ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN JACOD

Semi-groupes et mesures invariantes pour les processus semi-markoviens à espace d'état quelconque

Annales de l'I. H. P., section B, tome 9, nº 1 (1973), p. 77-112
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1973__9_1_77_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. IX, n° 1, 1973, p. 77-112. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Semi-groupes et mesures invariantes pour les processus semi-markoviens à espace d'état quelconque

par

Jean JACOD
Centre de Morphologie Mathématique,
35, rue Saint-Honoré, 77-Fontainebleau

ABSTRACT. — Let $(Z_t)_{t \geqslant 0}$ be a jump process, with values in a measurable space $(E, \mathscr{E})$. We denote by U_t the time between t and the last jump before t, and by V_t the time between t and the first jump after t. (Z_t) is called a semi-Markov process of the first, second or third kind, if (Z_t, U_t, V_t), (Z_t, U_t) or (Z_t, V_t) is a Markov process.

The (random) set of discontinuity points of Z_t is denoted by N. $N_d(N_g)$ is the set of right (left) limit points of N. We suppose that $N_d \subset N_g$ and that for any t the probability for t to be in N_d is zero.

Under these assumptions, we examine the relation between the three different kinds of semi-Markov process. We give a characterization for the transition semi-group of the Markov process (Z_t, U_t, V_t), (Z_t, U_t) or (Z_t, V_t) according to the kind of the semi-Markov process (Z_t). We give the form of invariant measures for these processes when they are recurrent. At last we examine what happens when the assuption $N_d \subset N_g$ is replaced by the assumption $N_d = N_g$.

INTRODUCTION

Les processus semi-markoviens (en abrégé : PSM) sont définis ainsi : $(Z_t)_{t \geqslant 0}$ étant une fonction aléatoire à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathscr{E})$, on pose $U_t = t$ si $Z_s = Z_t$ pour tout $s \in [0, t]$, $U_t = t - \sup(s < t, Z_s \neq Z_t)$

sinon, et $V_t = \inf(s > t, Z_s \neq Z_t) - t$. (Z_t) est un PSM de première, seconde ou troisième espèce si (Z_t, U_t, V_t), (Z_t, U_t) ou (Z_t, V_t) est markovien. Ces processus (au moins ceux de seconde espèce) ont été introduits par P. Lévy [*4*].

Nous nous intéressons ici à une classe particulière de PSM. N désigne l'ensemble des points de discontinuité de (Z_t) quand E est muni de la topologie discrète, $N_d(N_g)$ est l'ensemble des points d'accumulation à droite (à gauche) de N. Nous supposerons d'une part que $N_d \subset N_g$, d'autre part que pour tout $t \geqslant 0$, la probabilité pour que $t \in N_d$ est nulle. Dans ce cas, presque toutes les trajectoires sont en escalier, et on note Y_n et T_n l'état et la longueur du $n^{\text{ième}}$ palier $\left(\text{il se peut bien sûr que } \sum_{(n)} T_n < \infty\right)$.

On remarque d'abord que la suite (Y_n, T_n) est une chaîne de Markov, dont on note $\tilde{Q}$ la transition : les PSM généralisent donc les processus de renouvellement et les processus de Markov en escalier. On remarque ensuite qu'un PSM de seconde espèce est également de première espèce, avec $\tilde{Q}$ de la forme $\tilde{Q}(z, x; dz', dx') = Q_1(z, x; dz')F_{z'}(dx')$; un PSM de troisième espèce est également de première espèce, avec $\tilde{Q}(z, x; .) = \tilde{H}'_0(z; .)$ indépendant de x. Dans ces deux cas, la chaîne (Y_n) est markovienne, de transition P ou P′ donnée par

$$P(z, .) = \int F_z(dx)Q_1(z, x; .) \quad \text{ou} \quad P'(z, .) = \tilde{H}'_0(z; .,]0, \infty[).$$

Le but de cet article est de caractériser les probabilités de transition des processus (Z_t, U_t, V_t), (Z_t, U_t) ou (Z_t, V_t) selon que (Z_t) est un PSM de première, seconde ou troisième espèce, et de donner la forme de la mesure σ-finie invariante lorsque ce PSM est récurrent. D'après ce qui précède on étudie complètement le cas des PSM de première espèce (parties I et II), et on en déduit comme corollaire le cas des PSM de seconde et de troisième espèce. Dans la partie II nous montrons notamment que si (Z_t, U_t, V_t) est récurrent au sens de Harris, sa mesure invariante se met sous la forme :

$$\bar{\mu}(\bar{A}) = \int \tilde{\nu}(dz, dx)dy 1_{0 \leqslant y < x} 1_{\bar{A}}(z, y, x - y),$$

où $\tilde{\nu}$ est une mesure σ-finie sur $E \times]0, \infty[$. Si de plus $N_d = N_g$, alors $\tilde{\nu}\tilde{Q} = \tilde{\nu}$.

La partie III est consacrée aux PSM de seconde espèce. Si (Z_t, U_t) est récurrent au sens de Harris, sa mesure invariante s'écrit :

$$\tilde{\mu}(\tilde{A}) = \int \nu(dz)F_z(]x, \infty[)dx 1_{\tilde{A}}(z, x),$$

où ν est une mesure σ-finie sur E. Si de plus $N_d = N_g$, on a $\nu P = \nu$. Nous retrouvons ici la forme de la mesure invariante d'un processus de renouvellement. Enfin dans la partie IV nous étudions les PSM de troisième espèce. Si $N_d = N_g$ et si (Z_t, V_t) est récurrent au sens de Harris, sa mesure invariante s'écrit :

$$\tilde{\mu}'(\tilde{A}) = \int \nu'(dz)\tilde{H}'_0(z\,;\,dz',\,]x,\,\infty[)dx 1_{\tilde{A}}(z',\,x),$$

où ν' est une mesure σ-finie sur E vérifiant $\nu' P' = \nu'$.

Nous généralisons dans cet article des résultats que nous avions obtenus dans le cas particulier où la chaîne (Y_n, T_n) est elle-même récurrente ([*2*], [*3*]). Dans le cas où E est dénombrable et où $N_d = N_g$, les mesures invariantes pour les PSM de seconde et de troisième espèce ont déjà été données par Pyke et Schaufele [*5*], mais les méthodes utilisées ici pour E quelconque sont très différentes.

Je tiens à remercier très vivement M. J. Neveu pour les remarques et conseils qu'il m'a donnés lors de l'élaboration de ce travail.

NOTATIONS

Soit E un espace muni d'une tribu séparable $\mathscr{E}$. On pose $\tilde{E} = E \times [0, \infty[$, $\tilde{E}' = E \times]0, \infty[$, $\bar{E} = E \times [0, \infty[\times]0, \infty[$ et $\bar{E}' = E \times]0, \infty[\times]0, \infty[$. $\mathscr{B}(F)$ désignant la tribu borélienne de l'espace topologique F, on pose $\tilde{\mathscr{E}} = \mathscr{E} \otimes \mathscr{B}([0, \infty[)$, $\tilde{\mathscr{E}}' = \mathscr{E} \otimes \mathscr{B}(]0, \infty[)$, $\bar{\mathscr{E}} = \mathscr{E} \otimes \mathscr{B}([0, \infty[\times]0, \infty[)$ et $\bar{\mathscr{E}}' = \mathscr{E} \otimes \mathscr{B}(]0, \infty[\times]0, \infty[)$. On note M et M_σ (resp. $\tilde{M}$ et $\tilde{M}_\sigma$, $\tilde{M}'$ et $\tilde{M}'_\sigma$, $\bar{M}$ et $\bar{M}_\sigma$) l'ensemble des mesures positives finies et σ-finies sur $(E, \mathscr{E})$ (resp. $(\tilde{E}, \tilde{\mathscr{E}})$, $(\tilde{E}', \tilde{\mathscr{E}}')$, $(\bar{E}, \bar{\mathscr{E}})$). On note $\tilde{B}_d$ (resp. $\tilde{B}'_g$) l'ensemble des fonctions $f(z, x)$ mesurables bornées sur $\tilde{E}$ (resp. $\tilde{E}'$), continues à droite (resp. à gauche) en x ; $\bar{B}_{dg}$ est l'ensemble des fonctions f mesurables bornées sur $\bar{E}$, telles que $f(z, u + t, v - t)$ soit continue à droite en t.

On considère un espace Ω muni d'une famille $(Z_t)_{t \geq 0}$ d'applications dans E. Pour $\omega \in \Omega$, $N(\omega)$ désigne l'ensemble des points de discontinuité de $Z.(\omega)$ quand E est muni de la topologie discrète. Pour éviter des complications triviales, nous supposerons toujours que $N(\omega)$ n'est pas borné. On appelle $N_d(\omega)$ (resp. $N_g(\omega)$) l'ensemble des points d'accumulation à droite (resp. à gauche) de $N(\omega)$. On suppose vérifiés les axiomes suivants :

(*R-1*). — Pour tout $\omega \in \Omega$, $Z.(\omega)$ est continu à droite en tout point du complémentaire de $N_d(\omega)$, lorsque E est muni de la topologie discrète.

(*R-2*). — Pour tout $\omega \in \Omega$, $N_d(\omega) \subset N_g(\omega)$.

On suppose par ailleurs donnée une application U_0 de Ω dans $[0, \infty[$. Soient :

$$U_t = \begin{cases} U_0 + t & \text{si } Z_s = Z_t \text{ pour tout } s \in [0, t[\\ t - \sup(s < t\,;\, Z_s \neq Z_t) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$V_t = \inf(s > t\,;\, Z_s \neq Z_t) - t, \qquad D_t = t + V_t\,;$$

enfin $\mathscr{F}_t$ (resp. $\mathscr{F}'_t$, $\bar{\mathscr{F}}_t$) sont les tribus de Ω engendrées par les variables $(U_0\,;\, Z_s, s \leqslant t)$ (resp. $(Z_s, V_s\,;\, s \leqslant t)$, $(U_0\,;\, Z_s, V_s, s \leqslant t)$). Voici quelques remarques faciles :

1) On a $\mathscr{F}_t \subset \bar{\mathscr{F}}_t$ et $\mathscr{F}_\infty = \bar{\mathscr{F}}_\infty$ (on note $\mathscr{F}$ cette tribu).

2) D'après (R-1), $N_d = \{ t\,;\, V_t = 0 \}$; de plus si $t < a$ on a

$$\{ D_t > a \} = \{ Z_a = Z_t \} \cap \left(\bigcap_{r \in \mathbb{Q}, t < r < a} \{ Z_r = Z_t \} \right) \in \mathscr{F}_a,$$

donc D_t est un temps d'arrêt relativement à $(\mathscr{F}_s)_{s \geqslant 0}$, et $\bar{\mathscr{F}}_t \subset \mathscr{F}_{D_t}$. On montre de même que U_t est $\mathscr{F}_t$-mesurable.

3) D'après (R-2), $N = \{ t\,;\, U_t = 0 \}$ et $V_0 \notin N_d$.

4) D'après (R-1) et (R-2), U_t et V_t sont continus à droite et limités à gauche, et continus en tout $t \in N^c \cup N_d$.

Si $(A, \mathscr{A})$ est un espace mesurable, $b\mathscr{A}$ est l'ensemble des fonctions bornées et mesurables sur $(A, \mathscr{A})$. Soient $(A, \mathscr{A})$, $(A', \mathscr{A}')$ et $(A'', \mathscr{A}'')$ trois espaces mesurables ; si P (resp. Q) est une transition positive de $(A, \mathscr{A})$ dans $(A', \mathscr{A}')$ (resp. de $(A', \mathscr{A}')$ dans $(A'', \mathscr{A}'')$), on note PQ la transition de $(A, \mathscr{A})$ dans $(A'', \mathscr{A}'')$ définie par $PQ(x, dz) = \int P(x, dy)Q(y, dz)$; de même si $f \in b\mathscr{A}'$, Pf est la fonction sur $(A, \mathscr{A})$ définie par

$$Pf(x) = \int P(x, dy) f(y).$$

I. CONSTRUCTION DES PROCESSUS SEMI-MARKOVIENS DE PREMIÈRE ESPÈCE

1. Le semi-groupe d'un processus de première espèce.

Nous supposons donnée une probabilité de transition $\bar{P}_{z,u,v}(d\omega)$ de $(\bar{E}, \bar{\mathscr{E}})$ dans $(\Omega, \mathscr{F})$.

DÉFINITION I-1. — *Le terme* $\bar{Z} = (\Omega, U_0, Z_t, \bar{P}_{z,u,v})$ *est un processus semi-markovien* (en abrégé : PSM) *de première espèce s'il vérifie :*

(*S-1-1*). — Pour tous $t \geqslant 0$, $(z, u, v) \in \bar{E}$, on a $\bar{P}_{z,u,v} \{ t \in N_d \} = 0$.

(*S-1-2*). — Pour tout $(z, u, v) \in \bar{\mathrm{E}}$, on a $\bar{\mathrm{P}}_{z,u,v}\{ \mathrm{Z}_0 = z, \mathrm{U}_0 = u, \mathrm{V}_0 = v \} = 1$.
(*S-1-3*). — Pour tous $s, t \geqslant 0$, $(z, u, v) \in \bar{\mathrm{E}}$ et $f \in b\bar{\mathscr{E}}$, on a :

$$(1) \qquad \bar{\mathrm{E}}_{z,u,v}\{ f(\mathrm{Z}_{t+s}, \mathrm{U}_{t+s}, \mathrm{V}_{t+s}) \mid \bar{\mathscr{F}}_t \} = \bar{\mathrm{E}}_{\mathrm{Z}_t,\mathrm{U}_t,\mathrm{V}_t}\{ f(\mathrm{Z}_s, \mathrm{U}_s, \mathrm{V}_s) \}.$$

La formule $\bar{\mathrm{P}}_t(z, u, v ; \bar{\mathrm{A}}) = \bar{\mathrm{P}}_{z,u,v}\{ (\mathrm{Z}_t, \mathrm{U}_t, \mathrm{V}_t) \in \bar{\mathrm{A}} \}$ définit une transition sur $(\bar{\mathrm{E}}, \bar{\mathscr{E}})$. Les axiomes ci-dessus impliquent que pour chaque probabilité $\bar{\mathrm{P}}_{z,u,v}$, le processus $(\mathrm{Z}_t, \mathrm{U}_t, \mathrm{V}_t)$ est markovien (à valeurs dans $\bar{\mathrm{E}} \cup \mathrm{E} \times \{ 0 \} \times \{ 0 \}$) et admet un semi-groupe de transition normal qui est précisément $(\bar{\mathrm{P}}_t)_{t \geqslant 0}$. Ce semi-groupe s'appelle le « semi-groupe du PSM » par abus de langage. On définit les transitions $\bar{\mathrm{H}}_t$ de $\tilde{\mathrm{E}}'$ dans $\bar{\mathrm{E}}$ par :

$$(2) \qquad \bar{\mathrm{H}}_t(z, v ; .) = \bar{\mathrm{P}}_t(z, 0, v ; .).$$

THÉORÈME I-2. — *Supposons* E *polonais muni de ses boréliens* $\mathscr{E}$, *et soit* $(\bar{\mathrm{P}}_t)$ *un semi-groupe markovien sur* $(\bar{\mathrm{E}}, \bar{\mathscr{E}})$ *et* $(\bar{\mathrm{H}}_t)$ *défini par* (2). *Pour que* $(\bar{\mathrm{P}}_t)$ *soit le semi-groupe d'un PSM de première espèce, il faut et il suffit que* $(\bar{\mathrm{H}}_t)$ *vérifie*

$$(3) \qquad \bar{\mathrm{H}}_t(z, v ; \mathrm{E} \times]t, \infty[\times]0, \infty[) = 0$$

et qu'il existe une probabilité de transition $\tilde{\mathrm{Q}}$ *sur* $(\tilde{\mathrm{E}}', \tilde{\mathscr{E}}')$ *telle que*

$$(4) \qquad \tilde{\mathrm{Q}}(z, x ; \{ z \} \times]0, \infty[) = 0,$$

$$(5) \qquad \bar{\mathrm{P}}_t f(z, u, v) = 1_{t<v} f(z, u + t, v - t) + 1_{t \geqslant v} \tilde{\mathrm{Q}}\bar{\mathrm{H}}_{t-v} f(z, u + v).$$

Démonstration. — a) *Condition nécessaire :* Soit $\bar{\mathrm{Z}}$ un PSM de semi-groupe $(\bar{\mathrm{P}}_t)$. Les formules (5) lorsque $t < v$ et (3) découlent immédiatement des définitions de $\bar{\mathrm{H}}_t$, U_t et V_t. Supposons $t \geqslant v$ et notons $\tilde{\mathrm{Q}}_1(z, u, v ; .)$ la loi de $(\mathrm{Z}_{\mathrm{V}_0}, \mathrm{V}_{\mathrm{V}_0})$ pour $\bar{\mathrm{P}}_{z,u,v}$. En conditionnant par rapport à $\bar{\mathscr{F}}_v$ et en utilisant le fait que $\mathrm{U}_{\mathrm{V}_0} = 0$, on voit que $\bar{\mathrm{P}}_t f(z, u, v) = \tilde{\mathrm{Q}}_1 \bar{\mathrm{H}}_{t-v} f(z, u, v)$.
D'autre part si $x < v$, on conditionne par rapport à $\bar{\mathscr{F}}_x$:

$$\tilde{\mathrm{Q}}_1 g(z, u, v) = \bar{\mathrm{E}}_{z,u,v}\{ \bar{\mathrm{E}}_{\mathrm{Z}_x,\mathrm{U}_x,\mathrm{V}_x}\{ g(\mathrm{Z}_{\mathrm{V}_0}, \mathrm{V}_{\mathrm{V}_0}) \} \} = \tilde{\mathrm{Q}}_1 g(z, u + x, v - x).$$

Par suite $\tilde{\mathrm{Q}}_1(z, u, v ; .)$ ne dépend que de z et de $u + v$, et on note cette mesure $\tilde{\mathrm{Q}}(z, u + v ; .)$. Il est clair alors qu'on a (4) et (5).

b) *Condition suffisante :* Soit $\mathrm{W} = \bar{\mathrm{E}}^{[0,\infty[}$ et $(\mathrm{Y}_t, \mathrm{R}_t, \mathrm{S}_t)(w)$ la $t^{\text{ième}}$ coordonnée de $w \in \mathrm{W}$. $(\bar{\mathrm{P}}_t)$ étant un semi-groupe markovien et $\bar{\mathrm{E}}$ un espace polonais, on peut munir $(\mathrm{W}, \sigma(\mathrm{Y}_t, \mathrm{R}_t, \mathrm{S}_t ; t \geqslant 0))$ d'une famille $(\bar{\mathrm{P}}_{z,u,v} ;$ $(z, u, v) \in \bar{\mathrm{E}})$ de probabilités, telle que $(\mathrm{W}, (\mathrm{Z}_t, \mathrm{R}_t, \mathrm{S}_t), \bar{\mathrm{P}}_{z,u,v})$ soit un processus de Markov normal, de transition $(\bar{P}_t)$. On note D les dyadiques de $[0, \infty[$. Si $r < s$, on pose :

$$W_{r,s} = \{ R_s < s - r, S_r \leqslant s - r \} \cup \{ R_s = R_r + s - r, S_r = S_s + s - r, Y_r = Y_s \},$$

$$W_r(t) = \{ S_s = s - r - S_r, Y_s = \text{Const.} \neq Y_r, \quad \forall s \in D \cap [r + S_r, r + S_r + t[\},$$

et $W_r = \lim_{t \downarrow 0} \uparrow W_r(t)$. D'après (3) et (5) on a :

$$\begin{aligned}\bar{P}_{z,u,v}\{ W_{r,s} \} &= \bar{E}_{z,u,v}\{ 1_{S_r \leqslant s-r} \bar{P}_{s-r}(Y_r, R_r, S_r ; E \times [0, s - r[\times]0, \infty]) \\ &\quad + 1_{S_r > s-r} \bar{P}_{s-r}(Y_r, R_r, S_r ; \{ Y_r, R_r + s - r, S_r - s + r \}) \} \\ &= \bar{E}_{z,u,v}\{ 1_{S_r \leqslant s-r} + 1_{S_r > s-r} \} = 1.\end{aligned}$$

D'après ce résultat, (5), et la normalité de (Y_t, R_t, S_t), on a :

$$\begin{aligned}\bar{P}_{z,u,v}\{ W_0(t) \} &= \bar{P}_{z,u,v}\left\{ W_0(t), S_0 = v, Y_0 = z, \bigcap_{s \in D} W_{v,s} \right\} \\ &\geqslant \bar{P}_{z,u,v}\left\{ Y_v \neq z, S_v \geqslant t, S_0 = v, Y_0 = z, \bigcap_{s \in D} W_{v,s} \right\} \\ &\geqslant \bar{P}_{z,u,v}\{ Y_v \neq z, S_v \geqslant t \} = \tilde{Q}(z, u + v ; (E - \{ z \}) \times [t, \infty[) ;\end{aligned}$$

enfin d'après la propriété de Markov pour (Y_t, R_t, S_t),

$$\bar{P}_{z,u,v}\{ W_r(t) \} = \int \bar{P}_r(z, u, v ; dz', du', dv') \bar{P}_{z',u',v'}\{ W_0(t) \} .$$

On déduit alors de (4) que si $\Omega = \left(\bigcap_{r \in D} W_r \right) \cap \left(\bigcap_{r,s \in D} W_{r,s} \right)$, pour tout (z, u, v) de $\bar{E}$ on a $\bar{P}_{z,u,v}\{ \Omega \} = 1$. On peut donc se restreindre à Ω, ce que nous ferons dorénavant.

On pose $U_0 = R_0$ et

$$(6) \quad Z_t = \begin{cases} Y_r & \text{si } \exists \varepsilon > 0, \exists r \in D \cap]t, \infty[, \text{ tels que } Y_s = Y_r \text{ sur } D \cap]t, r + \varepsilon[\\ Y_t & \text{sinon,} \end{cases}$$

et on définit N, N_d, N_g, U_t, V_t et $\mathscr{F}_t$ à partir de U_0 et Z_t comme dans le paragraphe consacré aux notations. Soient $r, s \in D$, $r < s$. D'après la définition de Ω, si Y_t est constant sur $D \cap [r, s]$ on a $R_t = R_r + t - r$ et $S_t = S_s + t - r$ sur $D \cap [r, s]$, et sinon $R_s < s - r$ et $S_r \leqslant s - r$; de plus il existe $\varepsilon > 0$ tel que Y_t soit constant et différent de Y_r sur $D \cap [r + S_r, r + S_r + \varepsilon[$. On en déduit que (R-1) et (R-2) sont vérifiés et que, dans la première alternative de (6), on a $U_t = R_r - r + t$ et $V_t = S_r + r - t$ et, dans la seconde, $t \in N_d$; de plus on a $\{ t \in N_d \} = \lim_{s \downarrow 0} \downarrow \lim_{r \downarrow t, r \in D} \{ S_r \leqslant s \}$. Par suite :

$$\bar{P}_{z,u,v}\{ t \in N_d \} = \lim_{s \downarrow 0} \downarrow \lim_{r \downarrow t, r \in D} \bar{P}_t \bar{P}_{r-t}(z, u, v ; E \times [0, \infty[\times]0, s]) = 0$$

d'après (5), et on a (S-1-1). Comme $S_0 > 0$, on a $Z_0 = Y_0$ et $V_0 = S_0$; (Y_t, R_t, S_t) étant normal, on a (S-1-2). Enfin pour prouver (S-1-3), nous allons d'abord montrer que le semi-groupe $(\bar{P}_t)$ est fellérien pour $\bar{B}_{dg}$ (i. e. si $f \in \bar{B}_{dg}$, $\bar{P}_t f \in \bar{B}_{dg}$ et $\bar{P}_t f$ est continu à droite en t).

Soit $f \in \bar{B}_{dg}$. (5) montre que $\lim_{t \downarrow 0} \bar{P}_t f = f$ et $(\bar{P}_t)$ étant un semi-groupe, $\bar{P}_t f$ est continu à droite en t. En particulier $\bar{H}_t f$ est continu à droite, et on déduit alors de (5) que $\bar{P}_t f \in \bar{B}_{dg}$. Donc $(\bar{P}_t)$ est fellérien pour $\bar{B}_{dg}$.

Soient $t_1 < \ldots < t_n = t$, f_i, $f \in \bar{B}_{dg}$. Si $t \in N_d$, on a $Z_t = Y_r$, $U_t = R_r + t - r$ et $V_t = S_r + r - t$ pour $r \in D$ assez proche de t. Donc

$$\bar{E}_{z,u,v}\left\{ \prod_{i=1}^{n} f_i(Z_{t_i}, U_{t_i}, V_{t_i}) f(Z_{t+s}, U_{t+s}, V_{t+s}) \right\}$$

$$= \lim_{t'_i \downarrow t_i, t'_i \in D} \ \lim_{s' \downarrow s, s' \in D} \bar{E}_{z,u,v}\left\{ \prod_{i=1}^{n} f_i(Y_{t'_i}, R_{t'_i}, S_{t'_i}) f(Y_{t'_n+s'}, R_{t'_n+s'}, S_{t'_n+s'}) \right\}$$

$$= \lim_{t'_i \downarrow t_i, t'_i \in D} \ \lim_{s' \downarrow s, s' \in D} \bar{E}_{z,u,v}\left\{ \prod_{i=1}^{n} f_i(Y_{t'_i}, R_{t'_i}, S_{t'_i}) \bar{P}_{s'} f(Y_{t'_n}, R_{t'_n}, S_{t'_n}) \right\}$$

$$= \bar{E}_{z,u,v}\left\{ \prod_{i=1}^{n} f_i(Z_{t_i}, U_{t_i}, V_{t_i}) \bar{P}_s f(Z_t, U_t, V_t) \right\},$$

d'où on déduit que le terme $\bar{Z} = (\Omega, U_0, Z_t, \bar{P}_{z,u,v})$ vérifie (S-1-3) et admet $(\bar{P}_t)$ pour semi-groupe. ■

Nous n'avons pas utilisé l'hypothèse « E polonais » pour la démonstration de la nécessité. Nous avons démontré en passant le résultat suivant, que nous utiliserons plus loin :

PROPOSITION I-3. — *Le semi-groupe d'un PSM de première espèce est fellérien pour* $\bar{B}_{dg}$.

2. La propriété forte de Markov.

$\bar{Z}$ étant un PSM de première espèce, le processus (Z_t, U_t, V_t) n'est pas fortement markovien en général : on ne peut pas, en effet, conditionner par rapport à un temps d'arrêt contenu dans N_d. Nous allons cependant montrer une forme affaiblie de la propriété forte de Markov.

LEMME I-4. — *Soit* T *un* $(\mathscr{F}_t)$*-temps d'arrêt tel que* $\bar{P}_{z,u,v}\{T \in N_d\} = 0$; *alors pour tout* $s \geqslant 0$, $\bar{P}_{z,u,v}\{T + s \in N_d\} = 0$.

Démonstration. — Soit $T_n = (h+1)/2^n$ si $T \in [h/2^n, (h+1)/2^n[$: T_n est un temps d'arrêt ne prenant qu'une infinité dénombrable de valeurs, donc (1) est vérifié si on remplace t par T_n. ω étant fixé, si $T \notin N_d$ on a $Z_{T_n} = Z_T$, $U_{T_n} = U_T + T_n - T$ et $V_{T_n} = V_T + T - T_n$ pour n assez grand. D'autre part $\{ T + s \notin N_d \} = \lim_{r \downarrow 0} \lim_{(n)} \{ V_{T_n+s} > r + T - T_n \}$. Par suite :

$$\begin{aligned}\bar{P}_{z,u,v}\{ T + s \in N_d \} &= \lim_{r\downarrow 0} \lim_{(n)} \bar{E}_{z,u,v}\{ \bar{P}_s(Z_{T_n}, U_{T_n}, V_{T_n} ; \\ &\qquad E \times [0, \infty[\times]r + T - T_n, \infty[) \} \\ &= \lim_{r\downarrow 0} \lim_{(n)} \bar{E}_{z,u,v}\{ \bar{P}_s(Z_T, U_T + T_n - T, V_T + T - T_n ; \\ &\qquad E \times [0, \infty[\times]r + T - T_n, \infty[) \} .\end{aligned}$$

Mais dès que $t < v$, on a :

$$\begin{aligned}\bar{P}_s(z, u+t, v-t ; E \times [0, \infty[\times]r-t, \infty[) &= \bar{P}_{t+s}(z, u, v ; E \times [0, \infty[\times]r-t, \infty[) \\ &= \int \bar{P}_s(z, u, v ; dz', du', dv')[1_{v' > r \vee t} \\ &\quad + 1_{v' \leqslant t} \bar{P}_t(z', u', v' ; E \times [0, \infty[\times]r-t, \infty[)],\end{aligned}$$

qui converge vers $\bar{P}_s(z, u, v ; E \times [0, \infty[\times]r, \infty[)$ quand $t \downarrow 0$. On en déduit le résultat. ■

PROPOSITION I-5. — *Soit* $\bar{Z}$ *un PSM de première espèce et* T *un* $(\bar{\mathscr{F}}_t)$*-temps d'arrêt tel que* $\bar{P}_{z,u,v}\{ T \in N_d \} = 0$. *Alors* (1) *est valable pour tous* $s \geqslant 0$, $f \in b\bar{\mathscr{E}}$, *quand on remplace* t *par* T.

Démonstration. — On considère la suite (T_n) de temps d'arrêt du lemme I-4 et on utilise ce lemme et le fait que pour ω fixé, si $T \notin N_d$ on a $Z_{T_n} = Z_T$, $U_{T_n} = U_T + T_n - T$ et $V_{T_n} = V_T + T - T_n$ pour n assez grand et si $T + s \notin N_d$, on a $Z_{T_n+s} = Z_{T+s}$, $U_{T_n+s} = U_{T+s} + T_n - T$ et $V_{T_n+s} = V_{T+s} + T - T_n$ pour n assez grand. Soient $X \in b\bar{\mathscr{F}}_T$ et $f \in \bar{B}_{dg}$; d'après la proposition I-3, $\bar{P}_s f \in \bar{B}_{dg}$ et

$$\begin{aligned}\bar{E}_{z,u,v}\{ Xf(Z_{T+s}, U_{T+s}, V_{T+s}) \} &= \lim_{(n)} \bar{E}_{z,u,v}\{ Xf(Z_{T_n+s}, U_{T_n+s}, V_{T_n+s}) \} \\ &= \lim_{(n)} \bar{E}_{z,u,v}\{ X\bar{P}_s f(Z_{T_n}, U_{T_n}, V_{T_n}) \} \\ &= \bar{E}_{z,u,v}\{ X\bar{P}_s f(Z_T, U_T, V_T) \} .\end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit par un raisonnement de classe monotone. ■

Soient $T_1 = V_0$, $T_{n+1} = D_{T_n}$; d'après (R-2), $T_n \notin N_d$. Comme $U_{T_n} = 0$, le résultat précédent montre que la suite (Z_{T_n}, V_{T_n}) est une chaîne de Markov, et d'après le théorème I-2, sa probabilité de transition est $\tilde{Q}$.

3. Le potentiel d'un PSM de première espèce.

Soit $\bar{Z}$ un PSM de première espèce. L'ensemble aléatoire $N - N_d$ est $\mathscr{B}(]0, \infty[) \otimes \mathscr{F}$-mesurable et de coupes dénombrables. Il existe donc une suite (S_n) de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{F})$, dont les graphes sont disjoints et recouvrent exactement $N - N_d$. Si $\bar{A} \in \bar{\mathscr{E}}'$, soit :

$$\bar{U}(z, u, v; \bar{A}) = \sum_{(n)} \bar{P}_{z,u,v}\{(Z_{S_n}, V_{S_n}, S_n) \in \bar{A}\}.$$

Cette formule définit une mesure de transition positive de $\bar{E}$ dans $\bar{E}'$, appellée le « potentiel » du PSM. C'est une généralisation du potentiel d'une marche aléatoire.

Proposition I-6. — *$\bar{Z}$ étant un PSM de première espèce de potentiel $\bar{U}$, si $v \leqslant t$, on a :*

$$\bar{P}_t(z, u, v; \bar{A}) = \int \bar{U}(z, u, v; dz', dx, dy) 1_{y \leqslant t < y+x} 1_{\bar{A}}(z', t-y, x+y-t).$$

Démonstration. — D'après (S-1-1) on a :

$$\bar{P}_t(z, u, v; \bar{A}) = \sum_{(n)} \bar{P}_{z,u,v}\{S_n \leqslant t < S_n + V_{S_n}, (Z_{S_n}, t - S_n, V_{S_n} + S_n - t) \in \bar{A}\},$$

d'où le résultat découle immédiatement. ■

Introduisons un axiome supplémentaire, plus fort que (R-2) :

(*R-3*). — Pour tout $\omega \in \Omega$, $N_d(\omega) = N_g(\omega)$.

Proposition I-7. — *Soit $\bar{Z}$ un PSM de première espèce, vérifiant (R-3) et de potentiel $\bar{U}$. Si $v \leqslant t$, on a :*

$$(7)\quad \bar{P}_t(z, u, v; \bar{A}) = \int \tilde{Q}(z, u+v; dz', dx) 1_{t < v+x} 1_{\bar{A}}(z', t-v, x+v-t)$$
$$+ \int \bar{U}(z, u, v; dz', dx, dy) \tilde{Q}(z', x; dz'', dx') 1_{x+y \leqslant t < x+y+x'} 1_{\bar{A}}(z'', t-x-y, x+y+x'-t).$$

Démonstration. — Soient $S_0^s = 0$, $S_{n+1}^s = \inf(t > D_{S_n^s}; U_t = s)$. S_n^s est un $(\bar{\mathscr{F}}_t)$-temps d'arrêt, et $\lim\limits_{s \downarrow 0} \uparrow \sum\limits_{n \geqslant 1} \{S_n^s - s\} = \sum\limits_{(n)} \{S_n\}$. Par suite si

$$\bar{U}_s(z, u, v; \bar{A}) = \sum_{n \geqslant 1} \bar{P}_{z,u,v}\{(Z_{S_n^s}, s + V_{S_n^s}, S_n^s - s) \in \bar{A}\},$$

on a $\lim\limits_{s \downarrow 0} \uparrow \bar{U}_s = \bar{U}$. Utilisons (R-3),la définition de $\tilde{Q}$, et la proposition I-5 appliquée à S_n^s (car $S_n^s \notin N_d$) ; si pour simplifier nous écrivons $D(s, n)$ au lieu de $D_{S_n^s}$, il vient :

$$\bar{P}_t(z, u, v\,;\,\bar{A}) = \bar{P}_{z,u,v}\{\, V_0 \leqslant t < D_{V_0}, (Z_{V_0}, t - V_0, D_{V_0} - t) \in \bar{A} \,\}$$

$$+ \lim_{s \downarrow 0} \uparrow \sum_{n \geqslant 1} \bar{P}_{z,u,v}\{\, D(s, n) \leqslant t < D_{D(s,n)}, (Z_{D(s,n)}, t - D(s, n), D_{D(s,n)} - t) \in \bar{A} \,\}$$

$$= \int \tilde{Q}(z, u + v\,;\, dz', dx) 1_{t < v + x} 1_{\bar{A}}(z', t - v, v + x - t)$$

$$+ \lim_{s \downarrow 0} \uparrow \sum_{n \geqslant 1} \int \bar{P}_{z,u,v}(d\omega) 1_{D(s,n)(\omega) \leqslant t} \bar{P}_{Z_{S_n^s(\omega)}, s, V_{S_n^s(\omega)}}\{\, V_{V_0} + S_n^s(\omega) > t,$$
$$(Z_{V_0}, t - D(s, n)(\omega), V_{V_0} + S_n^s(\omega) - t) \in \bar{A} \,\}$$

$$= \int \tilde{Q}(z, u + v\,;\, dz', dx) 1_{t < v + x} 1_{\bar{A}}(z', t - v, v + x - t)$$

$$+ \lim_{s \downarrow 0} \uparrow \int \bar{U}_s(z, u, v\,;\, dz', dx, dy) 1_{x + y \leqslant t} \bar{P}_{z', s, x - s}\{\, V_{V_0} + y + s > t,$$
$$(Z_{V_0}, t - x - y, V_{V_0} + y + s - t) \in \bar{A} \,\},$$

d'où (7) découle facilement en utilisant la définition de $\tilde{Q}$. ■

II. MESURES INVARIANTES POUR LES PSM DE PREMIÈRE ESPÈCE

DÉFINITION II-1. — *Soit $\bar{\varphi} \in \bar{M}_\sigma$. Le PSM de première espèce $\bar{Z}$ est dit $\bar{\varphi}$-récurrent si pour tout $\bar{A} \in \bar{\mathscr{E}}$ tel que $\bar{\varphi}(\bar{A}) > 0$ et tout $(z, u, v) \in \bar{E}$, on a :*

$$\bar{P}_{z,u,v}\left\{ \int 1_{\bar{A}}(Z_t, U_t, V_t) dt = \infty \right\} = 1.$$

La récurrence en ce sens est un peu plus faible que la récurrence au sens de Harris pour le processus (Z_t, U_t, V_t), car ce dernier ne prend pas ses valeurs dans $\bar{E}$, mais dans $\bar{E} \cup E \times \{0\} \times \{0\}$. Cependant, à cause de (S-1-1), il est clair que toutes les propriétés classiques restent valides dans la situation présente. En particulier (Azema, Duflo, Revuz [*1*]), il existe $\bar{\mu} \in \bar{M}_\sigma$ unique (à une constante près) telle que $\bar{\mu}\bar{P}_t = \bar{\mu}$ pour tout $t \geqslant 0$.

Voici l'énoncé du résultat principal de cet article :

THÉORÈME II-2. — *Soit $\bar{\varphi} \in \bar{M}_\sigma$ et $\bar{Z}$ un PSM de première espèce, $\bar{\varphi}$-récurrent, de semi-groupe $(\bar{P}_t)$.*

(i) *Il existe* $\tilde{\nu} \in \tilde{M}'_\sigma$ *unique (à une constante près) telle que l'unique mesure (à une constante près)* $\bar{\mu} \in \bar{M}$ *invariante pour* $(\bar{P}_t)$ *soit définie par :*

$$(8) \qquad \bar{\mu}(\bar{A}) = \int \tilde{\nu}(dz, dx)dy 1_{\bar{A}}(z, y, x - y)1_{0 \leqslant y < x}.$$

(ii) *Si de plus* $\bar{Z}$ *vérifie* (*R-3*), *on a* $\tilde{\nu}\tilde{Q} = \tilde{\nu}$.

Pyke et Schaufele ont montré ce théorème, sous l'hypothèse (R-3), dans le cas où E est dénombrable. La méthode utilisée ici diffère profondément de celle utilisée par ces deux auteurs, au moins pour la démonstration de la première partie. De plus l'unicité, qui fait l'objet dans [5] d'une longue démonstration, découle immédiatement du résultat cité au début du paragraphe.

1. La première partie du théorème II-2.

Commencons par un lemme :

LEMME II-3. — *Si* $\bar{\mu}$ *et* $\tilde{\nu}$ *vérifient* (8), $\bar{\mu} \in \bar{M}_\sigma$ *si et seulement si* $\tilde{\nu} \in \tilde{M}'_\sigma$. *De plus à une mesure* $\bar{\mu}$ *correspond au plus une mesure* $\tilde{\nu}$ *vérifiant* (8).

Démonstration. — Supposons que $\bar{\mu}$ et $\tilde{\nu}$ vérifient (8). Si $\tilde{\nu} \in \tilde{M}'_\sigma$, soit $(\tilde{A}_n)$ une suite d'éléments de $\tilde{\mathscr{E}}'$ croissant vers $\tilde{E}'$, telle que $\tilde{\nu}(\tilde{A}_n) < \infty$ pour tout n ; la suite $\bar{A}_n = \{ (z, y, x - y) ; (z, x) \in \tilde{A}_n, 0 \leqslant y < n \}$ croît vers $\bar{E}$ et vérifie $\bar{\mu}(\bar{A}_n) \leqslant n\tilde{\nu}(\tilde{A}_n)$, donc $\bar{\mu} \in \bar{M}_\sigma$. Réciproquement si $\bar{\mu} \in \bar{M}_\sigma$, soit $(\bar{A}_n)$ une suite d'éléments de $\bar{\mathscr{E}}$ croissant vers $\bar{E}$, telle que $\bar{\mu}(\bar{A}_n) < \infty$ pour tout n ; la suite

$$\tilde{A}_n = \left\{ (z, x) ; \int_0^x 1_{\bar{A}_n}(z, y, x - y)dy \geqslant 1/n \right\}$$

croît vers $\tilde{E}'$ et vérifie $\tilde{\nu}(\tilde{A}_n) \leqslant n\bar{\mu}(\bar{A}_n)$ donc $\tilde{\nu} \in \tilde{M}'_\sigma$.

Soient maintenant $\tilde{\nu}$ et $\tilde{\nu}'$ deux mesures associées par (8) à $\bar{\mu}$. Si $\tilde{A} \in \tilde{\mathscr{E}}'$, on pose $f(z, x, y) = 1_{\tilde{A}}(z, x + y)\dfrac{1}{x + y}$; on a $\bar{\mu}(f) = \tilde{\nu}(\tilde{A}) = \tilde{\nu}'(\tilde{A})$, d'où le résultat. ■

Nous allons maintenant utiliser une chaîne de Markov auxiliaire. Soit $(\Lambda, \mathscr{L}, L)$ un espace de probabilité sur lequel est définie une suite (R_n) de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre 1. On pose $\hat{\Omega} = \Omega \times \Lambda$, $\hat{P}_{z,u,v} = P_{z,u,v} \otimes L$, $\hat{S}_0 = 0$, $\hat{S}'_n = D_{\hat{S}_n}$ et $\hat{S}_{n+1} = \hat{S}'_n + R_{n+1}$. On note $(\bar{U}^\lambda)_{\lambda > 0}$ la résolvante de $(\bar{P}_t)$, et on définit deux noyaux $\tilde{W}$ et $\tilde{W}_1$ sur $\tilde{E}'$ et une transition $\bar{V}$ de $\tilde{E}'$ dans $\bar{E}$ par :

$$\bar{V}f(z, v) = \hat{E}_{z,0,v}\{ f(Z_{R_1}, U_{R_1}, V_{R_1}) \} = \bar{U}^1 f(z, 0, v),$$

$$\tilde{W}f(z, v) = \hat{E}_{z,0,v}\{ f(Z_{R_1}, U_{R_1} + V_{R_1}) \} = \int \bar{V}(z, v; dz', du', dv') f(z', u' + v')$$

$$\tilde{W}_1 f(z, v) = \hat{E}_{z,0,v}\{ f(Z_{\hat{S}'_1}, V_{\hat{S}'_1}) \} = \tilde{W}\tilde{Q}f(z, v).$$

PROPOSITION II-4. — *Pour tout* $(z, u, v) \in \bar{E}$, *la chaîne* $(\hat{\Omega}, (Z_{\hat{S}'_n}, V_{\hat{S}'_n}), \hat{P}_{z,u,v})$ *est markovienne et admet* $\tilde{W}_1$ *pour transition.*

Démonstration. — $l \in \Lambda$ étant fixé, $\hat{S}'_n(., l)$ est un $(\bar{\mathcal{F}}_t)$-temps d'arrêt, pour lequel on peut appliquer la proposition I-5. Comme $U_{\hat{S}'_n} = 0$, il vient si $f_i \in b\tilde{\mathcal{E}}'$:

$$\hat{E}_{z,u,v}\left\{ \prod_{i=1}^{n+1} f_i(Z_{\hat{S}'_i}, V_{\hat{S}'_i}) \right\}$$

$$= \int L(dl)\bar{E}_{z,u,v}\left\{ \prod_{i=1}^{n} f_i(Z_{\hat{S}'_i(.,l)}, V_{\hat{S}'_i(.,l)}) \bar{E}_{Z_{\hat{S}'_n(.,l)},0,V_{\hat{S}'_n(.,l)}} \{ f_{n+1}(Z_{D_{R_{n+1}(l)}}, V_{D_{R_{n+1}(l)}}) \} \right\}$$

$$= \int L(dl)\bar{E}_{z,u,v}\left\{ \prod_{i=1}^{n} f_i(Z_{\hat{S}'_i(.,l)}, V_{\hat{S}'_i(.,l)}) \tilde{W}_1 f(Z_{\hat{S}'_n(.,l)}, V_{\hat{S}'_n(.,l)}) \right\}$$

$$= \hat{E}_{z,u,v}\left\{ \prod_{i=1}^{n} f_i(Z_{\hat{S}'_i}, V_{\hat{S}'_i}) \tilde{W}_1 f_{n+1}(Z_{\hat{S}'_n}, V_{\hat{S}'_n}) \right\},$$

en utilisant l'indépendance de R_{n+1} d'avec $R_1, \ldots, R_n$. ■

PROPOSITION II-5. — *Si* $\bar{\varphi} \in \bar{M}_\sigma$ *et si* $\bar{Z}$ *est* $\bar{\varphi}$*-récurrent, il existe* $\tilde{\varphi} \in \tilde{M}'_\sigma$ *telle que pour tout* $(z, u, v) \in \bar{E}$, *la chaîne* $(\hat{\Omega}, (Z_{\hat{S}'_n}, V_{\hat{S}'_n}), \hat{P}_{z,u,v})$ *soit* $\tilde{\varphi}$*-récurrente.*

Démonstration. — Quitte à remplacer $\bar{\varphi}$ par une mesure équivalente, on peut la supposer finie. On définit alors $\tilde{\varphi} \in \tilde{M}'$ par :

$$\tilde{\varphi}(\tilde{A}) = \int \bar{\varphi}(dz, du, dv)\tilde{Q}(z, u + v; \tilde{A}).$$

Si $\tilde{\varphi}(\tilde{A}) > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si

$$\bar{B} = \left\{ (z, u, v); \tilde{Q}(z, u + v; \tilde{A}) \geq \alpha, \alpha < u + v < \frac{1}{\alpha} \right\},$$

on ait $\bar{\varphi}(\bar{B}) > 0$. Par hypothèse, (Z_t, U_t, V_t) passe alors ps un temps infini dans $\bar{B}$, et comme le séjour dans $\bar{B}$ est constitué d'intervalles compris entre α et $\frac{1}{\alpha}$, il y a une infinité de ces intervalles. Donc si $T_0 = 0$, $T_{n+1} = \inf(t > D_{T_n}; (Z_t, U_t, V_t) \in \bar{B})$, on a $T_n < \infty$ ps pour tout n. Enfin la forme de $\bar{B}$ montre que $U_{T_n} = 0$.

Soient $\hat{\Omega}_{n,m} = \{ \hat{S}_{m-1} < T_n \leqslant \hat{S}_m \leqslant T_n + \alpha < \infty, (Z_{D_{T_n}}, V_{D_{T_n}}) \in \tilde{A} \}$ et $\hat{\Omega}'_{n,m} = \{ \hat{S}_{m-1} < T_n \leqslant \hat{S}_m < \infty \}$. Si $\mathcal{G}_m$ est la tribu de Λ engendrée par les $(R_n ; n \leqslant m)$, soient $Y \in b\bar{\mathcal{F}}_{T_n}$ et $Y' \in b\mathcal{G}_{m-1}$; il vient :

$$\begin{aligned}
&\hat{E}_{z,u,v}\{ YY'1_{\hat{\Omega}_{n,m}} \} \\
&= \bar{E}_{z,u,v}\left\{ Y1_{\tilde{A}}(Z_{D_{T_n}}, V_{D_{T_n}})1_{T_n<\infty} \int L(dl)Y'(l)1_{\hat{S}_{m-1}(.,l)<T_n\leqslant\hat{S}_m(.,l)\leqslant T_n+\alpha} \right\} \\
&= \bar{E}_{z,u,v}\left\{ Y1_{\tilde{A}}(Z_{D_{T_n}}, V_{D_{T_n}})1_{T_n<\infty} \int L(dl)Y'(l)1_{\hat{S}_{m-1}(.,l)<T_n\leqslant\hat{S}_m(.,l)}(1 - e^{-\alpha}) \right\} \\
&= \hat{E}_{z,u,v}\{ YY'(1 - e^{-\alpha})1_{\hat{\Omega}'_{n,m}}\tilde{Q}(Z_{T_n}, V_{T_n} ; \tilde{A}) \}.
\end{aligned}$$

Soit $\hat{\mathcal{H}}_n$ la tribu de $\hat{\Omega}$ engendrée par les variables $YY'1_{\hat{\Omega}'_{n,m}}$, où $m \geqslant 1$, $Y \in b\bar{\mathcal{F}}_{T_n}$ et $Y' \in b\mathcal{G}_{m-1}$. Comme les $\hat{\Omega}'_{n,m}$ sont disjoints et comme $\hat{\Omega}_{n,m} \subset \hat{\Omega}'_{n,m}$, on déduit de ce qui précède que :

$$\hat{P}_{z,u,v}\left\{ \sum_{(m)} \hat{\Omega}_{n,m} \mid \hat{\mathcal{H}}_n \right\} = (1 - e^{-\alpha})\tilde{Q}(Z_{T_n}, V_{T_n} ; \tilde{A})1_{T_n<\infty} \geqslant \alpha(1 - e^{-\alpha})1_{T_n<\infty}.$$

Enfin il est clair que $\hat{\Omega}_{n,m} \in \hat{\mathcal{H}}_{n+1}$, donc d'après le lemme de Borel-Cantelli on a

$$\hat{P}_{z,u,v}\left\{ \limsup_{(n)} \sum_{(m)} \hat{\Omega}_{n,m} \right\} \geqslant \bar{P}_{z,u,v}\left\{ \sum_{(n)} 1_{T_n<\infty} = \infty \right\} = 1.$$

Enfin

$$\limsup_{(n)} \sum_{(m)} \hat{\Omega}_{n,m} \subset \limsup_{(n)} \{ (Z_{\hat{S}'_n}, V_{\hat{S}'_n}) \in \tilde{A} \},$$

d'où le résultat. ■

Les hypothèses du théorème II-2 impliquent celles de cette proposition, dont la conclusion entraîne l'existence de $\tilde{\mu} \in \tilde{M}'_\sigma$ invariante pour $\tilde{W}_1$, et le résultat suivant permet alors de calculer la mesure invariante pour $(\bar{P}_t)$.

PROPOSITION II-6. — *Si* $\tilde{\mu} \in \tilde{M}'_\sigma$ *vérifie* $\tilde{\mu}\tilde{W}_1 = \tilde{\mu}$, *la formule*

$$(9) \qquad \bar{\mu}(\bar{A}) = \int \tilde{\mu}\bar{V}(dz, du, dv)\left[1_A(z, u, v) + \int_0^v 1_{\bar{A}}(z, u + t, v - t)dt \right]$$

définit une mesure $\bar{\mu} \in \bar{\mathrm{M}}_\sigma$ *invariante pour* $(\bar{\mathrm{P}}_t)$. *De plus* (9) *s'inverse en*

$$(10) \qquad \tilde{\mu}(\tilde{\mathrm{A}}) = \int \bar{\mu}(dz, du, dv) e^{-v} \tilde{\mathrm{Q}}(z, u + v\,;\, \tilde{\mathrm{A}}).$$

Démonstration. — Soit $\tilde{\mu} \in \tilde{\mathrm{M}}'_\sigma$ invariante pour $\tilde{\mathrm{W}}_1$; on définit $\bar{\mu}$ par (9), et (10) définit une mesure positive $\tilde{\mu}'$ sur $\tilde{\mathrm{E}}'$. On a :

$$\tilde{\mu}'(\tilde{\mathrm{A}}) = \int \tilde{\mu}\bar{\mathrm{V}}(dz, du, dv) \left[e^{-v} \tilde{\mathrm{Q}}(z, u + v\,;\, \tilde{\mathrm{A}}) + \int_0^v e^{-v+t} \tilde{\mathrm{Q}}(z, u + v\,;\, \tilde{\mathrm{A}}) dt \right]$$
$$= \int \tilde{\mu}\bar{\mathrm{V}}(dz, du, dv) \tilde{\mathrm{Q}}(z, u + v\,;\, \tilde{\mathrm{A}}) = \tilde{\mu}\tilde{\mathrm{W}}_1(\tilde{\mathrm{A}}) = \tilde{\mu}(\tilde{\mathrm{A}}),$$

ce qui prouve bien que (10) est l'inverse de (9).

Soit $(\tilde{\mathrm{A}}_n)$ une suite d'éléments de $\tilde{\mathscr{E}}'$ croissant vers $\tilde{\mathrm{E}}'$, tels que $\tilde{\mu}(\tilde{\mathrm{A}}_n) < \infty$ pour tout n; la suite $\bar{\mathrm{A}}_n = \left\{ (z, u, v)\,;\, e^{-v} \tilde{\mathrm{Q}}(z, u + v\,;\, \tilde{\mathrm{A}}_n) \geqslant \frac{1}{n} \right\}$ croît vers $\bar{\mathrm{E}}$ et, d'après (10), on a $\bar{\mu}(\bar{\mathrm{A}}_n) \leqslant n \tilde{\mu}(\tilde{\mathrm{A}}_n)$; par suite $\bar{\mu} \in \bar{\mathrm{M}}_\sigma$. Montrons enfin que $\bar{\mu}$ est invariante pour $(\bar{\mathrm{P}}_t)$. D'après (5) on a :

$$\bar{\mathrm{U}}^1 f(z, u, v) = \int_0^v e^{-t} f(z, u + t, v - t) dt + e^{-v} \tilde{\mathrm{Q}} \bar{\mathrm{V}} f(z, u + v).$$

Il vient alors :

$$\bar{\mu}\bar{\mathrm{U}}^1 f = \int \tilde{\mu}\bar{\mathrm{V}}(dz, du, dv) \Bigg\{ \left[e^{-v} + \int_0^v e^{-v+t} dt \right] \tilde{\mathrm{Q}}\bar{\mathrm{V}} f(z, u + v)$$
$$+ \left[\int_0^v e^{-t} f(z, u + t, v - t) dt + \int_0^v dt \int_0^{v-t} e^{-s} f(z, u + t + s, v - t - s) ds \right] \Bigg\}$$
$$= \int \tilde{\mu}\bar{\mathrm{V}}(dz, du, dv) \left[\tilde{\mathrm{Q}}\bar{\mathrm{V}} f(z, u + v) + \int_0^v f(z, u + t, v - t) dt \right]$$
$$= \tilde{\mu}\tilde{\mathrm{W}}_1 \bar{\mathrm{V}} f + \int \tilde{\mu}\bar{\mathrm{V}}(dz, du, dv) dt 1_{t<v} f(z, u + t, v - t) = \bar{\mu}(f),$$

en utilisant $\tilde{\mu}\tilde{\mathrm{W}}_1 = \tilde{\mu}$ et (9) pour obtenir la dernière égalité. Donc $\bar{\mu}\bar{\mathrm{U}}^1 = \bar{\mu}$. Mais $\bar{\mu}$ étant σ-finie, il est classique (voir par exemple [*1*]) que l'invariance pour $\bar{\mathrm{U}}^1$ entraîne l'invariance pour $(\bar{\mathrm{P}}_t)$. ■

REMARQUE. — Il serait intéressant de savoir si ce résultat admet une réciproque : on pourrait alors se passer de la proposition II-5, et donner la forme des mesures σ-finies invariantes pour $(\bar{P}_t)$, même si $\bar{Z}$ n'est pas récurrent.

Nous ne savons pas si cette réciproque est vraie dans le cas général. Mais on montre que si $\bar{\mu} \in \bar{M}_\sigma$ est invariante pour $(\bar{P}_t)$ et s'il existe une suite $(\tilde{A}_n)$ d'éléments de $\tilde{\mathscr{E}}'$ croissant vers $\tilde{E}'$,

$$\int \bar{\mu}(dz, du, dv)\tilde{Q}(z, u + v\,; \tilde{A}_n)$$

étant fini pour tout n, alors la mesure définie par (10) est σ-finie et invariante pour $\tilde{W}_1$, et (9) est l'inverse de (10). En particulier les formules (9) et (10) établissent une correspondance bi-univoque entre les éléments de $\tilde{M}'$ invariants pour $\tilde{W}_1$, et les éléments de $\bar{M}$ invariants pour $(\bar{P}_t)$.

PROPOSITION II-7. — *Les transitions $\bar{V}$ et $\tilde{W}$ sont liées par la formule :*

$$\bar{V}f(z, v) = \int \tilde{W}(z, v\,; dz', dx)\frac{1}{1 - e^{-x}} \int_0^x e^{-t}f(z', t, x - t)dt. \tag{11}$$

Démonstration. — Il est très facile de vérifier que $\hat{P}_{z,u,v}\{ U_{R_1} = 0 \} = 0$; on a alors :

$$\bar{V}f(z, v) = \lim_{(n)} \sum_{h \geqslant 0} \hat{E}_{z,0,v}$$

$$\left\{ U_{\frac{h+1}{2^n}} < \frac{1}{2^n}, \frac{h+1}{2^n} < R_1 < D_{\frac{h+1}{2^n}}, f\left(Z_{\frac{h+1}{2^n}}, R_1 + U_{\frac{h+1}{2^n}} - \frac{h+1}{2^n}, D_{\frac{h+1}{2^n}} - R_1\right)\right\}$$

$$= \lim_{(n)} \sum_{h \geqslant 0} \exp\left(-\frac{h+1}{2^n}\right) \int \bar{H}_{\frac{h+1}{2^n}}(z, v\,; dz', du, dv')1_{u<\frac{1}{2^n}}$$
$$\int_0^{v'} f(z', t + u, v' - t)e^{-t}dt.$$

Définissons la transition $\bar{K}_n$ de $\tilde{E}'$ dans $\bar{E}$ et la fonction g sur $\bar{E}$ par :

$$\bar{K}_n(z, v\,; dz', du, dv')$$
$$= \sum_{h \geqslant 0} \exp\left(-\frac{h+1}{2^n}\right)\bar{H}_{\frac{h+1}{2^n}}(z, v\,; dz', du, dv')(1 - e^{-v'})1_{u<\frac{1}{2^n}},$$

$$g(z, u, v) = \frac{1}{1 - e^{-v}} \int_0^v e^{-t}f(z, u + t, v - t)dt.$$

On a alors $\bar{V}f(z, v) = \lim_{(n)} \bar{K}_n g(z, v)$. Mais si $f \in \bar{B}_{dg}$, $g \in \bar{B}_{dg}$ et

$$\hat{E}_{z,0,v}\{ g(Z_{R_1}, 0, U_{R_1} + V_{R_1})$$
$$= \lim_{(n)} \sum_{h \geq 0} \hat{E}_{z,0,v}\left\{ U_{\frac{h+1}{2^n}} < \frac{1}{2^n}, \frac{h+1}{2^n} < R_1 < D_{\frac{h+1}{2^n}}, g\left(Z_{\frac{h+1}{2^n}}, U_{\frac{h+1}{2^n}}, V_{\frac{h+1}{2^n}}\right)\right\}$$
$$= \lim_{(n)} \sum_{h \geq 0} \exp\left(-\frac{h+1}{2^n}\right) \int \bar{H}_{\frac{h+1}{2^n}}(z, v\,; dz', du, dv')(1 - e^{-v'})g(z', u, v')1_{u < \frac{1}{2^n}}$$
$$= \lim_{(n)} \bar{K}_n g(z, v) = \bar{V}f(z, v).$$

Étant donnée la définition de $\tilde{W}$, cette formule n'est autre que (11). ■

Démonstration du théorème II-2-(*i*). — D'après la proposition II-5, il existe $\tilde{\varphi} \in \tilde{M}'_\sigma$ telle que la chaîne $(Z_{S'_n}, V_{S'_n})$ soit $\tilde{\varphi}$-récurrente. Il existe alors $\tilde{\mu} \in \tilde{M}'_\sigma$ invariante pour $\tilde{W}_1$, et (9) définit alors une mesure $\bar{\mu} \in \bar{M}_\sigma$ invariante pour $(\bar{P}_t)$. En combinant (9) et (11), on obtient :

$$\bar{\mu}(\bar{A}) = \int \tilde{\mu}\tilde{W}(dz, dx)\frac{1}{1 - e^{-x}}\left[\int_0^x 1_{\bar{A}}(z, t, x - t)e^{-t}dt \right.$$
$$\left. + \int_0^x e^{-t}dt \int_0^{x-t} 1_{\bar{A}}(z, t + s, x - t - s)ds\right]$$
$$= \int \tilde{\mu}\tilde{W}(dz, dx)\frac{1}{1 - e^{-x}} \int_0^x 1_{\bar{A}}(z, t, x - t)dt,$$

et il suffit de poser $\tilde{v}(dz, dx) = \tilde{\mu}\tilde{W}(dz, dx)(1/(1 - e^{-x}))$ pour obtenir (8). D'après le lemme II-3 on a $\tilde{v} \in \tilde{M}'_\sigma$. Enfin on sait [*1*] que la mesure σ-finie invariante pour $(\bar{P})$ est unique (à une constante près), et l'unicité découle du lemme II-3. ■

2. **La seconde partie du théorème II-2.**

Commençons par un résultat préliminaire ; λ_+ est la mesure de Lebesgue sur $]0, \infty[$.

PROPOSITION II-8. — *Si $\bar{Z}$ est un PSM de première espèce de potentiel $\bar{U}$, et $\bar{\mu} \in \bar{M}_\sigma$ une mesure invariante pour $(\bar{P}_t)$ vérifiant* (8), *on a $\bar{\mu}\bar{U} = \tilde{v} \otimes \lambda_+$.*

Démonstration. — En conditionnant par rapport à $\mathscr{F}_t$, il vient :

$$\bar{\mu}\bar{U}(\tilde{A} \times]t, t + s]) = \int \bar{\mu}(dz, du, dv)\sum_{(n)} \bar{P}_{z,u,v}\{ (Z_{S_n}, V_{S_n}) \in \tilde{A}, S_n \in]t, t + s] \}$$
$$= \int \bar{\mu}\bar{P}_t(dz, du, dv)\sum_{(n)} \bar{P}_{z,u,v}\{ (Z_{S_n}, V_{S_n}) \in \tilde{A}, S_n \leqslant s \} = \bar{\mu}\bar{U}(\tilde{A} \times]0, s]).$$

Par suite si $\tilde{\mu}$ est la mesure positive (pas forcément σ-finie) sur $\tilde{\mathrm{E}}'$ définie par $\tilde{\mu}(\tilde{\mathrm{A}}) = \bar{\mu}\bar{\mathrm{U}}(\mathrm{A} \times]0, 1])$, on a $\bar{\mu}\bar{\mathrm{U}} = \tilde{\mu} \otimes \lambda_+$.

Soit $\bar{\mathscr{E}}^s = \{ \bar{\mathrm{A}} \in \bar{\mathscr{E}} \,;\, \bar{\mathrm{A}} \subset \mathrm{E} \times [0, s] \times]0, \infty[\,;\, \bar{\mu}(\bar{\mathrm{A}}) < \infty \}$; d'après le lemme II-3, $\bigcup_{s>0} \bar{\mathscr{E}}^s$ est un σ-anneau engendrant $\bar{\mathscr{E}}$. Soit alors $\bar{\mathrm{A}} \in \bar{\mathscr{E}}^s$; d'après la proposition I-6 et le fait que $\bar{\mathrm{U}}(z, u, v \,;\, \mathrm{E} \times]0, \infty[\times]0, v[) = 0$, on a pour $t > s$:

$$\bar{\mu}(\mathrm{A}) = \bar{\mu}\bar{\mathrm{P}}_t(\mathrm{A}) = \int \bar{\mu}\bar{\mathrm{U}}(dz, dx, dy) 1_{y \leq t < y+x} 1_{\bar{\mathrm{A}}}(z, t-y, x+y-t)$$
$$= \int \tilde{\mu}(dz, dx) dy 1_{0 \leq y} 1_{\bar{\mathrm{A}}}(z, t-y, x+y-t) 1_{y \leq t < y+x}$$
$$= \int \tilde{\mu}(dz, dx) dz 1_{0 \leq y < x} 1_{\bar{\mathrm{A}}}(z, y, x-y),$$

en remplaçant y par $t - y$ et en tenant compte de ce que $\bar{\mathrm{A}} \in \bar{\mathscr{E}}^s$. Le lemme II-3 montre alors que $\tilde{\mu} = \tilde{v}$. ■

Démonstration du théorème II-2 (*ii*). — Soit $\bar{\mathrm{A}} \in \bar{\mathscr{E}}^s$. De la même manière que ci-dessus, mais en utilisant (7) et le résultat précédent, on a pour $t > s$:

$$\bar{\mu}(\mathrm{A}) = \bar{\mu}\bar{\mathrm{P}}_t(\mathrm{A})$$
$$= \int \bar{\mu}(dz, du, dv) \tilde{\mathrm{Q}}(z, u+v \,;\, dz', dx) 1_{v \leq t < v+x} 1_{\bar{\mathrm{A}}}(z', t-v, v+x-t)$$
$$+ \int \bar{\mu}\bar{\mathrm{U}}(dz, dx, dy) \tilde{\mathrm{Q}}(z, x \,;\, dz', dx') 1_{x+y \leq t < x+y+x'} 1_{\bar{\mathrm{A}}}(z', t-x-y, x+y+x'-t)$$
$$= \int \tilde{v}(dz, dx) \tilde{\mathrm{Q}}(z, x \,;\, dz', dx') dy 1_{0 \leq y < x} 1_{x-y \leq t < x-y+x'} 1_{\bar{\mathrm{A}}}(z', t-x-y, x+y+x'-t)$$
$$+ \int \tilde{v}(dz, dx) \tilde{\mathrm{Q}}(z, x \,;\, dz', dx') dy 1_{x < x+y \leq t < x+y+x'} 1_{\bar{\mathrm{A}}}(z', t-x-y, x+y+x'-t)$$
$$= \int \tilde{v}(dz, dx) \tilde{\mathrm{Q}}(z, x \,;\, dz', dx') dy 1_{0 \leq y < x'} 1_{t-x \leq y < t} 1_{\bar{\mathrm{A}}}(z', y, x'-y)$$
$$+ \int \tilde{v}(dz, dx) \tilde{\mathrm{Q}}(z, x \,;\, dz', dx') dy 1_{0 \leq y < x'} 1_{y < t-x} 1_{\bar{\mathrm{A}}}(z', y, x'-y).$$

Le second terme de l'expression précédente croît lorsque $t \uparrow \infty$ vers

$$\int \tilde{v}\tilde{\mathrm{Q}}(dz, dx) dy 1_{0 \leq y < x} 1_{\bar{\mathrm{A}}}(z, y, x-y) \,; \tag{12}$$

quant à l'intégrand du premier terme, il est majoré par celui de (12) et il tend vers 0 quand $t \uparrow \infty$; par suite le premier terme tend vers 0, et $\bar{\mu}(\bar{A})$ égale l'expression (12). Le lemme II-3 montre alors que $\tilde{v}\tilde{Q} = \tilde{v}$. ∎

REMARQUE II-9. — Il peut évidemment exister plusieurs mesures $\tilde{v} \in \tilde{M}'_\sigma$ non proportionnelles entre elles, vérifiant $\tilde{v}\tilde{Q} = \tilde{v}$. Mais sous (R-3) seule l'une d'entre elles donne, par (8), une mesure invariante pour $(\bar{P}_t)$.

REMARQUE II-10. — La seconde partie du théorème II-2 n'est pas toujours vraie sans l'hypothèse (R-3), comme le montre l'exemple suivant. On prend $E = N$; partant d'un état quelconque $i \geqslant 1$, on y reste un temps exponentiel de paramètre 2^i, puis on passe dans l'état $i + 1$, etc. ; à chaque explosion on repart de $i = 2$ où on reste un temps exponentiel de paramètre 1, puis on saute en $i = 3$, etc. Il est facile de vérifier qu'on obtient un PSM $\bar{Z}$ de première espèce, pour lequel $\tilde{Q}$ est donné par :

$$\tilde{Q}(i, x ; j, dy) = \delta_{i+1}(j)e^{2^j y}2^j dy.$$

Ce PSM est récurrent, et sa mesure invariante se met sous la forme (8) (d'après la première partie du théorème), avec une mesure $\tilde{v}$ donnée par :

$$\tilde{v}(i, dx) = \begin{cases} e^{-x}dx & \text{si } i = 2, \\ e^{-2^i x}2^i dx & \text{si } i \geqslant 3. \end{cases}$$

Cette mesure ne vérifie $\tilde{v}\tilde{Q} = \tilde{v}$, et d'autre part il est bien clair que $\bar{Z}$ ne vérifie pas (R-3). ∎

III. PROCESSUS SEMI-MARKOVIENS DE SECONDE ESPÈCE

1. Définition et semi-groupe d'un PSM de seconde espèce.

Nous supposons donnée une probabilité de transition $\tilde{P}_{z,u}(d\omega)$ de $(\tilde{E}, \tilde{\mathscr{E}})$ dans $(\Omega, \mathscr{F})$.

DÉFINITION III-1. — *Le terme* $\tilde{Z} = (\Omega, U_0, Z_t, \tilde{P}_{z,u})$ *est un PSM de seconde espèce s'il vérifie :*

(*S-2-1*). — Pour tous $t \geqslant 0$, $(z, u) \in \tilde{E}$, on a $\tilde{P}_{z,u}\{ t \in N_d \} = 0$.
(*S-2-2*). — Pour tout $(z, u) \in \tilde{E}$, on a $\tilde{P}_{z,u}\{ Z_0 = z, U_0 = u \} = 1$.
(*S-2-3*). — Pour tous $s, t \geqslant 0$, $(z, u) \in \tilde{E}$ et $f \in b\tilde{\mathscr{E}}$, on a :

$$\tilde{E}_{z,u}\{ f(Z_{t+s}, U_{t+s}) \,|\, \mathscr{F}_t \} = \tilde{E}_{Z_t, U_t}\{ f(Z_s, U_s) \}. \tag{13}$$

Ces axiomes impliquent que $(\Omega, (Z_t, U_t), \tilde{P}_{z,u})$ est un processus de Markov normal, à valeurs dans $(\tilde{E}, \tilde{\mathscr{E}})$, admettant un semi-groupe de transition $(\tilde{P}_t)$ appelé le « semi-groupe du PSM ».

Pour obtenir la forme de $(\tilde{P}_t)$, il faut d'abord montrer une version affaiblie de la propriété forte de Markov pour (Z_t, U_t). Nous suivons la méthode du paragraphe I-2.

PROPOSITION III-2. — *Le semi-groupe d'un PSM de seconde espèce est fellérien pour* $\tilde{B}_d$.

Démonstration. — Soit $f \in \tilde{B}_d$. On a :

$$\tilde{P}_t f(z, u) = f(z, u + t)\tilde{P}_{z,u}\{ V_0 > t \} + \tilde{E}_{z,u}\{ 1_{V_0 \leqslant t} f(Z_t, U_t) \},$$

qui tend vers $f(z, u)$ quand $t \downarrow 0$ car $V_0 > 0$ ps. $(\tilde{P}_t)$ étant un semi-groupe, $\tilde{P}_t f$ est continu à droite en t. D'autre part on a :

$$\tilde{P}_{t+s} f(z, u) = \tilde{P}_t f(z, u + s)\tilde{P}_{z,u}\{ V_0 > s \} + \tilde{E}_{z,u}\{ 1_{V_0 \leqslant s} \tilde{P}_t f(Z_s, U_s) \}.$$

Si on fait tendre s vers 0, on voit que $\tilde{P}_t f(z, u + s)$ converge vers $\tilde{P}_t f(z, u)$, donc $\tilde{P}_t f \in \tilde{B}_d$. ■

PROPOSITION III-3. — *Soit* $\tilde{Z}$ *un PSM de seconde espèce et* T *un* $(\mathscr{F}_t)$*-temps d'arrêt tel que* $\tilde{P}_{z,u}\{ T \in N_d \} = 0$. *Alors* (13) *est valable pour tous* $s \geqslant 0$, $f \in b\tilde{\mathscr{E}}$, *quand on remplace* t *par* T.

Démonstration. — On va d'abord montrer que $\tilde{P}_{z,u}\{ T + s \in N_d \} = 0$. Pour cela on considère la suite (T_n) de temps d'arrêt introduite au lemme I-4. Comme $\{ T + s \notin N_d \} = \lim_{(n)} \{ U_{T_n+s} \geqslant T_n - T \}$, un raisonnement analogue montre que :

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{z,u}\{ T + s \notin N_d \} &= \lim_{(n)} \tilde{E}_{z,u}\{ \tilde{P}_s(Z_{T_n}, U_{T_n}; E \times [T_n - T, \infty[) \} \\ &= \lim_{(n)} \tilde{E}_{z,u}\{ \tilde{P}_s(Z_T, U_T + T_n - T; E \times [T_n - T, \infty[) \} .\end{aligned}$$

Mais pour tout $r > 0$, on a :

$$\begin{aligned}&\liminf_{t \downarrow 0} \tilde{P}_s(z, u + t; E \times [t, \infty[) \\ &\qquad \geqslant \lim_{t \downarrow 0} \tilde{P}_s(z, u + t; E \times [r, \infty[) = \tilde{P}_s(z, u; E \times [r, \infty[)\end{aligned}$$

d'après la proposition précédente. Par suite $\tilde{P}_s(z, u + t; E \times [t, \infty[)$ tend vers 1 si $t \downarrow 0$, et on en déduit que $\tilde{P}_{z,u}\{ T + s \in N_d \} = 0$. On montre la fin de la proposition exactement comme la proposition I-5, en utilisant le caractère fellérien de $(\tilde{P}_t)$ relativement à $\tilde{B}_d$. ■

On note $\tilde{R}(z, .)$ la loi de (Z_{V_0}, V_0) pour la probabilité $\tilde{P}_{z,0}$: c'est une probabilité de transition de $(E, \mathscr{E})$ dans $(\tilde{E}', \tilde{\mathscr{E}}')$. Pour simplifier les notations, on pose :

$$\tilde{H}_t(z\,;\,.) = \tilde{P}_t(z, 0\,;\,.) \tag{14}$$

$$F_z(dx) = \tilde{R}(z\,; E, dx), \quad f_z(x) = F_z(]x, \infty[), \quad P(z, dz') = \tilde{R}(z, dz', [0, \infty[). \tag{15}$$

On peut enfin définir une probabilité de transition $K_{z,x}(dz')$ de $(\tilde{E}', \tilde{\mathscr{E}}')$ dans $(E, \mathscr{E})$, qui vérifie :

$$\tilde{R}(z\,; dz', dx) = F_z(dx)K_{z,x}(dz'). \tag{16}$$

PROPOSITION III-4. — *Si $\tilde{Z}$ est un PSM de seconde espèce, on a :*

$$\tilde{H}_t(z\,; E \times]t, \infty[) = 0, \tag{17}$$

$$\tilde{R}(z\,; \{ z \} \times]0, \infty[) = 0, \tag{18}$$

$$\tilde{P}_t g(z, u) = \frac{f_z(u + t)}{f_z(u)} g(z, u + t) + \frac{1}{f_z(u)} \int \tilde{R}(z\,; dz', dx) 1_{u < x \leqslant u+t} \tilde{H}_{u+t-x} g(z'). \tag{19}$$

La réciproque de ce résultat est assez délicate à obtenir directement, et nous l'obtiendrons comme corollaire d'un résultat ultérieur.

Démonstration. — (17) et (18) découlent des définitions de U_t, $\tilde{H}_t$, V_0, $\tilde{R}$ et de (S-2-2). Si $\tilde{R}_1(z, u\,; .)$ est la loi de (Z_{V_0}, V_0) pour $\tilde{P}_{z,u}$, on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(z\,; A \times]t + u, \infty[) &= \tilde{E}_{z,0}\{ 1_{V_0 > u} \tilde{P}_{Z_u, U_u} \{ Z_{V_0} \in A, V_0 > t \} \} \\
&= \tilde{P}_{z,0}\{ V_0 > u \} \, \tilde{P}_{z,u} \{ Z_{V_0} \in A, V_0 > t \} \\
&= f_z(u) \tilde{R}_1(z, u\,; A \times]t, \infty[).
\end{aligned}$$

Appliquons (13) à $T = V_0$ (cf. proposition III-3) ; comme $U_{V_0} = 0$, il vient :

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_t g(z, u) &= \tilde{E}_{z,u}\{ 1_{V_0 > t} g(Z_t, U_t) \} \\
&\quad + \int \tilde{P}_{z,u}(d\omega) 1_{V_0(\omega) \leqslant t} \tilde{E}_{Z_{V_0(\omega)}, 0} \{ g(Z_{t - V_0(\omega)}, U_{t - V_0(\omega)}) \} \\
&= g(z, u + t) \tilde{R}_1(z, u\,; E \times]t, \infty[) + \int \tilde{R}_1(z, u\,; dz', dx) 1_{x \leqslant t} \tilde{H}_{t-x} g(z'),
\end{aligned}$$

ce qui, étant donnée la relation ci-dessus entre $\tilde{R}_1$ et $\tilde{R}$, n'est autre que (19). ∎

Remarquons enfin que si $T_0 = 0$, $T_{n+1} = D_{T_n}$, la chaîne (Z_{T_n}) est markovienne et admet P pour transition, alors que la chaîne $(Z_{T_{n+1}}, V_{T_n})$ est semi-markovienne et admet $\tilde{R}$ pour transition (cf. [*3*]).

2. Relations entre PSM de première et de seconde espèce.

Soit $\tilde{Z}$ un PSM de seconde espèce. Si $t_1 < \ldots < t_n$, $f_i \in b\bar{\mathscr{E}}$, la formule suivante définit une probabilité de transition de $(\bar{E}, \bar{\mathscr{E}})$ dans $(\Omega, \mathscr{F})$:

$$
(20) \quad \bar{E}_{z,u,v}\left\{\prod_{i=1}^{n} f_i(Z_{t_i}, U_{t_i}, V_{t_i})\right\}
$$
$$
= \prod_{t_i < v} f_i(z, u + t_i, v - t_i) \int K_{z,u+v}(dz')\tilde{E}_{z',0}\left\{\prod_{t_i \geqslant v} f_i(Z_{t_i - v}, U_{t_i - v}, V_{t_i - v})\right\}.
$$

Soit maintenant $\bar{Z}$ un PSM de première espèce, de semi-groupe $(\bar{P}_t)$. On suppose qu'il existe une transition $G_z(dx)$ de E dans $]0, \infty[$ telle que pour tout $v \leqslant t$, $\bar{P}_t$ se mette sous la forme :

$$
(21) \quad \bar{P}_t f(z, u, v) = \int \bar{P}_t(z, u, v\,; dz', du',]0, \infty[) \frac{G_{z'}(dx)}{G_{z'}(]u', \infty[)} 1_{x > u'} f(z', u', x - u').
$$

La formule suivante définit alors une probabilité de transition $\tilde{P}_{z,u}$ de $(\tilde{E}, \tilde{\mathscr{E}})$ dans $(\Omega, \mathscr{F})$:

$$
(22) \qquad \tilde{P}_{z,u}(.) = \frac{1}{G_z(]u, \infty[)} \int G_z(dx) 1_{u < x} \bar{P}_{z,u,x-u}(.).
$$

THÉORÈME III-5. — (i) *Si $\tilde{Z}$ est un PSM de seconde espèce et si $\bar{P}_{z,u,v}$ est défini par* (20), *$\bar{Z} = (\Omega, U_0, Z_t, \bar{P}_{z,u,v})$ est un PSM de première espèce dont le semi-groupe vérifie* (21).

(ii) *Si $\bar{Z}$ est un PSM de première espèce dont le semi-groupe vérifie* (21) *et si $\tilde{P}_{z,u}$ est défini par* (22), *$\tilde{Z} = (\Omega, U_0, Z_t, \tilde{P}_{z,u})$ est un PSM de seconde espèce.*

Si F_z, f_z, $K_{z,x}$, $\tilde{P}_t$, $\tilde{H}_t$ sont associés a $\tilde{Z}$ et si $\tilde{Q}$, G_z, $\bar{P}_t$ sont associés a $\bar{Z}$, dans les deux cas on a $G_z = F_z$ et :

$$
(23) \qquad \tilde{Q}(z, x\,; dz', dx') = K_{z,x}(dz')F_{z'}(dx'),
$$

$$
(24) \quad \tilde{P}_t g(z, u) = \frac{1}{f_z(u)} \int F_z(dx) 1_{x > u} \bar{P}_t(z, u, x - u\,; dz', du',]0, \infty[) g(z', u'),
$$

$$
(25) \quad \bar{P}_t g(z, u, v) = 1_{t < v} g(z, u + t, v - t)
$$
$$
+ 1_{t \geqslant v} \int K_{z,u+v}(dz')\tilde{H}_{t-v}(z'\,; dz'', dx) \frac{F_{z''}(dx')}{f_{z''}(x)} 1_{x < x'} g(z'', x, x' - x).
$$

Démonstration. — a) *Soit $\tilde{Z}$ un PSM de seconde espèce,* et $\bar{P}_{z,u,v}$ défini par (20). Le terme $\bar{Z}$ vérifie clairement (S-1-1) et (S-1-2). Soient g_i, $g \in b\bar{\mathscr{E}}$, $0 = t_0 < \ldots < t_n = t$, $Y = \prod_{i=1}^{n} g_i(Z_{t_i}, U_{t_i}, V_{t_i})$. Posons :

$$X_j = \prod_{i=1}^{j-1} g_i(Z_{t_i}, U_{t_i}, V_{t_i}) 1_{D_{t_{j-1}} \leqslant t_j},$$

$$h_j(z, u, v) = \prod_{i=j}^{n} g_i(z, u - t + t_i, v + t - t_i) 1_{t - t_j \leqslant v < t - t_{j-1}},$$

$$\alpha_j = \tilde{E}_{z,u}\{ X_j h_j(Z_t, U_t, V_t) g(Z_{t+s}, U_{t+s}, V_{t+s}) \}.$$

Remarquons que $X_j \in b\mathscr{F}_{t_j} \subset b\mathscr{F}_t$. En conditionnant successivement par rapport à $\mathscr{F}_{t+s}$, à $\mathscr{F}_{D_t}$ (cf. proposition III-3) et à $\mathscr{F}_t$, on obtient (la définition de $\tilde{R}_1$ est donnée dans la proposition III-4) :

$$\begin{aligned}\alpha_j = \tilde{E}_{z,u}\Big\{ X_j \int \tilde{R}_1(Z_t, U_t\,; dz', dx) h_j(Z_t, U_t, x - U_t) \\ [1_{s < x - U_t} g(Z_t, U_t + s, x - U_t - s) \\ + 1_{x - U_t \leqslant s} \int \tilde{H}_{s - x + U_t}(z'\,; dz'', dx') \tilde{R}_1(z'', x'\,; dz''', dx'') g(z'', x', x'' - x')] \Big\} \\ = \tilde{E}_{z,u}\{ X_j h_j(Z_t, U_t, V_t) \bar{P}_s g(Z_t, U_t, V_t) \},\end{aligned}$$

en définissant $\bar{P}_s$ par (25). Mais en remarquant que $\tilde{P}_{z,u}\{ U_t = t \} = 0$, on a :

$$\tilde{E}_{z,u}\{ Y g(Z_{t+s}, U_{t+s}, V_{t+s}) \} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \tilde{E}_{z,u}\{ Y \bar{P}_s g(Z_t, U_t, V_t) \}.$$

Si $v \leqslant t$, un calcul très simple permet de déduire de ce qui précède que :

$$(26) \qquad \bar{E}_{z,u,v}\{ Y g(Z_{t+s}, U_{t+s}, V_{t+s}) \} = \bar{E}_{z,u,v}\{ Y \bar{P}_s g(Z_t, U_t, V_t) \}.$$

Cette relation est triviale pour $v > t + s$. Enfin si $t < v \leqslant t + s$, le premier membre de (26) égale :

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} g_i(z, u + t_i, v - t_i) \int K_{z,u+v}(dz') \tilde{E}_{z',0}\{ g(Z_{t+s-v}, U_{t+s-v}, V_{t+s-v}) \} \\ = \prod_{i=1}^{n} g_i(z, u + t_i, v - t_i) \int K_{z,u+v}(dz') \tilde{H}_{t+s-v}(z'\,; dz'', dx) \\ \frac{F_{z''}(dx')}{f_{z''}(x)} g(z'', x, x' - x) 1_{x < x'}\end{aligned}$$

(en conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_{t+s-v}$), ce qui est le second membre de (26). On a donc montré que $\bar{Z}$ vérifie (S-1-3) et d'après (25), $(\bar{P}_t)$ vérifie (21) avec $G_z = F_z$. (23) découle de (5) et de (25) appliqués à $t = v$; enfin (24) découle de (5), de (19) et de (25) par un calcul facile.

b) *Soit* $\bar{Z}$ *un PSM de première espèce,* dont le semi-groupe $(\bar{P}_t)$ vérifie (21), et $\tilde{P}_{z,u}$ défini par (22). Il est clair que $\tilde{Z}$ vérifie (S-2-1) et (S-2-2). Soient $t_1 < \ldots < t_n = t$, g_i, $g \in b\tilde{\mathcal{E}}$,

$$X = \prod_{i=1}^{n-1} g_i(Z_{t_i}, U_{t_i}) \quad \text{et} \quad Y = \prod_{i=1}^{n} g_i(Z_{t_i}, U_{t_i}).$$

D'après (22) et (21), on a :

$$\tilde{E}_{z,u}\{ Yg(Z_{t+s}, U_{t+s}) \}$$

$$= \tilde{E}_{z,u}\left\{ X \int \bar{P}_{t-t_{n-1}}(Z_{t_{n-1}}, U_{t_{n-1}}, V_{t_{n-1}} ; dz', du', dv') \right.$$
$$\left. g_n(z', u')\bar{E}_{z',u',v'}\{ g(Z_s, U_s) \} \right\}$$

$$= \tilde{E}_{z,u}\left\{ X \int \bar{P}_{t-t_{n-1}}(Z_{t_{n-1}}, U_{t_{n-1}}, V_{t_{n-1}} ; dz', du',]0, \infty[) \right.$$
$$\left. g_n(z', u') \frac{G_{z'}(dx)}{G_{z'}(]u', \infty[)} 1_{u'<x} \bar{E}_{z',u',x-u'}\{ g(Z_s, U_s) \} \right\}$$

$$= \tilde{E}_{z,u}\{ Y\tilde{E}_{Z_t,U_t}\{ g(Z_s, U_s) \} \},$$

ce qui prouve que $\tilde{Z}$ vérifie (S-2-3). En comparant (22) et (19) on voit que $G_z = F_z$. (24) découle alors de (22). D'après (21) on a

$$\tilde{Q}(z, x ; dz', dx') = \tilde{Q}(z, x ; dz',]0, \infty[)F_{z'}(dx')$$

et d'après (22) on a

$$\tilde{R}(z ; dz', dx) = F_z(dx)\tilde{Q}(z, x ; dz',]0, \infty[),$$

ce qui entraîne (23). Enfin un calcul très simple utilisant (5), (21), (23) et (24) permet de prouver (25). ■

En particulier si $\bar{Z}$ est un PSM de première espèce, la condition (21) entraîne que $\tilde{Q}$ se met sous la forme (23), mais la réciproque n'est pas vraie. Cependant on a :

PROPOSITION III-6. — *Soit* $\bar{Z}$ *un PSM de première espèce vérifiant* (*R-3*), *tel* $\tilde{Q}$ *soit de la forme* (23). *Si* $\tilde{P}_{z,u}$ *est défini par* (22) (*avec* $G_z = F_z$), *alors* $\tilde{Z} = (\Omega, U_0, Z_t, \tilde{P}_{z,u})$ *est un PSM de seconde espèce.*

Démonstration. — Il suffit évidemment de montrer que le semi-groupe de $\bar{Z}$ vérifie (21). Si $\tilde{Q}$ vérifie (23), c'est une conséquence immédiate de la formule (7), qui est applicable si (R-3) est vérifié. ■

3. Construction d'un PSM de seconde espèce.

Dans ce paragraphe, nous montrons la réciproque de la proposition III-4.

THÉORÈME III-7. — *Supposons* E *polonais muni de ses boréliens* $\mathscr{E}$, *et soit* $(\tilde{P}_t)$ *un semi-groupe markovien sur* $(\tilde{E}, \tilde{\mathscr{E}})$ *et* $(\tilde{H}_t)$ *défini par* (14). *Pour que* $(\tilde{P}_t)$ *soit le semi-groupe d'un PSM de seconde espèce, il faut et il suffit que* $(\tilde{H}_t)$ *vérifie* (17) *et qu'il existe une probabilité de transition* $\tilde{R}$ *de* $(E, \mathscr{E})$ *dans* $(\tilde{E}, \tilde{\mathscr{E}})$ *vérifiant* (18) *et* (19).

Démonstration. — Seule la condition suffisante reste à montrer. $K_{z,x}$ et F_z étant définis par (15) et (16), définissons $\tilde{Q}$ et $\bar{P}_t$ par (23) et (25). On a :

$$\begin{aligned}(27)\quad \bar{P}_t\bar{P}_s g(z, u, v) &= 1_{t+s<v} g(z, u+t+s, v-t-s)\\ &+ 1_{t\leq v<t+s}\int K_{z,u+v}(dz')\tilde{H}_{t+s-v}(z'; dz'', dx)\frac{F_{z''}(dx')}{f_{z''}(x)} g(z'', x, x'-x)1_{x<x'}\\ &+ 1_{v\leq t}\int K_{z,u+v}(dz')\tilde{H}_{t-v}(z'; dz'', dx)\frac{F_{z''}(dx')}{f_{z''}(x)}1_{x<x'}\\ &\qquad [1_{s<x'-x} g(z'', x+s, x'-x-s)\\ &+ 1_{x'-x\leq s}\int K_{z'',x'}(dz_1)\tilde{H}_{s+x-x'}(z_1; dz'_1, dx_1)\frac{F_{z'_1}(dx'_1)}{f_{z'_1}(x_1)} g(z'_1, x_1, x'_1-x_1)1_{x_1<x'_1}\Big].\end{aligned}$$

Mais d'après (19) il vient :

$$\begin{aligned}(28)\quad &\int \tilde{P}_s(z, u; dz', du')\frac{F_{z'}(dx)}{f_{z'}(u')} g(z', u', x-u')1_{u'<x}\\ &= \frac{1}{f_z(u)}\int F_z(dx)1_{u<x}[1_{s<x-u} g(z, u+s, x-u-s)\\ &+ 1_{x-u\leq s}\int K_{z,x}(dz')\tilde{H}_{s-x+u}(z'; dz'', dx')\frac{F_{z''}(dx'')}{f_{z''}(x')} g(z'', x', x''-x')1_{x'<x''}\Big].\end{aligned}$$

Comme $\tilde{H}_t\tilde{P}_s = \tilde{H}_{t+s}$, le troisième terme du second membre de (27) égale alors :

$$1_{v\leq t}\int K_{z,u+v}(dz')\tilde{H}_{t+s-v}(z'; dz'', dx)\frac{F_{z''}(dx')}{f_{z''}(x)} g(z'', x, x'-x)1_{x<x'},$$

et on en déduit que (27) égale $\bar{P}_{t+s}g(z, u, v)$. Donc $(\bar{P}_t)$ est un semi-groupe. Si $\bar{H}_t$ est défini par (2), on a :

$$\bar{H}_t(z, v ; E \times]t, \infty[\times]0, \infty[) = 1_{v \leqslant t} \int K_{z,v}(dz')\tilde{H}_{t-v}(z' ; E \times]t, \infty[) = 0$$

d'après (17). $\tilde{Q}$ vérifie (4) car $\tilde{R}$ vérifie (18). Enfin en utilisant encore (28), on peut écrire pour $v \leqslant t$:

$$\int \tilde{Q}(z, u + v ; dz', dv')\bar{H}_{t-v}g(z', v')$$
$$= \int K_{z,u+v}(dz')F_{z'}(dv')[1_{t-v<v'}g(z', t - v, v' + v - t)$$
$$+ 1_{v' \leqslant t-v} \int K_{z',v'}(dz'')\tilde{H}_{t-v-v'}(z'' ; dz, dx)\frac{F_z(dx')}{f_z(x)}g(z, x, x' - x)1_{x<x'}\Big]$$
$$= \bar{P}_t f(z, u, v),$$

ce qui n'est autre que (5). D'après le théorème I-2 il existe alors un PSM de première espèce $\bar{Z}$ admettant $(\bar{P}_t)$ pour semi-groupe, et ce dernier vérifie (21) par construction. Donc le théorème III-5 montre qu'il existe un PSM de seconde espèce $\tilde{Z}$ admettant pour semi-groupe la famille $(\tilde{P}'_t)$ définie à partir de $(\bar{P}_t)$ par (24). Mais le calcul de $\tilde{P}'_t$ à partir de (24) montre que $\tilde{P}'_t = \tilde{P}_t$, ce qui achève la démonstration. ■

4. Mesure invariante pour un PSM de seconde espèce.

Si $\tilde{Z}$ est un PSM de seconde espèce et si $A \in \mathscr{E}$, soit

$$N^s_A = \sum_{(t)} 1_{A \times \{0\} \times]s,\infty[}(Z_t, U_t, V_t).$$

DÉFINITION III-8. — (i) *Si $\varphi \in M_\sigma$, $\tilde{Z}$ est φ-récurrent si pour tout $A \in \mathscr{E}$ tel que $\varphi(A) > 0$ et tout $z \in E$, on a*

$$\tilde{P}_{z,0}\left\{ \int 1_A(Z_t)dt = \infty \right\} = 1.$$

(ii) *Si $\varphi \in M_\sigma$ et $s > 0$, $\tilde{Z}$ est (φ, s)-récurrent si pour tout $A \in \mathscr{E}$ tel que $\varphi(A) > 0$ et tout $z \in E$, on a $\tilde{P}_{z,0}\{ N^s_A = \infty \} = 1$.*

PROPOSITION III-9. — *Soit $\tilde{Z}$ un PSM de seconde espèce. Il y a équivalence entre :*

(i) *Il existe $\tilde{\varphi} \in \tilde{M}_\sigma$ tel que le processus $(\Omega, (Z_t, U_t), \tilde{P}_{z,u})$ soit $\tilde{\varphi}$-récurrent.*

(ii) *Il existe* $\varphi \in \mathrm{M}_\sigma$ *tel que le PSM* $\tilde{\mathrm{Z}}$ *soit* φ*-récurrent.*

(iii) *Il existe* $\varphi \in \mathrm{M}_\sigma$ *et* $s > 0$ *tels que le PSM* $\tilde{\mathrm{Z}}$ *soit* (φ, s)*-récurrent.*

Démonstration. — Quitte à remplacer $\tilde{\varphi}$ ou φ par des mesures équivalentes, on peut les supposer finies. Si on a (i), on définit $\varphi \in \mathrm{M}$ par $\varphi(\mathrm{A}) = \tilde{\varphi}(\mathrm{A} \times [0, \infty[)$, et on a clairement (ii).

Supposons qu'on ait (ii). Il existe $s > 0$ tel que $\varphi' \in \mathrm{M}$ définie par

$$\varphi'(\mathrm{A}) = \int \varphi \mathrm{P}(dz) 1_{\mathrm{A}}(z) f_z(s)$$

ne soit pas identiquement nulle. Si $\varphi'(\mathrm{A}) > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que si

$$\mathrm{B} = \left\{ z\,;\ \int \mathrm{P}(z, dz') 1_{\mathrm{A}}(z') f_{z'}(s) \geqslant \beta \right\},$$

on ait $\varphi(\mathrm{B}) > 0$. Donc pour tout $z \in \mathrm{E}$,

$$\tilde{\mathrm{P}}_{z,0} \left\{ \int 1_{\mathrm{B}}(\mathrm{Z}_t) dt = \infty \right\} = 1.$$

N n'étant pas borné, l'ensemble $\{ (t, \omega)\,; \mathrm{Z}_t(\omega) \in \mathrm{B}, \mathrm{U}_t(\omega) = 0 \}$ est ps de coupes dénombrables, et comme il est bien-mesurable, il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt telle que $\mathrm{Z}_{\mathrm{T}_n} \in \mathrm{B}$, $\mathrm{U}_{\mathrm{T}_n} = 0$ et $\mathrm{D}_{\mathrm{T}_n} \leqslant \mathrm{T}_{n+1} < \infty$ ps. Soit $\Omega_n = \{ \mathrm{T}_n < \infty, \mathrm{Z}_{\mathrm{D}_{\mathrm{T}_n}} \in \mathrm{A}, \mathrm{V}_{\mathrm{D}_{\mathrm{T}_n}} > s \}$; on a $\Omega_n \in \mathscr{F}_{\mathrm{T}_{n+2}}$, et comme $\mathrm{T}_n \notin \mathrm{N}_d$,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{P}}_{z,0} \{ \Omega_n \mid \mathscr{F}_{\mathrm{T}_n} \} &= 1_{\mathrm{T}_n < \infty} \tilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{Z}_{\mathrm{T}_n},0} \{ \mathrm{Z}_{\mathrm{V}_0} \in \mathrm{A}, \mathrm{V}_{\mathrm{V}_0} > s \} \\ &= 1_{\mathrm{T}_n < \infty} \int \mathrm{P}(\mathrm{Z}_{\mathrm{T}_n}, dz') 1_{\mathrm{A}}(z') f_{z'}(s) \geqslant \beta 1_{\mathrm{T}_n < \infty}\,; \end{aligned}$$

donc d'après le lemme de Borel-Cantelli, on a

$$\tilde{\mathrm{P}}_{z,0} \{ \limsup_{(n)} \Omega_n \} \geqslant \tilde{\mathrm{P}}_{z,0} \{ \lim_{(n)} \{ \mathrm{T}_n < \infty \} \} = 1.$$

Enfin $\limsup_{(n)} \Omega_n \subset \{ \mathrm{N}^s_{\mathrm{A}} = \infty \}$, donc on a (iii).

Supposons qu'on ait (iii). On définit $\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathrm{M}}$ par

$$\tilde{\varphi}(\tilde{\mathrm{A}}) = \int \varphi(dz) dx 1_{x > s} 1_{\tilde{\mathrm{A}}}(z, x).$$

Si $\tilde{\varphi}(\tilde{\mathrm{A}}) > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que si $\mathrm{B} = \{ z\,; \lambda(\mathrm{A}_z \cap [0, s]) \geqslant \beta \}$, on ait $\varphi(\mathrm{B}) > 0$ (λ est la mesure de Lebesgue, A_z est la coupe en z de $\tilde{\mathrm{A}}$). Mais

$$\{ \mathrm{N}^s_{\mathrm{B}} = \infty \} \subset \left\{ \int 1_{\tilde{\mathrm{A}}}(\mathrm{Z}_t, \mathrm{U}_t) dt = \infty \right\},$$

donc d'après (iii) on a $\int 1_{\tilde{A}}(Z_t, U_t)dt = \infty$ $\tilde{P}_{z,0}$-ps pour tout $z \in E$. Enfin

$$\tilde{P}_{z,u}\left\{ \int 1_{\tilde{A}}(Z_t, U_t)dt = \infty \right\}$$

$$= \frac{1}{f_z(u)} \int \tilde{R}(z\,;dz',]u, \infty[)\tilde{P}_{z',0}\left\{ \int 1_{\tilde{A}}(Z_t, U_t)dt = \infty \right\},$$

qui égale 1, ce qui montre que (Z_t, U_t) est $\tilde{\varphi}$-récurrent (au sens de Harris). ■

Voici enfin le résultat principal :

THÉORÈME III-10. — *Soit $\varphi \in M_\sigma$ et $\tilde{Z}$ un PSM de seconde espèce, φ-récurrent, de semi-groupe $(\tilde{P}_t)$.*

(i) *Il existe $\nu \in M_\sigma$ unique (à une constante près) telle que l'unique mesure (à une constante près) $\tilde{\mu} \in \tilde{M}_\sigma$ invariante pour $(\tilde{P}_t)$ soit définie par :*

$$\tilde{\mu}(\tilde{A}) = \int \nu(dz)dx f_z(x)1_{\tilde{A}}(z, x). \tag{29}$$

(ii) *Si de plus $\tilde{Z}$ vérifie (R-3), on a $\nu P = \nu$.*

Nous avons besoin d'un lemme concernant les PSM de première espèce. Pour ceux-ci, et avec les notations du paragraphe II-2, on définit la transition W de $(\tilde{E}', \tilde{\mathscr{E}}')$ dans $(E, \mathscr{E})$ par :

$$Wf(z, v) = \bar{E}_{z,0,v}\{ f(Z_{R_1}) \}.$$

LEMME III-11. — *Soient $\bar{Z}$ un PSM de première espèce dont le semi-groupe vérifie* (21) et

$$\hat{G}(z) = \int_0^\infty e^{-t}dtG_z(]t, \infty[).$$

On a alors :

$$\tilde{W}f(z, v) = \int W(z, v\,; dz')\frac{1}{\hat{G}(z')}G_{z'}(dx)f(z', x)(1 - e^{-x}).$$

Démonstration. — On pose $g_z(x) = G_z(]x, \infty[)$. En suivant la méthode de la proposition II-7 on voit que :

$$\tilde{W}f(z, v) = \lim_{(n)} \sum_{h \geq 0} \hat{E}_{z,0,v}$$

$$\left\{ U_{\frac{h+1}{2^n}} < \frac{1}{2^n}, \frac{h+1}{2^n} < R_1 < D_{\frac{h+1}{2^n}} + U_{\frac{h+1}{2^n}}, f\left(Z_{\frac{h+1}{2^n}}, U_{\frac{h+1}{2^n}} + V_{\frac{h+1}{2^n}}\right)\right\}$$

$$= \lim_{(n)} \sum_{h \geq 0} \exp\left(-\frac{h+1}{2^n}\right) \int \bar{H}_{\frac{h+1}{2^n}}(z, v\,; dz\,, du,]0, \infty[)1_{u<\frac{1}{2^n}}$$

$$\frac{G_{z'}(dx)}{g_{z'}(u)} f(z', x)(1 - e^{-x})1_{u<x},$$

en utilisant (21). Mais alors si

$$\tilde{L}_n(z, v\,; dz', du) = \sum_{h>0} \exp\left(-\frac{h+1}{2^n}\right)\bar{H}_{\frac{h+1}{2^n}}(z, v\,; dz', du,]0, \infty[)1_{u<\frac{1}{2^n}} e^{-t}dt \frac{g_{z'}(u+t)}{g_{z'}(u)},$$

$$h(z, u) = \frac{\int G_z(dx)f(z, x)(1 - e^{-x})1_{u<x}}{\int e^{-t}dt g_z(u+t)},$$

on a $\tilde{W}f(z, v) = \lim_{(n)} \tilde{L}_n h(z, v)$. Mais comme $h \in \tilde{B}_d$, on a :

$$\hat{E}_{z,0,v}\{h(Z_{R_1}, 0)\} = \lim_{(n)} \sum_{h>0} \hat{E}_{z,0,v}\left\{U_{\frac{h+1}{2^n}} < \frac{1}{2^n}, \frac{h+1}{2^n} < R_1 < D_{\frac{h+1}{2^n}} + U_{\frac{h+1}{2^n}}, h\left(Z_{\frac{h+1}{2^n}}, U_{\frac{h+1}{2^n}}\right)\right\}$$
$$= \lim_{(n)} \tilde{L}_n h(z, v),$$

ce qui, étant donnée la définition de h, n'est autre que le résultat annoncé. ■

Démonstration du théorème. — On peut supposer $\varphi \in M$, et on définit $\bar{\varphi} \in \bar{M}_\sigma$ par

$$\bar{\varphi}(\bar{A}) = \int \varphi P(dz)F_z(dx)dy 1_{\bar{A}}(z, y, x-y)1_{0\leqslant y<x}.$$

Si $\bar{\varphi}(\bar{A}) > 0$, il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que si

$$\tilde{B} = \left\{(z, x)\,; \int_0^x 1_{\bar{A}}(z, y, x-y)dy \geqslant \alpha\right\}$$

et

$$C = \left\{z\,; \int P(z, dz')F_{z'}(dx)1_{\tilde{B}}(z', x) \geqslant \beta\right\},$$

on a $\varphi(C) > 0$. Comme pour la proposition III-9 on montre l'existence d'une suite (T_n) de temps d'arrêt telle que $Z_{T_n} \in C$, $U_{T_n} = 0$ et $D_{T_n} \leqslant T_{n+1} < \infty$ $\tilde{P}_{z,0}$-ps pour tout $z \in E$. Soient $T'_n = D_{T_n}$, $\Omega_n = \{T_n < \infty\,; (Z_{T'_n}, V_{T'_n}) \in \tilde{B}\}$. On a $\Omega_n \in \mathscr{F}_{T_{n+2}}$ et

$$\tilde{P}_{z,0}\{\Omega_n \mid \mathscr{F}_{T_n}\} \geqslant \beta 1_{T_n<\infty},$$

donc d'après le lemme de Borel-Cantelli, $\tilde{P}_{z,0}\{\lim\sup_{(n)} \Omega_n\} = 1$. Mais par définition de $\tilde{B}$,

$$\int_{T'_n}^{D_{T'_n}} 1_{\bar{A}}(Z_t, U_t, V_t)dt \geqslant \alpha$$

dès que $(Z_{T'_n}, V_{T'_n}) \in \tilde{B}$. Par suite on a

$$\tilde{P}_{z,0}\left\{ \int 1_{\tilde{A}}(Z_t, U_t, V_t)dt = \infty \right\} = 1$$

pour tout $z \in E$.

On définit $\bar{P}_{z,u,v}$ par (20), et on considère le PSM de première espèce $\bar{Z}$ introduit au théorème III-5. On déduit facilement du résultat précédent que $\bar{Z}$ est $\bar{\varphi}$-récurrent. D'après le théorème II-2, le semi-groupe $(\bar{P}_t)$ de $\bar{Z}$ admet une mesure invariante $\bar{\mu}$ qui est de la forme (8); de plus il existe $\tilde{\mu}' \in \tilde{M}'_\sigma$ telle que $v(dz, dx) = \tilde{\mu}'\tilde{W}(dz, dx)(1/(1 - e^{-x}))$. Mais d'après le lemme III-11, où on remplace G_z par F_z, il vient $v(dz, dx) = \tilde{\mu}'W(dz)\dfrac{F_z(dx)}{\hat{F}(z)}$. Par suite si $v(dz) = \tilde{\mu}'W(dz)\dfrac{1}{\hat{F}(z)}$, on a $v(dz, dx) = v(dz)F_z(dx)$.

D'autre part d'après la proposition III-9, (Z_t, U_t) est $\tilde{\varphi}$-récurrent pour une mesure $\tilde{\varphi}$ convenable. Donc il existe $\tilde{\mu} \in \tilde{M}_\sigma$ unique (à une constante près) invariante pour $(\tilde{P}_t)$. Posons :

$$\bar{\mu}'(\bar{A}) = \int \tilde{\mu}(dz, dx)\frac{F_z(dy)}{f_z(x)} 1_{x<y}1_{\bar{A}}(z, x, y - x).$$

D'après (19) et (25), il vient :

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}'\bar{P}_t(A) = \int \tilde{\mu}(dz, dx)\frac{F_z(dy)}{f_z(x)}\Big[&1_{x+t<y}1_{\bar{A}}(z, x + t, y - x - t)\\
+ 1_{x<y\leqslant x+t}\int K_{z,y}(dz')\tilde{H}_{x+t-y}(z'; dz'', dx')&\frac{F_{z''}(dx'')}{f_{z''}(x')} 1_{\bar{A}}(z'', x', x'' - x')1_{x'<x''}\Big]\\
= \int \tilde{\mu}\tilde{P}_t(dz, du)\frac{F_z(dx)}{f_z(u)} 1_{\bar{A}}(z, u, x - u)1_{u<x} &= \bar{\mu}'(\bar{A}).
\end{aligned}$$

Donc $\bar{\mu}'$ est invariante pour $(\bar{P}_t)$, et on a $\bar{\mu}' = \bar{\mu}$ (à une constante près). Par suite :

$$\bar{\mu}'(\tilde{A} \times]0, \infty[) = \tilde{\mu}(\tilde{A}) = \bar{\mu}(\tilde{A} \times]0, \infty[) = \int v(dz)F_z(dx)dy1_{0\leqslant y<x}1_{\tilde{A}}(z, y),$$

ce qui entraîne (29). Comme $\tilde{\mu} \in \tilde{M}_\sigma$, soit $(\tilde{A}_n)$ une suite d'éléments de $\tilde{\mathscr{E}}$ croissant vers $\tilde{E}$, telle que $\tilde{\mu}(\tilde{A}_n) < \infty$ pour tout n; si

$$A_n = \left\{ z ; \int f_z(x)1_{\tilde{A}_n}(z, x)dx \geqslant \frac{1}{n} \right\},$$

A_n croît vers E et $v(A_n) \leqslant n\tilde{\mu}(\tilde{A}_n)$, donc $v \in M_\sigma$. Enfin supposons que v et v' soient deux mesures sur E donnant par (29) la même mesure $\tilde{\mu}$. Si $A \in \mathscr{E}$

et $g(z, x) = 1_A(z)\dfrac{1}{f_z(x)}1_{x<1}$, on a $\tilde{\mu}(g) = \nu(A) = \nu'(A)$, ce qui prouve l'unicité de ν. La partie (i) du théorème est donc montrée.

Supposons maintenant que $\tilde{Z}$ vérifie (R-3); il en est de même de $\bar{Z}$, donc $\tilde{\nu}\tilde{Q} = \tilde{\nu}$. Mais (23), la forme de $\tilde{\nu}$ et le fait que

$$P(z, A) = \int F_z(dx)K_{z,x}(A)$$

montrent que $\nu P = \nu$. ■

IV. PROCESSUS SEMI-MARKOVIENS DE TROISIÈME ESPÈCE

1. Définition et semi-groupe d'un PSM de troisième espèce.

Nous supposons donnée une probabilité de transition $\tilde{P}'_{z,v}(d\omega)$ de $(\tilde{E}', \tilde{\mathscr{E}}')$ dans $(\Omega, \mathscr{F}'_\infty)$.

DÉFINITION IV-1. — *Le terme* $\tilde{Z}' = (\Omega, Z_t, \tilde{P}'_{z,v})$ *est un PSM de troisième espèce s'il vérifie :*

(*S-3-1*). — Pour tous $t \geqslant 0$, $(z, v) \in \tilde{E}'$, on a $\tilde{P}'_{z,v}\{t \in N_d\} = 0$.
(*S-3-2*). — Pour tout $(z, v) \in \tilde{E}'$, on a $\tilde{P}'_{z,v}\{Z_0 = z, V_0 = v\} = 1$.
(*S-3-3*). — Pour tous $s, t \geqslant 0$, $(z, v) \in \tilde{E}'$, $f \in b\tilde{\mathscr{E}}'$, on a :

$$\tilde{E}'_{z,v}\{f(Z_{t+s}, V_{t+s}) \mid \mathscr{F}'_t\} = \tilde{E}'_{Z_t,V_t}\{f(Z_s, V_s)\}. \tag{30}$$

La formule $\tilde{P}'_t(z, v; \tilde{A}) = \tilde{P}'_{z,v}\{(Z_t, V_t) \in A\}$ définit une transition sur $(\tilde{E}', \tilde{\mathscr{E}}')$. Les axiomes ci-dessus impliquent que pour chaque probabilité $\tilde{P}'_{z,v}$ le processus (Z_t, V_t) est markovien (à valeurs dans $\tilde{E}' \cup E \times \{0\}$) et admet un semi-groupe de transition normal qui est précisément $(\tilde{P}'_t)_{t\geqslant 0}$, et qu'on appelle le « semi-groupe du PSM ».

THÉORÈME IV-2. — *Supposons* E *polonais muni de ses boréliens* $\mathscr{E}$, *et soit* $(\tilde{P}'_t)$ *un semi-groupe markovien sur* $(\tilde{E}', \tilde{\mathscr{E}}')$. *Pour que* $(\tilde{P}'_t)$ *soit le semi-groupe d'un PSM de troisième espèce, il faut et il suffit qu'il existe une famille de probabilités de transition* $(\tilde{H}'_t)_{t\geqslant 0}$ *de* $(E, \mathscr{E})$ *dans* $(\tilde{E}', \tilde{\mathscr{E}}')$ *telle que* $\tilde{H}'_0$ *vérifie* (18) *et que*

$$\tilde{P}'_t f(z, v) = 1_{t<v} f(z, v - t) + 1_{v\leqslant t}\tilde{H}'_{t-v} f(z). \tag{31}$$

Démonstration. — a) *Condition nécessaire :* Si $t < v$, on a clairement (31). Si $x < v \leqslant t$, conditionnons par rapport à $\mathscr{F}'_x$:

$$\tilde{\mathrm{P}}'_t f(z, v) = \tilde{\mathrm{E}}'_{z,v} \{ \tilde{\mathrm{E}}'_{\mathrm{Z}_x, \mathrm{V}_x} \{ f(\mathrm{Z}_{t-x}, \mathrm{V}_{t-x}) \} \} = \tilde{\mathrm{P}}'_{t-x} f(z, v).$$

Donc $\tilde{\mathrm{P}}'_t f(z, v)$ ne dépend que de z et de $t - v$, et on le note $\tilde{\mathrm{H}}'_{t-v} f(z)$: on définit ainsi une famille $(\tilde{\mathrm{H}}'_t)$ de transitions de $(\mathrm{E}, \mathscr{E})$ dans $(\tilde{\mathrm{E}}', \tilde{\mathscr{E}}')$, vérifiant (31). Enfin d'après la définition de V_0 on a :

$$\tilde{\mathrm{H}}'_0(z ; \{ z \} \times]0, \infty[) = \tilde{\mathrm{P}}'_t(z, t ; \{ z \} \times]0, \infty[) = \tilde{\mathrm{P}}'_{z,t} \{ \mathrm{Z}_{\mathrm{V}_0} = \mathrm{Z}_0 = z \} = 0.$$

b) *Condition suffisante :* Soit $\mathrm{W} = \tilde{\mathrm{E}}'^{[0,\infty[}$ et $(\mathrm{Y}_t, \mathrm{S}_t)(w)$ la $t^{\text{ième}}$ coordonnée de $w \in \mathrm{W}$. E étant polonais, on peut munir $(\mathrm{W}, \sigma(\mathrm{Y}_t, \mathrm{S}_t ; t \geqslant 0))$ d'une famille $(\tilde{\mathrm{P}}'_{z,v} ; (z, v) \in \tilde{\mathrm{E}}')$ de probabilités, telle que $(\mathrm{W}, (\mathrm{Y}_t, \mathrm{S}_t), \tilde{\mathrm{P}}'_{z,v})$ soit un processus de Markov normal de transition $(\tilde{\mathrm{P}}'_t)$.

A partir de maintenant la démonstration est exactement la même que celle du théorème I-2. Il suffit simplement de supprimer les références à R_t et à U_t, et de remplacer $\bar{\mathrm{P}}_{z,u,v}$ par $\tilde{\mathrm{P}}'_{z,v}$. $\tilde{\mathrm{P}}'_{z,v} \{ \mathrm{W}_{r,s} \} = 1$ découle de (31) et $\tilde{\mathrm{P}}'_{z,v} \{ \mathrm{W}_r \} = 1$ provient de ce que $\tilde{\mathrm{H}}'_0$ vérifie (18). Il faut également montrer que $(\tilde{\mathrm{P}}'_t)$ est fellérien pour $\tilde{\mathrm{B}}'_g$, pour obtenir (S-3-3). Pour cela, soit $f \in \tilde{\mathrm{B}}'_g$; d'après (31), $\lim\limits_{t \downarrow 0} \tilde{\mathrm{P}}'_t f = f$, dont $\tilde{\mathrm{P}}'_t f$ est continu à droite en t et $\tilde{\mathrm{H}}'_t f$ également. De (31) vient alors $\tilde{\mathrm{P}}'_t f \in \tilde{\mathrm{B}}'_g$.

On a montré en passant la :

PROPOSITION IV-3. — *Le semi-groupe d'un PSM de troisième espèce est fellérien pour* $\tilde{\mathrm{B}}'_g$.

2. **Relations entre PSM de première et de troisième espèce.**

Soit $\tilde{\mathrm{Z}}'$ un PSM de troisième espèce. On vérifie facilement (en conditionnant par rapport à $\mathscr{F}'_x$ pour $x < v$) que si $v \leqslant t$, $\tilde{\mathrm{E}}'_{z,v} \{ f(\mathrm{Z}_t, \mathrm{U}_t, \mathrm{V}_t) \}$ ne dépend que de z et de $t - v$; on note $\bar{\mathrm{K}}'_{t-v} f(z)$ cette expression : $\bar{\mathrm{K}}'_t$ est une transition de E dans $\bar{\mathrm{E}}$. Enfin la formule suivante, où $\mathrm{A} \in \mathscr{F}'_\infty$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{B}([0, \infty[)$, définit une probabilité de transition $\bar{\mathrm{P}}_{z,u,v}(d\omega)$ de $(\bar{\mathrm{E}}, \bar{\mathscr{E}})$ dans $(\Omega, \mathscr{F})$:

$$\bar{\mathrm{P}}_{z,u,v} \{ \mathrm{A} \cap \{ \mathrm{U}_0 \in \mathrm{B} \} \} = 1_{\mathrm{B}}(u) \tilde{\mathrm{P}}'_{z,v} \{ \mathrm{A} \} . \tag{32}$$

THÉORÈME IV-4. — (i) *Si* $\tilde{\mathrm{Z}}'$ *est un PSM de troisième espèce et si* $\bar{\mathrm{P}}_{z,u,v}$ *est défini par* (32), $\bar{\mathrm{Z}} = (\Omega, \mathrm{U}_0, \mathrm{Z}_t, \bar{\mathrm{P}}_{z,u,v})$ *est un PSM de première espèce tel que* $\tilde{\mathrm{Q}}(z, x ; .)$ *soit indépendant de* x.

(ii) *Si* $\bar{\mathrm{Z}}$ *est un PSM de première espèce tel que* $\tilde{\mathrm{Q}}(z, x ; .)$ *soit indépen-*

dant de x, les $\bar{P}_{z,u,v}(.)$ *admettent une restriction* $\tilde{P}'_{z,v}(.)$ *à* $\mathcal{F}'_\infty$ *indépendante de u, et* $\tilde{Z}' = (\Omega, Z_t, \tilde{P}'_{z,v})$ *est un PSM de troisième espèce.*

Si $\tilde{H}'_t$, $\tilde{P}'_t$, $\bar{K}'_t$ *sont associés à* $\tilde{Z}'$ *et si* $\tilde{Q}$, $\bar{P}_t$ *sont associés à* $\bar{Z}$, *dans les deux cas on a :*

$$(33) \qquad \tilde{Q}(z, x\,;\,.) = \tilde{H}'_0(z\,;\,.)$$

$$(34) \qquad \tilde{P}'_t f(z, v) = \int \bar{P}_t(z, u, v\,;\, dz', [0, \infty[, dv') f(z', v')$$

$$(35) \qquad \bar{P}_t f(z, u, v) = 1_{t<v} f(z, u + t, v - t) + 1_{v \leq t} \bar{K}'_{t-v} f(z).$$

Démonstration. — Soit $\tilde{Z}'$ un PSM de troisième espèce et $\bar{P}_{z,u,v}$ défini par (32). Il est clair que $\bar{Z}$ vérifie (S-1-1) et (S-1-2). Définissons $\bar{P}_t$ par (35). Si $Y \in b\mathcal{F}'_t$, on a :

$$\begin{aligned}
&\bar{E}_{z,u,v}\{ 1_A(U_0) Y f(Z_{t+s}, U_{t+s}, V_{t+s}) \} \\
&= 1_A(u) \tilde{E}'_{z,v}\{ Y[1_{V_t > s} f(Z_t, U_t + s, V_t - s) + 1_{V_t \leq s} \tilde{E}'_{Z_t, V_t}\{ f(Z_s, U_s, V_s) \}] \} \\
&= \bar{E}_{z,u,v}\{ 1_A(U) Y \bar{P}_s f(Z_t, U_t, V_t) \},
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\bar{Z}$ vérifie (S-1-3). (34) découle de (35) et de la définition de $\bar{K}'_t$. Enfin (33) provient de (32), de la définition de $\tilde{Q}$ et de ce que $\tilde{H}'_0(z\,;\,.)$ est la loi de (Z_{V_0}, V_{V_0}) pour $\tilde{P}'_{z,v}$. On a donc montré la proposition directe.

Réciproquement soit $\bar{Z}$ un PSM de première espèce tel que $\tilde{Q}(z, x\,;\,.)$ ne dépende pas de x. D'après (5) on vérifie facilement que les restrictions des $\bar{P}_{z,u,v}(.)$ à $\mathcal{F}'_\infty$ ne dépendent pas de u, et on les note $\tilde{P}'_{z,v}(.)$. Il est clair que $\tilde{Z}'$ vérifie (S-3-1) et (S-3-2). Comme $\mathcal{F}'_t \subset \bar{\mathcal{F}}_t$ et comme d'après (5), $\bar{P}_t f(z, u, v)$ ne dépend pas de u si $f(z, u, v)$ n'en dépend pas, $\tilde{Z}'$ vérifie (S-3-3). (34) est immédiat. (33) provient des définitions de $\tilde{Q}$ et $\tilde{H}'_0$. Enfin (35) provient des définitions de $\bar{K}'_t$ et de $\tilde{P}'_{z,v}$. ■

Le résultat suivant pourrait être montré directement à partir de la proposition IV-3.

COROLLAIRE IV-5. — *Soit* $\tilde{Z}'$ *un PSM de troisième espèce et* T *un* $(\mathcal{F}'_t)$*-temps d'arrêt tel que* $\tilde{P}'_{z,v}\{ T \in N_d \} = 0$. *Alors* (30) *est vraie pour tous* $s \geq 0$, $f \in b\tilde{\mathcal{E}}'$, *quand on remplace* t *par* T.

Démonstration. — On définit $\bar{P}_{z,u,v}$ par (32) et on considère le PSM $\bar{Z}$ introduit dans le théorème. T est un $(\bar{\mathcal{F}}_t)$-temps d'arrêt vérifiant la condition de la proposition I-5. En utilisant cette proposition, le résultat se montre alors comme dans la première partie du théorème. ■

On pourrait maintenant déduire des théorèmes III-5 et IV-4 et de la proposition III-6 à quelles conditions on peut passer d'un PSM de seconde espèce à un PSM de troisième espèce, et inversement. Retenons simplement que si $\tilde{Z}$ est de seconde espèce et si $\tilde{R}$ est de la forme

$$\tilde{R}(z\,;\,dz',\,dx) = F_z(dx)P(z,\,dz'),$$

alors (Z_t, V_t) est markovien et la transition $\tilde{H}'_0$ associée à ce processus est

$$\tilde{H}'_0(z\,;\,dz',\,dx) = P(z,\,dz')F_{z'}(dx).$$

Inversement si $\tilde{Z}'$ est de troisième espèce, si $\tilde{H}'_0$ se met sous la forme ci-dessus et si (R-3) est vérifié, (Z_t, U_t) est markovien et $\tilde{R}$ est donnée par la formule ci-dessus. On ne peut se passer de (R-3), comme le montre l'exemple de la remarque II-10 : cet exemple est un PSM de troisième espèce pour lequel $\tilde{H}'_0$ se met sous la forme ci-dessus, mais il ne vérifie pas (R-3) et ce n'est pas un PSM de seconde espèce.

Remarque. — On peut étudier les rapports entre PSM de seconde et de troisième espèce d'un point de vue différent. Soit par exemple $\tilde{Z}$ un PSM de seconde espèce. Si L est un temps de retour de (Z_t, U_t), on pose $Z'_t = Z_{(L-t)^-}$ et on définit U'_t et V'_t à partir de Z'_t comme dans le paragraphe consacré aux notations. On a $V'_t = U_{(L-t)^-}$, donc (Z'_t, V'_t) est le retourné de (Z_t, U_t) à partir de L. Sous de bonnes hypothèses, (Z'_t, V'_t) est markovien, et (Z'_t) est un PSM de troisième espèce. Donc les PSM de seconde et de troisième espèce sont en quelque sorte en dualité.

Ceci explique la dissymétrie de comportement de ces deux espèces de processus, lorsqu'on n'impose pas (R-3) (cf. les théorèmes II-5 et IV-4, et la proposition III-6, ou encore le théorème III-10 et les résultats du paragraphe suivant). En effet (R-2) ne se conserve pas par retournement du temps, alors que (R-3) se conserve.

3. **Mesures invariantes pour un PSM de troisième espèce.**

Soit $\tilde{Z}'$ un PSM de troisième espèce. N^s_A a la même définition qu'au paragraphe III-4.

Définition IV-6. — (i) *Si* $\tilde{\varphi} \in \tilde{M}'_\sigma$, $\tilde{Z}'$ *est* $\tilde{\varphi}$*-récurrent si pour tout* $\tilde{A} \in \tilde{\mathscr{E}}'$ *tel que* $\tilde{\varphi}(\tilde{A}) > 0$ *et tout* $(z, v) \in \tilde{E}'$,

$$\tilde{P}'_{z,v}\left\{ \int 1_{\tilde{A}}(Z_t, V_t)dt = \infty \right\} = 1.$$

(ii) *Si* $\varphi \in M_\sigma$, $\tilde{Z}'$ *est* φ*-récurrent si pour tout* $A \in \mathscr{E}$ *tel que* $\varphi(A) > 0$ *et tout* $(z, v) \in \tilde{E}'$,

$$\tilde{P}'_{z,v}\left\{ \int 1_A(Z_t)dt = \infty \right\} = 1.$$

(iii) *Si* $\varphi \in \mathrm{M}_\sigma$ *et si* $s > 0$, $\tilde{\mathrm{Z}}'$ *est* (φ, s)*-récurrent si pour tout* $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$ *tel que* $\varphi(\mathrm{A}) > 0$ *et tout* $(z, v) \in \tilde{\mathrm{E}}'$, $\tilde{\mathrm{P}}'_{z,v}\{\mathrm{N}^s_{\mathrm{A}} = \infty\} = 1$.

Au sujet de la première partie de cette définition, on pourrait faire les mêmes remarques qu'au début du paragraphe II.

PROPOSITION IV-7. — *Soit* $\tilde{\mathrm{Z}}'$ *un PSM de troisième espèce. Il y a équivalence entre :*

(i) *Il existe* $\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathrm{M}}'_\sigma$ *tel que* $\tilde{\mathrm{Z}}'$ *soit* $\tilde{\varphi}$*-récurrent.*
(ii) *Il existe* $\varphi \in \mathrm{M}_\sigma$ *tel que* $\tilde{\mathrm{Z}}'$ *soit* φ*-récurrent.*
(iii) *Il existe* $\varphi \in \mathrm{M}_\sigma$ *et* $s > 0$ *tels que* $\tilde{\mathrm{Z}}'$ *soit* (φ, s)*-récurrent.*

Démonstration. — On peut toujours supposer $\tilde{\varphi}$ ou φ finies. Si on a (i), on définit $\varphi \in \mathrm{M}$ par $\varphi(\mathrm{A}) = \tilde{\varphi}(\mathrm{A} \times]0, \infty[)$, et on a clairement (ii).

Supposons qu'on ait (ii). Il existe $s > 0$ tel que $\varphi' \in \mathrm{M}$ défini par $\varphi'(\mathrm{A}) = \varphi\tilde{\mathrm{H}}'_0(\mathrm{A} \times]s, \infty[)$ ne soit pas identiquement nulle. On montre alors que $\tilde{\mathrm{Z}}'$ est (φ', s)-récurrent comme dans la proposition III-9, en prenant $\mathrm{B} = \{ z ; \tilde{\mathrm{H}}'_0(z ; \mathrm{A} \times]s, \infty[) \geqslant \beta \}$.

Enfin si on a (iii), on montre (i) là encore comme dans la proposition III-9, avec la même mesure $\tilde{\varphi}$, et en remplaçant U_t par V_t. ■

Nous arrivons maintenant au résultat principal. Contrairement à ce qui précède, nous imposons (R-3). En effet nous ne connaissons pas la forme de la mesure invariante lorsque (R-3) n'est pas vérifié. Posons :

$$\mathrm{P}'(z, dz') = \tilde{\mathrm{H}}'_0(z ; dz',]0, \infty[).$$

THÉORÈME IV-8. — *Soient* $\varphi \in \mathrm{M}_\sigma$ *et* $\tilde{\mathrm{Z}}'$ *un PSM de troisième espèce,* φ*-récurrent, vérifiant (R-3), de semi-groupe* $(\tilde{\mathrm{P}}'_t)$*. Il existe* $v' \in \mathrm{M}_\sigma$ *unique (à une constante près) telle que* $v'\mathrm{P}' = v'$ *et que l'unique mesure (à une constante près)* $\tilde{\mu}' \in \tilde{\mathrm{M}}'_\sigma$ *invariante pour* $(\tilde{\mathrm{P}}'_t)$ *soit définie par :*

$$\tilde{\mu}'(\tilde{\mathrm{A}}) = \int v'(dz)\tilde{\mathrm{H}}'_0(z ; dz',]x, \infty[)dx 1_{\tilde{\mathrm{A}}}(z, x). \tag{36}$$

Démonstration. — On peut supposer $\varphi \in \mathrm{M}$, et on définit $\bar{\varphi} \in \bar{\mathrm{M}}_\sigma$ par :

$$\bar{\varphi}(\bar{\mathrm{A}}) = \int \varphi\tilde{\mathrm{H}}'_0(dz, dx)dy 1_{0 \leqslant y < x} 1_{\bar{\mathrm{A}}}(z, y, x - y).$$

Si $\bar{\varphi}(\bar{\mathrm{A}}) > 0$, il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que si

$$\tilde{\mathrm{B}} = \left\{ (z, x) ; \int_0^x 1_{\bar{\mathrm{A}}}(z, y, x - y)dy \geqslant \alpha \right\}$$

et

$$C = \{ z ; \tilde{H}'_0(z ; \tilde{B}) \geqslant \beta \},$$

on ait $\varphi(C) > 0$. On peut reprendre mot pour mot le début de la démonstration du théorème III-10, pour obtenir que pour tout $(z, v) \in \tilde{E}'$,

$$\tilde{P}'_{z,v}\left\{ \int 1_A(Z_t, U_t, V_t)dt = \infty \right\} = 1.$$

On définit $\bar{P}_{z,u,v}$ par (32) et on considère le PSM de première espèce $\bar{Z}$ introduit au théorème IV-4. D'après ce qui précède, il est $\bar{\varphi}$-récurrent, et il vérifie (R-3). D'après le théorème II-2, son semi-groupe admet une mesure invariante $\bar{\mu}$ de la forme (8), avec $\tilde{v}\tilde{Q} = \tilde{v}$. De plus si (cf. (10) et (33))

$$\tilde{\mu}(\tilde{A}) = \int \bar{\mu}(dz, du, dv)e^{-v}\tilde{H}'_0(z ; \tilde{A}),$$

on a $\tilde{v}(dz, dx) = \tilde{\mu}\tilde{W}(dz, dx)(1/(1 - e^{-x}))$. Si $\bar{U}$ est le potentiel de $\bar{Z}$, on définit le noyau $\tilde{S}$ sur $\tilde{E}'$ par :

$$\tilde{S}(z, v ; \tilde{A}) = 1_{\tilde{A}}(z, v) + \int \bar{U}(z, 0, v ; dz', dx, dy)1_{\tilde{A}}(z', x + y).$$

En appliquant (7), il vient alors pour $v \leqslant t$:

$$\int \bar{H}_t(z, v ; dz', du', dv')1_{\tilde{A}}(z', u' + v')$$
$$= \int \tilde{S}(z, v ; dz', dv')\tilde{H}'_0(z' ; dz'', dx)1_{v' \leqslant t < v' + x}1_{\tilde{A}}(z'', x),$$

$$\tilde{W}(z, v ; \tilde{A}) = 1_{\tilde{A}}(z, v)(1 - e^{-v}) + \int \tilde{S}(z, v ; dz', dv')\tilde{H}'_0(z' ; dz'', dx)e^{-v'}(1 - e^{-x})1_{\tilde{A}}(z'', x)$$

$$\tilde{v}(\tilde{A}) = \int \bar{\mu}(dz, du, dv)e^{-v}\tilde{H}'_0(z ; \tilde{A}) + \int \tilde{\mu}\tilde{S}(dz, dv)\tilde{H}'_0(z ; \tilde{A})e^{-v}.$$

Si on pose

$$v(A) = \int \bar{\mu}(dz, du, dv)e^{-v}1_A(z) + \int \tilde{\mu}\tilde{S}(dz, dv)e^{-v}1_A(z),$$

on voit que $\tilde{v} = v\tilde{H}'_0$. Posons alors $v' = vP'$. Comme $\tilde{v}\tilde{Q} = \tilde{v}$, il vient $\tilde{v} = \tilde{v}\tilde{Q} = vP'\tilde{H}'_0 = v'\tilde{H}'_0 = v\tilde{H}'_0$, d'où on déduit $v'P' = v'$ et $\tilde{v} = v'\tilde{H}'_0$. Comme $\tilde{v} \in \tilde{M}'_\sigma$, soit $(\tilde{A}_n)$ une suite d'éléments de $\tilde{\mathscr{E}}'$ croissant vers $\tilde{E}'$, telle que $\tilde{v}(\tilde{A}_n) < \infty$ pour tout n ; si

$$A_n = \left\{ z ; \tilde{H}'_0(z ; A_n) \geqslant \frac{1}{n} \right\},$$

A_n croît vers E et $\nu'(A_n) \leqslant n\,\tilde{\nu}(\tilde{A}_n)$, donc $\nu' \in M_\sigma$. Définissons alors $\tilde{\mu}'$ par (36). Il est clair que :

$$\tilde{\mu}'(\tilde{A}) = \int \bar{\mu}(dz, du, dv) 1_{\tilde{A}}(z, v), \tag{37}$$

donc d'après (34), $\tilde{\mu}'$ est invariant pour $(\tilde{P}'_t)$. Reprenons alors la suite (A_n) construite ci-dessus ; si $\tilde{A}'_n = A_n \times]0, n]$, $\tilde{A}'_n$ croît vers $\tilde{E}'$ et $\tilde{\mu}'(\tilde{A}'_n) \leqslant n\nu'(A_n)$, car $\nu'P' = \nu'$; donc $\tilde{\mu}' \in \tilde{M}'_\sigma$.

Enfin supposons qu'il existe une autre mesure $\nu'_1 \in M_\sigma$ vérifiant $\nu'_1 P' = \nu'_1$ et donnant $\tilde{\mu}'$ par (36). Si $\nu'(A) < \infty$, $\nu'_1(A) < \infty$, et $f_n(z, x) = n 1_A(z) 1_{x \leqslant 1/n}$, il vient :

$$\begin{aligned}\lim_{(n)} \tilde{\mu}'(f_n) &= \int \nu'(dz) \lim_{(n)} n \int_0^{1/n} \tilde{H}'_0(z\,;\, A \times]x, \infty[)dx \\ &= \nu'P'(A) = \nu'(A),\end{aligned}$$

et de la même manière cette limite égale $\nu'_1(A)$. Donc $\nu'_1 = \nu'$. ∎

REMARQUE. — L'exemple de la remarque II-10 est un PSM de troisième espèce, récurrent, ne vérifiant pas (R-3). La mesure invariante est :

$$\tilde{\mu}'(i, dx) = \begin{cases} e^{-x}dx & \text{si } i = 2 \\ e^{-2ix}dx & \text{si } i \geqslant 3, \end{cases}$$

et elle ne vérifie pas (36). Cependant elle est obtenue à partir de la mesure invariante $\bar{\mu}$ pour (Z_t, U_t, V_t) par la formule (37).

D'une manière générale, (37) définit une mesure invariante pour $(\tilde{P}'_t)$. Mais on ne sait pas montrer sans (R-3) que cette mesure est σ-finie et, même si c'est le cas, elle n'est pas forcément de la forme (36).

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] J. AZEMA, M. DUFLO et D. REVUZ, Mesures invariantes des processus de Markov récurrents. Sém. Proba. Strasbourg III, Springer-Verlag, *Lect. Notes in Math.*, t. **88**, 1968, p. 24-33.

[*2*] J. JACOD, Un théorème de renouvellement pour les chaînes semi-markoviennes. *C. R. Acad. Sci.*, t. **270**, 1970, p. 255-258.

[*3*] J. JACOD, Théorème de renouvellement et classification pour les chaînes semi-markoviennes. *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **VII**, 2, 1971, p. 83-129.

[*4*] P. LÉVY, *Processus semi-markoviens*. Proc. Int. Cong. Math., III, Amsterdam, 1954.

[*5*] R. PYKE et R. SCHAUFELE, The existence and uniqueness of stationary measures for Markov renewal processes. *Ann. Math. Stat.*, t. **37**, 1966, p. 1439-1462.

(Manuscrit reçu le 2 octobre 1972).

Directeur de la publication : GUY DE DAMPIERRE.

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPOT LÉGAL ÉD. N° 1947*b*. IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 6514. 3-1973.