D. DACUNHA-CASTELLE

Remarques sur les isomorphismes entre espaces d'Orlicz

Annales de l'I. H. P., section B, tome 9, n° 1 (1973), p. 59-75
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1973__9_1_59_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. IX, n° 1, 1973, p. 59-75. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Remarques sur les isomorphismes entre espaces d'Orlicz

par

D. DACUNHA-CASTELLE
Mathématiques. Ex-Faculté des Sciences,
91-Orsay, France

RÉSUMÉ. — Les espaces d'Orlicz sont des cas particuliers de ψ-espaces ; nous avons essayé de montrer que ce point de vue, comme les résultats concernant les ultraproduits sont intéressants du point de vue de la recherche d'espaces de Banach isomorphes à des sous-espaces d'espaces d'Orlicz (cf. [5]).

Les espaces « limites » jouent un rôle important qui devrait être généralisable, d'où l'intérêt de définitions adéquates.

Le cas des espaces de suites est le plus simple et a été complètement résolu dans [1]. Dans le cas où intervient un espace de fonctions le seul cas complètement résolu est celui où l'espace d'arrivée est L^p pour $1 \leqslant p \leqslant 2$ (cf. [3]). Dans ce travail nous avons essayé de montrer que l'on pouvait espérer trouver une formulation pour les conditions d'isomorphisme qui recouvre tous les cas. Nous donnons des résultats essentiellement obtenus à partir de ceux de ([1], [3], [4]). Il est à noter que ces résultats ont tous des interprétations probabilistes qui seront plus complètement développées dans [6].

SUMMARY. — Some results are given on the existence of an isomorphism between an Orlicz space and a subspace of another given Orlicz space. In the case of functions spaces, the only known methods are the probabilistic ones.

1. DÉFINITIONS

D — 1. ψ-ESPACES. — Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\psi : E \to \mathbb{R}^+$ une fonction telle que

1. $\psi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\psi(-x) = \psi(x)$
3. $\psi(\theta x + (1-\theta)y) \leqq \theta\psi(x) + (1-\theta)\psi(y)$ pour tout $\theta \in [0, 1]$, $x, y \in E$.

ψ est donc convexe et $\psi_x(\lambda) = \psi(\lambda x)$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. En posant $\| x \| = \inf_{\mathbb{R}^+} \left\{ \lambda, \psi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leqq 1 \right\}$ on définit sur E une structure d'espace normé (immédiat).

Exemples. — 1. Soit E un espace de Banach, $\psi(x) = F(\| x \|)$, où F est une fonction convexe.

D — 2. Soit F une fonction convexe $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, satisfaisant la condition Δ_2 d'Orlicz : il existe $k > 1$ avec $F(2x) < kF(x)$ pour tout x. L'espace $L_F(\Omega, \mu)$ des μ-classes de fonctions f, F-sommables, est un ψ-espace de Banach, avec

$$\psi(f) = \int_\Omega F(|f|)d\mu$$

Un tel espace est appellé *espace d'Orlicz* $L_F(\Omega, \mu)$. Si μ est une mesure de probabilité diffuse on notera par L_F^K l'espace correspondant. l_F désignera l'espace des suites F-sommables.

D — 3. Deux ψ-espaces sont dits ψ-isomorphes s'il existe une application linéaire $T : B \overset{\text{sur}}{\leftrightarrow} C$ telle que l'on ait $\sup_{x \in B} \left(\frac{\psi T(x)}{\psi(x)}, \frac{\psi(x)}{\psi(Tx)} \right) < \lambda$. On notera ceci par $B \overset{\psi}{\sim} C$.

Remarque. — On a les relations d'équivalence suivantes pour les espaces d'Orlicz et les fonctions associées :

a) il existe a, b, m, M, $0 < a, b, m$, M avec

$$m \leqslant \frac{F(ax)}{G(bx)} \leqslant M \qquad (e)$$

On notera par $B \sim C$ l'existence d'un isomorphisme d'espace de Banach entre B et C. On notera par $B \to C$ l'existence d'un isomorphisme de B sur un sous-espace de C.

b) S'il existe x_0 tel que (e) soit vérifiée pour $x \geqslant x_0$, on pose $F \overset{\infty}{\sim} G$.

c) S'il existe x_0 tel que (*e*) soit vérifiée pour $x \leqslant x_0$, on pose $F \overset{0}{\sim} G$. On a alors les implications suivantes :

$$F \sim G \Rightarrow L_F \overset{\psi}{\sim} L_G.$$
$$F \overset{\infty}{\sim} G \Rightarrow L_F^K \sim L_G^K$$
$$F \overset{0}{\sim} G \Rightarrow l_F \sim l_G$$

D — 4. Soit F une fonction d'Orlicz. On note :

$$C_{a,b}(F) = \left\{ \int_{\mathbb{R}^+} \frac{F(\lambda x)}{F(x)} d\mu(x) \quad \begin{array}{l} \text{où } \mu \text{ est une probabilité sur } \mathbb{R}^+ \\ \text{et } 0 \leqq a < \lambda < b \leqq \infty \end{array} \right\}.$$

$C_{a,b}(F)$ est un convexe.

$$\lim_{\infty}(F) = \left\{ \lim_{\mathcal{U}} \frac{F(\lambda x)}{F(x)}, \quad \text{où } \mathcal{U} \text{ est un ultrafiltre à l'}\infty \right\}.$$

$$\lim_{0}(F) = \left\{ \lim_{\mathcal{U}} \frac{F(\lambda x)}{F(x)}, \quad \text{où } \mathcal{U} \text{ est un ultrafiltre en } 0 \right\}.$$

On note $E_\infty(F)$ (resp. $E_0(F)$) le convexe compact engendré par $\lim\limits_{\infty}(F)$ (resp. par $\lim\limits_{0}(F)$), et $\overline{C(F)}$ le convexe compact engendré par $C(F)$, $E_0(F)$, $E_\infty(F)$. Enfin on note par $\overline{C_{0,1}(F)}$ le convexe compact engendré par $C_{0,1}(F)$ et $E_0(F)$, et $C_{1,\infty}(F)$ le convexe compact engendré par $C_{1,\infty}(F)$ et $E_\infty(F)$ (1).

D — 5. La classe des espaces $L_{C(F)}$ est ainsi définie :

soit (Ω, μ) un espace mesuré ; H une application mesurable

$$H : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$

telle que $H(\omega, .) \in \overline{C(F)}$ pour tout ω, alors $L_H(\Omega, \mu)$ est l'espace des classes de fonctions f telles que

$$\int_\Omega H(\omega, |f(\omega)|) d\mu < \infty ;$$

$L_{C(F)}$ est la classe des espaces L_H.

D — 6. Si F est une fonction d'Orlicz donnée sur (x_0, ∞) (resp. sur $(0, x_0)$) on note prol F l'ensemble des prolongements de F à $\mathbb{R}^+$ qui sont des fonctions d'Orlicz.

(1) Les fonctions de $C_{a,b}(F)$ sont munies de la topologie de la convergence simple au voisinage de 0 ou de l'∞.

La convexité et la condition Δ_2 assurent que $\overline{C(F)}$ est compact et formé de fonctions convexes.

D — 7. Soit B un espace de Banach et $\| \ \|_1$ une semi-norme ou un écart sur B moins fin que la norme.

Une suite x_n d'éléments de B est dite 1-limite si x_n est bornée soit $0 < m < \|x_n\| < M < \infty$ et si $\|x_n\|_1 \to 0$.

En particulier sur L_F^K nous noterons $\| \ \|_0$ la distance associée à la convergence en probabilité $\left(\|f\|_0 = \int (1 \wedge |f|) d\mu \text{ par exemple} \right)$ et sur l_F nous utiliserons $\| \ \|_1 = \| \ \|_\infty$.

D — 8. Une fonction d'Orlicz F est dite appartenir à K(2, 1) si $\dfrac{F(x)}{x^2} \sim$ à une fonction décroissante.

2. REMARQUE SUR LES ψ-ISOMORPHISMES ET RÉSULTATS

Soit (L_F^K, L_G^K), (l_F, L_F^K), (l_F, l_G) des couples d'espaces d'Orlicz. Les problèmes d'isomorphisme ne sont posés qu'en termes de valeurs de F et G sur $(1, \infty)$ s'il s'agit d'espaces L^K, sur $(0, 1)$ s'il s'agit d'espaces l. F étant donnée, sur un intervalle, admet différents prolongements à $\mathbb{R}$, qui donnent des structures de ψ-espaces en général non isomorphes.

La notion de ψ-isomorphisme est très directement liée à celle d'isomorphisme de Banach, dans le cas des espaces d'Orlicz, d'abord parce que les isomorphismes effectivement construits sont en fait presque des ψ-isomorphismes. Ensuite, on sait (cf. [*4*]) que les ultraproduits au sens des espaces de Banach et au sens des ψ-espaces coïncident; or le calcul de l'ultraproduit donne des renseignements sur les isomorphismes possibles.

On a utilisé deux types d'ψ-isomorphisme en quelque sorte opposés : l'un envoie les éléments à supports disjoints sur des éléments à supports disjoints, l'autre envoie les éléments à supports disjoints sur des variables aléatoires indépendantes.

Les résultats très partiels qui suivent visent à illustrer cette situation.

THÉORÈME 1. — Si $F \in E_\infty(G)$, alors l_F se plonge dans L_G^K.

THÉORÈME 2. — Si $G \in K(2,1)$, et $F \in \overline{C_{1,\infty}(G \wedge x^2)}$, l_F se plonge dans L_G^K par un isomorphisme.

(*) Note rajoutée à la correction des épreuves :

Il résulte de nos résultats de [*4*] que la condition $F \in \overline{C_{1,\infty}(G \wedge x^2)}$ est aussi nécessaire (cf. [*6*] pour les détails).

THÉORÈME 3. — Une condition nécessaire et suffisante pour que l_F soit isomorphe à un sous-espace de L^p, $1 \leqslant p \leqslant 2$, est que $\overline{F \in C_{1,\infty}(x^p \wedge x^2)}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que L_F^K soit isomorphe à un sous-espace de L^p, $1 \leqslant p \leqslant 2$, est que $\overline{F \in C_{0,1}(x^p \wedge x^2)}$.

THÉORÈME 4. — Une condition suffisante pour que L_F^K soit isomorphe à un sous-espace de L_G^K, est que $\dot{G} \in \dot{K}(2,1)$ et que F, G vérifient les deux conditions

1) $$\frac{F}{G} \overset{\infty}{\approx} \text{croissante}$$

2) $$\frac{F(2x)}{F(x)} \quad \text{ou} \quad \frac{G(2x)}{G(x)} \overset{\infty}{\approx} \text{croissante} \qquad (\text{pour } x \geqslant 1).$$

3. DÉMONSTRATIONS

Remarquons d'abord que la classe $L_{\overline{C(G)}}$ est une classe L_F au sens de [5], page 3. Avec les définitions des ψ-sommes d'espaces L_F données dans [5], page 2 on voit que si $F \in \overline{C(G)}$ on a

$$L_F = \int_V L_{G(v)} d\mu(v)$$

si

$$F(c) = \int_{\mathbb{R}^+} G(cx) \frac{dv(x)}{G(x)} + \int_U \lim_{\mathscr{U}} \frac{G(cx)}{G(x)} dv'(\mathscr{U})$$

où U est l'ensemble $U_0 + U_\infty$ des ultrafiltres non triviaux sur $\mathbb{R}^+$ en 0 et à l'∞ ; $V = U + R$, $\mu = v + v'$.

Le cas $l_F \to L_G^K$.

G n'est donnée de manière naturelle que dans un voisinage de l'∞, $x > x_0$ et F pour $x < x_1$. Comme le montre le cas de L^p étudié plus loin, la formulation du résultat n'est intéressante que pour un choix bien particulier d'un prolongement de G à $\mathbb{R}$ tout entier.

Les lemmes qui suivent sont faits pour nous ramener à la situation suivante, l'espace l_F est la ψ-somme d'espaces l_{F_ω} sur un espace de probabilité (Ω, μ) que l'on pourra grâce au lemme (1) considérer comme discret, ce qui simplifie les problèmes de mesurabilité ; donc

$$l_F = \int_\Omega l_{F_\omega} d\mu(\omega).$$

Pour chaque il existe un ψ-isomorphisme de $l_{F_\omega} \cap B_\infty$ (où B_∞ est la boule unité de l'∞) dans L_G^K, soit j_ω cet isomorphisme. Les bornes de j_ω sont uniformes en ω, soit

$$1 - \varepsilon \leqslant \frac{\psi_{F_\omega}(\alpha)}{\psi_G(j_\omega(\alpha))} \leqq 1 + \varepsilon, \qquad \alpha \in B_\infty \cap l_{F_\omega}.$$

Alors il existe un ψ-isomorphisme de la boule unité de l_F dans L_G^K. En effet, si $\alpha \in l_F$ alors $\alpha \in l_{F_\omega}$ puisque l_F est ψ-somme des espaces l_{F_ω} et comme $\alpha \in B(F)$ implique que $\alpha \in B_\infty$, l'application $j : l_F \to L^1(\Omega, \mu, L_G^K)$ est bien définie par

$$\alpha \to \int_\Omega j_\omega(\alpha) d\mu$$

et j est un ψ-isomorphisme de la boule unité de l_F dans $L^1(\Omega, \mu, L_G^K)$. Mais il est immédiat (par découpage) que $L^1(\Omega, \mu ; L_G^K)$ est pour μ discrète isomorphe à un sous-espace de L_G^K d'où le résultat.

Le fait que les isomorphismes construits soient des ψ-isomorphismes de boules unités mais pas de tout l'espace, explique que pour avoir des conditions simples on est amené à choisir des fonctions particulières dans prolong G.

LEMME 1. — *Si* $F \in \overline{C(G)}$, *il existe des suites* (x_n), $x_n \in \mathbb{R}^+$, $(\mathcal{U}_m)$ $\mathcal{U}$ *ultra-filtre sur* $\mathbb{R}^+$, (p_n, q_m), $0 < p_n, q_m < 1$;

$$\sum_n p_n + \Sigma q_m = 1$$

avec

$$F(x) \sim \sum_n \frac{G(xx_n)}{G(x_n)} p_n + \sum_m \lim_{\mathcal{U}_m} \frac{G(\lambda x)}{G(\lambda)} q_m$$

La démonstration est analogue à celle des lemmes 1 de [*1*], page 386 ou III, 1 de [*3*], page 463 ; et résulte de ce que F et G satisfont la condition Δ_2.

LEMME 2. — *Soit* $F(x) = \Sigma G_k(x) p_k$, avec $0 < p_k$, $\Sigma p_k = 1$.
Soit (e_n) *la base canonique de* l_F.

Posons $j(e_n) = \sum_k b_n^k 1_{B_n^k}$, *où les* B_n^k *sont des ensembles de* (0,1) *deux à deux disjoints ; et tels que*

$$\sum_n \mu(B_n^k) = \eta_k \qquad \text{et} \qquad \Sigma \eta_k \leqq 1,$$

où μ *est la mesure de Lebesgue.*

Supposons que pour toute suite (α_n) *telle que* $\sum_n F(\alpha_n) = 1$, *pour tout* k, *on ait*

$$\left|\sum_n G_k(\alpha_n) - \Sigma G(\alpha_n b_n^k)\mu(B_n^k)\right|^n < \varepsilon', \qquad \text{pour un certain } \varepsilon > 0$$

alors l_F *est isomorphe à un sous-espace de* L_G^K. *Immédiat.*

LEMME 3. — *Si* $G \in K(2,1)$ *et si* $F \in C_{1,\infty}(x^2 \wedge G)$ *alors* l_F *est isomorphe à* L_G^K.

La démonstration se trouve dans [*3*]. Nous donnerons par ailleurs dans [*6*], une étude plus détaillée des constantes d'isomorphisme.

De manière précise nous utiliserons le résultat suivant :

il existe une suite de variables aléatoires X_n, indépendantes, équi-distribuées telles que si $\sum_n F(\lambda_n) \leqslant 1$, alors $\sum_n F(\lambda_n) \sim E_n G\left(\sum_n \lambda_n X_n\right)$.

LEMME 4. — *Supposons que* $F(x) = \lim_n \frac{G(c_n x)}{G(c_n)}$ *où* $c_n \to \infty$ *et soit* η *donné,* $\eta > 0$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une sous-suite* b_n *de* c_n, *et une suite d'ensembles* B_n, *deux à deux disjoints de* $(0,1)$, *et tels que :*

$$\sum_n \mu(B_n) < \infty$$

et que l_F *soit* $(1 + \varepsilon)$*-isomorphe au sous-espace de* L_G^k *engendré par les fonctions* $b_n I_{B_n}$.

Démonstration du lemme. — Commençons par prendre une sous-suite b_n de c_n telle que $\sum_n \frac{1}{G(b_n)} < \infty$ et montrons que l'application linéaire définie par $j(e_n) = b_n I_{B_n}$ donne un $(1 + \varepsilon)$-isomorphisme de l_F dans $L_G(0, 1)$.

Sous-lemme : *a*) Il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\varepsilon_n > 0$ $\sum_n F(\varepsilon_n) < \varepsilon$ et que $\frac{G(\alpha_n b_n)}{G(b_n)} > (I - \varepsilon)F(\alpha_n)$ pour tout α_n, $\varepsilon_n < \alpha_n$.

b) Il existe une suite (ε'_n), $\varepsilon'_n > 0$ telle que $\Sigma F(\varepsilon'_n) < \varepsilon$ et que

$$\frac{G(\alpha_n b_n)}{G(b_n)} > (I + \varepsilon)F(\alpha_n) \qquad \text{pour tout } \alpha_n > \varepsilon'_n.$$

En effet posons $\varepsilon_n = \inf\left(x, \frac{G(x b_n)}{G(b_n)} > 1 - \varepsilon \text{ pour tout } x \text{ tel que } x > \varepsilon_n\right)$.

Alors $\varepsilon_n \to 0$ car sinon il existerait une suite x_n et $a > 0$, x_n sous-suite de ε_n telle que $x_n \to a$, $x_n \geqq a$; on aurait alors

$$\frac{G\left(\frac{1}{2}ab_n\right)}{G(b_n)} < (I - \varepsilon)F\left(\frac{1}{2}a\right)$$

pour tout n, ce qui est impossible.

On peut donc choisir des sous-suites b''_n et ε''_n aient la propriété *a*). De la même manière, on pose

$$\varepsilon'_n = \inf\left\{ y, \frac{G(xb''_n)}{G(b''_n)} < (1 + \varepsilon)F(x) \qquad \text{pour tout } x > y \right\}$$

Le même raisonnement montre que l'on peut choisir des sous-suites ε''_n et b_n vérifiant *b*).

On peut alors démontrer le lemme.

On a

$$\sum_n \frac{G(\alpha_n b_n)}{G(b_n)} = \sum_{\alpha_n, \alpha_n > \varepsilon_n} + \sum_{\alpha_n, \alpha_n \leqslant \varepsilon_n}$$
$$\geqq \sum_{\alpha_n, \alpha_n > \varepsilon_n}$$
$$= (1 - \varepsilon) \sum_{\alpha_n > \varepsilon_n} F(\alpha_n)$$

et

$$\sum_n F(\alpha_n) \leqq \sum_n F(\varepsilon_n) \leqq \varepsilon$$

et donc

$$\sum_n \frac{G(\alpha_n b_n)}{G(b_n)} \geqq (1 - \varepsilon)(\Sigma F(\alpha_n) - \varepsilon)$$

De même

$$\sum_n \frac{G(\alpha_n b_n)}{G(b_n)} = \sum_{\alpha_n, \alpha_n > \varepsilon'_n} + \sum_{\alpha_n, \alpha_n \leqq \varepsilon'_n}$$
$$\leqq (1 + \varepsilon) \sum_{\alpha_n, \alpha_n > \varepsilon_n} F(\alpha_n) + \sum_{\alpha_n < \varepsilon'_n} F(\varepsilon'_n), \text{ puisque F est croissante}$$
$$\leqq (1 + \varepsilon) \sum_n F(\alpha_n) + \varepsilon$$

Le théorème 1 résulte alors de façon évidente des trois lemmes précédents.

Remarquons que l_F s'envoie sur un espace limite de L_G (pour la convergence en probabilité).

La démonstration vaut pour montrer la partie condition suffisante du théorème 1 de [*1*]; les suites b_n sont alors des suites tendant vers 0 les ensembles B_n des blocs de b_n^{-1} éléments égaux. Dans ce cas si $F \in E_0(G)$, l_F se plonge sur un espace limite de 1_G (pour la norme $\| \ \|_\infty$). Le théorème résulte de la construction directe d'un isomorphisme de l_F dans $L_G(0,2)$ défini comme suit :

La fonction F s'écrit $F = aF_1 + (1 - a)F_2$, avec $F_1 \in C(G \wedge x^2)$ et $F_2 \in E_\infty(G)$, $e_1, \ldots, e_n ; \ldots$ étant la base canonique de 1_F, on pose $j(e_n) = aX_n + b_n 1_{B_n}$, où X_n est la suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées définies au lemme sur (0,1) et prolongées par 0 à (1,2) et $b_n 1_{B_n}$ la suite associée à F_2 dans la démonstration du théorème 1 définie sur (1,2) et prolongée par 0 sur (0,1). Il est alors immédiat de vérifier que j définit bien par linéarité l'isomorphisme cherché.

Le cas des espaces L^p.

Il est assez intéressant de remarquer que dans ce cas les conditions nécessaires et suffisantes de plongement d'un espace d'Orlicz ne s'écrivent pas avec la fonction x^p mais avec $x^2 \wedge x^p$.

Il est en effet évident que l'on a :

$$\overline{C(x^p)} = \{ x^p \}$$

et l'on sait donc qu'il existe L_F, avec F non équivalent à x^p, et L_F se plongeant dans L^p.

On a

$$E_0(x^2 \wedge x^p) = \{ x^2 \}, \qquad \text{et} \qquad E_\infty(x^2 \wedge x^p) = \{ x^p \}.$$

Et l'on sait que L^2 se plonge isométriquement dans tout espace d'Orlicz et que l^p se plonge dans L^p.

Pour $1 \leqslant p \leqslant 2$, les résultats de [*3*] démontrent donc le théorème. On peut dégager la situation suivante que nous retrouverons pour certains espaces d'Orlicz plus loin.

Les espaces de E_∞ se plongent sur des espaces limites (pour la convergence en probabilité), d'un autre côté l^p est bien isomorphe à un espace engendré par des variables aléatoires indépendantes mais l'espace en question est muni de la convergence en probabilité et les variables ne sont pas dans L^p.

Remarquons pour finir que l'on peut avoir la situation suivante $l^p \to L_F \to L^p$. Les classes L^p et $\overline{L_{C_{(1,\infty)}(F)}}$, stables par ultraproduit, sont telles que tout espace de l'une est isomorphe à un sous-espace de l'autre.

Le cas $L_F^K \to L_G^K$.

La seule méthode qui donne des conditions suffisantes, à notre connaissance, est celle des plongements de L_F sur des espaces de variables indépendantes. Elle a le grand inconvénient de limiter la classe des fonctions G considérées à la classe K(2, 1); la conjecture naturelle, provenant de l'étude du cas L^p est celle-ci :

L_F^K *se plonge dans* L_G^K *si et seulement si* $F \in C_{0,1}(x^2 \wedge G)$; F *et* G *appartenant à la classe* K(2, 1). *Remarquons que l'on a, dans ce cas*

$$C_{0,1}(x^2 \wedge G) = \operatorname{conv}(C(G), x^2).$$

Autrement dit, dans ce cas, seuls les plongements du type variable indépendante existeraient.

A l'appui de cette conjecture on a les résultats suivants :

a) THÉORÈME. — *La condition* $G \in K(2,1)$ *et* $F \in \overline{C_{0,1}(x^2 \wedge G)}$ *est suffisante pour que* L_F^K *se plonge dans* L_G^K. Ceci est démontré dans [*3*].

b) La condition $F \in \overline{C(G)}$ n'est pas nécessaire (exemple de L^q et L^p $1 \leqslant p < q$).

c) On voit par ultraproduit que la condition $F \in \overline{C(G)}$ est nécessaire pour que L_F^K soit ψ-isomorphe à un sous-espace de L_G^K.

d) Il ressort des méthodes utilisées (une démonstration détaillée sera donnée dans [*6*]) que si $G \in K(2, 1)$ et si L_F est isomorphe à un sous-espace de L_G^K, alors F est aussi dans K(2, 1).

Démonstration du théoréme 5. — Si $G \in K(2,1)$ et $F \in C_{0,1}(G \wedge x^2)$, on a $\frac{F}{G}$ équivalente à une fonction croissante. Le cas de x^p suggère que la réciproque doit être vraie. En suivant une idée de J. Bretagnolle nous montrons par des interprétations probabilistes qu'il en est ainsi sous une hypothèse supplémentaire. Nous utiliserons les résultats et les notations suivants provenant de [*4*].

a) Si $f \in K(2,1)$, alors

$$f(x) \overset{0}{\sim} \int_0^\infty (x^2\lambda^2 \wedge x\lambda) dN_f(\lambda)$$

où N_f est une probabilité sur $(1, \infty)$ et

$$f(x) \overset{\infty}{\sim} \int_0^\infty (x^2\lambda^2 \wedge x\lambda) dM_f(\lambda)$$

où M_f est une mesure de Lévy sur (0,1), c'est-à-dire une mesure telle que

$$\int_0 x^2 dM_f(x) < \infty$$

b) Pour des suites de nombres positifs la notation $p_n \approx q_n$ signifie qu'il existe des constantes m et M telles que $0 < m \leqslant \frac{p_n}{q_n} \leqslant M$.

c) On notera $\tilde{g}$ la fonction $g \wedge x^2$.

Soient f, g des fonctions d'Orlicz, $f, g \in K(2,1)$. On cherche des conditions pour avoir

$$L_f(0,1) \to L_g^K \tag{1}$$

il est immédiat que si (1) est réalisé

$$L_f^K \to L_g^K. \tag{2}$$

Soit $X(t)$ un processus à accroissements indépendants et symétriques, $t \in [0,1]$, $X(0) = 0$. Soit N la mesure de Lévy de X. On supposera N portée par $[0,1]$.

Pour réaliser (1), on cherche X tel que

$$L_f(0,1) \leftrightarrow [X, g] \tag{3}$$

complétion dans $L_g(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de l'espace des intégrales des fonctions étagées sur $[0,1]$ par rapport à la « mesure » aléatoire X.

On sait, d'après les résultats de [*3*] que

$$[X, g] \sim L_h(0,1) \tag{4}$$

ou

$$h(A) \overset{m}{\approx} \int_0^1 \tilde{g}(Ay)dN(y), \qquad (A \geqslant 1) \tag{5}$$

Pour résoudre (1), nous cherchons donc N tel que

$$f(A) \overset{m}{\approx} \int_0^1 \tilde{g}(Ay)dN(y) \tag{6}$$

L'isomorphisme étudié sera donc celui qui à toute fonction $\varphi \in L_f(0,1)$ fera correspondre

$$\hat{\varphi} = \int_0^1 \varphi(t)dX(t)$$

calculé dans $L_g(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Soit F et G des mesures de Lévy telles que

$$\begin{aligned} f(A) &\overset{m}{\approx} \int_0^1 (A^2x^2 \wedge Ax)dF(x) \\ g(A) &\overset{m}{\approx} \int_0^1 (A^2x^2 \wedge Ax)dG(x) \end{aligned} \tag{7}$$

A une fonction $f \in K(2,1)$, on associera $\bar{f}$ défini sur $]0,1]$ par

$$\bar{f}(s) = s^2 f\left(\frac{1}{s}\right) \tag{8}$$

d'où par exemple des formules du type

$$\bar{f}(s) \overset{m}{\approx} \int (x^2 \wedge xs) dF(x).$$

L'équation (6) s'écrit

$$f(A) \overset{m}{\approx} \int_0^1 (A^2y^2x^2 \wedge Ayx) dN(y) dG(x) \tag{9}$$

$$\bar{f} \overset{m}{\approx} \int (xy \wedge s) M(x) N(y) dx\, dy \tag{10}$$

Supposons maintenant

$$\frac{f}{g} \uparrow_1^\infty \qquad \text{(H)}$$

donc $\bar{f} \uparrow_0^1$ et

$$\frac{\bar{f}}{\bar{g}} \downarrow_1^\infty$$

On peut faire le changement de variables suivant

$$\bar{f}(s) = \bar{l}(t), \frac{\bar{f}(s)}{\bar{g}(s)} = \frac{\bar{l}(t)}{t} \qquad (t = \bar{g}(s))$$

où $\bar{l}$ est associé à la mesure de Lévy L et à la fonction $l \in K(2,1)$.

On a donc $\bar{f}(s) = \bar{l} \circ \bar{g}(s)$.

Soit

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\bar{g}(s)} yL(y)dy + \bar{g}(s) \int_{\bar{g}(s)}^1 L(y)dy \tag{11}$$

et on cherche une représentation

$$\bar{f}(s) \overset{m}{\approx} \int_0^s yN(y)dy + \int_s^1 \bar{g}\left(\frac{s}{y}\right) yN(y)dy \tag{12}$$

Remarquons immédiatement que si

$$g(x) = x^p, \qquad x \geqslant 1, \qquad 1 < p < 2.$$

L étant défini par (C), un calcul élémentaire montre qu'en prenant $N(s) = s^{2-2p}L(s^{2-p})$ alors (11) est une égalité, d'où

PROPOSITION. — *Si* $\frac{f(x)}{x^p} \uparrow_1^\infty$, *on a* $L_f \to L^p$.

2. *Équations de convolution. Cas de* $L^p \to L_f^K$.

Pour des fonctions de K(2,1) les relations suivantes sont équivalentes

$$f \overset{m}{\sim} g$$
$$f(2^n) \overset{m}{\sim} g(2^n).$$

Ceci est immédiat (et largement utilisé dans [*1*]).

Plutôt que résoudre (6), essayons alors d'étudier l'équation (6')

$$f(2^n) \overset{m}{\approx} \sum_{k=0}^{n} g(2^{n-k})m_k + \sum_{k>n} 2^{-2k}m_k \tag{6'}$$

où m_k est une mesure de Lévy portée par l'ensemble $(2^{-k})_{k\in\mathbb{N}^+}$ (rappelons que l'on suppose pour simplifier, $g(x) = x^2$ pour $|x| \leqslant 1$ ce qui ne restreint pas la généralité).

Posons

$$f_n = 2^{-2n}f(2^n) = \bar{f}(2^{-n})$$
$$g_n = 2^{-2n}g(2^n) = \bar{g}(2^{-n})$$
$$v_n = 2^{-2n}m_n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

d'où l'équation (*) équivalente à (6')

$$f_n \overset{m}{\approx} \sum_{0}^{n} g_{n-k}v_k + \sum_{k>n} v_k \quad (*)$$

avec $\sum_{1}^{\infty} v_k = 1$ que l'on peut toujours prendre comme condition de normalisation.

Passant aux fonctions génératrices avec

$$\hat{f}(s) = \sum_{0}^{\infty} f_n s^n, \qquad \hat{g}(s) = \sum_{0}^{\infty} g_n s^n$$
$$\hat{n}(s) = \sum_{0}^{\infty} v_n s^n$$

il vient

$$\hat{f}(s) \overset{m}{\approx} \hat{g}(s)\,\hat{n}(s) + \frac{1 - \hat{n}(s)}{1 - s}$$

Comme $f_n\downarrow$, $f_0 = 1$, $g_n\downarrow$, $g_0 = 1$, en posant

$$p_n = f_{n-1} - f_n, \qquad q_n = g_{n-1} - g_n$$
$$\hat{p}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n s^n, \qquad \hat{q}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n s^n,$$

($*$) est équivalent à

$$\hat{p}(s) \overset{m}{\approx} \hat{q}(s)\,\hat{n}(s)$$

Le problème du plongement des espaces d'Orlicz s'interprète donc en problème de division de lois de variables aléatoires, X, Y étant données, à valeur sur $\mathbb{N}^+$, trouver Z à valeurs sur $\mathbb{N}$ telle que $X \sim Y + Z$, Z indépendante de Y.

On ne sait pas en général trouver une solution. Nous allons donner des conditions suffisantes d'existence d'une solution. Plutôt que de les détailler d'abord, indiquons qu'elles montrent en particulier le résultat suivant :

PROPOSITION. — *Si* $\dfrac{x^p}{f(x)} \uparrow$, *alors on a*

$$L^p \to L_f^K, \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqslant p \leqslant 2.$$

LEMME 1. — Si $\dfrac{f_{n+1}}{f_n} \geqslant \dfrac{g_{l+1}}{g_l}$ pour $l \leqslant n$, et l, $n \in \mathbb{N}$, alors l'équation $\hat{f}(s) = \hat{g}(s)\,\hat{n}(s)$ admet une solution.

Démonstration. — En fait ici, on a une solution pour l'égalité (solution unique). Supposons avoir calculé $v_0, \ldots, v_{n-1} \geqslant 0$, à partir des équations

$$f_n = v_0 g_n + \ldots + v_{n-1} g_1 + v_n.$$

On a

$$1 = v_0 \frac{g_n}{f_n} + \ldots + v_p \frac{g_{n-p}}{f_n} + \ldots + v_{n-1} \frac{g_1}{f_n} + \frac{v_n}{f_n}$$

$$1 = v_0 \frac{g_{n-1}}{f_{n-1}} + \ldots + v_p \frac{g_{n-p-1}}{f_{n-1}} + \ldots + v_{n-1} \frac{g_0}{f_{n-1}}$$

d'où

$$\frac{v_n}{f_n} = v_0\left(\frac{g_{n-1}}{f_{n-1}} - \frac{g_n}{h_n}\right) + \ldots + v_p\left(\frac{g_{n-1-p}}{f_{n-1}} - \frac{g_{n-p}}{f_n}\right) + \ldots + v_{n-1}\left(\frac{g_0}{f_{n-1}} - \frac{g_1}{g_n}\right) \geqslant 0$$

d'où le lemme

LEMME 2. — Il existe $q'_n \overset{m}{\sim} q_n$, $p'_n \overset{m}{\sim} p_n$ tels que $\dfrac{q'_n}{q'_{n-1}} \geqslant \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{p'_n}{p'_{n-1}} \geqslant \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{p'_n}{q'_n} \uparrow \infty$, si on suppose toujours (H) vérifiée $\left(\dfrac{f}{g} \uparrow \infty\right)$.

En effet

$$q_n = g_{n-1} - g_n = \int_{2^{-n}}^{2^{-n+1}} (x - 2^{-n})G(x)dx + 2^{-n}\int_{2^{-n+1}}^{1} G(x)dx$$

or

$$\sup_{2^{-n}\leqslant\alpha\leqslant 2^{-n+1}} \frac{x-2^{-n}}{x} = \frac{1}{2}$$

donc

$$q'_n = 2^{-n}\int_{2^{-n+1}}^{1} G(x)dx \overset{m}{\approx} q_n.$$

De même

$$\begin{aligned} p_n &= f_{n-1} - f_n \\ &\overset{m}{\approx} \int_{g_n}^{g_{n-1}} (x-g_n)L(x)dx + q_n\int_{g_{n-1}}^{1} L(x)dx. \end{aligned}$$

Comme

$$\sup_{g_n\leqslant x\leqslant g_{n-1}} \frac{x-g_n}{x} = \sup_{g_n\leqslant x\leqslant g_{n-1}} \left(1-\frac{g_n}{x}\right) \leqslant \frac{1}{2} \text{ puisque } \frac{g_n}{g_{n-1}} \geqslant \frac{1}{2}$$

(car $g \in K(2,1)$), donc

$$p_n \sim p'_n$$

avec

$$p'_n = q_n\int_{g_{n-1}}^{1} L(x)dx$$

et par suite

$$\frac{p'_n}{q'_n} \overset{m}{\approx} \int_{g_{n-1}}^{1} L(x)dx \uparrow^{\infty}.$$

Remarquons que

$$\frac{p_n}{q_n} = \int_{g_{n-1}}^{1} L(x)dx \leqslant \frac{f_{n-1}}{g_{n-1}}$$

d'après (H).

Lemme 3. — Si $p_n\downarrow$, alors $q_n\downarrow$ et si $\varpi_n = p_{n-1} - p_n$, $\gamma_n = q_{n-1} - q_n$ on a $\dfrac{\varpi_n}{\gamma_n}\uparrow^{\infty}$.

En effet, $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} \geqslant \dfrac{q_{n+1}}{q_n}$ (en prenant éventuellement p'_n et q'_n comme version) donc $q_n\downarrow$.

De plus

$$2^n p_n \sim 2^n q_n \int_{g_{n-1}}^{1} L(y)dy \uparrow \quad \text{car} \quad 2^n q_n = \int_{2^{-n+1}}^{1} C(x)dx\uparrow.$$

Donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peuvent être considérées comme suites associées à des fonctions p et q de $K(2,1)$, $p_n = \overline{p}(2^{-n})$, $q_n = \overline{q}(2^{-n})$ et remarquons que comme précédemment en remplaçant f_n par p_n et g_n par q_n, on a $\frac{\overline{\omega}_n}{\gamma_n} \uparrow \infty$.

Pour terminer, on a le lemme suivant dont se déduit immédiatement le cas $g(x) = x^p$.

LEMME 4. — *a*) Si $p_n \downarrow$, l'équation $\hat{p}(s) \approx \hat{q}(s)\hat{n}(s)$ admet une solution.

b) Si $\frac{f_{n+1}}{f_n} \sim \uparrow$ alors $p_n \sim \downarrow$.

c) Si $\frac{g_{n+1}}{g_n} \sim \uparrow$ alors $p_n \overset{m}{\approx} f_n$ et $q_n \downarrow$ l'équation $\hat{p}(s) \approx \hat{q}(s)\hat{n}(s)$ admet une solution.

Démonstration :

a) D'après le lemme (2), si $p_n \downarrow$, $q_n \downarrow$ et $\frac{p_n}{q_n} \downarrow$ donc d'après le lemme (1) l'équation $\hat{p}(s) = \hat{q}(s)\hat{n}(s)$ admet une solution exacte en prenant les versions décroissantes de p_n et q_n.

b) Si $\frac{f_{n+1}}{f_n} \uparrow$, on a $\frac{p_n}{f_n} \downarrow$ puisque $\frac{f_{n+1}}{f_n} - 1 \geqq \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} - 1$. Mais $\frac{p_n}{f_n} \downarrow$ implique $p_n \downarrow$ car $p_n \leqslant \frac{f_n}{f_{n+1}} p_{n+1} \leqq p_{n+1}$.

c) Si $\frac{g_{n+1}}{g_n} \uparrow$ alors $q_n \downarrow$ (comme en *b*). Mais d'après (H), $\frac{g_{n+1}}{g_n} < \frac{f_{n+1}}{f_n}$ et donc $\frac{f_{n+1}}{f_n} > C > 0$, d'où $p_n \overset{m}{\approx} f_n$.

En conclusion on a le théorème suivant :

THÉORÈME. — Une condition suffisante pour que $L_f^K \to L_g^K$ est que C_1 et C_2 soient réalisées

$$C_1 - \frac{f}{g} \sim \uparrow$$

$$C_2 - \left[\frac{f(2^n)}{2^n} - \frac{f(2^{n+1})}{2^{n+1}}\right] \downarrow$$

ou bien
$$\frac{f(2^{n+1})}{f(2^n)} \uparrow$$

ou bien
$$\frac{g(2^{n+1})}{g(2^n)} \uparrow .$$

En particulier si $f(x)$ ou $g(x)$ valent x^p alors (C − 1) est suffisante, puisque les fonctions intervenant dans C − 2 sont constantes.

Remarque : interprétation de $C_{(1,\infty)}(x^2 \wedge F(x))$.

Soit F une fonction d'Orlicz donnée sur (0,1), on a déjà l'interprétation de $\overline{C}(F)$ (cf. [*1*]); c'est la classe associée aux espaces d'Orlicz isomorphes à un sous-espace de l_F, dans (5) nous avons donné l'interprétation de $\overline{C_{1,\infty}(x^2 \wedge F(x))}$.

THÉORÈME (5). — *Soit* F *donnée sur* (0,1), $F \in K(2,1)$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

I. $G \in C_{(1,\infty)}(x \wedge F(x))$.

II. *Il existe un espace d'Orlicz* l_H, $H \in K(2,1)$ *tel que* l_G *soit l'espace des multiplicateurs* 1-*radonnifiants de* l_F^* *dans* l_H ; (l_G *est alors aussi l'espace des multiplicateurs* 1-*radonnifiants de* l_H^* *dans* l_F).

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] LINDENSTRAUSS et TZAFRIRI, Orlicz spaces of sequences. *Israel journal of Mathematics*, I, vol. **10**, n° 3, p. 379-390 et II, vol. **11**, n° 4, 1972, p. 355-389.

[*2*] SÉMINAIRE SCHWARTZ, *Applications radonnifiantes*, Paris, 1970.

[*3*] BRETAGNOLLE et DACUNHA-CASTELLE, *Annales de l'E. N. S.*, t. **2**, 1969, p. 437-480.

[*4*] DACUNHA-CASTELLE, *Journal d'Analyse de Jérusalem*, 1973 *(à paraître)*.

[*5*] DACUNHA-CASTELLE, Séminaire Probabilités, Strasbourg, Springer-Verlag.

[*6*] DACUNHA-CASTELLE et M. SCHREIBER, *Techniques probabilistes pour l'étude d'isomorphismes entre espaces de Banach* (à paraître).

(Manuscrit reçu le 28 septembre 1972).