastique et α en une mesure sur $\mathscr{A}$ à valeurs dans $\mathbb{H} \hat{\otimes}_T \mathbb{H}$, à variation bornée $|\alpha| \leqslant \lambda$, et λ se prolonge en une mesure positive.

2) Le processus naturel A (noté aussi $\langle M \rangle$) de la mesure α est tel que $(M_t^{\otimes 2} - A_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est une martingale.

3) Soit G est un autre espace de Hilbert et $\mathbb{B} = \mathscr{L}(\mathbb{H}, G)$. Tout processus $X \in L^2_{\mathbb{B}}(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathscr{T}(\mathscr{A}), \lambda)$ est intégrable en moyenne quadratique par rapport à m. Si pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $1_{[0,t] \times \Omega} X \in L^2_{\mathbb{B}}(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathscr{T}(\mathscr{A}), \lambda)$, le processus Y unique à l'indistingabilité près, associé à la mesure stochastique $A \to \int_A X dm$ est une martingale fortement continue à droite, de carré intégrable.

4) Si M_1 et M_2 sont deux martingales de carré intégrable, m_1 et m_2 les mesures stochastiques associées, n_1 et n_2 les mesures stochastiques $A \to \int_A X_1 dm_1$ et $A \to \int_A X_2 dm_2$ on a

$$\langle n_1, n_2 \rangle (A) = \int_A X_1 \otimes X_2 d \langle m_1, m_2 \rangle$$

où $\langle m_1, m_2 \rangle$ désigne la mesure stochastique associée au processus naturel $\langle M_1, M_2 \rangle$ (lui-même défini, par bilinéarisation, de manière analogue à $\langle M \rangle$).

Remarque :

i) On a des propriétés analogues lorsque M est une martingale locale. On sait intégrer tous les processus X prévisibles tels que :

$$P\left(\int_0^t \| X(.,\omega) \|^2_{\mathbb{B}} d\lambda(s) < \infty \right) = 1$$

le processus $\int X dM$ associé à la mesure stochastique $A \to \int_A X dm$ est alors un élément de $\mathscr{M}_{\text{loc},2}(G)$.

ii) Si M est continu, on peut étendre toutes les mesures considérées aux ensembles bien-mesurables, en ne chargeant pas les graphes de temps d'arrêt. On intègre alors les processus bien-mesurables.

Par la suite, on conservera les notations utilisées ci-dessus.

On peut alors énoncer une conséquence immédiate de la proposition 4 du théorème 1.2.3.

1.2.4. Lemme. — Si M est une martingale (locale) de $\mathscr{M}^c_{\text{loc},2}(\mathbb{H})$ de processus naturel A, alors, pour tout h appartenant à $\mathbb{H}$, $\langle M, h \rangle_{\mathbb{H}}$ est une martingale de $\mathscr{M}^c_{\text{loc},2}(\mathbb{R})$ de processus croissant naturel (au sens de [9]) $\langle A, h \otimes h \rangle_{\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H}}$.

Démonstration. — Il suffit d'intégrer le processus constant h par rapport à M. Alors :

$$\left\langle \int h d\mathrm{M} \right\rangle = \int h \otimes h d \langle \mathrm{M} \rangle$$

ce qui donne le résultat puisque (cf. [*8*]), processus naturel et processus croissant naturel au sens de [*9*] coïncident dans le cas unidimensionnel.

3. Définition et caractérisation d'un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{H}$

Dans [*12*], on a donné la définition suivante.

1.3.1. DÉFINITION. — On appelle mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{H}$, un processus W adapté à la famille $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,1]}$ vérifiant les conditions suivantes :

i) $\mathrm{W}(0) = 0$.
ii) $\mathrm{EW}_t = 0 \quad \forall t \in [0, 1]$.
iii) $\mathrm{W}_t - \mathrm{W}_s$ est indépendant de $\mathscr{F}_s$ pour tout (s, t) tel que $s < t$.
iv) W est presque sûrement continue.
v) $\mathrm{E}(\mathrm{W}_t - \mathrm{W}_s) \circ (\mathrm{W}_t - \mathrm{W}_s) = (t - s)\mathscr{W}$ où $\mathscr{W}$ est un opérateur auto-adjoint, positif, nucléaire.

$h_1 \circ h_2$ est défini comme l'élément de $\mathscr{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ vérifiant :

$$(h_1 \circ h_2)h = h_2 \langle h_1, h \rangle$$

On a alors le théorème suivant :

1.3.2. THÉORÈME. — Soit M une martingale de $\mathscr{M}_2^c(\mathbb{H})$ de processus naturel $\langle \mathrm{M} \rangle$ défini par $\langle \mathrm{M} \rangle_t = t\mathscr{W}$ ou $\mathscr{W}$ est un opérateur nucléaire sur $\mathbb{H}$. Supposons de plus que $\mathrm{M}_0 = 0$. Alors M est un mouvement brownien d'opérateur de covariance $t\mathscr{W}$.

Démonstration. — Les propriétés *i)* et *ii)* sont bien vérifiées, M étant une martingale nulle en 0. Reste à vérifier *iii)* et *v)*. Or d'après le lemme 1.2.4, pour tout h dans $\mathbb{H}$, $\langle \mathrm{M}, h \rangle$ est une martingale de $\mathscr{M}_2^c(\mathbb{R})$ de processus croissant naturel $t \langle \mathscr{W}h, h \rangle$. On sait alors (cf. par exemple [*4*]) que $\langle \mathrm{M}, h \rangle$ est un mouvement brownien réel de covariance $t \langle \mathscr{W}h, h \rangle$. Par conséquent, pour tout $t > s$, $\langle \mathrm{M}_t - \mathrm{M}_s, h \rangle$ est indépendant de $\mathscr{F}_s$, et $\mathbb{H}$ étant séparable, $\mathrm{M}_t - \mathrm{M}_s$ est indépendant de $\mathscr{F}_s$.

Enfin, on a, pour tous h et k dans $\mathbb{H}$:

$$\begin{aligned}\langle E(M_t - M_s) \circ (M_t - M_s)h, k \rangle &= E \langle (M_t - M_s)^{\otimes 2}, h \otimes k \rangle \\ &= E \langle \langle M \rangle_t - \langle M \rangle_s, h \otimes k \rangle \\ &= (t - s) \langle \mathscr{W}, h \otimes k \rangle\end{aligned}$$

D'où :

$$E(M_t - M_s) \circ (M_t - M_s) = (t - s)\tilde{\mathscr{W}}$$

Remarque. — Il est évident qu'inversement un mouvement brownien est une martingale de $\mathscr{M}_2^c(\mathbb{H})$ de processus naturel $\langle M \rangle$ défini par $\langle M \rangle_t = t\mathscr{W}$.

II. UNE CARACTÉRISATION DES MARTINGALES, LE PROCESSUS Z^h

Si M est une martingale locale de $\mathscr{M}_{\text{loc},2}^c(\mathbb{H})$ de processus naturel A, définissons, pour tout h de $\mathbb{H}$, le processus réel Z^h par :

$$Z^h = \exp\left\{ \langle M, h \rangle_{\mathbb{H}} - \frac{1}{2} \langle A, h \otimes h \rangle_{\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H}} \right\}$$

Nous pouvons alors énoncer :

2.1. THÉORÈME :

1) Si M est une martingale locale de $\mathscr{M}_{\text{loc},2}^c(\mathbb{H})$ de processus naturel A alors Z^h est une martingale locale de $\mathscr{M}_{\text{loc}}^c(\mathbb{R})$ pour tout h de $\mathbb{H}$.

2) Inversement, soient M et A des processus continus à valeurs respectivement dans $\mathbb{H}$ et $\mathbb{H} \hat{\otimes}_T \mathbb{H}$. Supposons que A soit tel que $A_0 = 0$ et qu'existent une mesure α, à variation finie et à valeurs dans $\mathbb{H} \hat{\otimes}_T \mathbb{H}$, et une suite localisante $\sigma = (\sigma_n)$ de temps d'arrêt telles que, pour tout n, $A_. \wedge \sigma_n$ soit le processus naturel de la restriction α^n à $]0, \sigma_n] \cap \mathscr{A}$ de la mesure α.

Alors si Z^h est une martingale locale de $\mathscr{M}_{\text{loc}}^c(\mathbb{R})$ pour tout h de $\mathbb{H}$, M est une martingale locale de $\mathscr{M}_{\text{loc},2}^c(\mathbb{H})$ de processus naturel A.

Démonstration :

1) D'après le lemme 1.2.4, $\langle M, h \rangle$ appartient à $\mathscr{M}_{\text{loc},2}^c(\mathbb{R})$ et a pour processus croissant naturel $\langle A, h \otimes h \rangle_{\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H}}$.

La conclusion résulte donc d'un résultat classique sur les martingales locales réelles (cf. [*4*] proposition 10).

2) Pour tout réel $\lambda > 0$ et tout h de $\mathbb{H}$, le processus $Z^{\lambda h}$ est une martingale locale de $\mathscr{M}_{\text{loc}}^c(\mathbb{R})$.

Soit (τ_n) la suite de temps d'arrêts définie par

$$\tau_n(\omega) = \sigma_n(\omega) \wedge \operatorname{Inf} \{ t \mid \quad \| M_t(\omega) \| > n \}$$

M étant continu, la suite τ_n tend presque sûrement vers $+\infty$ avec n. De plus A est à valeurs dans les tenseurs de type positif (cf. [*8*]). Donc

$$Z^{\lambda h}_{t \wedge \tau_n} \leqslant \exp \lambda n$$

Donc (cf. par exemple [*1*] ou [*10*] ou [*4*]), $\langle M_{.\wedge \tau_n}, h \rangle_{\mathbb{H}}$ est une martingale de $\mathcal{M}^c_2(\mathbb{R})$ de processus croissant $\langle A_{.\wedge\tau_n}, h \otimes h \rangle_{\mathbb{H}\hat{\otimes}\mathbb{H}}$.

Alors :

$$\forall F \in \mathscr{F}_s \qquad E1_F \langle M_{t\wedge\tau_n} - M_{s\wedge\tau_n}, h \rangle^2_{\mathbb{H}} = E1_F \langle A_{t\wedge\tau_n} - A_{s\wedge\tau_n}, h \otimes h \rangle_{\mathbb{H}\hat{\otimes}\mathbb{H}}$$

soit

$$\forall F \in \mathscr{F}_s \qquad E1_F \langle (M_{t\wedge\tau_n} - M_{s\wedge\tau_n})^{\otimes 2}, h \otimes h \rangle_{\mathbb{H}\hat{\otimes}\mathbb{H}} = E1_F \langle A_{t\wedge\tau_n} - A_{s\wedge\tau_n}, h \otimes h \rangle_{\mathbb{H}\hat{\otimes}\mathbb{H}}$$

A et $M^{\otimes 2}$ étant symétriques, on en déduit que :

$$\forall F \in \mathscr{F}_s, \quad \forall h \in \mathbb{H}, \quad \forall g \in \mathbb{H}, \quad E1_F (M_{t\wedge\tau_n} - M_{s\wedge\tau_n})^{\otimes 2}, h \otimes g \rangle_{\mathbb{H}\hat{\otimes}\mathbb{H}} = E1_F \langle A_{t\wedge\tau_n} - A_{s\wedge\tau_n}, h \otimes g \rangle_{\mathbb{H}\hat{\otimes}\mathbb{H}}$$

L'ensemble $\{ h \otimes g \mid h \in \mathbb{H}, g \in \mathbb{H} \}$ étant total dans le dual de $\mathrm{H} \hat{\otimes}_{\mathrm{T}} \mathbb{H}$ (cf. [*16*]), il vient :

$$\forall F \in \mathscr{F}_s \qquad E1_F (M_{t\wedge\tau_n} - M_{s\wedge\tau_n})^{\otimes 2} = E1_F (A_{t\wedge\tau_n} - A_{s\wedge\tau_n})$$

$A_{.\wedge\tau_n}$ étant supposé naturel de α^n, cette égalité prouve que α^n est la mesure associée à $M_{.\wedge\tau_n}$ par le théorème 2.3, et donc que la martingale $M_{.\wedge\tau_n}$ de $\mathcal{M}^c_2(\mathbb{H})$ admet $A_{.\wedge\tau_n}$ comme processus naturel.

Remarques :

1) Si la condition 1) du théorème 2.1 est vérifiée et si $M_0 = 0$, alors Z^h est une surmartingale positive (cf. [*4*] lemme 2 *bis*).

En particulier $EZ^h_t \leqslant 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

2) Sous les mêmes hypothèses, s'il existe un réel $t_0 > 0$ tel que $EZ^h_{t_0} = 1$, alors $(Z^h_t)_{0 \leqslant t \leqslant t_0}$ est une martingale (cf. [*2*] lemme 2).

On peut énoncer le lemme suivant :

2.2. LEMME. — Si pour tout h de $\mathbb{H}$, Z^h est une martingale locale de $\mathcal{M}^c_{\mathrm{loc},2}(\mathbb{R}^+)$ et si, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $E \| A_t \|_{\mathrm{T}} < +\infty$, alors M est une martingale de $\mathcal{M}^c_2(\mathbb{H})$.

Démonstration. — Le théorème 2.1 et le lemme 1.2.4 permettent d'affirmer que, pour tout h de $\mathbb{H}$, $\langle M, h \rangle_{\mathbb{H}}$ est une martingale locale de $\mathcal{M}^c_{loc,2}(\mathbb{R})$ de processus croissant naturel $\langle A, h \otimes h \rangle_{\mathbb{H}\hat{\otimes}\mathbb{H}}$.

Or pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$0 \leqslant E \langle A_t, \quad h \otimes h \rangle_{\mathbb{H}\hat{\otimes}\mathbb{H}} \leqslant \|h\|^2 E \|A_t\|_T < +\infty.$$

Alors (cf. par exemple 4, proposition 5), $\langle M, h \rangle_{\mathbb{H}}$ est en fait une martingale de $\mathcal{M}^c_2(\mathbb{R})$.

De plus, si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une base orthonormale de $\mathbb{H}$, la propriété de Beppo-Levi permet d'écrire :

$$\begin{aligned} E\|M_t\|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} E \langle M_t, e_n \rangle^2_{\mathbb{H}} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} E \langle A_t, e_n \otimes e_n \rangle_{\mathbb{H}\hat{\otimes}\mathbb{H}} \\ &= E \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle A_t, e_n \otimes e_n \rangle_{\mathbb{H}\hat{\otimes}\mathbb{H}} \\ &= E \|A_t\|_T < +\infty \end{aligned}$$

M est donc tel que $\|M_t\|^2$ soit intégrable pour tout t. Comme pour tout h de $\mathbb{H}$, $\langle M, h \rangle_{\mathbb{H}}$ est une martingale, il en résulte que M est une martingale de $\mathcal{M}^c_2(\mathbb{H})$.

Nous allons maintenant donner des conditions suffisantes pour que Z^h soit une martingale. Pour cela, nous suivrons la démonstration donnée dans [*15*], dans le cas de dimension un et où M est le mouvement brownien standard ; cette démonstration a été reprise dans [*12*] dans le cas hilbertien (M étant un mouvement brownien) et mise en forme pour les martingales locales réelles dans [*3*]. En fait, on peut déduire le théorème suivant de ce dernier résultat. Nous en donnons la démonstration, adaptée au cas hilbertien.

2.3. THÉORÈME. — Si M et A vérifient les hypothèses du théorème 2.1 et sont tels que $M_0 = 0$ et $A_0 = 0$. Si de plus existe un réel strictement positif a tel que :

$$E \exp a^2 \|A_t\|_{\mathbb{H}\hat{\otimes}\mathbb{H}} < +\infty \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

alors

a) Z^h appartient à $\mathcal{M}^c(\mathbb{R}^+)$ pour tout h de $\mathbb{H}$ tel que $\|h\| < a\sqrt{2}$.

b) Z^h appartient à $\mathcal{M}^c_2(\mathbb{R}^+)$ pour tout h de $\mathbb{H}$ tel que $\|h\|^2 < \dfrac{a^2}{3+2\sqrt{2}}$

Démonstration :

a) Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de temps d'arrêts presque sûrement finis convergeant presque sûrement vers $+\infty$ et telle que, pour tout n, $Z^h_{.\wedge T_n}$ soit une martingale de $\mathcal{M}_2^c(\mathbb{R}^+)$. Pour montrer que Z^h appartient à $\mathcal{M}^c(\mathbb{R}^+)$, il suffit de montrer que, pour tout t, la suite $(Z^h_{t\wedge T_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable, et pour cela, il suffit de trouver un réel $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\sup_n E(Z^h_{t\wedge T_n})^{1+\varepsilon} < +\infty$$

Or, si $\varepsilon > 0$ et si p et q sont deux réels conjugués positifs :

$$\begin{aligned} &E(Z^h_{t\wedge T_n})^{1+\varepsilon} \\ &\quad = E\left[\exp\left(\frac{1}{p}\langle p(1+\varepsilon)h, M_{t\wedge T_n}\rangle - \frac{1}{2p}\langle A_{t\wedge T_n}, p(1+\varepsilon)h\otimes p(1+\varepsilon)h\rangle\right)\right. \\ &\quad \left.\times \exp\frac{1+\varepsilon}{2}(p(1+\varepsilon)-1)\langle A_{t\wedge T_n}, h\otimes h\rangle\right] \end{aligned}$$

L'inégalité de Hölder donne :

$$\begin{aligned} &E(Z^h_{t\wedge T_n})^{1+\varepsilon} \\ &\quad \leqslant \left[E\exp\left(\langle p(1+\varepsilon)h), M_{t\wedge T_n}\rangle - \frac{1}{2}\langle A_{t\wedge T_n}, p(1+\varepsilon)h\otimes p(1+\varepsilon)h\rangle\right)\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \times \left[E\exp\frac{q(1+\varepsilon)}{2}(p(1+\varepsilon)-1)\langle A_{t\wedge T_n}, h\otimes h\rangle\right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} (*)\quad &E(Z^h_{t\wedge T_n})^{1+\varepsilon} \\ &\quad \leqslant \left[E\exp\left(\langle p(1+\varepsilon)h), M_{t\wedge T_n}\rangle - \frac{1}{2}\langle A_{t\wedge T_n}, p(1+\varepsilon)h\otimes p(1+\varepsilon)h\rangle\right)\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \times \left[E\exp\frac{q(1+\varepsilon)}{2}(p(1+\varepsilon)-1)\|h\|^2\|A_t\|_{\mathbb{H}\hat{\otimes}\mathbb{H}}\right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant vraie parce que la suite $(\langle A_{t\wedge T_n}, h\otimes h\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque sûrement une suite positive croissante.

On peut trouver $\varepsilon > 0$, p et q conjugués positifs tels que :

$$(**)\qquad \|h\|^2\frac{1+\varepsilon}{2}q(p(1+\varepsilon)-1) \leqslant a^2$$

En effet (cf. [*15*] ou [*3*]), puisque $\|h\| < a\sqrt{2}$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$a^2 - \frac{\|h\|^2}{2} = \delta\frac{\|h\|^2}{2}$$

L'inégalité $(**)$ sera vérifiée si :

$$(1 + \varepsilon)q(p(1 + \varepsilon) - 1) \leqslant 1 + \delta$$

En prenant $q = \dfrac{2 + \delta}{\delta}$ cette inégalité est vérifiée dès que

$$\varepsilon(1 + \varepsilon) \leqslant \frac{\delta^2}{(2 + \delta)\delta + (2 + \delta)^2}$$

Ayant choisit ainsi de tels ε, p et q et en remarquant que $Z^{p(1+\varepsilon)h}$ est une surmartingale, et donc, que, d'après le théorème de temps d'arrêt :

$$EZ_{t \wedge T_n}^{p(1+\varepsilon)h} \leqslant 1 \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

il résulte de $(*)$ que :

$$\sup_n E(Z_{t \wedge T_n}^h)^{1+\varepsilon} \leqslant E \exp a^2 \| A_t \|_{\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H}} < + \infty$$

b) Pour montrer que Z^h appartient à $\mathcal{M}_2^c(\mathbb{R}^+)$, il suffit de montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\sup_n E(Z_{t \wedge T_n}^h)^2 < + \infty$$

En effet $(Z_{t \wedge T_n}^h)_{n \in \mathbb{N}}^2$ est une sous-martingale relativement à la famille $(\mathcal{F}_{t \wedge T_n})_{n \in \mathbb{N}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Alors (cf. [9]) théorème 22, chap. V), pour tout entier p :

$$E(\sup_{n \geqslant p} Z_{t \wedge T_n}^h)^2 \leqslant 4 \sup_{n \geqslant p} E(Z_{t \wedge T_n}^h)^2$$

Le lemme de Fatou permet d'écrire :

$$E(Z_t^h)^2 = E(\lim_p \sup_{n \geqslant p} Z_{t \wedge T_n}^h)^2 \leqslant \lim_p E(\sup_{n \geqslant p} Z_{t \wedge T_n}^h)^2 \leqslant 4 \sup_n E(Z_{t \wedge T_n}^h)^2$$

Or, d'après la démonstration du *a*) :

$$E(Z_{t \wedge T_n}^h)^2 \leqslant E \exp a^2 \| A_t \|_{\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H}}$$

dès que

$$q \| h \|^2 (2p - 1) \leqslant a^2$$

(il suffit de prendre $\varepsilon = 1$ dans $(**)$).

Alors, en posant $k = \dfrac{a^2}{\| h \|^2}$, l'inégalité $(**)$ est satisfaite dès que :

$$q^2 + (1 - k)q + k \leqslant 0$$

Cette inégalité est satisfaite si et seulement si $k \geqslant 3 + 2\sqrt{2}$.

2.4. COROLLAIRE. — Soient W un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{H}$ et φ un processus bien-mesurable à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathbb{H}, \mathbb{K})$ (où $\mathbb{K}$ est un autre espace hilbertien séparable) tel que

$$P\left(\int_0^t \| \varphi_s \|^2 ds < + \infty \right) = 1$$

Soit, pour tout k de $\mathbb{K}$, le processus Z^k défini par :

$$Z_t^k = \exp \left\{ \left\langle k, \int_{]0,t] \times \Omega} \varphi dw \right\rangle_{\mathbb{H}} - \frac{1}{2} \int_0^t \langle \varphi_s \otimes \varphi_s \mathscr{W}, k \otimes k \rangle_{\mathbb{K} \hat{\otimes} \mathbb{K}} ds \right\}$$

w étant la mesure stochastique associée à W.

Alors :

a) Z^k est une surmartingale d'espérance inférieure ou égale à 1.

b) Si de plus il existe une constante $a > 0$ telle que :

$$E \exp a^2 \int_0^t \| \varphi_s \|^2 ds < + \infty \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

— Z^k est une martingale de $\mathscr{M}^c(\mathbb{R}^+)$ d'espérance 1 pour tout k tel que

$$\| k \|^2 < \frac{2a^2}{\| \mathscr{W} \|}$$

— Z^k est une martingale de $\mathscr{M}_2^c(\mathbb{R}^+)$ tout k tel que

$$\| k \|^2 < \frac{a^2}{(3 + 2\sqrt{2}) \| \mathscr{W} \|}$$

Démonstration. — Cela résulte immédiatement du 4) du théorème 1.2.3 et du théorème 2.3.

Remarque. — En prenant $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on obtient les résultats démontrés de façon directe dans [*12*].

III. UNE GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE GIRSANOV

3.1. DÉFINITION DE LA CONTRACTION $(\varphi, h \otimes k)$. — Soient φ un élément de $\mathscr{L}(\mathbb{H}, \mathbb{R})$, h et k des éléments de $\mathbb{H}$.

A l'application multilinéaire continue B de $\mathscr{L}(\mathbb{H}, \mathbb{R}) \times \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$ définie par :

$$B(\varphi, h, k) = \varphi(h)k$$

correspond une application bilinéaire continue unique $\tilde{\mathrm{B}}$ de $\mathscr{L}(\mathbb{H}, \mathbb{R}) \times (\mathbb{H} \hat{\otimes}_{\mathrm{T}} \mathbb{H})$ dans $\mathbb{H}$ telle que :

$$\tilde{\mathrm{B}}(\varphi, h \otimes k) = \varphi(h)k$$

On note cette application (., .), soit :

$$(\varphi, h \otimes k) = \varphi(h)k$$

3.2. Lemme. — Si u est un tenseur symétrique de $\mathbb{H} \hat{\otimes}_{\mathrm{T}} \mathbb{H}$, on a, pour tout k de $\mathbb{H}$, en désignant par $\mathbb{1}$ l'application identique sur $\mathbb{H}$:

$$\langle (\varphi, u), k \rangle_{\mathbb{H}} = \langle (\mathbb{1} \otimes \varphi)u, k \otimes 1) \rangle_{\mathbb{H}\hat{\otimes}\mathbb{R}} = \langle (\varphi \otimes \mathbb{1})u, 1 \otimes k \rangle_{\mathbb{R}\hat{\otimes}\mathbb{H}}$$

Démonstration. — Il suffit de vérifier ces égalités pour un tenseur $u = h \otimes h$; ces égalités s'en déduisant alors par continuité et densité. Or

$$\begin{aligned} \langle (\varphi, h \otimes h), k \rangle_{\mathbb{H}} &= \varphi(h) \langle h, k \rangle_{\mathbb{H}} \\ &= \langle (\varphi \otimes \mathbb{1})(h \otimes h), 1 \otimes k \rangle_{\mathbb{R}\hat{\otimes}\mathbb{H}} \\ &= \langle (\mathbb{1} \otimes \varphi)(h \otimes h), k \otimes 1 \rangle_{\mathbb{H}\hat{\otimes}\mathbb{R}} \end{aligned}$$

Nous allons énoncer le théorème annoncé sous deux formes pour séparer les problèmes. Dans le premier théorème, on considère un intervalle de temps [0, T], avec T fini, ce qui permet d'éviter des conditions supplémentaires assurant l'existence d'une limite projective de mesure. Le deuxième théorème considère des processus indexés sur $\mathbb{R}^+$. Nous garderons les notations des premiers chapitres.

3.3. Théorème. — Soient, sur la base de processus $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, \mathrm{P})$ une martingale locale de $\mathscr{M}^c_{\mathrm{loc},2}(\mathbb{H}, \mathrm{P})$, $\mathrm{A}(= \langle \mathrm{M} \rangle)$ son processus naturel associé (à valeurs dans $\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H}$). Les mesures m, $\langle m \rangle$, α et λ associées à M sont celles introduites dans le théorème 1.2.3. Soit φ un processus bien-mesurable à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathbb{H}, \mathbb{R})$ tel que

$$\mathrm{P}\left(\int_0^t \| \varphi_s \|^2 d\lambda_s < +\infty \right) = 1 \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

On définit le processus Z par :

$$\mathrm{Z}_t = \exp\left\{ \int_{]0,t]\times\Omega} \varphi dm - \frac{1}{2} \int_{]0,t]\times\Omega} \varphi \otimes \varphi d\langle m \rangle \right\}$$

On suppose qu'existe un réel $\mathrm{T} > 0$ tel que :

i) $$\mathrm{EZ}_t = 1 \qquad \forall t \in [0, \mathrm{T}]$$

Soit X le processus à valeurs dans $\mathbb{H}$ défini par :

$$X_t = M_t - \int_{]0,t] \times \Omega} (\varphi, d\langle m \rangle)$$

On note Q_t ($t \in \mathbb{R}_+$) la mesure sur $(\Omega, \mathscr{F}_t)$ de densité Z_t par rapport à P.

1) Q_t est une probabilité pour tout $t \in [0, T]$ et pour un tel t, Q_t est la restriction de Q_T à $\mathscr{F}_t$.

Q_t et P restreinte à $\mathscr{F}_t$ sont des mesures équivalentes.

2) Le processus $(X)_{t\in[0,T]}$ défini sur la base de processus $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, Q_T)$ est une martingale locale de $\mathscr{M}^c_{\mathrm{loc},2}(\mathbb{H}, Q_T)$ de processus naturel $(A_t)_{t\in[0,T]}$.

Démonstration :

1) L'hypothèse *i*) assure que Q_t est une probabilité. De plus $\int \varphi dm$ étant une martingale locale de $\mathscr{M}^c_{\mathrm{loc},2}(\mathbb{R}, P)$ de processus naturel

$$\int \varphi \otimes \varphi d\langle m \rangle,$$

Z est une martingale locale. L'hypothèse *i*) entraîne que $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ est une martingale. Ceci permet de conclure.

2) D'après le théorème 2.1, pour montrer que $(X)_{t\in[0,T]}$ appartient à $\mathscr{M}^c_{\mathrm{loc},2}(\mathbb{H}, [0, T], Q_T)$ et que son processus naturel est $(A_t)_{t\in[0,T]}$, il suffit de montrer que le processus $(Z^h_t)_{t\in[0,T]}$ appartient à $\mathscr{M}^c_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+ ; [0, T], Q_T)$ pour tout h de $\mathbb{H}$, Z^h étant défini par :

$$Z^h_t = \exp\left\{ \langle X_t, h \rangle - \frac{1}{2} \langle A_t, h \otimes h \rangle \right\}$$

Si $U^h_t = Z^h_t Z_T$, il revient au même de montrer que $(U^h_t)_{t\in[0,T]}$ est une martingale locale de $\mathscr{M}^c_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+ ; [0, T], P)$.

Considérons alors, dans l'espace somme directe $\mathbb{H} \oplus \mathbb{R}$ muni du produit scalaire :

$$\forall (h, k) \in \mathbb{H}^2, \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R}^2, \quad \langle h \oplus t, k \oplus u \rangle_{\mathbb{H}\oplus\mathbb{R}} = \langle h, k \rangle_{\mathbb{H}} + tu,$$

la martingale locale $M \oplus \int \varphi dm$.

Alors, puisque,

$$\left(M \oplus \int \varphi dm\right)^{\otimes 2} = M^{\otimes 2} \oplus \left(M \otimes \int \varphi dm\right) \oplus \left(\int \varphi dm \otimes M\right) \oplus \left(\int \varphi dm\right)^{\otimes 2}$$

le processus naturel de $M \oplus \int \varphi dm$ est donné par :

$$\left\langle M \oplus \int \varphi dm \right\rangle = \langle M \rangle \oplus \left\langle M, \int \varphi dm \right\rangle \oplus \left\langle \int \varphi dm, M \right\rangle + \left\langle \int \varphi dm \right\rangle$$

Soit, en utilisant le lemme 3.2 :

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left\langle M \oplus \int \varphi dm \right\rangle, (h \oplus 1)^{\otimes 2} \right\rangle_{\mathbb{H} \oplus \mathbb{R}} \\
&\quad = \langle \langle M \rangle, h \otimes h \rangle_{\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H}} + \left\langle \left\langle M, \int \varphi dm \right\rangle, h \otimes 1 \right\rangle_{\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{R}} \\
&\quad\quad + \left\langle \left\langle \int \varphi dm, M \right\rangle, 1 \otimes h \right\rangle_{\mathbb{R} \hat{\otimes} \mathbb{H}} + \left\langle \left\langle \int \varphi dm \right\rangle, 1 \otimes 1 \right\rangle_{\mathbb{R} \hat{\otimes} \mathbb{R}} \\
&\quad = \langle A, h \otimes h \rangle_{\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H}} + \left\langle \int \mathbb{1} \otimes \varphi d \langle m \rangle, h \otimes 1 \right\rangle_{\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{R}} \\
&\quad\quad + \left\langle \int \varphi \otimes \mathbb{1} d \langle m \rangle, 1 \otimes h \right\rangle_{\mathbb{R} \hat{\otimes} \mathbb{H}} + \int \varphi \otimes \varphi d \langle m \rangle \\
&\quad = \langle A, h \otimes h \rangle_{\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H}} + 2 \left\langle \int (\varphi, d \langle m \rangle), h \right\rangle_{\mathbb{H}} + \int \varphi \otimes \varphi d \langle m \rangle
\end{aligned}$$

Donc, si $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
U_t^h = \exp \Bigg\{ &\left\langle M_t \oplus \int_{]0,t] \times \Omega} \varphi dm, h \oplus 1 \right\rangle_{\mathbb{H} \oplus \mathbb{R}} \\
&- \frac{1}{2} \left\langle \left\langle M \oplus \int \varphi dm \right\rangle_t, (h \oplus 1)^{\otimes 2} \right\rangle_{(\mathbb{H} \oplus \mathbb{R})^{\otimes 2}} \Bigg\}
\end{aligned}$$

Le théorème 2.1 affirme alors que $(U_t^h)_{t \in [0,T]}$ est une martingale locale de $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^c(\mathbb{R}^+ ; [0, T], P)$, ce qui achève la démonstration.

3.4. THÉORÈME. — Supposons que la base de processus $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}, P)$ soit telle qu'existe pour tout t une classe compacte $\mathscr{C}_t$ contenue dans $\mathscr{F}_t$ par rapport à laquelle Q_t soit régulière et telle que si $s < t$, alors $\mathscr{C}_s \subset \mathscr{C}_t$. On suppose que $\mathscr{F}$ est la tribu engendrée par la famille de sous-tribus $\mathscr{F}_t$.

Si les hypothèses du théorème 3.3 sont satisfaites et si :

$$EZ_t = 1 \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

alors

1) il existe une probabilité Q sur $(\Omega, \mathscr{F})$ telle que Q_t soit la restriction de Q à $\mathscr{F}_t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Q_t et P restreinte à $\mathscr{F}_t$ sont équivalentes.

2) Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale locale de $\mathcal{M}^c_{loc,2}(\mathbb{H}, Q)$ relativement à la famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de processus naturel $(A_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.

Démonstration. — Le seul point à vérifier est l'existence de la probabilité Q sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Le système $(\Omega, \mathcal{F}_t, Q_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ formant un système projectif d'espaces de probabilité (lorsqu'on prend pour application d'un espace dans l'autre l'application identique sur Ω), les hypothèses faites assurent l'existence de la limite projective Q sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Remarque. — Ceci sera vrai en particulier si la base de processus est l'espace canonique $(\mathscr{C}_{\mathbb{H}}(\mathbb{R}^+), \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, P)$ ou $\mathscr{C}_{\mathbb{H}}(\mathbb{R}^+)$ est l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{H}$ muni de la topologie uniforme sur les parties compactes, les $\mathcal{F}_t$ étant les tribus engendrées par les projections Π_s pour $s \leqslant t$. $\mathscr{C}_{\mathbb{H}}(\mathbb{R}^+)$ est polonais et $\mathcal{F}$ est sa tribu borélienne (cf. [*1*] dans le cas réel). Il en est de même de $(\mathscr{C}_{\mathbb{H}}[0, t], \mathcal{F}_t)$; or sur $(\mathscr{C}_{\mathbb{H}}[0, t], \mathcal{F}_t)$, toute probabilité est régulière relativement à la classe des compactes. En considérant la projection de $(\mathscr{C}_{\mathbb{H}}(\mathbb{R}^+), \mathcal{F}_t)$ sur $(\mathscr{C}_{\mathbb{H}}([0, t]), \mathcal{F}_t)$ on en déduit que Q_t est régulière relativement à la classe des cylindres de base un compact de $\mathscr{C}_{\mathbb{H}}([0, t])$. Le théorème 3.4 s'applique donc dans ce cas sous les seules hypothèses du théorème 3.3.

Enfin, remarquons que le théorème 3 de [*12*] est un cas particulier du théorème 3.3. Nous énonçons ce théorème :

3.5. Théorème. — Soient, sur la base de processus $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}, P)$, un mouvement brownien W et X un processus d'Ito défini par :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \psi_s ds + \int_0^t \varphi_s dW_s$$

où ψ (resp. φ) est un processus adapté à valeurs dans l'espace hilbertien séparable $\mathbb{K}$ (resp. le Banach $\mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{K})$ tel que

$$\int_0^1 \| \psi_t \| dt < +\infty \quad \text{P-p. s.} \qquad \left(\text{resp.} \int_0^1 \| \varphi_t \|^2 dt < +\infty \quad \text{P-p. s.}\right)$$

L'opérateur de covariance de W est l'opérateur nucléaire $t\mathcal{W}$.

Pour tout processus φ adapté à valeurs dans $\mathbb{H}$ tel que

$$\int_0^1 \| \varphi_s \|^2 dt < +\infty \qquad \text{P-p. s.},$$

on définit la fonctionnelle aléatoire de φ par :

$$\zeta_s^t(\varphi) = \int_s^t \langle \varphi_u, dW_u \rangle - \frac{1}{2} \int_s^t \| \varphi_u \|_w^2 du$$

où $\| \cdot \|$ est la norme associée à $\mathcal{W}$.

Soit $\tilde{P}$ la mesure sur $(\Omega, \mathscr{F})$ de densité $\exp \zeta_0^1(\varphi)$ par rapport à P et $\tilde{W}$ le processus défini par :

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t \mathscr{W} \varphi_s ds$$

Alors, si $\tilde{P}(\Omega) = 1$ le processus $\tilde{W} = (\tilde{W}_t, \mathscr{F}_t, \tilde{P}, [0, 1])$ est un mouvement brownien d'opérateur de covariance $t\mathscr{W}$ et le processus $\tilde{X} = (X_t, \mathscr{F}_t, \tilde{P}, [0, 1])$ est un processus d'Ito qui s'écrit :

$$\tilde{X}_t = X_0 + \int_0^t [\psi_s + (\varphi_s \circ \mathscr{W})\varphi_s] ds + \int_0^t \varphi_s d\tilde{W}_s$$

Remarque. — L'intégrale trace $\int_s^t \langle \varphi_u, dW_u \rangle$ est celle introduite dans [*12*] en identifiant $\mathscr{L}(\mathbb{H}, \mathbb{R})$ et $\mathbb{H}$.

Démonstration. — D'après 1.3.1 W est une martingale de processus naturel $t\mathscr{W}$. Si w est la mesure stochastique associée à W, $\exp \zeta_0^1(\varphi)$ s'écrit

$$\exp \zeta_0^1(\varphi) = \exp \left\{ \int_{]0,1] \times \Omega} \varphi dw - \frac{1}{2} \int_{]0,t] \times \Omega} \varphi \otimes \varphi d \langle w \rangle \right\}$$

D'autre part

$$\int_0^t \mathscr{W} \varphi_s ds = \int_{]0,t] \times \Omega} (\varphi, d \langle w \rangle)$$

En effet, soit $h \otimes k$ un tenseur auquel correspond l'opérateur linéaire $\widetilde{h \otimes k}$. Alors, pour tout g de $\mathbb{H}$, si on identifie $\mathbb{H}$ et $\mathscr{L}(\mathbb{H}, \mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} \langle (\varphi, h \otimes k), g \rangle_{\mathbb{H}} &= \langle \varphi, h \rangle_{\mathbb{H}} \langle k, g \rangle_{\mathbb{H}} \\ &= \langle h \otimes k, \varphi \otimes g \rangle_{\mathbb{H} \hat{\otimes} \mathbb{H}} \\ &= \langle (\widetilde{h \otimes k})\varphi, g \rangle_{\mathbb{H}} \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$(\varphi, h \otimes k) = (\widetilde{h \otimes k})\varphi$$

Par continuité et densité, on en déduit que, pour tout A de $\mathbb{H} \hat{\otimes}_T \mathbb{H}$ on a :

$$(\varphi, A) = \tilde{A}\varphi$$

Le théorème 3.3 montre donc, compte tenu du théorème 1.3.2 que $\tilde{W}$ est un $\tilde{P}$ mouvement brownien.

Pour montrer que $\tilde{X}$ est un processus d'Ito s'écrivant sous la forme annoncée, il suffit de vérifier que si φ est un processus à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathbb{H}, \mathbb{K})$

tel que $\int_0^1 \|\varphi_u\|^2 du < +\infty$ P-p. s., les intégrales $\int_0^t \varphi_u dW_u$ et $\int_0^t \varphi_u d\tilde{W}_u$ existent et qu'est vérifiée la relation :

$$\int_0^t \varphi_u dW_u = \int_0^t \varphi_u d\tilde{W}_u + \int_0^t (\varphi_u \circ \mathscr{W})\varphi_u du$$

ce qui est évident lorsque l'on interprète ces intégrales comme des intégrales par rapport à des mesures stochastiques (cf. [*8*]).

Enfin, le théorème suivant, annoncé dans [*12*], est une conséquence du théorème 2.3.

3.6. THÉORÈME. — Si le processus φ est tel qu'existe une constante $a^2 > 3 + 2\sqrt{2}$ telle que

$$\mathrm{E} \exp a^2 \int_0^1 \|\varphi_u\|_w^2 du < +\infty$$

Alors $\mathrm{E} \exp \zeta_0^1(\varphi) = 1$ et $\mathrm{E} \exp 2\zeta_0^1(\varphi) < +\infty$.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] DUFLO, Mouvement brownien, intégrales stochastiques, équations différentielles stochastiques. Cours de 3e cycle (Paris), 1969-1970. Polycopié.

[*2*] GIRSANOV, On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures. *Theory of Probability and its Applications*, vol. V, n° 3, 1960, p. 285-301.

[*3*] MEMIN, Le théorème de Girsanov. Séminaire de Rennes, mai 1972.

[*4*] MÉTIVIER, Processus de Markov (chap. IV et V). Université de Rennes, 1972. Polycopié.

[*5*] MÉTIVIER, Mesures stochastiques engendrées par une martingale à valeurs hilbertiennes. *C. R. Acad. Sci.* (Paris), mai 1973.

[*6*] MÉTIVIER, Intégrales stochastiques par rapport à des martingales hilbertiennes. *C. R. Acad. Sci.* (Paris), mai 1973.

[*7*] MÉTIVIER, Mesure stochastique locale associée à une martingale locale à valeurs dans un espace de Hilbert. *C. R. Acad. Sci.* (Paris), avril 1973.

[*8*] MÉTIVIER, Intégrale stochastique par rapport à des processus à valeurs dans un espace de Banach réflexif *(à paraître)*. Preprint dans Séminaire (Rennes), 1972.

[*9*] MEYER, *Probabilité et Potentiel*. Hermann, Paris, 1966.

[*10*] NEVEU, *Processus aléatoires gaussiens*. Presses de l'Université de Montréal, 1968.

[*11*] NEVEU, Intégrales stochastiques et applications. Cours de 3e cycle (Paris), 1971-1972. Polycopié.

[*12*] OUVRARD, Processus à valeurs hilbertiennes et théorème de Girsanov. *C. R. Acad. Sci.* (Paris), t. **275**, p. 1367-1370.

[*13*] PELLAUMAIL, Sur la décomposition de Doob-Meyer d'une quasi-martingale. *C. R. Acad. Sci.* (Paris), t. **274**, p. 1563-1565.

[*14*] PELLAUMAIL, Une nouvelle construction de l'intégrale stochastique. Thèse (Université de Rennes), 1972.
[*15*] SHYRAIEV-LIPTSER, Sur les processus aléatoires dont les mesures sont équivalentes à celles de Wiener. 1971, dactylographié en Russe.
[*16*] SCHWARTZ, Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Séminaire Schwartz, Paris, 1953-1954.

(Manuscrit reçu le 15 mai 1973)