ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. BRUNEL

Théorème ergodique ponctuel pour un semi-groupe commutatif finiment engendré de contractions de L^1

Annales de l'I. H. P., section B, tome 9, nº 4 (1973), p. 327-343

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1973__9_4_327_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. IX, n° 4, 1973, p. 327-343.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Théorème ergodique ponctuel pour un semi-groupe commutatif finiment engendré de contractions de L^1

par

A. BRUNEL (*)

SUMMARY. — We prove some pointwise ergodic theorems for commutative finitely-generated semi-groups of contractions on $\mathbb{L}^1$-spaces which are also contractions on $\mathbb{L}^\infty$. The proofs involve some convexity properties giving the behaviour of these semi-groups. The Dunford-Schwartz's theorem for n-parameters semi-groups is obtained as a corollary.

0. INTRODUCTION

Dunford et Schwartz [3] ont donné, en 1956, un théorème ergodique ponctuel pour un semi-groupe à d paramètres, $T_{(t_1,\dots,t_d)}$; $(t_1, \dots, t_d) \in R^d_+$, d'opérateurs qui sont des contractions d'un espace $L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$, vérifiant la condition supplémentaire

$$(1) \qquad \forall t \in R^d_+, \quad \forall h \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu) \cap L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu), \quad \|T_t h\|_\infty \leq \|h\|_\infty.$$

Ce théorème affirme que pour tout $f \in L^1$, les moyennes

$$(2) \qquad a > 0 ; \frac{1}{a^d} \int_0^a \dots \int_0^a (T_{(t_1,\dots,t_d)} f) dt_1, \dots, dt_d$$

convergent presque partout lorsque a tend vers $+\infty$.

(*) Équipe de recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications » dépendant de la Section n° 1 « Mathématiques, Informatique » associée au C. N. R. S.

Nous nous proposons ici d'établir un théorème analogue pour le cas discret, c'est-à-dire le cas d'un semi-groupe engendré par d contractions $T_1, \ldots, T_d$, commutant deux à deux et vérifiant la condition (1). Nous remplacerons les moyennes (2) par les moyennes de Cesaro

$$(3) \qquad \frac{1}{n^d} \sum_{\left\{\begin{smallmatrix} j_k < n \\ k = 1, \ldots, d \end{smallmatrix}\right.} T_1^{j_1} - T_d^{j_d} f,$$

où les opérateurs T_k ne sont pas nécessairement positifs. Il est ensuite aisé de passer du cas discret au cas continu. Le point délicat est l'étape d'induction sur la dimension d, où la méthode suivie a été inspirée par une construction utilisée par Dunford et Schwartz [3]. Cependant notre démarche consiste à exploiter le plus possible les propriétés des « barycentres » d'une famille de contractions. Nous nous attacherons à comparer les comportements des moyennes (2) et (3) à ceux des moyennes de Cesaro

$$\frac{1}{n} \sum_{j<n} V^j f,$$

où V est donné par

$$V = \sum_{(j_1, \ldots, j_d) \in \mathbf{N}^d} b_{j_1, \ldots, j_d} T_1^{j_1}, \ldots, T_d^{j_d},$$

avec $b_{j_1, \ldots, j_d} \geqslant 0$ et

$$\sum_{j_1, \ldots, j_d} b_{j_1, \ldots, j_d} = 1.$$

Dans ce qui va suivre on ne fera pas la distinction entre fonctions et classes d'équivalence, modulo μ, de fonctions.

1. CAS OU $d = 1$ ET $T_1 = T$ EST POSITIF

Il est connu [4] que T et sa transposée T* peuvent se prolonger à l'espace des fonctions mesurables positives et la condition (1) prend la forme équivalente $T1 \leq 1$. Comme il est vrai aussi que $T^*1 \leq 1$, T et T* se comportent de la même manière, ce que l'on peut préciser par le

LEMME 1.1. — Si T est positif et $T1 \leq 1$, T et T* admettent la même décomposition de Hopf, $X = C \cup D$, et la sous-tribu $\mathcal{I}$ des invariants sur la partie conservatoire C est la même pour T et T*.

Démonstration. — La partie D, dissipative pour T, peut être considérée comme l'union d'une suite croissante de $A \in \mathscr{F}$ telles que $\sum_n T^{*n} 1_A \in L^\infty$. Or cette dernière condition entraîne que $A \subset D^*$, D^* étant la partie dissipative de T^*. On a donc bien $D = D^*$ et $C = C^*$. On a aussi $T1_D \leq 1_D$ qui implique $1_C . T1_D = 0$ et donc $1_D . T^* 1_C = 0$, soit $T^* 1_C = 1_C$ et de même $T1_C = 1_C$.

Ensuite si $A \in \mathscr{I}$, $\mathscr{I}$ étant la tribu des ensembles invariants relativement à T, soit $T^* 1_A = 1_A$, on a aussi $T^* 1_{C-A} = 1_{C-A}$, donc $1_A . T^* 1_{C-A} = 0$. Or

$$0 = \int 1_A T^* 1_{C-A} d\mu = \int 1_{C-A} . T1_A d\mu .$$

Mais $T1_A$ est nulle hors de C et par conséquent $T1_A \leq 1_A$ qui entraîne $T1_A = 1_A$ et A appartient aussi à la tribu des invariants associée à T^*. ■

Nous allons maintenant établir un résultat qui est un cas particulier d'un théorème très connu de Dunford-Schwartz. Pour en donner une démonstration courte nous ferons appel au théorème de Chacon-Orsnstein.

PROPOSITION 1.2. — Il existe un ensemble $B \in \mathscr{I}$, unique modulo μ, tel que pour tout $f \in L^1$,

i) $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j<n} T^j f = \tilde{f}$ existe μ-p. p.

ii) $\tilde{f}$ est nulle hors de B et $\tilde{f} = T\tilde{f} = T^*\tilde{f}$. En outre

$$\int |\tilde{f}| d\mu \leq \int |f| d\mu .$$

iii) si $f > 0$, alors $B = \{ \tilde{f} > 0 \}$ (mod. μ).

Démonstration. — Soit $g \in L^1$, $0 < g \leq 1$. La fonction

$$h = \underline{\lim}_n \frac{1}{n} \sum_{j<n} T^j g ,$$

vérifie les conditions

$$0 \leq h \leq 1, \quad Th \leq h, \quad h = 0 \text{ sur } D.$$

Le lemme 1.1 montre que $h = Th = T^*h$ et $h \in L^1$ par le lemme de Fatou. Posons $B = \{ h > 0 \}$. On a donc $B \in \mathscr{I}$. Le théorème de Chacon-

Ornstein appliqué à g et h montre que $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{j<n} T^j g = h$, mod μ, et aussi que pour $f \in L^1$, $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{j<n} T^j f = \tilde{f}$ existe μ-p. p. et $\tilde{f}$ est nulle hors de B.

Les autres propriétés, énoncées dans la proposition, découlent immédiatement de cela et *iii*) entraîne l'unicité de B (mod μ). ■

2. CAS OU T EST UNE CONTRACTION VÉRIFIANT LA CONDITION (1)

Nous utiliserons un résultat de Akcoglu et Brunel [*1*] suivant lequel il existe une décomposition de la partie conservative C de $|T|$, soit $C = \Gamma \cup \Delta$ et une fonction complexe S nulle sur $\Delta \cup D$ et de module égal à 1 sur Γ avec les propriétés suivantes :

a) $(1 - T)L^1(\Delta)$ est fortement dense dans $L^1(\Delta)$,

b) pour tout $g \in L^1(\Gamma)$, on a $Tg = \bar{S}\,|T|\,(Sg)$, où $\bar{S}$ désigne la conjuguée complexe de S.

c) Γ et Δ appartiennent à la tribu des invariants de $|T|$.

Tout d'abord la condition (1) entraîne que $|T|(1) \leq 1$. On peut donc appliquer la proposition 1.2 à la contraction positive $|T|$. Soit $f \in L^1$ et posons

$$f = g + h + h', \qquad g = f1_\Gamma, \qquad h = f1_\Delta.$$

La proposition 1.2 et la propriété *a*) entraînent que

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{j<n} T^j(h + h') = 0, \qquad \mu\text{-p. p.}$$

Puis la propriété *b*) appliquée à g donne

$$\frac{1}{n}\sum_{j<n} T^j g = \bar{S}\left(\frac{1}{n}\sum_{j<n} |T|^j(Sg)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{S}(\widetilde{Sg}),$$

avec $\widetilde{Sg} = |T|(\widetilde{Sg}) = |T|^*(\widetilde{Sg})$ et $\widetilde{Sg} = 0$ hors de $B \cap \Gamma$, l'ensemble B étant associé à $|T|$ selon la proposition 1.2.

Or dans [*1*] il est démontré que si $h \in L^\infty(\Gamma)$, on a

$$T^*h = S\,|T|^*(\bar{S}h) \qquad \text{et} \qquad |T|^* = |T^*|.$$

Ceci entraîne, en posant $\tilde{f} = \bar{S}(\widetilde{Sg})$ et en tenant compte de $|T|(1) \leq 1$ et $|T|^*(1) \leq 1$, que

$$T^*(\bar{\tilde{f}}) = S\,|T|^*(\overline{\widetilde{Sg}}) = \overline{S\,|T|^*(\widetilde{Sg})} = S(\overline{\widetilde{Sg}}) = \bar{\tilde{f}}.$$

Il est clair aussi que $\tilde{f} = T\tilde{f}$.

On a ainsi démontré le

THÉORÈME 2.1. — Soit T une contraction de $L^1(X, F, \mu)$, vérifiant la condition (1). Il existe alors un ensemble minimal B, invariant relativement au module linéaire de T, soit $|T|$, tel que,

$$\forall f \in L^1(X, \mathscr{F}, \mu) \lim_n \frac{1}{n} \sum_{j<n} T^j f = \tilde{f} \qquad \text{existe } \mu\text{-p. p.}$$

$\tilde{f} = 0$ hors de B, $\tilde{f} = T\tilde{f}$ et $\tilde{\tilde{f}} = T^*\tilde{\tilde{f}}$.

En outre $\tilde{f} \in L^1(B)$ et

$$\int |\tilde{f}| d\mu \leq \int |f| d\mu.$$

Remarque. — On a vu que l'ensemble B peut se définir à partir d'une fonction $h \in L^1_+$, invariante sous $|T|$, par l'égalité $B = \{h > 0\}$. Si $f \in L^1(B)$ et $|f|$ est majoré par un multiple de h, la convergence de $\frac{1}{n} \sum_{j<n} T^j f$ vers $\tilde{f}$ a lieu au sens de la topologie de L^1. Or ces fonctions sont denses dans $L^1(B)$. On peut donc ajouter que si $f \in L^1(B)$, les moyennes de Cesaro $\frac{1}{n} \sum_{j<n} T^j f$ convergent vers $\tilde{f}$ dans $L^1(B)$.

3. PROPRIÉTÉS DE CONVEXITÉ

Soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable de contractions positives de $L^1(X) = L^1(X, \mathscr{F}, \mu)$, telle que

$$\forall_{i \in I} V_i(1) \leq 1.$$

Pour toute famille $(\beta_i)_{i \in I}$ de nombres > 0, de somme $\sum_I \beta_i = 1$, posons $V = \sum_I \beta_i V_i$. Nous dirons que V est un barycentre strict des V_i.

LEMME 3.1. — Soit $g \in L^1_+(X)$, un point fixe de V, barycentre strict des V_i. Alors g est point fixe de chaque V_i.

Démonstration. — Puisque $V1 \leq 1$, les résultats établis dans le paragraphe 1 montrent que l'ensemble $\{ g > 0 \}$ est un ensemble invariant de la partie conservative commune C de V et de V*.

Soit $\mathscr{I}$ la tribu des parties invariantes de C. Si $A \in \mathscr{I}$, $V1_A = 1_A$. Nous supposons aussi $\mu(A) < \infty$. Or $V_i 1_A \leq 1$ et la stricte positivité des β_i entraîne que

$$\forall i \quad V_i 1_A = 1_A,$$

tenant compte de $1_A \in L^1$, ceci montre que A est un élément de la tribu invariante associée à chaque V_i. Il résulte de cela que la fonction g, V-invariante, est aussi invariante sous chaque V_i. ■

Remarque. — Les V_i ne sont pas supposés commuter. Plus loin un résultat du même type est établi sans hypothèses de positivité mais alors les contractions V_i commutent deux à deux.

LEMME 3.2. — *Soient U et V des contractions positives de $L^1(X)$ telles que $U1 \leqslant 1$, $V1 \leqslant 1$.*

Si l'on a $g \in L^1_+(X)$, $g = Ug = UVg$, alors on a aussi

$$g = Ug = U^*g = Vg = V^*g.$$

Démonstration. — Puisque $UV(1) \leq 1$ et que g est μ-intégrable, on a :

$$g = (UV)^*g = V^*U^*(g) = V^*(g)$$

qui entraînent à leur tour $g = Vg$. ■

Nous considérerons maintenant la famille de contractions $\mathscr{T}_{(j)}$, indexée par N^d, $\mathscr{G} = (\mathscr{T}_{(j)})_{(j)\in N^d}$ où $\mathscr{T}_{(j)} = \mathscr{T}_1^{j_1}, \ldots, \mathscr{T}_d^{j_d}$, si $(j) = (j_1, \ldots, j_d)$. Les $\mathscr{T}_k$ sont des contractions positives de $L^1(X)$, ne commutant pas nécessairement et telles que $\mathscr{T}_k(1) < 1$ pour $k = 1, 2, \ldots, d$. Soit $(\alpha_{(j)})_{(j)\in N^d}$ une famille de réels ≥ 0 dont la somme est 1 vérifiant l'hypothèse suivante :

(P) pour tout $k \in \{ 1, 1, \ldots, d \}$, il existe $(j) \in N^d$ tel que $\alpha_{(j_1,\ldots,j_k,\ldots,j_d)}$ et $\alpha_{(j_1,\ldots,j_k+1,\ldots,j_d)}$ soient $\neq 0$.

Nous allons nous intéresser aux contractions barycentres V de la forme :

$$V = \sum_{(j)\in N^d} \alpha_{(j)} \mathscr{T}_{(j)},$$

dont les coefficients vérifient (P).

LEMME 3.3. — *Les points fixes de V dans $L^1_+(X)$, sont exactement les points fixes communs aux $\mathscr{T}_k$; $k = 1, 2, \ldots, d$, dans $L^1_+(X)$.*

Démonstration. — Soit $g = Vg \in L^1(X)$. Le lemme 3.1 montre que $\mathscr{T}_1^{j_1} \ldots \mathscr{T}_k^{j_k} \ldots \mathscr{T}_d^{j_d}(g) = \mathscr{T}_1^{j_1} \ldots \mathscr{T}_k^{j+1} \ldots \mathscr{T}_d^{j_d}(g) = g$ si les coefficients correspondants à ces monômes dans V sont > 0. Si $k = 1$, ceci montre que $\mathcal{T}_1 g = g$. Si $\mathcal{T}_1 g = \ldots = \mathcal{T}_{k-1} g = g$, ceci montre, en appliquant le lemme 3.2, que $\mathcal{T}_k g = g$.

PROPOSITION 3.4. — Parmi les ensembles $A \in \mathcal{F}$ ayant la propriété suivante

$$\exists g \in L^1_+, \ \{ g > 0 \} = A \qquad \text{et} \qquad \mathcal{T}_k g = g, \quad k = 1, 2, \ldots, d,$$

il en existe un, soit Y, plus grand que tous les autres (mod μ). Y est un ensemble invariant commun aux $\mathcal{T}_k$ et pour tout barycentre V des $\mathcal{T}_{(j)}$ dont les coefficients vérifient (P), Y coïncide avec la partie B que la proposition 1.2 attache à toute contraction positive V telle que $V1 \leq 1$.

Si $f \in L^1(Y)$ (resp. $\in L^1(Y^c)$), alors pour tout $k = 1, 2, \ldots, d$, $\mathcal{T}_k f \in L^1(Y)$ (resp. $\in L^1(Y^c)$). En outre si $f \in L^1(Y)$, la famille $(\mathcal{T}_{(j)} f)_{(j) \in N^d}$ est équi-intégrable.

Démonstration. — Soit V un barycentre des $\mathcal{T}_{(j)}$, dont les coefficients vérifient P. Si $g = Vg \in L^1_+(X)$ est tel que $\{ g > 0 \} = B$ soit l'ensemble associé à V par la proposition 1.2, le lemme 3.3 montre que $\mathcal{T}_k g = g$ pour $k = 1, 2, \ldots$ ou d. Donc cet ensemble que nous appellerons Y est le même pour tous les barycentres dont les coefficients vérifient P. Ceci démontre clairement le début de la proposition 3.4. La propriété

$$f \in L^1(Y) \text{ (resp. } \in L^1(Y^c)) \quad \text{entraîne} \quad \mathcal{T}_k f \in L^1(Y) \text{ (resp. } \in L^1(Y^c))$$

résulte immédiatement du lemme 1.1 appliqué à chaque contraction $\mathcal{T}_k$. Reste l'équi-intégrabilité que nous établirons de la façon suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, on peut écrire $f = f_1 + f_2$ avec $\| f_2 \|_1 < \varepsilon$, $| f_1 |$ étant majorée par un multiple de g, $| f_1 | \leq Kg$. Il en résulte, pour tout $(j) \in N^d$, l'inégalité

$$| \mathcal{T}_{(j)} f | \leq Kg + \mathcal{T}_{(j)} | f_2 | ,$$

où l'on a $\| \mathcal{T}_{(j)} f_2 \|_1 < \varepsilon$, et ceci démontre la propriété d'équi-intégrabilité. ■

Soit alors $G = (T_{(j)})_{j \in N^d}$, le semi-groupe commutatif engendré par les contractions $T_1, T_2, \ldots, T_d$ de $L^1(X)$, vérifiant la condition (1), ou encore

$$\forall k = 1, 2, \ldots \quad \text{ou } d \quad | T_k | (1) \leq 1.$$

La proposition 3.4 appliquée aux contractions positives $| T_k |$; $k = 1, 2, \ldots, d$, entraîne la

PROPOSITION 3.5. — Etant donné un semi-groupe G vérifiant les conditions qui viennent d'être énoncées, il existe un $Y \in \mathcal{F}$, invariant commun aux $|T_k|$, pouvant s'écrire $Y = \{g > 0\}$, $g \in L^1_+(X)$ étant un point fixe commun à tous les $|T_k|$. Pour tout autre point fixe $g' \in L^1_+(X)$ commun aux $|T_k|$, on a $\{g' > 0\} \subset Y$.

Si $f \in L^1(Y)$ (resp. $\in L^1(Y^c)$), alors pour tout $k = 1, 2, \ldots$ ou d, $T_k f \in L^1(Y)$ (resp. $\in L^1(Y^c)$). En outre si $f \in L^1(Y)$, la famille $(T_{(j)} f)_{(j) \in \mathbb{N}^d}$ est équi-intégrable.

Nous établissons ensuite une proposition générale sur les points fixes d'un barycentre de contractions d'un espace de Banach.

PROPOSITION 3.6. — Soit E un espace de Banach et $(U_i)_{i\in I}$, une famille dénombrable de contractions de E, commutant deux à deux. Soit $U = \sum_{i\in I} c_i U_i$, un barycentre strict des U_i. Alors,

$$E \in x = Ux \Leftrightarrow \forall i \in I\, x = U_i x.$$

Il suffit clairement de prouver le résultat pour deux contractions U_1, U_2 et un barycentre strict $U = c_1 U_1 + c_2 U_2$. Si V est une contraction, posons

$$E(V) = \frac{1}{e} \exp(V) = \frac{1}{e} \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} V^j.$$

On a

$$(E(V))^n = \frac{1}{e^n} \exp(nV) = \sum_{j \geq 0} a_j^n V^j,$$

avec $a_j^n = \dfrac{n^j}{e^n j!}$, et aussi

$$(I - V)(E(V))^n = \sum_{j \geq 0} (a_j^n - a_{j-1}^n) V^j,$$

en posant $a_{-1}^n = 0$. Ceci donne :

$$\|(I - V)(E(V))^n\| \leq \sum_{j \geq 0} |a_j^n - a_{j-1}^n| = 2a_n^n = 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

donc $\lim_n \|(I - V)(E(V))^n\| = 0$. Or l'égalité

$$\frac{1}{C_1} U = U_1 + \frac{C_2}{C_1} U_2$$

entraîne

$$e^{-\frac{1}{C_1}} \exp\left(\frac{1}{C_1} U\right) = E(U_1) e^{-\frac{C_2}{C_1}} \exp\left(\frac{C_2}{C_1} U_2\right) = E(U_1).V_2,$$

ou le premier membre et les deux facteurs du dernier membre sont des contractions de E. Alors si $x = \mathrm{U}x$, on a aussi, pour tout n,

$$x = (\mathrm{E}(\mathrm{U}_1))^n \mathrm{V}_2^n x,$$

donc l'inégalité

$$\|x - \mathrm{U}_1 x\| \leq \|(\mathrm{I} - \mathrm{U}_1)(\mathrm{E}(\mathrm{U}_1))^n\| \cdot \|x\|,$$

qui entraîne $x = \mathrm{U}_1 x$. ∎

Pour étudier le comportement ergodique du semi-groupe G, nous utiliserons le théorème suivant.

THÉORÈME 3.7. — Etant donné un semi-groupe commutatif G, engendré par les contractions T_k ; $k = 1, 2, \ldots, d$, de $\mathrm{L}^1(\mathrm{X})$, il existe une constante $\chi > 0$ et une contraction barycentre U de la forme

$$\mathrm{U} = \sum_{(j) \in \mathrm{N}^d} a_{(j)} |\mathrm{T}_1|^{j_1} \ldots |\mathrm{T}_d|^{j_d}; \qquad (j) = (j_1, \ldots, j_d),$$

dont les coefficients vérifient la condition (P), telle que l'inégalité suivante soit satisfaite.

En posant, pour tout $n \in \mathrm{N}$, $n_d =$ partie entière de $n^{2^{-m}} + 1$ si $2^{m-1} < d \leq 2^m$, on a

$$\forall f \in \mathrm{L}^1_+(\mathrm{X}), \quad \forall n \geq 1 ; \ \frac{1}{n^d} \left| \sum_{\substack{j_k < n \\ k = 1, \ldots, d}} \mathrm{T}_1^{j_1}, \ldots, \mathrm{T}_d^{j_d} \right| (f) \leq \frac{\chi}{n_d} \sum_{j < n_d} \mathrm{U}^j f.$$

Démonstration. — La construction de U que nous allons donner a été inspirée par celle de Dunford et Schwartz pour le cas du semi-groupe continu [3]. Nous commencerons par supposer les T_k positifs. Si $d=2$, posons

$$\mathrm{U} = (\mathrm{I} - \sqrt{\mathrm{I} - \mathrm{T}_1})(\mathrm{I} - \sqrt{\mathrm{I} - \mathrm{T}_2}) = \sum_{\left\{\substack{j_1 \in \mathrm{N} \\ j_2 \in \mathrm{N}}\right.} a_{j_1, j_2} \mathrm{T}_1^{j_1} \mathrm{T}_2^{j_2},$$

en développant en séries entières.

LEMME 3.8. — Soit $\xi(x) = 1 - \sqrt{1 - x}$. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $\sum_{p \geq 0} \alpha_p^n x^p$ le développement en série entière de $(\xi(x))^n$ et $\sum_{p \geq 0} \beta_p^n x^p$ celui de

$\frac{1}{\sqrt{1-x}}(\xi(x))^n$. Les coefficients α_p^n et β_p^n sont > 0 pour $p \geq n$ et nuls pour $p < n$. $\sum_{p \geq 0} \alpha_p^n = 1$. On a aussi :

$$\text{pour } p \geq n, \qquad \beta_p^n = 2^{n-2p}\binom{2p-n}{p} \quad \text{et} \quad \alpha_p^n = \frac{n}{2p}\beta_{p-1}^{n-1}.$$

Démonstration. — Ce lemme est très élémentaire. La détermination des β_p^n se fait par un calcul simple de résidus. La relation entre les α_p^n et β_p^n s'obtient en dérivant $(\xi(x))^n$ par rapport à x.

LEMME 3.9. — Il existe une constante $c' > 0$, telle que

$$n^2 \leq p \Rightarrow \alpha_p^n \geq c'np^{-3/2}.$$

On applique la formule de Stirling à β_p^n quand p et n tendent vers l'infini de telle sorte que $n^2 \leq p$. ■

LEMME 3.10. — Posons pour tout entier n, n' = partie entière de $\sqrt{n} + 1$. Il existe une constante $C'' > 0$, telle que

$$\forall n \geqslant 1 \frac{1}{n'} \sum_{j<n'} \alpha_p^j \alpha_q^j \geq \frac{C''}{n^2} \qquad \text{si } p \text{ et } q < n.$$

Démonstration. — Supposons $q \leq p$. On peut écrire les inégalités

$$\sum_{j<n'} \alpha_p^j \alpha_q^j \geq \frac{C'^2}{(pq)^{3/2}} \sum_{j=0}^{q'-1} j^2 \geq \frac{C''}{p^{3/2}} \geq \frac{C''}{n'^3}$$

Nous pouvons maintenant prouver que $U = \xi(T_1)\xi(T_2)$ vérifie les conditions du théorème. En effet, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{1}{n'} \sum_{j<n'} U^j \geq \sum_{(j_1 j_2) \in N^2} \left(\frac{1}{n'} \sum_{j<n'} \alpha_{j_1}^j \alpha_{j_2}^j \right) T_1^{j_1} T_2^{j_2} \geq \frac{C''}{n^2} \sum_{\substack{j_1<n \\ j_2<n}} T_1^{j_1} T_2^{j_2}.$$

Si l'on a 4 contractions T_k positives et commutant deux à deux, on pose successivement

$$S_1 = \xi(T_1)\xi(T_2), \qquad S_2 = \xi(T_3)\xi(T_4),$$

si $n'' = (n')'$, on peut écrire

$$\frac{1}{n''} \sum_{j<n''} U^j \geq \frac{C''}{n'^2} \sum_{\substack{k_1<n' \\ k_2<n'}} S_1^{k_1} S_2^{k_2} \geq \frac{C''^3}{n^4} \sum_{\left\{\substack{j_i<n \\ i=1,2,3,4}\right.} T_1^{j_1} T_2^{j_2} T_3^{j_3} T_4^{j_4}.$$

Par récurrence sur m, on démontre alors le théorème pour $d = 2^m$. Si l'on remplace certains des T_k par l'opérateur identique, on obtient le théorème pour des opérateurs T_k positifs. Supposons ensuite que les T_k ne soient plus nécessairement positifs. Posons

$$U = \sum_{(j)\in N^d} a_{(j)}, |T_1|^{j_1} \dots |T_d|^{j_d},$$

avec les mêmes coefficients $a_{(j)}$ que dans le cas où les T_k sont positifs. Bien que les $|T_k|$ ne commutent plus nécessairement l'inégalité du théorème reste vérifiée pour la raison suivante. Dans le cas positif l'inégalité se vérifie monôme par monôme de la forme $CT_1^{j_1} \dots T_d^{j_d}f$. Il suffit donc, pour chaque entier m, d'écrire de la même manière les monômes de U^m et ceux de $\left(\sum_{N^d} a_{(j)}T_1^{j_1} \dots T_d^{j_d}\right)^m$ pour en déduire l'inégalité cherchée. En effet les T_i commutant, tout monôme formé avec j_1 facteurs $T_1, \dots, j_d$ facteur T_d, peut s'écrire $T_1^{j_1} \dots T_d^{j_d}$ et le module linéaire de cet opérateur est bien majoré par $|T_1|^{j_1} \dots |T_d|^{j_d}$. ■

4. LE THÉORÈME ERGODIQUE DANS LE CAS DISCRET

Soit G un semi-groupe commutatif de contractions de $L^1(X)$ engendrées par $T_1, \dots, T_d$ vérifiant la condition (1). Soit Y l'ensemble attaché à G par la proposition 3.5 et U la contraction dominante donnée par le théorème 3.7. Les propositions 1.2 et 3.5 et le théorème 3.7 montrent que les moyennes de Cesaro

$$A_n f = \frac{1}{n^d} \sum_{\substack{j_k < n \\ k=1,\dots,d}} T_{(j)} f,$$

convergent p. p., vers zéro si $f \in L^1(Y^c)$. Il suffit donc de considérer le cas où $f \in L^1(Y)$ et d'étudier les moyennes $A_n f$ sur Y, puisqu'elles sont nulles sur Y^c. Autrement dit on pourra supposer à partir de maintenant que $Y = X$.

Avec cette hypothèse supplémentaire nous sommes maintenant en mesure de démontrer le

THÉORÈME 4.1. — Soit G un semi-groupe de contractions de $L^1(X)$ vérifiant les conditions précédentes. Pour tout $f \in L^1(X)$, on a

i) $\lim_n A_n f = \tilde{f}$ μ-p. p. et au sens de $L^1(X)$,

ii) $\tilde{f} \in L^1(X)$ et $\| \tilde{f} \|_1 \leq \| f \|_1$,

iii) pour $k = 1, 2, \ldots, d$ on a $T_k \tilde{f} = \tilde{f}$ et $T_k^*(\tilde{\tilde{f}}) = \tilde{\tilde{f}}$.

Démonstration. — Le théorème a été démontré pour $d = 1$ si l'on observe que la convergence dans $L^1(X)$ résulte de ce que $Y = X$ entraîne l'équi-intégrabilité de la famille $(T_1^n f)_{n \in \mathbb{N}}$. Cela implique aussi, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'une décomposition d'un élément $f \in L^1(X)$, sous la forme

$$(4) \quad f = \tilde{f}_1 + (I - T_1) f' + f'', \ \tilde{f}_1 = T_1 \tilde{f}_1 \in L^1, \ f' \in L^1 \cap L^\infty, \ \| f'' \|_1 < \varepsilon.$$

Supposons le théorème démontré pour le semi-groupe engendré par $T_2, \ldots, T_d$ et posons pour tout entier $n > 0$.

$$B_n = \frac{1}{n^{d-1}} \sum_{\substack{j_k < n \\ k = 2, \ldots, d}} T_2^{j_2} \ldots T_d^{j_d}.$$

Utilisant la décomposition (4), on obtient

$$(5) \qquad A_n f = B_n \tilde{f}_1 + \frac{I - T_1^n}{n} B_n f' + A_n f''.$$

Par l'hypothèse de récurrence $\lim_n B_n \tilde{f}_1 = \tilde{f} \in L^1$, μ-p. p. et au sens de L^1. Le deuxième terme de (5) tend uniformément vers 0. Pour le troisième terme de (5) on peut écrire, en appliquant le théorème 3.7,

$$\overline{\lim_n} \, | A_n f'' | \leq \chi \lim_n \frac{1}{n} \sum_{j < n} U^j(| f'' |) = \bar{\chi} . F,$$

avec

$$\int F d\mu \leq \| f'' \|_1 < \varepsilon.$$

Alors l'inégalité

$$\int \overline{\lim_n} \, | A_n f - \tilde{f} | \, d\mu \leq \chi \varepsilon$$

implique que $A_n f$ converge p. p. vers $\tilde{f}$ et l'on a aussi clairement la convergence dans L^1 ce qui démontre *i*). Les conditions *ii*) sont évidemment remplies. On déduit de là que pour $k = 1, 2, \ldots, d$, $(I - T_k)\tilde{f} = 0$ et, comme dans la démonstration du théorème 2.1, on en tire $T_k^* \tilde{\tilde{f}} = \tilde{\tilde{f}}$.

Il est intéressant de noter que pour tout barycentre V ;

$$V = \sum_{(j)\in \mathrm{N}^d} \alpha_{(j)} \mathrm{T}_{(j)},$$

ayant suffisamment de coefficients $\alpha_{(j)} > 0$ (condition P), on a le résultat suivant :

PROPOSITION 4.2. — Les moyennes de Cesaro $\frac{1}{n}\sum_{j<n} \mathrm{V}^j f$ convergent vers la même limite que la suite $(\mathrm{A}_n f)$, pour tout $f \in \mathrm{L}^1$.

Démonstration. — On peut toujours supposer la condition X = Y satisfaite puisque sur Y^c, $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{j<n} \mathrm{V}^j f = 0$. Ceci étant, soit

$$f = h + l, \qquad h = \mathrm{V}h \in \mathrm{L}^1, \qquad \overline{l \in (\mathrm{I} - \mathrm{V})\mathrm{L}^1}.$$

L'orthogonal de $(\mathrm{I} - \mathrm{V})\mathrm{L}^1$ dans L^∞ est le noyau de $\mathrm{I} - \mathrm{V}^*$. Compte tenu de (P), la proposition 3.6 montre que :

$$\mathrm{L}^\infty \in \psi = \mathrm{V}^*\varphi \Leftrightarrow \varphi = \mathrm{T}_k^* \qquad k = 1, 2, \ldots, d$$

soit

$$\operatorname{Ker}(\mathrm{I} - \mathrm{V})^* = \bigcap_{1\leq k\leq d} \operatorname{Ker}(\mathrm{I} - \mathrm{T}_k^*),$$

qui entraîne à son tour,

$$\overline{(\mathrm{I} - \mathrm{V})\mathrm{L}^1} = \overline{\sum_{1\leq k\leq d} (\mathrm{I} - \mathrm{T}_k)\mathrm{L}^1}$$

Or cette dernière propriété implique que $\lim_n \mathrm{A}_n(l) = 0$ p. p. En outre la proposition 3.6 nous donne $h = \mathrm{T}_k h$, $k = 1, 2, \ldots, d$, et donc $\mathrm{A}_n h = h$, qui achève la preuve. ∎

Autrement dit le comportement ergodique du semi-groupe est le même que celui des semi-groupes engendrés par les barycentres ayant suffisamment de coefficients positifs.

5. LE CAS DES SEMI-GROUPES DE CONTRACTIONS A d PARAMÈTRES

Nous allons maintenant donner la démonstration du théorème de Dunford et Schwartz mentionné dans l'introduction [*3*]. Nous nous bornerons à considérer un semi-groupe $(T_t)_{t \in \mathbf{R}^2}$, fortement mesurable (voir [3]) de contractions de $L^1(X)$ vérifiant la condition (1). Rappelons que Dunford et Schwartz ont démontré que l'hypothèse de forte mesurabilité et le fait que les T_t soient des contractions dans L^1 et dans L^∞ entraînent l'intégrabilité de $t \to T_t f$ sur tout borélien borné et aussi la continuité de cette application dans l'intérieur de $\mathbf{R}_+^2$, noté $\widehat{\overset{\circ}{\mathbf{R}_+^2}}$.

Pour $a > 0$, on pose :

$$Q_a = \{ t = (t_1, t_2) \in \mathbf{R}_+^2 \mid t_1 < a, t_2 < a \},$$

et l'on considère les moyennes ergodiques

$$f \in L^1, \ M_a f = \frac{1}{a^2} \int_{Q_a} (T_t f) dt.$$

Si $a = n \in \mathbf{N}$, $a > 0$, on peut écrire, en posant $(j) = (j_1, j_2) \in \mathbf{N}^2$,

$$M_n f = \frac{1}{n^2} \sum_{(j) \in Q_n} \int_{\left\{ \begin{smallmatrix} j_1 \le t_1 < j_1 + 1 \\ j_2 \le t_2 < j_2 + 1 \end{smallmatrix} \right.} (T_t f) dt,$$

et, en posant dans la dernière intégrale $t = s + j$, on obtient

$$\int_{Q_1} (T_{(s_1 + j_1, s_2 + j_2)} f) ds = T_{(j)} \left(\int_{Q_1} (T_s f) ds \right) = T_{(j)} M_1 f.$$

Or si $T_{(1,0)}$ et $T_{(0,1)}$ sont désignés par T'_1 et T'_2, $M_n f$ s'écrit aussi

$$M_n f = \frac{1}{n^2} \sum_{(j) \in Q_n} T_1'^{j_1} T_2'^{j_2} (M_1 f) = A'_{nx} M_1 f,$$

avec les notations du paragraphe précédent. Il est clair que T'_1 et T'_2 sont des contractions de L^1 qui commutent et qui vérifient la condition (1). Les résultats établis dans le paragraphe 4 impliquent la convergence presque partout des moyennes $M_n f$ vers une limite $\check{f} = \widecheck{M_1 f} \in L^1$ qui satisfait aux relations

$$T'_1 \check{f} = T'_2 \check{f} = \check{f}, \qquad T_1'^*(\bar{\bar{f}}) = T_2'^*(\bar{\bar{f}}) = \bar{\bar{f}}.$$

Le théorème ergodique cherché sera prouvé si l'on démontre que

(6) $$\forall f \in L^1 \lim_{a \to +\infty} (M_a f - M_{[a]} f) = 0 \quad \mu\text{-p. p.},$$

$[a]$ désignant la partie entière du nombre positif a.

Remarque. — La propriété (6) est bien vérifiée par les éléments de $L^1 \cap L^\infty$ puisque les T_t sont des contractions de L^∞.

Pour traiter le cas général nous établirons un lemme

LEMME 5.1. — Si $f \in L^1$, on a

$$\int^* \overline{\lim_{a \to +\infty}} \, |M_a f| \, d\mu \leq \chi . \| f \|_1, \qquad (*)$$

où χ est la constante du théorème 3.7 pour $d = 2$.

Démonstration. — On peut écrire, pour tout $a > 0$

$$|M_a f| \leq \frac{1}{a^2} \int_{Q_a} | \quad |(|f|)dt \leq \frac{1}{n^2} \int_{Q_{n+1}} |T_t|(|f|)dt$$
$$\leq \frac{1}{n^2} \sum_{(j) \in Q_{n+1}} |T'_1|^{j_1} |T'_2|^{j_2} M'(|f|),$$

où M' est la contraction positive $\int_{Q_1} |T_s| \, ds$ dont l'existence ne soulève pas de difficultés, et en utilisant les inégalités

$$|T_{(s_1+j_1, s_2+j_2)}| \leq |T_{(j_1,j_2)}| \quad |T_s| \leq |T'_1|^{j_1} |T'_2|^{j_2} |T_s|.$$

Le théorème 3.7 montre alors l'existence de $F \in L^1_+$ tel que

$$\overline{\lim_{a \to +\infty}} \, |M_a f| \leq \chi, F \quad \text{avec} \quad \|F\|_1 \leq \|M'(|f|)\|_1 \leq \|f\|_1.$$

Il ne reste plus qu'à prendre l'intégrale extérieure des deux membres de (6), relativement à la mesure μ. Si $f \in L^1$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une décomposition $f = f' + f''$ avec $f' \in L^1 \cap L^\infty$ et $\| f'' \|_1 < \varepsilon$. Le lemme 5.1 et la remarque qui le précède permettent d'écrire

$$\int^*_{a \to +} \overline{\lim} \, |M_a f - M_{[a]} f| \, d\mu \leq 2\chi\varepsilon,$$

et donc $\lim_{a \to +\infty} |M_a f - M_{[a]} f| = 0$ μ-p. p.

Il est clair que si l'on partage R^2_+ en carrés de côté $b > 0$, au lieu de carrés de côté 1, on obtient des résultats analogues, conduisant aux égalités

$$\check{f} = T_{(b,0)} \check{f} = T_{(0,b)} \check{f}, \qquad \bar{\bar{f}} = T^*_{(b,0)}(\bar{\bar{f}}) = T^*_{(0,b)}(\bar{\bar{f}}),$$

(*) On pourrait prendre l'intégrale puisque Dunford et Schwartz ont prouvé la mesurabilité de $\overline{\lim} \, |M_a f|$.

sans perdre de vue qu'il s'agit d'égalités entre classes d'équivalence, modulo μ.

Nous venons d'établir le

THÉORÈME 5.2. — Soit $(T_t)_{t\in R_+^2}$ un semi-groupe, fortement mesurable, de contractions de L^1, vérifiant la condition :

$$\forall t \in R_+^2 \ |T_t|(1) \leq 1.$$

Pour tout $f \in L^1$, les moyennes $\frac{1}{a^2}\int_{Q_a}(T_t f)dt$ convergent presque partout vers un élément $\check{f} \in L^1$. Cette limite $\check{f}$ est invariante sous l'action du semi-groupe et sa conjuguée complexe $\bar{\check{f}}$ est invariante sous les opérateurs transposés des T_t.

Nous donnerons, pour terminer, l'extension au cas continu de la proposition 4.2.

Soit ω une fonction > 0, borélienne et bornée sur R_+^2, telle que $\int_{R_+^2} \omega dx = 1$. Appelons W la contraction barycentre strict

$$W = \int_{R_+^2} \omega(x) T_x dx.$$

PROPOSITION 5.3. — Pour tout $f \in L^1$, on a :

$$\lim_{a\to+\infty} M_a f = \lim_n \frac{1}{n}\sum_{j<n} W^j f \qquad \mu\text{-p. p.}$$

Démonstration. — Commençons par étendre la proposition 3.6 au cas continu en montrant que si $h = Wh \in L^1$, on a aussi $h = T_t h$ pour tout t appartenant à l'intérieur de R_+^2. Pour cela considérons un voisinage ouvert et borné A du point $t \in R_+^2$. W peut être considéré comme barycentre strict des contractions

$$W = \frac{1}{\int_A \omega dx}\int_A \omega(x) T_x dx \quad \text{et} \quad W'' = \frac{1}{\int_{A^c} \omega dx}\int_{A^c} \omega(x) T_x dx,$$

et donc $h = W'h = W''h$.

La continuité en t de $x \to T_x h$ nous donne alors $h = T_t h$.

Maintenant, au cours de la démonstration du théorème 5.2 on a considéré le semi-groupe discret engendré par les contractions $T'_1 = T_{(1,0)}$

et $T'_2 = T_{(0,1)}$. Si Y est l'ensemble que la proposition 3.5 associe à ce semi-groupe, nous savons qu'il existe $g \in L^1_+$, tel que $Y = \{ g > 0 \}$ et que

$$g = T'_1 \, | \, g = | \, T'_2 \, | \, g.$$

Il est aussi aisé de voir que $g = | \, T_{(b,0)} \, | \, g = | \, T_{(0,b)} \, | \, g$, pour tout $b > 0$, et finalement $g = | \, T_t \, | \, g$ pour tout $t \in R^2_+$.

Ceci étant, si h est un point fixe de W dans L^1, alors $h = T_t h$ si $t \in \widehat{\mathring{R}^2_+}$ et $| \, h \, | \leqslant | \, T_t \, | \, (h)$ qui implique que $| \, h \, |$ soit un point fixe des $| \, T_t \, |$; $t \in \widehat{\mathring{R}^2_+}$. Et cela nous donne $\{ h \neq 0 \} \subset Y \pmod{\mu}$. Autrement dit les deux limites que la proposition 5.3 compare sont nulles hors de Y. On peut donc se placer dans le cas où $f \in L^1(Y)$ et étudier les limites sur Y, c'est-à-dire on peut supposer à partir de maintenant $Y = X$.

Considérons alors la décomposition de f :

$$f = h + f', \qquad h = Wh \in L^1, \qquad f' \in \overline{(I - W)L^1}.$$

f' est orthogonale à tous les $\varphi \in L^\infty$ vérifiant $\varphi = W^*\varphi$. Mais cette dernière égalité entraîne $\varphi = T_t^*\varphi$ pour tout $t \in \widehat{\mathring{R}^2_+}$. Donc $f' - M_a f' \perp \varphi$ et par l'équi-intégrabilité de la famille $(M_a f')_{a>0}$, on déduit que

$$L^1 \in f' - \lim_{a \to +\infty} M_a f' \perp \varphi \quad \text{si} \quad \varphi = W^*\varphi \in L^\infty.$$

Puisque $h = M_a h$, on a donc

$$L^1 \ni f - \lim_{a \to +\infty} M_a f \perp \operatorname{Ker}(I - W^*) \subset L^\infty,$$

et aussi

$$h - \lim_{a \to +\infty} M_a f \perp \operatorname{Ker}(I - W^*).$$

Or, $h - \lim_{a \to +\infty} M_a f$ est W-invariante, donc elle est nulle $\pmod{\mu}$. ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. A. AKCOGLU et A. BRUNEL, Contractions on L^1-Spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 155, 2, April 1971.

[2] R. V. CHACON et U. KRENGEL, Linear modulus of a linear operator. *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **15**, 1964.

[3] N. DUNFORD et J. T. SCHWARTZ, *Linear operators*. Vol. I.

[4] J. NEVEU, *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités*. Masson.

(Manuscrit reçu le 3 mai 1973)