

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

BERNARD SCHMITT

## **Théorème ergodique ponctuel pour les suites uniformes**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 8, n° 4 (1972), p. 387-394

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1972\\_\\_8\\_4\\_387\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1972__8_4_387_0)

© Gauthier-Villars, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section B* » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Théorème ergodique ponctuel pour les suites uniformes

par

**Bernard SCHMITT**

Faculté des Sciences de Dijon,  
Département de Mathématiques, Dijon.

---

**RÉSUMÉ.** — Soit  $T$  un homéomorphisme mélangeant, strictement ergodique, défini sur un espace compact  $\Omega$  muni d'une mesure borélienne normalisée  $m$ . Pour certaines suites croissantes  $(k_i, i \geq 0)$  d'entiers positifs, appelées suites uniformes, la suite :

$$\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f \circ T^{k_i}(\omega)$$

converge vers  $m(f)$ , uniformément en  $\omega$ , pour toute fonction  $f$  appartenant à l'ensemble  $C(\Omega)$  des fonctions continues sur  $\Omega$ .

**SUMMARY.** — Let  $T$  be a weakly mixing, strictly ergodic, measure preserving homeomorphism, on a compact space  $\Omega$  with a normalized Borel measure  $m$ . Then for certain increasing sequences  $(k_i)$  of positive integers, called uniform sequences, the sequence :

$$\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f \circ T^{k_i}(\omega)$$

converge to  $m(f)$ , uniformly relatively to  $\omega$ , for every  $f \in C(\Omega)$ .

---

## I. INTRODUCTION

Si  $T$  est une transformation préservant la mesure sur un espace de Lebesgue et  $(k_i)$  une suite croissante d'entiers positifs, le problème de la convergence des suites

$$s_N(f, \omega) = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f \circ T^{k_i}(\omega)$$

a été étudié par M. Keane et A. Brunel dans [3] ; ils ont démontré que pour certaines suites  $(k_i)$  appelées suites uniformes,  $s_N(f, \omega)$  converge en moyenne et presque partout.

Nous nous proposons ici de montrer un résultat analogue (convergence uniforme) pour les transformations strictement ergodiques.

Soit  $\Omega$  un espace compact,  $m$  une mesure borélienne, normalisée sur  $\Omega$  et  $T$  un homéomorphisme strictement ergodique de  $\Omega$ , préservant la mesure.

Dans le paragraphe 2, nous montrons que, si  $T$  est de plus mélangeant, la seule mesure  $\mu$ , borélienne, complexe, vérifiant :

$$\mu \circ T = \frac{1}{\lambda} \mu \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{C} ; |\lambda| = 1 ; \lambda \neq 1, \quad (1)$$

est la mesure identiquement nulle. On en déduit que les suites

$$\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} \lambda^i f \circ T^i(\omega)$$

convergent vers 0, uniformément en  $\omega$ , pour tout  $f \in C(\Omega)$ . ( $\lambda$  étant toujours un complexe de module 1, différent de 1).

Dans le paragraphe 3, utilisant un résultat de Furstenberg [1], nous montrons que pour les suites uniformes  $(k_i)$  d'entiers, les suites

$$\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f \circ T^{k_i}(\omega)$$

convergent vers  $\int f dm$ , uniformément en  $\omega$ , pour tout  $f \in C(\Omega)$ .

## II. THÉORÈME DE CONVERGENCE

Supposons que le système  $(\Omega, T)$  soit à spectre continu et strictement ergodique ; notons  $m$  l'unique mesure  $T$ -invariante, positive, de masse 1.

Soit  $\mu$  une mesure complexe, définie sur l'espace  $(\Omega, \mathcal{A})$ ,  $\mathcal{A}$  étant la tribu borélienne, telle que :

$$\mu \circ T = \frac{1}{\lambda} \mu \quad (1)$$

( $\lambda$  complexe de module 1, différent de 1).

Désignons par  $|\mu|$  la variation totale de  $\mu$ . De la relation (1), nous déduisons aisément que :

$$|\mu| \circ T = |\mu|.$$

Le système  $(\Omega, T)$  étant strictement ergodique on a :

$$|\mu| = km, \quad k \text{ étant une constante } \geq 0.$$

Comme  $\mu$  est absolument continue par rapport à sa variation totale  $|\mu|$ , il en résulte que  $\mu$  est absolument continue par rapport à  $m$ .

La densité de Radon-Nikodym  $\frac{d\mu}{dm}$  est une fonction propre pour  $T$ , de valeur propre  $\frac{1}{\lambda}$  ; elle est donc nulle  $m$ -presque partout, puisque  $T$  est à spectre continu.

Nous avons donc obtenu la proposition suivante :

**PROPOSITION 2.1.** — *Si le système  $(\Omega, T)$  est à spectre continu et strictement ergodique, alors la seule mesure complexe  $\mu$  vérifiant :  $\mu \circ T = \frac{1}{\lambda} \mu$  ( $\lambda$  complexe de module 1, différent de 1), est la mesure identiquement nulle.*

**THÉORÈME 2.1.** — *Si le système  $(\Omega, T)$  est à spectre continu et strictement ergodique, alors :*

$$\forall f \in C(\Omega), \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \text{on a : } \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} \lambda^i \circ T^i(\omega) \rightarrow 0,$$

la convergence étant uniforme en  $\omega$ , pour tout complexe  $\lambda$  de module 1, différent de 1.

*Démonstration.* — Soit  $H$  la partie de  $C(\Omega)$  ainsi définie :

$$H = \left\{ f \circ T - \frac{1}{\lambda} f, f \in C(\Omega) \right\}.$$

Si  $H^\perp$  désigne l'ensemble des formes linéaires orthogonales à  $H$ ,

$$H^\perp = \left\{ \mu ; \mu(f \circ T) = \frac{1}{\lambda} \mu(f), \forall f \in C(\Omega) \right\}.$$

D'après la proposition 2.1,  $H^\perp = \{0\}$ .

Donc  $\bar{H} = C(\Omega)$ . Ceci signifie :

$$\forall \varepsilon > 0 ; \forall f \in C(\Omega), \exists g \in C(\Omega)$$

tel que :

$$\left\| f - \left( g \circ T - \frac{1}{\lambda} g \right) \right\|_\infty < \varepsilon.$$

On a également

$$\| \lambda f \circ T - (\lambda g \circ T^2 - g \circ T) \|_\infty < \varepsilon,$$

⋮

$$\| \lambda^{N-1} f \circ T^{N-1} - (\lambda^{N-1} g \circ T^N - \lambda^{N-2} g \circ T^{N-1}) \|_\infty < \varepsilon.$$

Additionnant ces inégalités et utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\left\| \frac{1}{N} (f + \lambda f \circ T + \dots + \lambda^{N-1} f \circ T^{N-1}) - \frac{1}{N} \left( \lambda^{N-1} g \circ T^N - \frac{g}{\lambda} \right) \right\|_\infty < \varepsilon.$$

La fonction  $g$  étant bornée, la suite  $\left\| \frac{1}{N} \left( \lambda^{N-1} g \circ T^N - \frac{g}{\lambda} \right) \right\|_\infty$  converge vers zéro.

Donc la suite  $\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} \lambda^i f \circ T^i(\omega)$  converge uniformément vers 0,  $\forall \omega \in \Omega$ .

### III. THÉORÈME ERGODIQUE PONCTUEL POUR LES SUITES UNIFORMES

Supposons que le système  $(\Omega, T)$  soit strictement ergodique ; d'après Furstenberg [1], on sait que la suite  $\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f \circ T^i(\omega)$  converge uniformément vers  $\int f dm$ , pour tout  $\omega \in \Omega$  et toute fonction  $f$  de  $C(\Omega)$ .

Nous nous proposons de montrer que pour certaines sous-suites  $(k_i)$  d'entiers, la suite  $\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f \circ T^{k_i}(\omega)$  possède la même propriété.

Rappelons la définition des suites uniformes [3].

Soit  $X$  l'ensemble des nombres complexes de module 1,  $\varphi$  une rotation d'angle irrationnel, et  $\mu$  la mesure de Lebesgue définie sur  $X$ . Le système  $(X, \varphi)$  est strictement ergodique et à spectre discret ; les fonctions propres appartiennent à l'ensemble  $C(X)$  des fonctions continues sur  $X$ , à valeurs complexes.

Soient  $Y$  un ouvert non vide de  $X$ , dont la frontière est de  $\mu$ -mesure nulle, et  $y \in Y$ . Appelons  $k_i$  le  $i^{\text{ième}}$  temps de passage de l'orbite  $\{\varphi^n(y) : n \in \mathbb{N}\}$ , dans  $Y$  :

$$k_i = k(i, y).$$

On dit que la suite  $(k_i)$  est uniforme. On va démontrer que la suite

$$\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f \circ T^{k_i}(\omega)$$

converge pour ces suites uniformes.

Soit  $g$  une fonction propre, non triviale, du système  $(X, \varphi)$ , associée à la valeur propre  $\lambda$ . Soit  $f \in C(\Omega)$ , on a la formule

$$\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f \circ T^n(\omega) g \circ \varphi^n(x) = g(x) \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} \lambda^n f \circ T^n(\omega). \tag{2}$$

D'après le théorème 2.1, la suite (2) converge uniformément en  $\omega$  et  $x$  vers 0, puisque  $g$  est bornée. Autrement dit, quel que soit  $f \in C(\Omega)$  et quel que soit la fonction propre  $g$ , non triviale, du système  $(X, \varphi)$ , on a la propriété suivante :

$$\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f \circ T^n(\omega) g \circ \varphi^n(x) \rightarrow \int f d\mu \int g d\mu \tag{3}$$

quel que soit  $\omega \in \Omega$  et  $x \in X$ , la convergence étant uniforme en  $\omega$  et  $x$ .

Si  $g$  est une constante  $(\Omega, T)$  étant strictement ergodique, la propriété (3) reste vraie. La propriété (3) est donc vérifiée pour tout  $f$  de l'ensemble  $C(\Omega)$  et toute fonction propre du système  $(X, \varphi)$ . Elle reste vraie pour l'algèbre  $\mathcal{A}$  engendrée par l'ensemble des fonctions propres du système  $(X, \varphi)$ , car une

fonction de cette algèbre est de la forme  $g = \sum_{i=1}^p \alpha_i g_i$ ,  $g_i$  désignant une fonction propre du système  $(X, \varphi)$ . L'algèbre  $\mathcal{A}$  est d'autre part dense pour la norme uniforme dans  $C(X)$ .

Il en résulte que l'on a la propriété suivante :

$$\forall f \in C(\Omega) ; \forall g \in C(X) : \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f \circ T^n(\omega) g \circ \varphi^n(x) \rightarrow \int f d\mu \int g d\mu \quad (3)$$

uniformément en  $\omega$  et  $x$ .

Il nous reste à montrer que la propriété suivante est vérifiée :

$$\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f \circ T^n(\omega) \mathbf{1}_Y \circ \varphi^n(y) \quad (4)$$

converge pour tout  $\omega \in \Omega$ , uniformément en  $\omega$ . Pour l'ouvert non vide  $Y$ , on sait que :

$$\mu(Y) = \sup_{\substack{g \in C(X) \\ g \leq \mathbf{1}_Y}} \int g d\mu. \quad (5)$$

Si  $f \in C(\Omega)$  et  $f \geq 0$ ,  $\forall g \in C(X)$ ,  $g \leq \mathbf{1}_Y$ , on a :

$$\frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f \circ T^n(\omega) g \circ \varphi^n(y) \leq \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f \circ T^n(\omega) \mathbf{1}_Y \circ \varphi^n(y).$$

Prenant les limites inférieures des deux membres de cette inégalité, on obtient l'inégalité

$$\int_{\Omega} f d\mu \int_X g d\mu \leq \liminf \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f \circ T^n(\omega) \mathbf{1}_Y \circ \varphi^n(y),$$

et d'après l'égalité (5) il vient :

$$\int_{\Omega} f d\mu \mu(Y) \leq \liminf \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f \circ T^n(\omega) \mathbf{1}_Y \circ \varphi^n(y). \quad (6)$$

Considérons maintenant l'ouvert  $\mathbf{C}\bar{Y}$ . Par une démonstration analogue à la précédente,

$$\int_{\Omega} f d\mu \mu(\mathbf{C}\bar{Y}) \leq \liminf \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f \circ T^n(\omega) \mathbf{1}_{\mathbf{C}\bar{Y}} \circ \varphi^n(y). \quad (7)$$

L'ouvert  $Y$  a une frontière de mesure nulle, c'est-à-dire que

$$\mu(\mathbf{C}\bar{Y}) = 1 - \mu(Y).$$

D'autre part,  $1_{\mathbf{C}\bar{Y}} = 1 - 1_{\bar{Y}} \leq 1 - 1_Y$ .

La relation (7) devient :

$$\int_{\Omega} f dm (1 - \mu(Y)) \leq \underline{\lim} \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f \circ T^n(\omega) (1 - 1_Y) \circ \varphi^n(y).$$

D'après le théorème de Furstenberg [J], on sait que

$$\underline{\lim} \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f \circ T^n(\omega) = \int_{\Omega} f dm;$$

D'où il résulte que

$$\underline{\lim} \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f \circ T^n(\omega) 1_Y \circ \varphi^n(y) \leq \int_{\Omega} f dm \mu(Y). \tag{8}$$

Les relations (6) et (8) impliquent l'égalité :

$$\lim \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f \circ T^n(\omega) 1_Y \circ \varphi^n(y) = \int_{\Omega} f dm \mu(Y),$$

c'est-à-dire que

$$\lim \frac{1}{N} \sum_{0 \leq k_i \leq N-1} f \circ T^{k_i}(\omega) = \mu(Y) \int_{\Omega} f dm.$$

En particulier, si  $f \equiv 1$ , on a :

$$\lim \frac{1}{N} \text{card} \{ i ; k_i \leq N - 1 \} = \mu(Y).$$

Puisque  $\mu$  charge les ouverts, cette limite est strictement positive.

De l'égalité suivante :

$$\lim \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f \circ T^{k_i}(\omega) = \lim \frac{N}{\text{card} \{ i ; k_i \leq N - 1 \}} \times \frac{1}{N} \sum_{0 \leq k_i \leq N-1} f \circ T^{k_i}(\omega),$$

on déduit

$$\lim \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f \circ T^{k_i}(\omega) = \int_{\Omega} f dm.$$



On a donc démontré le :

THÉORÈME 3.1. — Si  $(k_i)$  est une suite uniforme et  $(\Omega, T)$  un système strictement ergodique à spectre continu

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f \circ T^{k_i}(\omega) = \int f dm,$$

pour tout  $f$  appartenant à  $C(\Omega)$ , pour tout  $\omega$  dans  $\Omega$ , et la convergence est uniforme en  $\omega$ .

### RÉFÉRENCES

- [1] H. FURSTENBERG, Strict ergodicity and transformations of the torus. *Amer. J. Math.*, t. **83**, 1961, p. 573-601.
- [2] J.-C. OXTOBY, Ergodic sets. *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. **58**, 1952, p. 116-136.
- [3] A. BRUNEL et M. KEANE, Ergodic theorems for operator sequences. *Z. Warsh.*, t. **12**, 1969, p. 231-240.
- [4] HALMOS, *Lectures on ergodic theory*.
- [5] RUDIN, *Real and complex analysis*.

(Manuscrit reçu le 4 mars 1972).