

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MONIQUE LAFON

Géométries combinatoires finies

Annales de l'I. H. P., section B, tome 8, n° 4 (1972), p. 307-317

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1972__8_4_307_0

© Gauthier-Villars, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section B* » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Géométries combinatoires finies

par

Mme Monique LAFON

U. E. R. de Mathématiques,
Université Paul Sabatier, 31-Toulouse.

RÉSUMÉ. — Nous construisons tout d'abord la géométrie combinatoire complémentaire d'une géométrie combinatoire donnée de matrice d'incidence N . N^* est la matrice d'incidence de cette nouvelle géométrie.

Puis nous démontrons que, partant de deux géométries combinatoires de matrices d'incidences N_1 et N_2 , on peut construire deux nouvelles géométries ayant respectivement pour matrice d'incidence

$$N_1 \otimes N_2$$

et

$$N_1 \otimes N_2 + N_1^* \otimes N_2^*$$

Nous étudions un type de géométrie *stable* pour cette dernière opération.

1. INTRODUCTION

Dans [4], nous avons associé à l'algèbre des nombres triaux sur le corps des entiers modulo 2 une géométrie à partir d'un ensemble de points et d'un ensemble de droites satisfaisant à des relations d'incidence. Les caractéristiques de cette géométrie étaient les suivantes :

- 1) nombre de points : 112
- 2) nombre de droites : 112
- 3) toute droite contient 12 points distincts ;
- 4) tout point appartient à 12 droites distinctes ;
- 5) par deux points distincts, il passe soit une droite, soit deux droites, soit quatre droites ;

6) étant donné un point quelconque ξ , il existe 96 points η tels que par ξ et η passe une seule droite, 12 points η tels que par ξ et η passent exactement deux droites, 3 points η tels que par ξ et η passent exactement quatre droites. Nous nous proposons d'introduire ici les géométries combinatoires qui comprennent comme cas particulier le cas étudié ci-dessus et de montrer comment, à partir de deux telles géométries, on peut en obtenir d'autres.

2. DÉFINITION D'UNE GÉOMÉTRIE COMBINATOIRE

Définition

Une *géométrie combinatoire* est définie par un ensemble fini S dont les éléments sont appelés *points* et un sous-ensemble \underline{D} de l'ensemble $\underline{P}(S)$ des parties de S dont les éléments sont appelés les *droites* de la géométrie vérifiant les axiomes suivants :

- 1) toute droite contient k points distincts et k seulement ;
- 2) tout point appartient à r droites distinctes et r seulement ;
- 3) il existe 3 points non alignés ;
- 4) par deux points distincts il passe λ_i droites ($i = 1, \dots, s$), $\lambda_i \geq 1$,
 $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$;
- 5) pour tout point ξ , il existe n_i points η tels que par ξ et η passent λ_i droites ($i = 1, \dots, s$).

Dans ces conditions, si v est le cardinal de S et b celui de \underline{D} , un dénombrement conduit aux égalités

$$\begin{aligned} vr &= bk \\ v &= 1 + \sum_{i=1}^s n_i \\ r(k-1) &= \sum_{i=1}^s \lambda_i n_i \end{aligned}$$

Cette définition généralise les (k, r) plans combinatoires étudiés par M. Lesieur.

Matrices d'incidence

A une géométrie combinatoire, on peut associer une matrice N , appelée *matrice d'incidence*, comme suit : on indexe les points de 1 à v , les droites de 1 à b .

La matrice N est la matrice (a_{ij}) à v lignes et b colonnes où $a_{ij} = 1$ si le point d'indice i appartient à la droite d'indice j et $a_{ij} = 0$ sinon. Une telle

matrice est telle que la somme des éléments de chaque ligne (resp. chaque colonne est r (resp. k)). Il est faux que toute matrice dont les éléments sont des 0 ou des 1 et possédant la propriété ci-dessus soit une matrice d'incidence.

Une géométrie combinatoire sera désignée dans la suite par les paramètres $(v, b, r, k, \lambda_i, n_i)$. Toutefois la donnée de tels paramètres satisfaisant aux relations écrites plus haut ne définit pas forcément une géométrie combinatoire. Mais l'existence d'une telle géométrie est équivalente à la possibilité d'explicitier une matrice d'incidence, d'où la nécessité de construire une telle matrice.

Géométrie complémentaire

PROPOSITION 1

Soit N la matrice d'incidence d'une géométrie combinatoire. La matrice $N^* = J - N$, où J est la matrice à v lignes et b colonnes dont tous les éléments sont des 1, est la matrice d'incidence d'une géométrie combinatoire dite complémentaire de la géométrie initiale, et dont les paramètres sont les suivants :

$$\begin{aligned} \text{nombre de points } b^* &= v \\ \text{nombre de droites } v^* &= b \end{aligned}$$

Toute droite contient $r^* = v - k$ points

Tout point appartient à $k^* = b - r$ droites.

Par deux points distincts il passe $\lambda_i^* = b - 2r + \lambda_i$ droites ($i = 1, \dots, a$).

Ainsi la complémentaire de la géométrie combinatoire $(v, b, r, k, \lambda_i, n_i)$ est la géométrie $(b, v, v - k, b - r, b - 2r + \lambda_i, n_i)$.

Exemple

Soit la géométrie $v=6, b=8, k=3, r=4, \lambda_1=2, \lambda_2=1, n_1=3, n_2=2$ de matrice d'incidence

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et de droites } \begin{aligned} &(1, 2, 3), (1, 2, 5) \\ &(1, 4, 6), (1, 3, 4) \\ &(2, 3, 6), (2, 4, 5) \\ &(3, 5, 6), (4, 5, 6) \end{aligned}$$

La géométrie complémentaire est la géométrie $v^* = 8, b^* = 6, k^* = 3, r^* = 4, \lambda_1^* = 2, \lambda_2^* = 1, n_1^* = 3, n_2^* = 2$ de matrice d'incidence

$$N^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{et de droites } (4, 5, 6), (3, 4, 6), (2, 3, 5)$$

3. COMPOSITION DES GÉOMÉTRIES

1. Proposition 2

Soient deux géométries combinatoires $(v_1, b_1, r_1, k_1, \lambda'_i, n'_i)$ et $(v_2, b_2, r_2, k_2, \lambda''_j, n''_j)$ admettant respectivement pour matrices d'incidence N_1 et N_2 .

La matrice produit tensoriel $N = N_1 \otimes N_2$ est une matrice d'incidence définissant une géométrie combinatoire dite produit ayant pour caractéristiques

$$\begin{aligned} b &= b_1 b_2 \\ v &= v_1 v_2 \\ r &= r_1 r_2 \\ k &= k_1 k_2 \\ \mu_j &= r_1 \lambda''_j \quad (j = 1, \dots, t) \\ \mu_{t+i} &= r_2 \lambda'_i \quad (i = 1, \dots, s) \\ \mu_{t+s+ij} &= \lambda'_i \lambda''_j \\ n_j &= n''_j \quad (j = 1, \dots, t) \\ n_{t+i} &= n'_i \quad (i = 1, \dots, s) \\ n_{t+s+ij} &= n'_i n''_j \end{aligned}$$

où certaines des μ_u peuvent être égaux.

— Une démonstration directe de cette proposition sera exposée dans le 2.

Exemples : $v_1 = b_1 = 6$, $r_1 = 2$, $k_1 = 3$, $\lambda'_1 = 2$, $\lambda''_1 = 1$, $n'_1 = 1$, $n''_1 = 4$.

La matrice d'incidence est

$$N_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Les droites de la géométrie sont, avec des notations évidentes (1, 2, 3); (1, 2, 4); (1, 5, 6); (2, 5, 6); (3, 4, 5); (3, 4, 6)

$$v_2 = b_2 = 3, r_2 = k_2 = 2, \lambda_2 = 1$$

La matrice d'incidence est

$$N_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Les droites de la géométrie sont (1, 2); (1, 3); (2, 3).

La matrice $N_1 \circ N_2$ est

1 1 0	1 1 0	1 1 0			
1 0 1	1 0 1	1 0 1	0	0	0
0 1 1	0 1 1	0 1 1			
1 1 0	1 1 0		1 1 0		
1 0 1	1 0 1	0	1 0 1	0	0
0 1 1	0 1 1		0 1 1		
1 1 0				1 1 0	1 1 0
1 0 1	0	0	0	1 0 1	1 0 1
0 1 1				0 1 1	0 1 1
0	1 1 0			1 1 0	1 1 0
	1 0 1	0	0	1 0 1	1 0 1
	0 1 1			0 1 1	0 1 1
0		1 1 0	1 1 0	1 1 0	
	0	1 0 1	1 0 1	1 0 1	0
		0 1 1	0 1 1	0 1 1	
0		1 1 0	1 1 0		1 1 0
	0	1 0 1	1 0 1	0	1 0 1
		0 1 1	0 1 1		0 1 1

Les caractéristiques de la géométrie produit sont :

$$\begin{aligned} v = b = 18, r = 4, k = 6, \mu'_1 = 2, \mu'_2 = 2.2 = 4, \mu'_3 = 2.1 = 2, \mu'_4 = 2.1 = 2, \\ \mu'_5 = 1.1 = 1, v'_1 = 2, v'_2 = 1, v'_3 = 4, v'_4 = 2, v'_5 = 2.4 = 8 \\ n_1 = v'_1 + v'_3 + v'_4 = 8 \\ n_2 = v'_4 = 2 \\ n_3 = v'_5 = 8 \end{aligned}$$

Les droites de la géométrie sont :

(1, 2, 4, 5, 7, 8)	(1, 2, 13, 14, 16, 17)	(7, 8, 10, 11, 13, 14)
(1, 3, 4, 6, 7, 9)	(1, 3, 13, 15, 16, 18)	(7, 9, 10, 12, 13, 15)
(2, 3, 5, 6, 8, 9)	(2, 3, 14, 15, 17, 18)	(8, 9, 11, 12, 14, 15)
(1, 2, 4, 5, 10, 11)	(4, 5, 13, 14, 16, 17)	(7, 8, 10, 11, 16, 17)
(1, 3, 4, 6, 10, 12)	(4, 6, 13, 15, 16, 18)	(7, 9, 10, 12, 16, 18)
(2, 3, 5, 6, 11, 12)	(5, 6, 14, 15, 17, 18)	(8, 9, 11, 12, 17, 18)

Remarque. — Un problème intéressant est celui de la recherche des géométries indécomposables.

2. Résultat principal : étude d'une « somme » de géométries combinatoires

THÉORÈME

Soient deux géométries combinatoires $(v_1, b_1, r_1, k_1, \lambda'_i, n'_i)$ et $(v_2, b_2, r_2, k_2, \lambda''_j, n''_j)$ admettant respectivement pour matrices d'incidence N_1 et N_2 . Soient N_1^* et N_2^* les matrices d'incidence des géométries complémentaires.

La matrice

$$N = N_1 \otimes N_2 + N_1^* \otimes N_2^*$$

est la matrice d'incidence d'une géométrie combinatoire dont les caractéristiques sont données ci-dessous :

$$\begin{aligned} v &= v_1 v_2 \\ b &= b_1 b_2 \\ r &= r_1 r_2 + (b_1 - r_1)(b_2 - r_2) \\ k &= k_1 k_2 + (v_1 - k_1)(v_2 - k_2) \\ v_j &= (b_1 - r_1)(b_2 - 2r_2) + b_1 \lambda''_j \quad (j = 1, \dots, t) \\ v_{t+i} &= (b_2 - r_2)(b_1 - 2r_1) + b_2 \lambda'_i \quad (i = 1, \dots, s) \\ v_{t+s+i+j} &= \lambda'_i \lambda''_j + (r_2 - \lambda''_j)(r_1 - \lambda'_i) + (b_2 - 2r_2 + \lambda''_j)(b_1 - 2r_1 + \lambda'_i) \\ &\quad + (v_1 + 2r_1 - k_1 - b_1 - \lambda'_i)(v_2 + 2r_2 - k_2 - b_2 - \lambda''_j) \\ n_j &= n''_j \\ n_{t+i} &= n'_i \\ n_{t+s+ij} &= n'_i n''_j \end{aligned}$$

a) Bien que la somme de deux matrices d'incidence ne soit pas en général une matrice d'incidence, il en est ainsi pour la somme N des deux matrices $N_1 \otimes N_2$ et $N_1^* \otimes N_2^*$. Considérons, en effet, un élément de la matrice N_1 :

α) si c'est 0, il est remplacé dans $N_1 \otimes N_2$ par la matrice nulle à v_2 lignes et b_2 colonnes ;

il lui correspond l'élément 1 dans N_1^* et cet élément est remplacé par N_2^* dans $N_1^* \otimes N_2^*$.

Donc l'élément 0 de N_1 est remplacé dans N par la matrice N_2^* .

β) On verrait de même qu'un élément 1 de N_1 est remplacé dans N par la matrice N_2 .

Il en résulte que N est une matrice de 0 et de 1 à v lignes et b colonnes avec $v = v_1 v_2$ (nombre de points de la géométrie), $b = b_1 b_2$ (nombre de droites de la géométrie) ;

chaque ligne de N_1 contient r_1 fois l'élément 1, donnant lieu à r_1 occurrences de N_2 et chaque ligne de N_1 contient $(b_1 - r_1)$ fois l'élément 0, donnant lieu à $(b_1 - r_1)$ occurrences de N_2^* . La somme des éléments de chaque ligne sera donc

$$r = r_1 r_2 + (b_1 - r_1)(b_2 - r_2)$$

Un décompte analogue montre que

$$k = k_1 k_2 + (v_1 - k_1)(v_2 - k_2)$$

b) Nous allons maintenant déterminer les différentes catégories de droites. Pour cela nous allons étudier d'abord $N_1 \otimes N_2$. Prenons deux points distincts ξ et η de la géométrie de matrice d'incidence $N_1 \otimes N_2$ et cherchons le nombre de droites passant par ξ et η .

α) Supposons qu'ils proviennent du même point de la géométrie N_1 . Cet élément étant répété r_1 fois dans la ligne, il a été remplacé par la matrice N_2 ; par ces deux points distincts dans la géométrie N_2 passent donc λ_j'' droites distinctes.

Donc, dans ce cas, dans la géométrie $N_1 \otimes N_2$, il passe $r_1 \lambda_j''$ droites distinctes par les deux points ξ et η .

β) Supposons qu'ils proviennent de deux points distincts de N_1 mais du même point de N_2 . L'élément de N_2 est répété r_2 fois dans la ligne. Par les deux points distincts de N_1 passent λ_i' droites distinctes.

Donc, dans ce cas, dans la géométrie $N_1 \otimes N_2$, il passe $r_2 \lambda_i'$ droites distinctes par les deux points ξ et η .

γ) Supposons qu'ils proviennent de deux points distincts de N_1 et de deux points distincts de N_2 .

Par les deux points distincts de N_1 passent λ'_i droites distinctes.

Par les deux points distincts de N_2 passent λ''_j droites distinctes.

Donc, dans ce cas, dans la géométrie $N_1 \otimes N_2$, il passe $\lambda_i \lambda'_j$ droites distinctes par les deux points ξ et η .

Étudions maintenant $N = N_1 \otimes N_2 + N_1^* \otimes N_2^*$. Introduisons les notations évidentes $r_1^*, r_2^*, \lambda_i^*, \lambda_j^{''*}$.

Prenons deux points distincts de la géométrie N , ξ et η , et étudions le nombre de droites passant par ξ et η dans cette géométrie.

α) Ils proviennent du même point de N_1 et donc du même point de N_1^* . Alors

$$\begin{aligned} v_j &= r_1 \lambda_j'' + r_1^* \lambda_j^{''*} \\ &= r_1 \lambda_j'' + (v_1 - k_1)(b_2 - 2r_2 + \lambda_j'') \quad (j = 1, \dots, t) \end{aligned}$$

β) Ils proviennent de deux points distincts de N_1 (donc de N_1^*) mais du même point de N_2 (donc de N_2^*)

$$\begin{aligned} v_{t+i} &= r_2 \lambda_i' + r_2^* \lambda_i^{''*} \\ &= r_2 \lambda_i' + (v_2 - k_2)(b_1 - 2r_1 + \lambda_i') \quad (i = 1, \dots, s) \end{aligned}$$

γ) Ils proviennent de deux points distincts de N_1 et deux points distincts de N_2 . Nous allons d'abord déterminer le nombre de droites distinctes passant par ξ et η , en supposant que ces droites proviennent d'une colonne présentant deux 1 comme éléments engendrant ξ et η . Il y a λ'_i colonnes ainsi dans N_1 et, chaque 1 étant remplacé par N_2 , il y a finalement $\lambda'_i \lambda'_j$ droites de ce type.

Déterminons le nombre de droites distinctes passant par ξ et η , en supposant que ces droites proviennent d'une colonne présentant deux 0 comme éléments engendrant ξ et η . A ces deux éléments correspondent deux 1 dans N_1^* qui sont remplacés par N_2^* . Il y a $\lambda_i^{''*}$ colonnes ainsi dans N_1^* et λ_j'' dans N_2^* .

Donc il y a $\lambda_i^{''*} \lambda_j^{''*}$ droites de ce type, soit $(b_1 - 2r_1 + \lambda_i)(b_2 - 2r_2 + \lambda_j'')$.

Supposons maintenant que ces droites proviennent d'un 1 et d'un 0 dans cet ordre de N_1 . Le 1 est remplacé par N_2 et le 0 par N_2^* . Il nous faut donc déterminer combien de fois apparaissent au rang $\xi \bmod (v_2)$ et $\eta \bmod (v_2)$ 1 et 0 ensembles dans la même colonne de N_2 ; c'est $(r_2 - \lambda_j'')$, puis 1 et 0 ensembles dans la même colonne de N_1 ; c'est $(r_1 - \lambda_i')$. Finalement il y a $(r_1 - \lambda_i')(r_2 - \lambda_j'')$ droites de ce type.

Supposons que ces droites proviennent d'un 0 et d'un 1 (dans cet ordre) de N_1 . Un calcul analogue montre qu'il existe $(r_1^* - \lambda_i^{''*})(r_2^* - \lambda_j^{''*})$ droites de ce type.

Le nombre total de droites passant par les deux points distincts et est la somme de ces 4 nombres, d'où le résultat annoncé.

3. Cas particulier : un type de géométrie stable pour l'opération

Dans [5], Silitto a étudié les blocks designs qui correspondent à des géométries combinatoires avec $\lambda_i = \lambda$ et $b = 4(r - \lambda)$ ($i = 1$).

Soient deux géométries $(v_1, 4(r_1 - \lambda_1), r_1, k_1, \lambda_1)$ et $(v_2, 4(r_2 - \lambda_2), r_2, k_2, \lambda_2)$. Pour la géométrie correspondant à la matrice

$$N = N_1 \otimes N_2 + N_1^* \otimes N_2^*$$

on a

$$\begin{aligned} v_1 &= (4(r_1 - \lambda_1) - r_1)(4(r_2 - \lambda_2) - 2r_2) + b_1\lambda_2 \\ &= 6r_1r_2 - 8r_1\lambda_2 - 8r_2\lambda_1 + 12\lambda_1\lambda_2 = \lambda \end{aligned}$$

et on vérifie de même que $v_2 = v_3 = \lambda$ en sorte que la géométrie de matrice d'incidence N est du même type que les géométries initiales et

$$\begin{aligned} r &= r_1r_2 + 16(r_1 - \lambda_1)(r_2 - \lambda_2) \\ b &= 16(r_1 - \lambda_1)(r_2 - \lambda_2) = 4(r - \lambda) \end{aligned}$$

Ce type de géométrie est donc stable par l'opération envisagée.

4. Exemple de construction d'une géométrie par cette méthode

Soient la géométrie $(v_1 = b_1 = 3, r_1 = k_1 = 2, \lambda' = 1)$ de matrice d'incidence

$$N_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

et la géométrie $(v_2 = b_2 = 5, r_2 = k_2 = 3, \lambda_1'' = 2, \lambda_2'' = 1, n_1'' = n_2'' = 2)$ de matrice d'incidence

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

La géométrie composée a pour matrice d'incidence

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les paramètres de cette géométrie sont

$$\begin{aligned} v &= b = 15 \\ r &= k = r_1 r_1 + (b_1 - r_1)(b_2 - r_2) = 8 \\ v_j &= (b_1 - r_1)(b_2 - 2r_2) + b_1 \lambda_j'' \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 5 \\ v_2 = 2 \end{cases} \\ v_3 &= (b_2 - r_2)(b_1 - 2r_1) + b_2 \lambda_i' = 3 \\ v_{3+ij} &= \lambda_i' \lambda_j'' + (r_2 - \lambda_j'')(r_1 - \lambda_i') + (b_2 - 2r_2 + \lambda_j'')(b_1 - 2r_1 + \lambda_i') \\ &\quad + (v_1 + 2r_1 - k_1 - b_1 \lambda_i')(v_2 + 2r_2 - k_2 - b_2 + \lambda_j'') \end{aligned}$$

soit

$$v_4 = 5; \quad v_5 = 5$$

Remarquons que $v_1 = v_5 = 5$ en sorte que nous n'obtenons que quatre types distincts de droites. Le nombre de points correspondants est

$$\begin{aligned} n_1 &= n_1'' = 2 \\ n_2 &= n_2'' = 2 \\ n_3 &= n_1' = 2 \\ n_4 &= n_1' n_1'' = 4 \\ n_5 &= n_1' n_2'' = 4 \end{aligned}$$

et, en définitive, $s_1 = n_1 + n_5 = 6$, $n_2 \neq n_3 = 2$, $n_4 = 4$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. CRAPO et G. ROTA, Combinatorial geometres. University of Waterloo and MIT, déc. 1968.
- [2] P. DEMBOWSKI, Finite Geometries. *Ergebnisse der Math.*, **44**, 1968.
- [3] MARSHALL HALL Jr., Combinatorial Theory. Gmn Blausdell.
- [4] M. LAFON, Construction d'une géométrie projective finie sur une algèbre. *J. de Math. Pures et Appliquées*, 1968.
- [5] G. P. SILLITO, An extension property of a class of. B. BD *Biometira*, Vol. **44**, p. 278.
- [6] M. N. VARTAK, in on application of Kronecker product of matrices to statistical designs. *Ann. Math. Statistics*, Vol. **26**, n° 3, p. 420.

(Manuscrit reçu le 12 mars 1971).
