

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

BERNARD VAN CUTSEM

Martingales de convexes fermés aléatoires en dimension finie

Annales de l'I. H. P., section B, tome 8, n° 4 (1972), p. 365-385

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1972__8_4_365_0

© Gauthier-Villars, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Martingales de convexes fermés aléatoires en dimension finie

par

Bernard VAN CUTSEM

Université scientifique et Médicale de Grenoble,
Institut de Recherche en Mathématiques Avancées,
Équipe de Statistique et Recherche Opérationnelle.

SUMMARY. — For a suitable definition of convergence, an a. s. convergence theorem is proved for martingales which takes their values in the set of the closed convex subsets in \mathbb{R}^n .

Ce texte complète, dans le cas de la dimension finie, quelques résultats antérieurs sur les martingales de multiapplications à valeurs convexes compactes non vides (B. Van Cutsem [1], J. Neveu [1]). Il se poursuit par une définition de l'espérance conditionnelle des multiapplications à valeurs convexes fermées non vides et quasi intégrables dans le cône positif \mathbb{R}_+^q de l'espace \mathbb{R}^q et une étude des propriétés de cette espérance conditionnelle. Enfin un théorème de convergence des surmartingales de multiapplications à valeurs convexes fermées non vides dans \mathbb{R}_+^q complète cette étude.

Une publication récente de M. Valadier ([2] [2 bis] [3]) étend la définition de l'espérance conditionnelle aux multiapplications à valeurs convexes fermées faiblement localement compactes, ne contenant pas de droites dans un espace de Banach réflexif et séparable. Cette étude recouvre la définition que nous donnons en dimension finie. Pour autant qu'un examen rapide puisse permettre de l'affirmer, la définition de Valadier permet de transporter, sans grands changements, toute notre étude des surmartingales au cas des espaces de Banach réflexifs séparables.

I. — RAPPELS ET NOTATIONS

I.1. Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé complet. Soit $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-tribus P -complètes de \mathcal{A} , \mathcal{A}_∞ la sous-tribu engendrée par $\bigcup_n \mathcal{A}_n$.

Nous poserons $E = \mathbb{R}^q$ et $E_+ = \mathbb{R}_+^q$.

Une suite de multiapplications $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur Ω et à valeurs dans l'ensemble des parties de E sera dite adaptée à $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Γ_n est \mathcal{A}_n -mesurable.

Pour toute partie U de E , nous désignerons par $\varphi(\cdot, U)$ la fonction d'appui de U , définie par

$$\forall x' \in E', \quad \varphi(x', U) = \sup \{ \langle x', x \rangle \mid x \in U \}$$

$\mathcal{M}_\Gamma^{\mathcal{A}}$ désignera l'ensemble des sections \mathcal{A} -mesurables de la multiapplication Γ .

I.2. Rappelons encore que, si Γ est à valeurs dans l'ensemble des convexes fermés non vides ne contenant pas de droite de E , alors Γ est \mathcal{A} -mesurable si et seulement si pour tout $x' \in E'$, $\varphi(x', \Gamma(\cdot))$ est \mathcal{A} -mesurable (R. T. Rockafellar [1]).

Si Γ est à valeurs dans l'ensemble $CK(E)$ des parties convexes compactes non vides de E , Γ est P -intégrable si et seulement si Γ est scalairement P -intégrable, c'est-à-dire si, pour tout $x' \in E'$, $\varphi(x', \Gamma(\cdot))$ est P -intégrable. De plus, si pour tout $A \in \mathcal{A}$ on pose

$$\int_A \Gamma dP = \left\{ \int_A f dP \mid f \in \mathcal{M}_\Gamma^{\mathcal{A}} \right\}$$

alors

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \forall x' \in E', \quad \varphi\left(x', \int_A \Gamma dP\right) = \int_A \varphi(x', \Gamma) dP.$$

De même, si Γ est à valeurs dans l'ensemble $CF(E_+)$ des parties convexes fermées non vides de E_+ , — qui ne contiennent donc pas de droites —, nous dirons (M. Valadier [1]) que Γ est *quasi intégrable* si Γ est mesurable et si, pour tout $x' \in E'$, la partie négative $\varphi(x', \Gamma(\cdot))^-$ de $\varphi(x', \Gamma(\cdot))$ est P -intégrable. Il en est ainsi si et seulement si Γ est mesurable et si Γ possède une section P -intégrable.

Pour plus de détails sur ces diverses notions, nous renvoyons à C. Castaing [1], M. Valadier [1] [4] [5] [6], R. T. Rockafellar [1], ...

I.3. Enfin rappelons que, si \mathcal{B} est une sous-tribu P-complète de \mathcal{A} , si Γ et Δ sont deux multiapplications définies sur Ω et à valeurs dans $CK(E)$, respectivement \mathcal{A} et \mathcal{B} mesurables, nous dirons que Δ est une version de l'espérance conditionnelle faible de Γ par rapport à \mathcal{B} si

$$\forall x' \in E', \quad \varphi(x', \Delta(\cdot)) \in \mathbb{E}^{\mathcal{B}}[\varphi(x', \Gamma(\cdot))]$$

et que Δ est une version de l'espérance conditionnelle de Γ par rapport à \mathcal{B} si

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad \int_B \Delta dP = \int_B \Gamma dP.$$

Nous renvoyons à B. Van Cutsem [1] et [2] pour une étude plus précise de cette notion. Voir aussi J. Neveu [1].

II. — SURMARTINGALES DE CONVEXES COMPACTS ALÉATOIRES

II.1. DÉFINITION. — Soit $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de multiapplications adaptées à la suite $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-tribus et à valeurs dans $CK(E)$ ou dans $CF(E_+)$. Nous dirons que la suite $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une *surmartingale faible* (resp. *sous-martingale faible*) si, pour tout $x' \in E'$, $\{\varphi(x', \Gamma_n(\cdot))\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une surmartingale c'est-à-dire si

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(\varphi(x', \Gamma_n(\cdot))^-) < +\infty$ (resp. $\mathbb{E}[\varphi(x', \Gamma_n)^+] < +\infty$)
- 2) pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(x', \Gamma_n(\cdot)) \geq \mathbb{E}^{\mathcal{A}_{n+1}}(\varphi(x', \Gamma_{n+1}(\cdot)))$ (resp. \leq).

Remarquons que la propriété 2) est équivalente à

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma_n \supseteq \mathbb{E}^{\mathcal{A}_{n+1}}(\Gamma_{n+1}) \quad (\text{resp. } \subset)$$

II.2. DÉFINITION. — Avec les notations précédentes, nous dirons que $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une *martingale* si, pour tout n , Γ_n est P-intégrable et si, pour tout $x' \in E'$, $\{\varphi(x', \Gamma_n(\cdot))\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale.

II.3. Nous donnons pour commencer un lemme qui généralise légèrement un lemme de M. Valadier, que nous avons rappelé en I.2.

LEMME. — Soit $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de multiapplications adaptée à $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, à valeurs dans $CF(E_+)$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1) Il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une section f_n de Γ_n \mathcal{A}_n -mesurable, telle que la suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie

$$\forall x' \in E', \quad \sup_n \mathbb{E}[\langle x', f_n \rangle] < +\infty,$$

2) pour tout $x' \in E'$, $\sup_n \mathbb{E}[\varphi(x', \Gamma_n)^-] < +\infty$.

Démonstration 1) \Rightarrow 2). — Cette démonstration résulte immédiatement des inégalités

$$\forall x' \in E', \quad \langle x', f_n \rangle \leq \varphi(x', \Gamma_n).$$

Démonstration 2) \Rightarrow 1). — Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[\varphi(x', \Gamma_n)^-] < +\infty$ il résulte de M. Valadier [I], qu'il existe une section f_n de Γ_n , \mathcal{A}_n -mesurable, P-intégrable et, qu'en outre, cette section vérifie

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \langle e', f_n(\omega) \rangle = \varphi(e', \Gamma_n(\omega)) \leq 0,$$

où

$$e' = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in E'.$$

Il est alors facile d'en déduire la propriété 1).

Remarque. — Si Γ_n est, pour tout $n \in \mathbb{N}$, à valeurs dans $CK(E)$, on a seulement 1 \Rightarrow 2 dans la proposition précédente.

II.4. PROPOSITION. — Soit $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une surmartingale de multiapplications adaptée à $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, à valeurs dans $CK(E)$ et P-intégrables. Alors il existe une martingale $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de sections de $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, adaptée à $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Démonstration. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une section g_n de Γ_n qui est \mathcal{A}_n -mesurable et P-intégrable. Soit g_n^m une version de $\mathbb{E}^{\mathcal{A}_m}[g_n]$. Alors g_n^m est une section \mathcal{A}_m -mesurable et P-intégrable de Γ_m (B. Van Cutsem [I]).

Nous remarquons de plus que, pour $m < n < p$,

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}_m}[g_p^n] = \mathbb{E}^{\mathcal{A}_m}[\mathbb{E}^{\mathcal{A}_n}[g_p]] = \mathbb{E}^{\mathcal{A}_m}[g_p] = g_p^m,$$

et par conséquent que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{g_n^m\}_{n \geq m}$ est une martingale.

La multiapplication Γ_n étant à valeurs convexes compactes non vides dans E de dimension finie, et P-intégrable, l'ensemble $M_\Gamma^{\mathcal{A}}$ des classes d'équivalence modulo l'égalité presque partout des sections \mathcal{A}_n -mesurables de Γ_n est une partie convexe faiblement compacte de $L_E^1(\Omega, \mathcal{A}_n, P)$ (M. Valadier [5], lemme 1.15). On peut donc extraire de $\{\mathbb{E}^{\mathcal{A}_m}(g_n)\}_{n, m \leq n}$, une sous-suite qui converge vers un élément f_m de $L_E^1(\Omega, \mathcal{A}_m, P)$ pour la topologie $\sigma(L_E^1, L_E^\infty)$. Plus précisément, définissons une suite d'applications ψ_i de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , strictement croissantes, déterminée de la façon suivante : $\{\mathbb{E}^{\mathcal{A}^i}(g_{\psi_i(n)}^1)\}_{n \geq 1}$ est une suite extraite de $\{\mathbb{E}^{\mathcal{A}^i}[g_n^1]\}_{n \geq 1}$ et convergeant fai-

blement dans $L^1_E(\Omega, \mathcal{A}_1, P)$ vers une limite f_1 . On extrait ensuite de

$$\{ \mathbb{E}^{\mathcal{A}_2}[g^2_{\psi_1(n)}] \}_{n \geq 1}$$

une sous-suite notée $\{ \mathbb{E}^{\mathcal{A}_2}[g^2_{\psi_2(n)}] \}_{n \geq 1}$ convergeant faiblement vers une limite f_2 dans $L^1_E(\Omega, \mathcal{A}_2, P)$. Montrons que $f_1 \in \mathbb{E}^{\mathcal{A}_1}(f_2)$.

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}^{\mathcal{A}_1}[g^2_{\psi_2(n)}] \ni g^1_{\psi_2(n)}$. Il résulte alors des convergences faibles que

$$\forall A_1 \in \mathcal{A}_1, \quad \forall x' \in E',$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_1} \langle x', g^1_{\psi_2(n)} \rangle dP = \int_{A_1} \langle x', f_1 \rangle dP$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_1} \langle x', g^2_{\psi_2(n)} \rangle dP = \int_{A_1} \langle x', f_2 \rangle dP$$

et comme

$$\int_{A_1} \langle x', g^1_{\psi_2(n)} \rangle dP = \int_{A_1} \langle x', g^2_{\psi_2(n)} \rangle dP$$

nous avons bien $f_1 \in \mathbb{E}^{\mathcal{A}_1}(f_2)$.

En recommençant la même construction pour $m = 2, 3, \dots$, nous construirons une martingale $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de sections P-intégrables de $\{\Gamma_n\}$.

Voici maintenant quelques propositions qui généralisent des résultats classiques (P. A. Meyer [1], J. Neveu [2]).

II.5. PROPOSITION. — Soit $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une surmartingale de multiapplications, adaptée à la suite $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et à valeurs dans $CK(E)$. Supposons que $\forall x' \in E', \sup_n \mathbb{E}[\varphi(x', \Gamma_n)^-] < +\infty$.

Alors il existe une multiapplication Γ_∞ , \mathcal{A}_∞ -mesurable et telle que : P-presque sûrement $\Gamma_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n$.

Démonstration. — La suite $\{\varphi(x', \Gamma_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une surmartingale telle que $\sup_n \mathbb{E}[\varphi(x', \Gamma_n)^-] < +\infty$. Il existe donc une variable aléatoire $\psi(x')$, \mathcal{A}_∞ -mesurable, telle que P-presque sûrement

$$\psi(x') = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x', \Gamma_n).$$

Nous savons alors (B. Van Cutsem [1] prop. II.21) qu'il existe une multiapplication Γ_∞ à valeurs dans $CK(E)$, \mathcal{A}_∞ -mesurable, telle que $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers Γ_∞ .

Remarque 1. — La proposition est encore vraie si la condition de l'énoncé est remplacée par : il existe une suite $\{x'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E' , dense dans E' , telle que $k \in \mathbb{N}, \sup_n \mathbb{E}[\varphi(x'_k, \Gamma_n)^-] < +\infty$.

Remarque 2. — Si les Γ_n sont, outre les hypothèses de la proposition, des multiapplications P-intégrales, alors Γ_∞ est aussi P-intégrable.

Remarque 3. — Rappelons que, dans le cas des suites d'éléments de CK(E), où E est un espace de Banach de dimension finie, les notions de convergence scalaire, au sens de Kuratowski, et au sens de Hausdorff sont équivalentes (B. Van Cutsem [1], chap. I).

II.6. PROPOSITION. — Soit $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une surmartingale de multiapplications adaptée à $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, à valeurs dans CK(E₊) et telle que

$$\forall x' \in E', \quad \sup_n \mathbb{E}[\varphi(x', \Gamma_n)^-] < +\infty$$

Alors la multiapplication Γ_∞ , \mathcal{A}_∞ -mesurable, définie par $\Gamma_\infty = \lim \Gamma_n$, P-presque sûrement, est quasi intégrable et vérifie

$$\forall x' \in E', \quad \varphi(x', \int_\Omega \Gamma_\infty dP) \leq \liminf_n \varphi(x', \int_\Omega \Gamma_n dP)$$

Si, en outre, les Γ_n sont P-intégrables, alors Γ_∞ est P-intégrable et

$$\int_\Omega \Gamma_\infty dP \subset \liminf_n \int_\Omega \Gamma_n dP.$$

Il y a égalité si et seulement si $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est scalairement équi-intégrable et la suite $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}}$ est alors une surmartingale.

Démonstration. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe d'après le lemme II.3 une section g_n de Γ_n , \mathcal{A}_n -mesurable telle que la suite $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie

$$\forall x' \in E', \quad \sup_n \mathbb{E}[\langle x', g_n \rangle] < +\infty.$$

D'après la proposition II.4, on peut construire une suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de sections de $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, adaptée à $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ qui est une martingale vérifiant aussi

$$\forall x' \in E', \quad \sup_n \mathbb{E}[\langle x', f_n \rangle] < +\infty,$$

puisque

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\langle x', f_m \rangle] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\langle x', g_{\psi(n)}^m \rangle] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\langle x', g_n \rangle] < +\infty \end{aligned}$$

Il en résulte qu'il existe f_∞ , \mathcal{A}_∞ -mesurable et P-intégrable telle que

$$f_\infty = \lim_n f_n \quad \text{P-presque sûrement.}$$

Par ailleurs, pour tout $x' \in E'$, $\{\varphi(x', \Gamma_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une surmartingale P-presque sûrement convergente et il existe, d'après la proposition II.5 une multiapplication $\Gamma_\infty, \mathcal{A}_\infty$ -mesurable telle que $\Gamma_\infty = \lim \Gamma_n$ P-presque sûrement. Il est alors facile de voir que f_∞ est une section de Γ_∞ , et que Γ_∞ est quasi intégrable.

Pour tout $x' \in E'$, la suite $\{\varphi(x', \Gamma_n) - \langle x', f_n \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une surmartingale positive convergente, qui vérifie donc

$$\forall x' \in E', \int_{\Omega} (\varphi(x', \Gamma_\infty) - \langle x', f_\infty \rangle) dP \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\varphi(x', \Gamma_n) - \langle x', f_n \rangle) dP$$

ou encore

$$\forall x' \in E', \varphi(x', \int_{\Omega} \Gamma_\infty dP) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x', \int_{\Omega} \Gamma_n dP)$$

Si de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Γ_n est P-intégrable, alors $\int_{\Omega} \Gamma_n dP$ est un élément de $CK(E)$ et

$$\forall x' \in E', \lim_n \varphi\left(x', \int_{\Omega} \Gamma_n dP\right) = \varphi\left(x', \lim_n \int_{\Omega} \Gamma_n dP\right),$$

d'où
$$\int_{\Omega} \Gamma_\infty dP \subset \lim_n \int_{\Omega} \Gamma_n dP$$

Enfin, si $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est scalairement équi-intégrable, il est facile de voir

$$\int_{\Omega} \Gamma_\infty dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \Gamma_n dP$$

et que $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}}$ est une surmartingale.

II.7. PROPOSITION. — a) Soit $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une surmartingale de multiapplications adaptée à $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, à valeurs dans $CK(E)$, et scalairement équi-intégrable. Alors

$$\forall x' \in E', \sup_n \mathbb{E}[\varphi(x', \Gamma_n)^-] < +\infty$$

est vérifiée, la suite $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}}$ est une surmartingale et $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge scalairement en moyenne vers Γ_∞ , où $\Gamma_\infty = \lim \Gamma_n$, P-presque sûrement.

b) Si en outre $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale scalairement équi-intégrable, alors $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}}$ est une surmartingale.

Les démonstrations sont des conséquences immédiates du théorème V-T-17 de P. A. Meyer [I]. Le b) est aussi le théorème IV-12 de B. Van Cutsem [I].

III. — ESPÉRANCE CONDITIONNELLE DE CONVEXES FERMÉS ALÉATOIRES DANS \mathbb{R}_+^q

Comme le précisait l'introduction, les propositions III.1 et III.4 sont des corollaires de M. Valadier [2] et [3].

III.1. PROPOSITION. — Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé complet, \mathcal{B} une sous-tribu P -complète de \mathcal{A} . Quelle que soit la multiapplication Γ , \mathcal{A} -mesurable, quasi intégrable, à valeurs dans $CF(E_+)$, il existe une multiapplication Δ , \mathcal{B} -mesurable, quasi intégrable à valeurs dans $CF(E_+)$ telle que

$$\forall x' \in E' \quad \varphi(x', \Delta(\cdot)) \in \mathbb{E}^{\mathcal{B}}[\varphi(x', \Gamma(\cdot))].$$

Démonstration. — Soit $\psi(x') = \mathbb{E}^{\mathcal{B}}[\varphi(x', \Gamma)]$ et soit $\psi(x', \cdot)$ un représentant de $\psi(x')$. La fonction $\psi(x', \cdot)$ est \mathcal{B} -mesurable et quasi-intégrable. En effet si f_0 est une section P -intégrable de Γ , il est évident que, P -presque sûrement

$$\forall x' \in E', \quad \psi^-(x', \cdot) \leq \mathbb{E}^{\mathcal{B}}[\langle x, f_0 \rangle]$$

et par suite que $\psi^-(x', \cdot)$ est P -intégrable, pour tout $x' \in E'$.

Posons alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \Gamma_n(\omega) = \{ x \in \Gamma(\omega) \mid \|x - f_0(\omega)\| \leq n \}.$$

Pour tout $x' \in E'$, $\{ \varphi(x', \Gamma_n(\cdot)) \}_{n \in \mathbb{N}}$ est ainsi une suite croissante de fonctions \mathcal{A} -mesurables dont les parties négatives sont P -intégrables, telle que $\varphi(x', \Gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x', \Gamma_n(\cdot))$, P -presque sûrement.

La multiapplication Γ_n est à valeurs dans $CK(E_+)$. Il existe donc une multiapplication Δ_n , à valeurs dans $CK(E_+)$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x' \in E', \quad \varphi(x', \Delta_n) \in \mathbb{E}^{\mathcal{B}}[\varphi(x', \Gamma_n)].$$

La suite $\{ \varphi(x', \Delta_n) \}_{n \in \mathbb{N}}$ est presque sûrement croissante et

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(\varphi(x', \Gamma)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x', \Delta_n), \quad P\text{-presque sûrement}$$

et par conséquent

$$\forall x' \in E', \quad \psi(x', \cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x', \Delta_n), \quad P\text{-presque sûrement.}$$

On sait alors, en utilisant un résultat de Klee-Olech [1], que ceci permet

de définir une multiapplication Δ , \mathcal{B} -mesurable, à valeurs dans $CF(E_+)$, telle que

$$\forall x' \in E', \quad \varphi(x', \Delta) \in \mathbb{E}^{\mathcal{B}}[\varphi(x', \Gamma)]$$

Il reste à montrer que Δ est quasi intégrable, ce qui se fait simplement en montrant que l'espérance conditionnelle par rapport à \mathcal{B} d'une section P-intégrable de Γ est une section P-intégrable de Δ .

III.2. Nous avons donc la définition suivante, qui généralise la définition rappelée en I.3.

DÉFINITION. — Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé complet, \mathcal{B} une sous-tribu P-complète de Ω , Γ une multiapplication \mathcal{A} -mesurable, quasi intégrable à valeurs dans $CF(E_+)$. On appelle *version de l'espérance conditionnelle faible de Γ par rapport à \mathcal{B}* , une multiapplication Δ , \mathcal{B} -mesurable, à valeurs dans $CF(E_+)$, et quasi intégrable, telle que

$$\forall x' \in E', \quad \varphi(x', \Delta(\cdot)) \in \mathbb{E}^{\mathcal{B}}[\varphi(x', \Gamma(\cdot))]$$

La proposition III.1 assure l'existence de l'espérance conditionnelle faible.

Remarque. — Deux versions de l'espérance conditionnelle faible de Γ sont égales P-presque sûrement.

III.3. Précisons maintenant les notations introduites au début. Γ étant quasi intégrable, posons :

$$\forall A \in \Omega, \quad \forall x' \in E', \quad \Phi(x', A) = \int_A \varphi(x', \Gamma(\cdot)) dP \in] - \infty, + \infty]$$

$\Phi(\cdot, A)$ est convexe et semi-continue inférieurement, et est la fonction d'appui d'un convexe fermé non vide $F(A)$ de E_+

$$F(A) = \{ x \mid \langle x', x \rangle \leq \int_A \varphi(x', \Gamma(\cdot)) dP, \quad \forall x' \in E_+ \}$$

Nous savons alors que (M. Valadier [1])

$$F(A) = \int_A \Gamma dP + \wedge(A)$$

où $\int_A \Gamma dP$ est dense dans $F(A)$ et où $\wedge(A)$ est le cône asymptotique de $F(A)$.

L'application $A \rightarrow \int_A \Gamma dP$ est une application de \mathcal{A} dans $CF(E_+)$, qui est

σ -additive, i. e. : quelle que soit la suite $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments extraits de \mathcal{A} et disjoints deux à deux,

$$\begin{aligned} \int_{\bigcup_n A_n} \Gamma dP &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} \Gamma dP \\ &= \left\{ \sum_n \int_{A_n} f dP \mid f \in \mathcal{L}_{\mathbb{E}}^1(P), \quad f(\omega) \in \Gamma(\omega)P.p.p \right\} \end{aligned}$$

La proposition suivante est aussi un corollaire de Valadier [2] et [3].

III.4. PROPOSITION. — Soit Γ une multiapplication à valeurs dans $CF(E_+)$ \mathcal{A} -mesurable, quasi intégrable. Soit Δ une version de son espérance conditionnelle faible. Alors

$$\forall B \in \mathcal{B}, \int_B \Gamma dP \subset \int_B \Delta dP \subset \int_B \Gamma dP + \Lambda(B) = F(B)$$

et
$$\overline{\int_B \Gamma dP} = \overline{\int_B \Delta dP} = F(B).$$

Démonstration. — Soit $x \in \int_B \Gamma dP$, $B \in \mathcal{B}$. Il existe alors $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{E}}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, section de Γ , telle que $\int_B f dP = x$. Soit alors g , une version de l'espérance conditionnelle faible de f par rapport à \mathcal{B} . Nous avons donc

$$x = \int_B f dP = \int_B g dP \in \int_B \Delta dP$$

et par conséquent

$$\int_B \Gamma dP \subset \int_B \Delta dP$$

ce qui entraîne encore

$$\overline{\int_B \Gamma dP} = \overline{\int_B \Delta dP} = F(B).$$

III.5. REMARQUE. — Γ étant donnée, la multiapplication $A \rightarrow F(A)$ n'est pas σ -additive, mais nous avons néanmoins :

$$\forall \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad A_n \in \mathcal{A},$$

les A_n étant disjoints deux à deux,

$$F\left(\bigcup_n A_n\right) = \overline{\sum_n F(A_n)}$$

puisque

$$\forall A \in \mathcal{A}, \int_A \Gamma dP = F(A)$$

et que

$$A \rightarrow \int_A \Gamma dP \text{ est } \sigma\text{-additive.}$$

Ces remarques introduisent les définitions suivantes :

III.6. DÉFINITION. — Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé complet, \mathcal{B} une sous-tribu P -complète de \mathcal{A} , Γ une multiapplication \mathcal{A} -mesurable, quasi intégrable, à valeurs dans $CF(E_+)$. On appelle *version de l'espérance conditionnelle forte de Γ par rapport à \mathcal{B}* , une multiapplication Δ , \mathcal{B} -mesurable, quasi intégrable, à valeurs dans $CF(E_+)$ et telle que

$$\forall B \in \mathcal{B}, \int_B \Gamma dP = \int_B \Delta dP = F(B)$$

III.7. DÉFINITION. — Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé, \mathcal{B} une sous-tribu P -complète de \mathcal{A} , une multiapplication Γ , \mathcal{A} -mesurable, quasi intégrable, à valeurs dans $CF(E_+)$. On appelle *version de l'espérance conditionnelle forte stricte de Γ par rapport à \mathcal{B}* , une multiapplication Δ , \mathcal{B} -mesurable, quasi intégrable, à valeurs dans $CF(E_+)$ et telle que

$$\forall B \in \mathcal{B}, \int_B \Gamma dP = \int_B \Delta dP \subset F(B)$$

Remarque. — La proposition III.4 montre l'existence de l'espérance conditionnelle forte. La proposition III.1 montre que pour les multiapplications quasi intégrables à valeurs dans $CF(E_+)$, l'espérance conditionnelle faible est égale à l'espérance conditionnelle forte. Nous verrons, dans les exemples suivants, un cas d'existence de l'espérance conditionnelle forte stricte.

III.8. EXEMPLE 1. — Si $\mathcal{B} = \{ \emptyset, \Omega \}$, l'espérance conditionnelle faible Δ de Γ par rapport à \mathcal{B} est une multiapplication constante qui vérifie :

$$\forall x' \in E', \forall \omega \in \Omega, \varphi(x', \Delta(\omega)) = \int_{\Omega} \varphi(x', \Gamma(\cdot)) dP$$

Nous aurons donc $\Delta(\omega) = F(\Omega)$ pour P-presque tout ω , et on sait que l'inclusion $\int_{\Omega} \Gamma dP \subset F(\Omega)$ peut être stricte (M. Valadier [1]).

EXEMPLE 2. — Si Γ est à valeurs compactes et P-intégrable, nous savons que Δ est à valeurs compactes et que

$$\forall B \in \mathcal{B}, \int_B \Gamma dP = \int_B \Delta dP$$

EXEMPLE 3. — Soit $\Omega = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, \mathcal{A} la tribu borélienne de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et P la loi de probabilité uniforme sur (Ω, \mathcal{A}) . Soit \mathcal{B} la sous-tribu de \mathcal{A} , engendrée par les boréliens de Ω symétriques par rapport au point $\frac{\pi}{4}$.

Soit (e_1, e_2) la base naturelle de $\mathbb{R}^2 = E$. Soit Γ la multiapplication définie sur Ω et à valeurs dans l'ensemble des convexes fermés non vides de \mathbb{R}_+^2 , définie par

$$\forall \omega \in \Omega, \Gamma(\omega) = \{ x \in \mathbb{R}_+^2 \mid \exists \lambda \geq 0, x = \lambda (\cos \omega e_1 + \sin \omega e_2) \}$$

Il est évident que Γ est quasi intégrable et on démontre facilement que si $A \in \mathcal{A}$, si $\omega_1 = \liminf A$, $\omega_2 = \limsup A$ alors :

$$\begin{aligned} F(A) &= \{ x \in \mathbb{R}_+^2 \mid \exists \lambda \geq 0, \exists \omega \in [\omega_1, \omega_2], x = \lambda (\cos \omega e_1 + \sin \omega e_2) \} \\ \int_A \Gamma dP &= \left\{ \int_A f dP \mid f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^2; \mathcal{A}\text{-mesurable, P-intégrable} \right\} \\ &\quad \left. \begin{array}{l} f(\omega) \in \Gamma(\omega), \\ \text{P-p.s.} \end{array} \right\} \\ &= \{ x \in \mathbb{R}_+^2 \mid \exists \lambda \geq 0, \exists \omega \in]\omega_1, \omega_2[, x = \lambda (\cos \omega e_1 + \sin \omega e_2) \} \end{aligned}$$

$$\text{si } P(A) \neq 0$$

et

$$F(A) = \int_A \Gamma dP = \{ 0 \}$$

$$\text{si } P(A) = 0.$$

On remarque que l'on a bien $F(A) = \overline{\int_A \Gamma dP}$.

On montre ensuite que la multiapplication à valeurs dans l'ensemble des convexes fermés non vides de \mathbb{R}_+^2 , définie par

$$\forall \omega \in \Omega, \Delta(\omega) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^2 \mid \exists \lambda \geq 0, \exists \sigma \in \left[\omega, \frac{\pi}{2} - \omega \right], x = \lambda (\cos \sigma e_1 + \sin \sigma e_2) \right\}$$

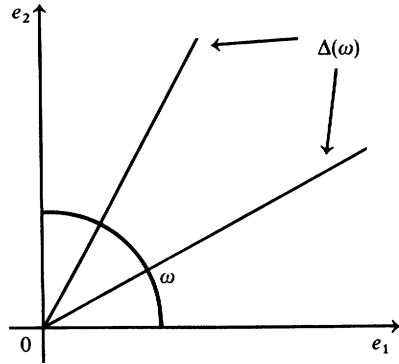
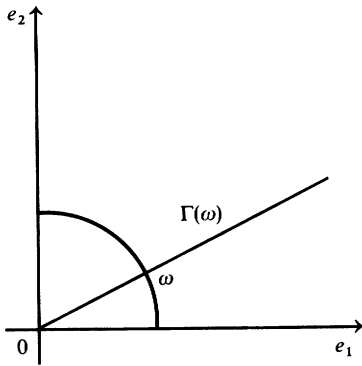
est \mathcal{B} -mesurable et quasi intégrable et que $\Delta \in \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(\Gamma)$.

De plus, si $B \in \mathcal{B}$:

$$\int_B \Delta dP = \left\{ \int_B g dP \mid g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^2 \text{ } \mathcal{B}\text{-mesurable, P-intégrable, } \right. \\ \left. g(\omega) \in \Delta(\omega), \text{ P-p.s.} \right\}$$

et alors

$$\forall B \in \mathcal{B}, \int_B \Delta dP = \int_B \Gamma dP$$



Nous démontrons maintenant des propriétés élémentaires des espérances conditionnelles des multiapplications prolongeant celles des variables aléatoires.

III.9. PROPOSITION 3. — Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé complet, \mathcal{B} une sous-tribu P -complète de \mathcal{A} . Soient Γ_1 et Γ_2 deux multiapplications définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) à valeurs dans $CF(E_+)$ quasi intégrables et telles que pour presque tout ω , $\Gamma_1(\omega) \subset \Gamma_2(\omega)$. Soient Δ_1 et Δ_2 des versions des espérances conditionnelles faibles par rapport à \mathcal{B} respectivement de Γ_1 et Γ_2 . Alors

$$\Delta_1(\omega) \subset \Delta_2(\omega) \text{ P-p.s.}$$

et

$$\forall B \in \mathcal{B}, \int_B \overline{\Delta_1(\cdot)} dP \subset \int_B \overline{\Delta_2(\cdot)} dP.$$

La démonstration résulte immédiatement de l'équivalence

$$\{ \Gamma_1(\omega) \subset \Gamma_2(\omega), P\text{-p. s.} \} \Leftrightarrow \{ x' \in E' \varphi(x', \Gamma_1(\omega)) \leq \varphi(x', \Gamma_2(\omega)) \}$$

pour presque tout ω , (Hörmander : th. 2 [I]) du résultat de V. Klee et E. Olech [I] déjà cité et de la propriété des variables aléatoires quasi intégrables

$$\{ \varphi(x', \Gamma_1(\omega)) \leq \varphi(x', \Gamma_2(\omega)) P\text{-p. s.} \} \Rightarrow \{ \varphi(x', \Delta_1(\omega)) \leq \varphi(x', \Delta_2(\omega)) P\text{-p. s.} \}.$$

Il en résulte alors que $F_1(B) \subset F_2(B), \forall B \in \mathcal{B}$.

III. 10. PROPOSITION. — Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé complet, \mathcal{B} une sous-tribu P -complète de \mathcal{A} . Soit $\{ \Gamma_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de multiapplications \mathcal{A} -mesurables, quasi intégrables, à valeurs dans $CF(E_+)$ telle que, P -presque sûrement, $\Gamma_n(\omega)$ soit une suite croissante convergeant vers

$$\Gamma(\omega) \in CF(E_+).$$

Alors il existe $\Delta \in E^{\mathcal{B}}[\Gamma]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta_n \in E^{\mathcal{B}}[\Gamma_n]$ telle que, P -presque sûrement

$$\Delta_n(\omega) \nearrow \Delta(\omega).$$

Démonstration. — De la définition de $\Gamma(\omega)$ résulte que

$$\forall x' \in E', \varphi(x', \Gamma_n(\cdot)) \nearrow \varphi(x', \Gamma(\cdot)), \text{ P-presque sûrement.}$$

$\varphi(x', \Gamma(\cdot))$ est donc \mathcal{A} -mesurable et quasi intégrable, et comme $\Gamma(\cdot)$ possède évidemment des sections intégrables, Γ est quasi intégrable.

Soit alors $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta_n \in E^{\mathcal{B}}[\Gamma_n]$ et $\Delta \in E^{\mathcal{B}}[\Gamma]$. Nous avons ainsi

$$\forall x' \in E', \varphi(x', \Gamma_n) \nearrow \varphi(x', \Gamma) \text{ et } \varphi(x', \Gamma) = \sup_n \varphi(x', \Gamma_n)$$

d'où

$$\forall x' \in E', \varphi(x', \Delta_n) \nearrow \varphi(x', \Delta) \text{ et } \varphi(x', \Delta) = \sup_n \varphi(x', \Delta_n)$$

Il en résulte alors que $\forall x' \in E', \varphi(x', F(B)) = \sup_n \varphi(x', F_n(B))$ et $\forall B \in \mathcal{B}$, la suite $F_n(B)$ est croissante et $F(B) = \bigcup_n F_n(B)$.

Par contre, on ne peut montrer la croissance des suites

$$\forall B \in \mathcal{B}, \left\{ \int_B \Delta_n dP \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

mais on a bien sûr

$$\forall B \in \mathcal{B}, \overline{\int_B \Delta_n dP} \nearrow \overline{\int_B \Delta dP} \subset F(B).$$

Remarque. — Le même résultat est en général faux pour une suite décroissante de multiapplications quasi intégrables ; on ne peut, en effet, rien affirmer pour la suite des espérances conditionnelles d'une suite décroissante de fonctions mesurables quasi intégrables.

III.11. PROPOSITION. — Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé complet \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 deux sous-tribus P -complètes de \mathcal{A} , telles que $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$. Soit Γ une multiapplication \mathcal{A} -mesurable, quasi intégrable, à valeurs dans $CF(E_+)$. Alors si

$$\Delta_1 \in \mathbb{E}^{\mathcal{B}_1}(\Gamma), \quad \Delta_2 \in \mathbb{E}^{\mathcal{B}_2}(\Gamma), \quad \mathbb{E}^{\mathcal{B}_1}(\Gamma) = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_1}[\mathbb{E}^{\mathcal{B}_2}(\Gamma)] = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_2}[\mathbb{E}^{\mathcal{B}_1}(\Gamma)]$$

et

$$\forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \int_{B_1} \Gamma dP \subset \int_{B_1} \Delta_1 dP \subset \int_{B_1} \Delta_2 dP$$

Démonstration. — De

$$\forall x' \in E', \quad \mathbb{E}^{\mathcal{B}_1}[\varphi(x', \Gamma)] = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_1}[\mathbb{E}^{\mathcal{B}_2}(\varphi(x', \Gamma))] = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_2}[\mathbb{E}^{\mathcal{B}_1}(\varphi(x', \Gamma))]$$

résulte alors

$$\Delta_1 \in \mathbb{E}^{\mathcal{B}_1}[\Delta_2]$$

De plus :

$$\forall B_2 \in \mathcal{B}_2, \int_{B_2} \Gamma dP \subset \int_{B_2} \Delta_2 dP$$

$$\forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \int_{B_1} \Gamma dP \subset \int_{B_1} \Delta_1 dP \subset \int_{B_1} \Delta_2 dP$$

et bien sûr

$$\forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \overline{\int_{B_1} \Gamma dP} = \overline{\int_{B_1} \Delta_1 dP} = \overline{\int_{B_1} \Delta_2 dP}.$$

IV. — SURMARTINGALES DE CONVEXES FERMÉS ALÉATOIRES DANS R^q

Nous donnons ici un théorème de convergence au sens de Kuratowski pour les surmartingales de multiapplications à valeurs dans $CF(E_+)$.

IV.1. Dans le cas suites d'éléments de $CF(E_+)$ les trois notions

de convergence : convergence scalaire, convergence au sens de Kuratowski et convergence pour la distance de Hausdorff ne sont plus équivalentes. L'exemple suivant illustre bien le fait que la convergence au sens de Kuratowski est celle qui correspond le mieux à l'idée intuitive que l'on a de la « convergence » d'une suite d'éléments de $CF(E_+)$.

Soit $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que $\lim_n u_n = 0$ et, soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n le point de \mathbb{R}_+^2 de composantes $(1, u_n)$ par rapport à une base orthonormée (e_1, e_2) de \mathbb{R}^2 . Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n la demi-droite fermée définie par

$$F_n = \{ y \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \lambda \geq 0, y = \lambda x_n \}$$

et soit

$$F = \{ y \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \lambda \geq 0, y = \lambda e_1 \}$$

Il est alors facile de voir que la limite de $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pour la convergence scalaire n'existe pas, pour la convergence au sens de Kuratowski est égale à F et que la distance de Hausdorff de F_n et F est infinie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Avant de passer à l'étude des surmartingales nous donnons un résultat de convergence dont nous aurons besoin.

IV.2. PROPOSITION. — Soit $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de convexes fermés non vides de E , telle qu'il existe une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E convergeant vers x et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F_n$. Soit $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de convexes compacts contenant l'origine, telle que $E = \lim_{k \rightarrow \infty} Q_k = \bigcup_k Q_k$ et telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $\{F_n^k\}_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $F_n^k = F_n \cap (Q_k + x_n)$, converge vers un convexe compact non vide F_∞^k .

Alors la suite $\{F_\infty^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante, la suite $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens de Kuratowski et

$$F_\infty = \bigcup_k F_\infty^k = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$$

Démonstration. — La croissance de la suite $\{F_\infty^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est évidente.

1) Montrons d'abord que $\limsup F_n \subset \bigcup_k F_\infty^k$.

Remarquons que $x \in \liminf F_n$ et, par conséquent, que $\liminf F_n$ et $\limsup F_n$ sont non vides. Soit alors $y \in \limsup F_n$.

Il existe donc une suite $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E , et une application $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telles que $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers y et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in F_{\psi(n)}$.

La suite $\{y_n - x_{\psi(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, donc bornée. Il existe donc

$a > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x_{\psi(n)}, y_n) < a$. Par conséquent, puisque $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante,

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0, B(0, a) = \{x \in E \mid \|x\| \leq a\} \subset Q_k$$

et

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0, \forall n \in \mathbb{N}, y_n \in Q_k + x_{\psi(n)}$$

ou encore

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0, \forall n \in \mathbb{N}, y_n \in F_{\psi(n)}^k.$$

La suite $\{F_{\psi(n)}^k\}_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de la suite convergente $\{F_n^k\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers F_∞^k et il en résulte que, pour tout $k \geq k_0$, $y \in F_\infty^k$, c'est-à-dire $y \in \bigcup_k F_\infty^k$ ce qui montre bien que $\limsup F_n \subset \bigcup_k F_\infty^k$.

2) Montrons maintenant $\bigcup_k F_\infty^k \in \liminf F_n$.

Soit $y \in \bigcup_k F_\infty^k$. Il existe donc $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, y soit élément de F_∞^k . Soit $k_1 \geq k_0$. Posons $y_n = \text{proj } F_n^{k_1}$. Puisque $\{F_n^{k_1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $F_\infty^{k_1}$, nous savons que $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Nous avons ainsi montré l'existence d'une suite $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in F_n^{k_1} \subset F_n$, et, par conséquent, $y \in \liminf F_n$, c'est-à-dire

$$\bigcup_k F_\infty^k \subset \liminf F_n.$$

3) Ainsi $\bigcup_k F_\infty^k \subset \liminf F_n \subset \limsup F_n \subset \bigcup_k F_\infty^k$.

Ceci prouve bien que $\bigcup_k F_\infty^k$ est fermé, que $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente au sens de Kuratowski et que

$$\bigcup_k F_\infty^k = \lim F_n$$

IV.3. La définition des surmartingales faibles de multiapplications à valeurs dans $CF(E_+)$ a déjà été donnée en II.1.

IV.4. Nous donnons maintenant une deuxième généralisation du lemme de M. Valadier [1] (voir II.3).

LEMME. — Soit $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de multiapplications adaptée à $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $CF(E_+)$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1) il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ une section f_n de Γ_n , \mathcal{A}_n -mesurable et la suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale équi-intégrable,

2) pour tout $x' \in E'$, la suite $\{ \varphi(x', \Gamma_n)^- \}_{n \in \mathbb{N}}$ est équi-intégrable.

Démonstration

1) \Rightarrow 2) résulte des inégalités

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x' \in E', \langle x', f_n \rangle \leq \varphi(x', \Gamma_n)$$

et du fait que $\{ \langle x', f_n \rangle^- \}_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi équi-intégrable.

2) \Rightarrow 1). Nous savons déjà qu'il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une section f_n de Γ_n , \mathcal{A} -mesurable, P-intégrable et vérifiant

$$\langle e', f_n \rangle = \varphi(e', \Gamma_n) \leq 0, e' = - \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in E'.$$

Ceci prouve que $\{ \langle e', f_n \rangle \}_{n \in \mathbb{N}}$ est équi-intégrable. Il suffit ensuite de remarquer, que si $\{ e'_1, e'_2, \dots, e'_q \}$ désigne une base orthonormée de E' on a, pour tout $i \in \{ 1, 2, \dots, q \}$

$$\langle e'_i, f_n \rangle \leq \langle e', f_n \rangle A$$

où A est une constante qui dépend de $\dim(E)$, et par conséquent que les suites $\{ \langle e'_i, f_n \rangle \}_{n \in \mathbb{N}}$ sont équi-intégrables.

IV.5. PROPOSITION. — Soit $\{ \Gamma_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ une surmartingale de multiapplications à valeurs dans $CF(E_+)$, adaptée à $\{ \mathcal{A}_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ et quasi intégrables. Supposons qu'il existe une suite $\{ f_n \}_{n \in \mathbb{N}}$, adaptée à $\{ \mathcal{A}_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ de sections des multiapplications Γ_n qui soit une martingale équi-intégrable.

Alors il existe une multiapplication Γ_∞ , \mathcal{A}_∞ -mesurable, quasi intégrable, à valeurs dans $CF(E_+)$ telle que

1) $\Gamma_\infty = k\text{-lim } \Gamma_n$ (au sens de Kuratowski) P-presque sûrement.

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}^{\mathcal{A}_n}(\Gamma_\infty) \subset \Gamma_n$, P-presque sûrement.

Démonstration. — D'après le lemme IV.4, $\forall x' \in E', \{ \varphi(x', \Gamma_n)^- \}_{n \in \mathbb{N}}$ est équi-intégrable.

Soit $\{ Q_k \}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de convexes compacts de E , telle que $0 \in Q_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et $\bigcup_k Q_k = E$.

Posons, pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$

$$\Gamma_n^k(\omega) = \Gamma_n(\omega) \cap (Q_k + f_n(\omega))$$

Γ_n^k est ainsi une multiapplication \mathcal{A}_n -mesurable, à valeurs dans $CK(E_+)$ et P-intégrable.

a) Montrons que $\{\Gamma_n^k\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une surmartingale scalairement équi-intégrable.

Les inclusions $\Gamma_n^k \subset \Gamma_n$ et $\Gamma_n^k \subset Q_k + f_n$ entraînent, pour $m < n$, d'après la proposition III.9.

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}_m}(\Gamma_n^k) \subset \mathbb{E}^{\mathcal{A}_m}(\Gamma_n) \subset \Gamma_m, \text{ P-presque sûrement.}$$

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}_m}(\Gamma_n^k) \subset \mathbb{E}^{\mathcal{A}_m}(Q_k + f_n) = Q_k + f_m, \text{ P-presque sûrement}$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{E}^{\mathcal{A}_m}(\Gamma_n^k) \subset \Gamma_m \cap (Q_k + f_m) = \Gamma_m^k, \text{ P-presque sûrement.}$$

Comme, de plus, $\{Q_k + f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est scalairement équi-intégrable, il est facile de voir que $\{\Gamma_n^k\}_{n \in \mathbb{N}}$ est scalairement équi-intégrable.

b) Définition de Γ_∞^k .

Soit $k \in \mathbb{N}$, fixé. $\{\Gamma_n^k\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une surmartingale vérifiant les hypothèses de la proposition II.6. Il en résulte qu'il existe une multiapplication Γ_∞^k à valeurs dans $CK(E_+)$, \mathcal{A}_∞ -mesurable et P-intégrable et vérifiant

$$\Gamma_\infty^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n^k \text{ P-presque sûrement}$$

et, si f_∞ désigne la limite presque sûre de la suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, f_∞ est P-presque sûrement une section \mathcal{A}_∞ -mesurable de Γ_∞^k .

c) Définition de Γ_∞ .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\omega \in \Omega$, la suite $\{\Gamma_n^k(\omega)\}_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et

$$\Gamma_n(\omega) = \bigcup_k \Gamma_n^k(\omega).$$

Il en résulte que $\{\Gamma_\infty^k(\cdot)\}_{k \in \mathbb{N}}$ est P-presque sûrement croissante. Posons alors

$$\Gamma_\infty(\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Gamma_\infty^k(\omega)$$

Plus précisément Γ_∞ est définie sur un ensemble $\Omega_0 \subset \Omega$ de probabilité 1. On définit arbitrairement $\Gamma_\infty(\cdot)$ pour $\omega \in \Omega_0$. Nous appelons encore Γ_∞ la multiplication ainsi prolongée.

Γ_∞ est à valeurs dans $CF(E_+)$, \mathcal{A}_∞ -mesurable et f_∞ en est une section P-intégrable ; Γ_∞ est donc bien quasi intégrable.

Il est de plus évident, d'après la proposition IV.2, que $\Gamma_\infty(\omega)$ est P-presque sûrement la limite au sens de Kuratowski de la suite $\Gamma_n(\omega)$.

d) Montrons que $\mathbb{E}^{\mathcal{A}_m}[\Gamma_\infty] \subset \Gamma_m$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\{\Gamma_n^k\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une surmartingale convergeant P-presque sûrement vers Γ_∞^k .

Soit $m < n < p$. Soit $\Delta_{n,m}^k$ une version de $\mathbb{E}^{\mathcal{A}_m}(\Gamma_n^k)$. Alors d'après la proposition III.9

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathcal{A}_m}(\Delta_{p,n}^k) &\subset \mathbb{E}^{\mathcal{A}_m}(\Gamma_n^k) \\ \mathbb{E}^{\mathcal{A}_m}[\mathbb{E}^{\mathcal{A}_n}(\Delta_{p,n}^k)] &\subset \mathbb{E}^{\mathcal{A}_m}[\Gamma_n^k] \\ \mathbb{E}^{\mathcal{A}_m}(\Gamma_p^k) &\subset \mathbb{E}^{\mathcal{A}_m}(\Gamma_n^k)\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall (m, n, p) \in \mathbb{N}^3, \quad m < n < p$$

$$\Delta_{p,m}^k \subset \Delta_{n,m}^k \text{ P-presque sûrement}$$

et la suite $\{\Delta_{n,m}^k\}_{n \geq m}$ est décroissante.

Par ailleurs, puisque $\Gamma_n^k \subset Q_k + f_n$, on peut, en appliquant le lemme de Fatou pour chaque $x' \in E'$ (en commençant par une suite $\{x'_s\}_{s \in \mathbb{N}}$, dense dans E') montrer que

$$\Gamma_\infty^k = \lim_n \Gamma_n^k$$

entraîne

$$\lim \Delta_{n,m}^k \in \mathbb{E}^{\mathcal{A}_m}(\Gamma_\infty^k)$$

En outre $\lim_n \Delta_{n,m}^k$ est non vide, car, P-presque sûrement, f_m est une section de $\Delta_{n,m}^k$ pour tout $n \geq m$. Posons $\lim_n \Delta_{n,m}^k = \Delta_{n,\infty}^k$.

Maintenant, en faisant croître k vers $+\infty$, on voit facilement que, d'après la proposition III.10, $\{\Delta_{n,\infty}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et

$$\Delta_m^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_{\infty,m}^k = \mathbb{E}^{\mathcal{A}_m}(\Gamma_\infty)$$

Enfin, il est évident que $\Delta_m^\infty \subset \Gamma_m$.

Ce qui achève la démonstration de la proposition.

Remarque. — La démonstration prouve en outre que bien que la construction de Γ_∞ semble dépendre de la suite arbitraire $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, il n'en est en fait rien.

BIBLIOGRAPHIE

- J.-M. BISMUT, Intégrales convexes et probabilités. *A paraître. Journal of Mathematical Analysis and Applications.*
 Ch. CASTAING [J], Sur les multiapplications mesurables. *Rev. Inform. et Rech. Opérationnelle*, Revue 1, 1967, n° 1, p. 91-126.
 L. L. HELMS [J], Mean convergence of martingales. *Trans. Am. Math. Soc.*, Vol. 87, 1958, p. 439-445.
 L. HORMANDER [J], Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement compact. *Arkiv för Matematik*, Vol. 3, 1954, n° 12, p. 181-186.
 V. KLEE et C. OLECH [J], Characterizations of a class of convex sets. *Math. Scand.*, 20-2, 1967, p. 290-296.

- P. A. MEYER [1], *Probabilités et potentiel*. Hermann, 1966.
- J. NEVEU [1] Convergence presque sûre de martingales multivoques. Communication aux Journées Nationales sur les multialéatoires, Lyon 27-28 janvier 1972. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, Série B, Vol. VIII, 1972, n° 1, p. 1-7.
- J. NEVEU [2], *Bases mathématiques du Calcul des Probabilités*, Masson, 1964.
- R. T. ROCKAFELLAR [1], Measurable dependence of convex sets and functions on parameters. *Journ. of Math. Anal. and Applic.*, Vol. 28, 1969, n° 1, p. 4-25.
- M. VALADIER [1], Intégration de convexes fermés. *Rev. d'Inform. et de Rech. Opérationnelle*, Revue 2, 1970, p. 57-73.
- M. VALADIER [2], Espérance conditionnelle d'un convexe fermé aléatoire. *C. R. A. S.*, t. 273, p. 1265-1267.
- M. VALADIER [2 bis], Espérance conditionnelle d'un convexe fermé aléatoire. Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1972.
- M. VALADIER [3], Espérance conditionnelle d'un convexe fermé aléatoire. Communication aux Journées Nationales sur les multialéatoires, Lyon, 27-28 janvier 1972.
- M. VALADIER [4], Sur l'intégration d'ensembles convexes compacts en dimension infinie, *C. R. A. S.*, Vol. 26, 1968, p. 14-16.
- M. VALADIER [5], Contribution à l'analyse convexe, Thèse, Paris, 1970.
- M. VALADIER [6], Multiapplications mesurables à valeurs convexes compactes. *Journ. Math. Pures et Appliquées*, Vol. 50, 1971, p. 265-297.
- B. VAN CUTSEM [1], Éléments aléatoires à valeurs convexes compactes. Thèse, Grenoble, 1971.
- B. VAN CUTSEM [2], Espérance conditionnelle d'une multiapplication à valeurs convexes compactes. *C. R. A. S.*, Vol. 269, p. 212-214.
- B. VAN CUTSEM [3], Martingales de multiapplications à valeurs convexes compactes. *C. R. A. S.*, Vol. 269, p. 429-432.

(Manuscrit reçu le 13 avril 1972).
