

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J.-P. DAURÈS

Version multivoque du théorème de Doob

Annales de l'I. H. P., section B, tome 9, n° 2 (1973), p. 167-176

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1973__9_2_167_0

© Gauthier-Villars, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Version multivoque du théorème de Doob

par

J.-P. DAURÈS (*)

SUMMARY. — In a first time, we prove that the conditional expectation of an integrable multifunction defined on a probability space with convex compact values in a separable Frechet space is an integrable multifunction with convex compact values. By using this result, we can introduce the notion of integrable multi-martingales taking their values in the convex compact sets of a separable Frechet space. In the second time, we give a generalisation of Doob's theorem for integrable multi-martingales taking their values in the convex compact sets of a reflexive Banach space. This generalisation is related to a very recent result of Neveu (Cf. this *Journal*).

INTRODUCTION

Le but final de ce travail qui est inspiré d'un article de Neveu [10] est de donner une généralisation du théorème de Doob [7] qui affirme que toute martingale réelle $(X_n, n \in \mathbb{N})$ vérifiant l'hypothèse $\sup_{n \in \mathbb{N}} E(|X_n|) < \infty$ converge presque partout (p. p.), au cas des martingales multivoques à valeurs dans les parties convexes compactes non vides d'un espace de Banach réflexif séparable. On démontrera au passage que l'espérance conditionnelle d'une multi-application intégrable à valeurs dans les parties convexes

(*) Institut de Mathématiques, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier.

compactes d'un espace de Fréchet séparable est une multi-application intégrable à valeurs convexes compactes.

Le résumé des résultats présentés ici a fait l'objet d'une note aux comptes rendus [6].

Notations et définitions

Soit (E, d) un espace polonais et \mathcal{C} l'ensemble des parties compactes non vides de E . On rappelle [1] que \mathcal{C} muni de la distance de Hausdorff δ définie par :

$$A, B \in \mathcal{C}, \quad \delta(A, B) = \sup \left[\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A) \right]$$

est un espace polonais. Pour tout espace topologique X , on notera $\mathcal{B}(X)$ sa tribu borélienne. Soit F un espace de Fréchet séparable et \mathcal{X} l'ensemble des parties convexes compactes non vides de F . Muni de la distance de Hausdorff δ , \mathcal{X} est un espace polonais ; de plus la formule de Hörmander montre que l'on peut définir δ par la suite (δ_i) d'écart finis donnés par

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall A, B \in \mathcal{X}, \quad \delta_i(A, B) = \sup_{x' \in V_i^0} | \varphi(x', A) - \varphi(x', B) |$$

où $\varphi(x', A)$ désigne la fonction d'appui de A (i. e. $x' \in F'$, $\varphi(x', A) = \sup_{x \in A} \langle x', x \rangle$) et V_i^0 est le polaire du voisinage V_i de l'origine dans F ; $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ étant une suite décroissante de voisinages convexes équilibrés de l'origine dans F . Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace mesurable abstrait et Γ une multi-application \mathcal{A} -mesurable de Ω à valeurs dans l'ensemble des parties compactes non vides de E . On sait par [1] que la mesurabilité de Γ équivaut à la mesurabilité de l'application Γ de (Ω, \mathcal{A}) dans $(\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}))$. Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé complet ; une multi-application \mathcal{A} -mesurable Γ de Ω à valeurs dans les parties convexes compactes non vides de F est dite P -intégrable si pour tout $i \in \mathbb{N}$, la fonction scalaire \mathcal{A} -mesurable

$$\omega \mapsto \Delta_i(\Gamma(\omega)) = \sup_{x' \in V_i^0} | \varphi(x', \Gamma(\omega)) |$$

est P -intégrable. Remarquons par ailleurs que la mesurabilité de Γ équivaut à la mesurabilité de toutes ses fonctions d'appui en vertu du théorème 0.11 de [1]. L'intégrabilité des fonctions $\Delta_i(\Gamma(\cdot))$ implique que Γ est fortement P -intégrable au sens de [4] et [5]. Pour toute multi-application P -intégrable Γ de Ω dans les parties convexes compactes non vides de F et toute sous-tribu \mathcal{B} de \mathcal{A} , on appelle *espérance conditionnelle de Γ*

par rapport à \mathcal{B} , notée $E^{\mathcal{B}}(\Gamma)$, la multi-application P-intégrable (quand elle existe) de Ω à valeurs dans les parties convexes compactes non vides de F qui vérifie

$$\forall x' \in F', \quad E^{\mathcal{B}}[\varphi(x', \Gamma(\cdot))] = \varphi(x', E^{\mathcal{B}}(\Gamma(\cdot))) \quad \text{p. p.}$$

où $E^{\mathcal{B}}[\varphi(x', \Gamma(\cdot))]$ est l'espérance conditionnelle de $\varphi(x', \Gamma(\cdot))$ au sens de [9]. Dans la suite on notera « intégrable » au lieu de « P-intégrable ».

A) RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Les résultats suivants m'ont été suggérés par M. Valadier.

PROPOSITION. — Soit Φ une application mesurable de (Ω, \mathcal{A}) dans un espace mesurable (G, \mathcal{G}) et soit f une application de Ω dans un espace polonais Q . Pour que f soit $\Phi^{-1}(\mathcal{G})$ mesurable, il faut et il suffit qu'il existe une application mesurable h de (G, \mathcal{G}) dans $(Q, \mathcal{B}(Q))$ telle que $f = h \circ \Phi$.

Démonstration. — Montrons la nécessité. Supposons que f soit dénombrablement étagée. On a $f(\omega) = x_i$ si $\omega \in A_i$, $i \in I$ dénombrable, $x_i \in Q$, $A_i \in \Phi^{-1}(\mathcal{G})$. Il existe donc $G_i \in \mathcal{G}$ tel que $A_i = \Phi^{-1}(G_i)$.

Posons $C_i = G_i - \bigcup_{p=1}^{i-1} G_p$. On a :

$$\Phi^{-1}(C_i) = \Phi^{-1}(G_i) - \bigcup_{p=1}^{i-1} \Phi^{-1}(G_p) = A_i - \bigcup_{p=1}^{i-1} A_p = A_i$$

et les C_i sont des éléments disjoints de \mathcal{G} .

Soit

$$h(y) = \begin{cases} x_i & \text{si } y \in C_i \\ p & \text{quelconque, } p \in Q \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

Alors

$$(h \circ \Phi)(\omega) = \begin{cases} x_i & \text{si } \omega \in A_i \\ p & \text{ailleurs} \end{cases}$$

donc puisque si $\omega \in A_i$, $\Phi(\omega) \in C_i$, $h \circ \Phi = f$.

Si f est mesurable, il existe une suite de fonctions dénombrablement étagées qui converge vers f . D'après ce qui précède, chacune d'elles est de la forme $h_n \circ \Phi$.

Soit $H = \{ y \in G \mid \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(y) \text{ existe} \}$. On a $H \supset \Phi(\Omega)$ car $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\Phi(\omega))$

existe par construction. Si d est une métrique pour laquelle Q est complet, il vient :

$$H = \bigcap_r \bigcup_n \bigcap_{p,q \geq n} \left\{ y \in G \mid d(h_p(y), h_q(y)) \leq \frac{1}{r} \right\}.$$

Il suit alors de la continuité de l'application $(x, y) \mapsto d(x, y)$ de $Q \times Q$ dans \mathbb{R} et de la mesurabilité de $y \mapsto (h_p(y), h_q(y))$ de (G, \mathcal{G}) dans $(Q \times Q, \mathcal{B}(Q \times Q))$ que $H \in \mathcal{G}$. On pose alors

$$h(y) = \begin{cases} \lim_n h_n(y) & \text{si } y \in H \\ q \in Q, \quad q \text{ quelconque,} & \text{si } y \notin H \end{cases}$$

Alors $(h \circ \Phi)(\omega) = f(\omega)$; et h est mesurable de (G, \mathcal{G}) dans $(Q, \mathcal{B}(Q))$.

Remarque. — Cette proposition généralise le théorème T 18 de [8].

THÉORÈME 0. — Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace mesurable et Γ une application mesurable de (Ω, \mathcal{A}) dans $(\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}))$. Alors il existe un ensemble dénombrable dense $(\sigma_i)_{i \in D}$ de sélections \mathcal{A} -mesurables de la multi-application Γ , une application mesurable Φ de (Ω, \mathcal{A}) dans $(E^D, \mathcal{B}(E^D))$ et une application mesurable H de $(E^D, \mathcal{B}(E^D))$ dans $(\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}))$ telle que :

$$\Gamma = H \circ \Phi$$

Démonstration. — D'après [1] la multi-application Γ de Ω dans les parties compactes non vides de E admet une famille dénombrable dense $(\sigma_i)_{i \in D}$ de sélections mesurables. Soit Φ l'application mesurable de (Ω, \mathcal{A}) dans $(E^D, \mathcal{B}(E^D))$ définie par

$$\Phi(\omega) = (\sigma_i(\omega))_{i \in D} \quad (\omega \in \Omega).$$

Alors la tribu $\Phi^{-1}(\mathcal{B}(E^D))$ contient les éléments de la forme :

$$\Gamma^{-1}(U) = \{ \omega \mid \Gamma(\omega) \cap U \neq \emptyset \} = \bigcup_{i \in D} \sigma_i^{-1}(U)$$

où U est ouvert dans E . On en déduit que Γ est une application mesurable de $(\Omega, \Phi^{-1}(\mathcal{B}(E^D)))$ dans $(\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}))$. En vertu de la proposition précédente il existe une application mesurable H de $(E^D, \mathcal{B}(E^D))$ dans $(\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}))$ telle que :

$$\Gamma = H \circ \Phi.$$

Remarque. — Ce résultat reste vrai si l'on remplace E par F et \mathcal{C} par \mathcal{X} parce que \mathcal{X} muni de la distance de Hausdorff δ est polonais.

THÉORÈME 1. — Pour toute sous-tribu \mathcal{B} de \mathcal{A} , l'espérance conditionnelle d'une multi-application intégrable Γ de Ω dans les parties convexes compactes non vides de F est une multi-application intégrable de Ω dans les parties convexes compactes non vides de F .

Démonstration. — Puisque Γ est mesurable, on peut appliquer les résultats et les notations du théorème 0. Il existe alors une application mesurable Φ de (Ω, \mathcal{A}) dans $(F^D, \mathcal{B}(F^D))$ et une application mesurable H de $(F^D, \mathcal{B}(F^D))$ dans $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ telles que $\Gamma = H \circ \Phi$. Soit I l'injection mesurable de (Ω, \mathcal{A}) dans (Ω, \mathcal{B}) . Puisque F^D est polonais, il existe en vertu du théorème de Jirina [12] une probabilité conditionnelle P_Φ^I de Φ par rapport à I . Posons :

$$\Sigma(\omega) = \int_{F^D} H(y) P_\Phi^I(dy | \omega)$$

La relation $\int_{\Omega} \Delta_i(\Gamma(\omega)) dP(\omega) < \infty$ s'écrit $\int_{\Omega} \Delta_i[(H \circ \Phi)(\omega)] dP(\omega) < \infty$.

Soit $P_{(\Phi, I)}$ la probabilité image de P par l'application mesurable (Φ, I) . Alors, on a :

$$\int_{\Omega} \Delta_i[(H \circ \Phi)(\omega)] dP(\omega) = \int_{\Omega} \int_{F^D} \Delta_i(H(y)) P_{(\Phi, I)}(dy, d\omega) < \infty$$

ou

$$\int_{\Omega} \int_{F^D} \Delta_i(H(y)) P_\Phi^I(dy | \omega) P_I(d\omega) < \infty$$

en désignant par P_I l'image de P par l'injection I , donc

$$\int_{F^D} \Delta_i(H(y)) P_\Phi^I(dy | \omega) < \infty$$

p. p. sur $(\Omega, \mathcal{B}, P_I)$ et, $y \mapsto \Delta_i(H(y))$ est une application $P_\Phi^I(\cdot | \omega)$ presque partout intégrable sur $(\Omega, \mathcal{B}, P_I)$, $\forall i$.

D'après le théorème 5 de [2] (cf. aussi [3]), $\Sigma(\omega)$ est pour presque tout ω un convexe compact de F et on a :

$$\forall x' \in F', \quad \varphi(x', \Sigma(\omega)) = \int_{F^D} \varphi(x', H(y)) P_\Phi^I(dy | \omega).$$

Par suite, d'après [11] Σ est \mathcal{B} -mesurable et P_I -intégrable. Or pour tout $B \in \mathcal{B}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_B \varphi(x', \Sigma(\omega)) dP(\omega) &= \int_{\Omega} \chi_B(\omega) \int_{F^D} \varphi(x', H(y)) P_{(\Phi, I)}(dy, d\omega) \\ &= \int_{\Omega} \chi_B(\omega) \varphi(x', \Gamma(\omega)) dP(\omega) = \int_B \varphi(x', \Gamma(\omega)) P(d\omega). \end{aligned}$$

D'où :

$$\varphi(x', \Sigma(\cdot)) = E^{\mathcal{B}}[\varphi(x', \Gamma(\cdot))].$$

Donc $E^{\mathcal{B}}(\Gamma)$ est égale à Σ , ce qui termine la démonstration.

Grâce au théorème 1, on peut maintenant introduire la définition suivante :

DÉFINITION. — *Étant donnée une suite $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-tribu de \mathcal{A} , une suite $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de multi-applications de Ω à valeurs dans les parties convexes compactes non vides de F est appelée martingale intégrable si :*

- a) $\forall n \in \mathbb{N}$, Γ_n est \mathcal{B}_n mesurable et intégrable,
- b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma_n = E^{\mathcal{B}_n}(\Gamma_{n+1})$.

B) THÉORÈME DE CONVERGENCE ET CONSÉQUENCE

Dans ce paragraphe, F est un espace de Banach réflexif séparable. Les formules données dans les notations s'écrivent :

$$\begin{aligned} K, K' \in \mathcal{K} \quad \delta(K, K') &= \sup_{\|x'\| \leq 1} |\varphi(x', K) - \varphi(x', K')| \\ K \in \mathcal{K}, \quad \Delta(K) &= \delta(K, \{0\}) \end{aligned}$$

THÉORÈME 2. — *Les notations étant celles de la définition donnée dans le paragraphe A, soient $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale intégrable et X une multi-application \mathcal{A} -mesurable de Ω à valeurs dans les parties convexes compactes non vides de F . On suppose les hypothèses suivantes vérifiées :*

- a) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int \Delta(\Gamma_n(\cdot)) dP < \infty$
- b) $\forall x' \in F', \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x', \Gamma_n(\omega)) \leq \varphi(x', X(\omega))$

Alors il existe une multi-application Γ_∞ -intégrable de Ω à valeurs dans les parties convexes compactes non vides de F telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(\Gamma_n(\omega), \Gamma_\infty(\omega)) = 0 \quad \text{p. p.}$$

Démonstration. — Soit $x' \in F'$. La suite $\{\varphi(x', \Gamma_n(\cdot))\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale réelle intégrable. Le théorème de Doob [7] classique entraîne l'existence et l'intégrabilité des limites :

$$f(x')(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x', \Gamma_n(\omega))$$

en dehors d'un négligeable dépendant de x' . Soit D une partie dénombrable fortement dense dans la boule unité de F' . On a alors

$$\Delta(\Gamma_n(\cdot)) = \sup_{x' \in D} |\varphi(x', \Gamma_n(\cdot))|.$$

Donc $\Delta(\Gamma_n(\cdot))$ est une sous-martingale positive. L'hypothèse du théorème et le théorème de Doob classique entraînent l'existence et l'intégrabilité de

$$\omega \mapsto U(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(\Gamma_n(\omega)) \quad \text{p. p.}$$

D'où

$$|f(x')(\cdot)| \leq \|x'\| U(\cdot)$$

Soit $U'(\omega)$ un représentant de U dans $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Posons :

$$\Omega_n = \{ \omega \mid n \leq U'(\omega) < n + 1 \}.$$

Sur chaque Ω_n , $f(x')(\omega)$ est essentiellement bornée. Soit $\psi(x')(\omega)$ le représentant de $f(x')(\omega)$ obtenu en appliquant le théorème de relèvement de Ionescu-Tulcea ([8], p. 195) à chaque Ω_n et en recollant les morceaux. La fonction $\psi(x')(\omega)$ vérifie alors les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x', y' \in F', \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \psi(x' + y')(\omega) \leq \psi(x')(\omega) + \psi(y')(\omega) \\ \forall x' \in F', \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \forall \lambda \geq 0, \quad \psi(\lambda x')(\omega) = \lambda \psi(x')(\omega) \\ \forall x' \in F', \quad \forall \omega \in \Omega, \quad |\psi(x')(\omega)| \leq \|x'\| U'(\omega) \end{array} \right.$$

Par suite quels que soient x' et y' dans F' et ω dans Ω , on a :

$$|\psi(x')(\omega) - \psi(y')(\omega)| \leq \|x' - y'\| U'(\omega)$$

En modifiant U' sur un négligeable on peut supposer U' partout finie. On déduit de ce qui précède qu'il existe un convexe fermé borné non vide $\Gamma_\infty(\omega)$ tel que :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \forall x' \in F', \quad \psi(x')(\omega) = \varphi(x', \Gamma_\infty(\omega)).$$

On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x', \Gamma_n(\omega)) = \varphi(x', \Gamma_\infty(\omega))$$

en dehors d'un négligeable N_x . Soient x'_i une suite fortement dense dans F' , $N_{x'_i}$ un négligeable en dehors duquel $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x'_i, \Gamma_n(\omega)) = \varphi(x'_i, \Gamma_\infty(\omega))$ et

$$N = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_{x'_i}.$$

D'après b), pour $\omega \notin N$, on a :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \varphi(x'_i, \Gamma_\infty(\omega)) \leq \varphi(x'_i, X(\omega)).$$

La suite x'_i étant fortement dense dans F' , on a :

$$\forall x' \in F', \quad \varphi(x', \Gamma_\infty(\omega)) \leq \varphi(x', X(\omega))$$

Donc

$$\Gamma_\infty(\omega) \subset X(\omega) \quad \text{p. p.}$$

et $\Gamma_\infty(\omega)$ est compact dans F p. p. et, la multi-application Γ_∞ est intégrable par construction. Il nous reste à montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(\Gamma_n(\omega), \Gamma_\infty(\omega)) = 0 \quad \text{p. p.}$$

Or cette assertion résulte du lemme suivant (inspiré d'un résultat de Neveu [10]).

LEMME. — Soit $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale intégrable à valeurs dans les convexes compacts non vides d'un espace de Fréchet séparable F , qui vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\text{a) } \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \int \Delta_i(\Gamma_n(\cdot)) dP < \infty$$

b) il existe une multi-application intégrable Γ_∞ à valeurs dans les parties convexes compactes non vides de F telle que :

$$\forall x' \in F', \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x', \Gamma_n(\omega)) = \varphi(x', \Gamma_\infty(\omega)) \quad \text{p. p.}$$

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(\Gamma_n(\omega), \Gamma_\infty(\omega)) = 0 \quad \text{p. p.}$$

Démonstration. — Soit K un élément fixé de \mathcal{X} . Considérons les sous-martingales positives $\{|\varphi(x', \Gamma_n(\cdot)) - \varphi(x', K)|, n \in \mathbb{N}\}$; les x' parcourant un sous-ensemble dénombrable dense D_i pour la topologie de la convergence compacte dans V_i^0 . Puisque

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int \sup_{D_i} |\varphi(x', \Gamma_n(\cdot)) - \varphi(x', K)| dP \leq \Delta_i(K) + \sup_{n \in \mathbb{N}} \int \Delta_i(\Gamma_n(\cdot)) dP$$

il suit du lemme 4 de Neveu [10] que la suite $\delta_i(\Gamma_n(\cdot), K)$ converge p. p. vers $\delta_i(\Gamma_\infty(\cdot), K)$. Puisque \mathcal{X} est polonais, on peut trouver un événement négligeable Ω_0 en dehors duquel $\delta_i(\Gamma_n(\cdot), K)$ converge vers $\delta_i(\Gamma_\infty(\cdot), K)$ pour tout K appartenant à une partie dénombrable dense \mathcal{L} de \mathcal{X} . Puisque $\Gamma_\infty(\omega) \in \mathcal{X}$, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe Q appartenant à \mathcal{L} tel que

$$\delta_i(\Gamma_\infty(\omega), Q) \leq \varepsilon$$

Donc

$$\begin{aligned} \delta_i(\Gamma_\infty(\omega), \Gamma_n(\omega)) &\leq \delta_i(\Gamma_\infty(\omega), Q) + \delta_i(Q, \Gamma_n(\omega)) \\ &\leq \varepsilon + \delta_i(Q, \Gamma_n(\omega)) \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

pour n suffisamment grand. Puisque i est arbitraire, on a bien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(\Gamma_n(\omega), \Gamma_\infty(\omega)) = 0 \quad \text{p. p.}$$

COROLLAIRE. — Avec les notations du théorème 2, si pour tout $\omega \in \Omega$, $\Gamma_n(\omega) \subset \lambda_n(\omega)Q$ où Q est un ensemble convexe compact équilibré non vide de F et où la suite $(\lambda_n(\cdot))$ est équi-intégrable, et si les Γ_n vérifient l'hypothèse b), on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \delta(\Gamma_n(\omega), \Gamma_\infty(\omega)) dP(\omega) = 0.$$

Démonstration. — On a $\Delta(\Gamma_n(\omega)) \leq |\lambda_n(\omega)| \Delta(Q)$. Puisque $|\lambda_n(\cdot)|$ est équi-intégrable, elle est bornée dans L^1 donc il en est de même de $\Delta(\Gamma_n(\cdot))$. On en déduit que les Γ_n vérifient l'hypothèse a) du théorème 2. Par suite il existe une multi-application Γ_∞ intégrable de Ω à valeurs dans les parties convexes compactes non vides de F telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(\Gamma_n(\omega), \Gamma_\infty(\omega)) = 0 \quad \text{p. p.}$$

De plus $\delta(\Gamma_n(\omega), \Gamma_\infty(\omega)) \leq \Delta(\Gamma_n(\omega)) + \Delta(\Gamma_\infty(\omega))$. Donc puisque

$$\Delta(\lambda_n(\cdot)Q) = |\lambda_n(\cdot)| \Delta(Q)$$

est équi-intégrable, il en est de même de $\Delta(\Gamma_n(\cdot))$ et de $\delta(\Gamma_n(\cdot), \Gamma_\infty(\cdot))$. On déduit alors de ([9], p. 50) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \delta(\Gamma_n(\cdot), \Gamma_\infty(\cdot)) dP = 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ch. CASTAING, *Sur les multi-applications mesurables*. Thèse, Faculté des Sciences de Caen, 1967.
- [2] Ch. CASTAING, Quelques résultats de compacité liés à l'intégration. *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, série A, t. 270, 1970, p. 1732-1735.
- [3] Ch. CASTAING, *Quelques applications du théorème de Banach-Dieudonné à l'intégration*. Publication n° 67. Institut des Mathématiques. Université des Sciences et Techniques du Languedoc. Montpellier.
- [4] J.-P. DAURÈS, *Opérateurs extrémaux et décomposables. Convergence des martingales multivoques*. Thèse 3^e cycle. Institut des Mathématiques. Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier, 1972.
- [5] J.-P. DAURÈS, Convergence presque sûre des martingales multivoques à valeurs dans les convexes compacts d'un espace de Fréchet séparable. *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, série A, t. 274, 1972, p. 1735-1738.

- [6] J.-P. DAURÈS, Version multivoque du théorème de Doob. *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, série A, t. **275**, 1972, p. 527-530.
- [7] J.-L. DOOB, *Stochastic Processes*, Wiley, New York.
- [8] P. A. MEYER, *Probabilités et Potentiel*, Hermann, Paris.
- [9] J. NEVEU, *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités*, Masson, Paris, 1964.
- [10] J. NEVEU, Convergence presque sûre de martingales multivoques. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, Section B, Vol. VIII, n° 1, 1972, p. 1-7.
- [11] M. VALADIER, *Contribution à l'Analyse Convexe*, Thèse, Faculté des Sciences de Paris, 1970.
- [12] M. VALADIER, *Comparaison des trois théorèmes de désintégration*. Séminaire d'Analyse Convexe. Institut des Mathématiques. Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier, 1972.

(Manuscrit reçu le 14 décembre 1972).