ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. ROUDIER

Chaîne de Markov μ-continue à l'infini

Annales de l'I. H. P., section B, tome 8, nº 3 (1972), p. 241-248
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1972__8_3_241_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VIII, n° 3, 1972, p. 241-248.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Chaîne de Markov μ-continue à l'infini

par

J. ROUDIER

Recherche Opérationnelle et Informatique.
Institut de Recherche des Transports, 2, Avenue du Général Malleret-Joinville.
B. P. 28. 94-Arcueil.

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous nous intéressons à une chaîne de Markov qui, partant de tout état x, quitte presque sûrement en un temps fini la partie singulière par rapport à la mesure initiale μ de la probabilité de transition : une telle chaîne est dite μ-continue à l'infini et constitue une généralisation des chaînes dont la probabilité de transition est μ-continue.

On montre que le fait d'être μ-continue à l'infini est équivalent à l'absolue continuité, sur la σ-algèbre stationnaire de l'espace des trajectoires, des probabilités $\mathbb{P}_x$ (qui correspond à l'état initial x) par rapport à $\mathbb{P}_\mu$ (qui correspond à la mesure initiale μ).

Alors la σ-algèbre des événements invariants contenus dans la partie conservatrice de l'espace des états est atomique.

SUMMARY. — In this article, our main purpose is to generalize the case of a μ-continuous Markov chain: a chain will be said asymptotic μ-continuous if, for all state x, the singular part of the n-step transition probability converges to 0 as n increases.

We show the equivalence between asymptotic μ-continuity and the following condition about the invariant σ-algebra: for all state x, the probability $\mathbb{P}_x$ (corresponding to an initial distribution ε_x) is absolutely continuous relative to the probability $\mathbb{P}_\mu$ (corresponding to the initial distribution μ).

Under this condition, the σ-algebra of all closed subsets of the conservative part of the state space is atomic.

I. DONNÉES

Nous considérons une probabilité de transition $P = P(x, dy)$ sur un espace mesurable à base dénombrable $(E, \mathscr{F})$.

Nous noterons $P^n(x, dy)$ les itérés de P, définies par la formule de récurrence :

$$\text{pour } A \in \mathscr{F} \qquad P^{n+1}(x, A) = \int_E P(x, dy)P^n(y, A)$$

Pour toutes les interprétations probabilistes, nous utiliserons la suite $(X_n, n \in N)$ des applications coordonnées de l'espace des trajectoires $(\Omega, \mathscr{A}) = (E, \mathscr{F})^{\otimes N}$ dans $(E, \mathscr{F})$. Si μ est une probabilité sur $(E, \mathscr{F})$, $\mathbb{P}_\mu$ et $\mathbb{P}_x$ désigneront les probabilités uniques sur $(\Omega, \mathscr{A})$ pour lesquelles $(X_n, n \in N)$ est une chaîne de Markov de probabilité de transition P et respectivement de loi initiale μ et d'état initial x. On a en particulier les relations :

$$\text{pour } B \in \mathscr{A} \qquad \mathbb{P}_\mu(B) = \int_E \mu(dx)\mathbb{P}_x(B)$$

$$\text{pour } x \in E, A \in \mathscr{F} \qquad \mathbb{P}_x(X_n \in A) = P^n(x, A)$$

$$\mathbb{P}_\mu(X_0 \in A) = \mu(A)$$

Dans toute la suite, nous prendrons pour μ une probabilité telle que si A, élément de $\mathscr{F}$, est μ-négligeable,

$$\mu P(A) = \int_E \mu(dx)P(x, A) = 0.$$

Alors, si $\mu(A) = 0$, $P^n(x, A)$ est nul sauf sur un ensemble μ-négligeable.

Nous noterons θ l'opérateur translation sur $(\Omega, \mathscr{A})$ défini par :

$$\omega \in \Omega \qquad X_n \circ \theta(\omega) = X_{n+1}(\omega) \qquad (\forall_N \geqslant 0).$$

La sous σ-algèbre de $\mathscr{A}$ des événements invariants par θ est appelée σ-algèbre des événements stationnaires et notée $\mathscr{S}$.

II. PARTIE RÉGULIÈRE ET PARTIE SINGULIÈRE DE LA PROBABILITÉ DE TRANSITION

On peut décomposer la probabilité de transition $P^n(x, dy)$ en ses parties régulière et singulière par rapport à μ :

$$P^n(x, dy) = p_n(x, y)\mu(dy) + P_1^n(x, dy)$$

$P_1^n(x, dy)$ est une mesure singulière de support N_x^n, μ-négligeable. Posons $N_x = \bigcup_n N_x^n$: c'est aussi un ensemble μ-négligeable. Comme $\mathscr{F}$ est à base dénombrable, on peut trouver une version de $p_n(x, y)$ qui soit bi-mesurable (cf. [*2*], p. 612) : c'est une telle version que nous prendrons dans la suite.

Pour A fixé dans $\mathscr{F}$,

$$P_1^n(x, A) = P^n(x, A) - \int_A p_n(x, y)\mu(dy)$$

est une fonction $\mathscr{F}$-mesurable. C'est le cas en particulier de

$$\boxed{g_n(x) = P_1^n(x, N_x) = P_1^n(x, E) = P^n(x, N_x)}$$

Soit A dans $\mathscr{F}$; par la propriété de Markov

$$P^{n+m}(x, A) = \int_E P^n(x, dy)P^m(y, A)$$

Décomposons $P^m(y, A)$ en $\int_A p_m(y, z)\mu(dz) + P^m(y, A \cap N_y)$; il vient :

$$P^{n+m}(x, A) = \int_E P^n(x, dy)\int_A p_m(y, z)\mu(dz) + \int_E P^n(x, dy)P^m(y, A \cap N_y).$$

Décomposons de même $P^n(x, dy)$; il vient alors

$$\begin{aligned} P^{n+m}(x, A) = &\int_{N_x} P^n(x, dy)P^m(y, A \cap N_y) + \int_E p_n(x, y)\mu(dy)P^m(y, A \cap N_y) \\ &+ \int_E P^n(x, dy)\int_A p_m(y, z)\mu(dz). \end{aligned}$$

Si $\mu(A) = 0$, on a

$$\int_A p_m(y, z)\mu(dz) = 0 \qquad \forall y \in E$$

et $P^m(y, A \cap N_y)$ est nul p. s. car $0 \leqslant P^m(y, A \cap N_y) \leqslant P^m(y, A)$.

Il reste alors que

$$P^{n+m}(x, A) = \int_{N_x} P^n(x, dy)P^m(y, A \cap N_y).$$

En particulier :

$$\mathrm{P}^{n+m}(x, \mathrm{N}_x) = \int_{\mathrm{N}_x} \mathrm{P}^n(x, dy)\mathrm{P}^m(y, \mathrm{N}_x \cap \mathrm{N}_y);$$

d'où il résulte que $g_{n+m}(x) \leqslant g_n(x)$. Posons $g(x) = \lim_{n\to\infty} \downarrow g_n(x)$.

PROPOSITION 1. — *La fonction g est une fonction positive, bornée par 1, telle que*

$$g(x) \leqslant \int_{\mathrm{E}} \mathrm{P}(x, dy)g(y) \qquad \forall x \in \mathrm{E}$$

Démonstration. — On a :

$$\begin{aligned} g(x) \leqslant g_{n+1}(x) = \mathrm{P}^{n+1}(x, \mathrm{N}_x) &= \int_{\mathrm{N}_x} \mathrm{P}(x, dy)\mathrm{P}^n(y, \mathrm{N}_x \cap \mathrm{N}_y) \\ &\leqslant \int_{\mathrm{N}_x} \mathrm{P}(x, dy)\mathrm{P}^n(y, \mathrm{N}_y) \leqslant \int \mathrm{P}(x, dy)g_n(y) \end{aligned}$$

Si on fait tendre n vers $+\infty$, on a $g(x) \leqslant \int \mathrm{P}(x, dy)g(y)$. ■

Considérons d'autre part l'événement stationnaire suivant :

$$\mathrm{A}_x = \lim_{n\to\infty} \sup \{ \mathrm{X}_n \in \mathrm{N}_x \}.$$

Cet événement A_x représente l'ensemble des trajectoires qui vont une infinité de fois dans l'ensemble N_x.

PROPOSITION 2. — a) *Pour $n < m$ et x dans* E :

$$\{ \mathrm{X}_m \in \mathrm{N}_x \} \subset \{ \mathrm{X}_n \in \mathrm{N}_x \} \qquad \mathbb{P}_x\text{-p. s.}$$

b) $$g(x) = \mathbb{P}_x(\mathrm{A}_x) \qquad \forall x \in \mathrm{E}$$

La proposition 2 s'interprète simplement de la façon suivante : si, partant de x, la chaîne se trouve à l'instant n dans la partie singulière N_x, elle s'y trouvait presque sûrement à tous les instants antérieurs à n ; $g(x)$ est la probabilité que la chaîne, partant de x, reste tout le temps dans la partie singulière N_x.

Démonstration. — *a*) Calculons $\mathbb{P}_x(\mathrm{X}_n \notin \mathrm{N}_x ; \mathrm{X}_m \in \mathrm{N}_x)$ en utilisant la propriété de Markov

$$\mathbb{P}_x(\mathrm{X}_n \notin \mathrm{N}_x ; \mathrm{X}_m \in \mathrm{N}_x) = \int_{\mathrm{N}_x^c} \mathrm{P}^n(x, dy)\mathrm{P}^{m-n}(y, \mathrm{N}_x)$$

Comme $\mu(\mathrm{N}_x) = 0$, on a $\mathrm{P}^{m-n}(y, \mathrm{N}_x) = 0$ μ-p. s.

Sur N_x^c, $P^n(x, dy)$ est absolument continue par rapport à μ, de densité $p_n(x, y)$. Ainsi

$$\mathbb{P}_x(X_n \notin N_x\,;\, X_m \in N_x) = \int_{N_x^c} p_n(x, y)\mu(dy)P^{m-n}(y, N_x) = 0$$

b) Par définition $A_x = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{ X_m \in N_x \}$; mais d'après (*a*)

$$A_x = \lim_{n\to\infty} \downarrow \{ X_n \in N_x \}\ \mathbb{P}_x\text{-p. s.}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(A_x) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_x(X_n \in N_x) = \lim_{n\to\infty} P^n(x, N_x)\\ &= \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

III. CHAÎNE μ-CONTINUE A L'INFINI

DÉFINITION. — *Nous dirons que la chaîne est* μ-continue à l'infini *si* $g(x) = 0$ *quel que soit* x *dans* E.

THÉORÈME 1. — *Soit* x *appartenant à* E. *Alors la condition* « $g(x) = 0$ » *est équivalente à* « $\mathbb{P}_x$ *absolument continue par rapport à* $\mathbb{P}_\mu$ *sur* $\mathcal{S}$ ».

Démonstration. — La démonstration va être basée sur une identité. Soit A un événement stationnaire tel que $\mathbb{P}_\mu(A) = 0$; alors

$$\mathbb{P}_x(A) = \mathbb{P}_x(A \cap A_x) \qquad \forall x \in E$$

Calculons $\mathbb{P}_x(A \cap A_x^c)$. Nous avons

$$A_x^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ X_n \notin N_x \} \qquad \mathbb{P}_x\text{-p. s.}\ ;$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(A \cap A_x^c) &= \mathbb{P}_x\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{ X_n \notin N_x \}\right)\right)\\ &\leqslant \sum_n \mathbb{P}_x(A \{ X_n \notin N_x \}).\end{aligned}$$

Comme A est stationnaire, $A = \theta^{-n}(A)$: cela permet de calculer chaque terme en appliquant la formule de Markov.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x[A \cap \{ X_n \notin N_x \}] &= \mathbb{P}_x[\theta^{-n}(A) \cap \{ X_n \notin N_x \}]\\ &= \int_{N_x^c} P^n(x, dy)\mathbb{P}_y(A).\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{P}_\mu(A) = 0$, on a $\mathbb{P}_y(A) = 0$ (μ-p. s.) ; or sur N_x^c, $P^n(x, dy)$ est absolument continue par rapport à μ, de densité $p_n(x, y)$. Ainsi :

$$\mathbb{P}_x[A \cap \{ X_n \notin N_x \}] = \int_{N_x^c} p_n(x, y)\mu(dy)\mathbb{P}_y(A) = 0,$$

ce qui permet de trouver la formule annoncée.

— Si $g(x) = 0$; soit A stationnaire tel que $\mathbb{P}_\mu(A) = 0$

$$0 \leqslant \mathbb{P}_x(A) = \mathbb{P}_x(A \cap A_x) \leqslant \mathbb{P}_x(A_x) = g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_x \ll \mathbb{P}_\mu \text{ sur } \mathscr{S}.$$

— Si $\mathbb{P}_x \ll \mathbb{P}_\mu$ sur $\mathscr{S}$: A_x est un événement stationnaire $\mathbb{P}_\mu$-négligeable car N_x est μ-négligeable. Dans ces conditions $g(x) = \mathbb{P}_x(A_x) = 0$. ■

COROLLAIRE. — *La chaîne est μ-continue à l'infini si et seulement si, quel que soit x dans E, $\mathbb{P}_x$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}_\mu$ sur la σ-algèbre $\mathscr{S}$ des événements stationnaires.*

IV. σ-ALGÈBRE INVARIANTE D'UNE CHAÎNE μ-CONTINUE A L'INFINI

Appelons C et D les parties conservative et dissipative de l'espace des états E (cf. [*3*], p. 178 et suiv.). L'hypothèse que la chaîne est μ-continue à l'infini donne une structure particulière à la σ-algèbre $\mathscr{C}$ des événements de C invariants : rappelons qu'un événement B contenu dans C appartient à $\mathscr{C}$ si $P(x, B) = 1_B(x)$ sur C et seulement si $P(x, B) = 1_B(x)$ sur B.

THÉORÈME 2. — *Si la chaîne est μ-continue à l'infini, la σ-algèbre $\mathscr{C}$ des événements invariants est atomique.*

Démonstration. — Soit A un sous-ensemble de C, invariant, non atomique tel que $\mu(A) > 0$. Pour tout entier n, il existe une partition $E_1^{(n)}, \ldots, E_{k_n}^{(n)}$ de A dans $\mathscr{C}$ telle que

$$0 < \mu(E_i^{(n)}) \leqslant \frac{1}{n} \qquad \forall i = 1, \ldots, k_n.$$

On peut même supposer ces partitions croissantes avec n. Comme A et $E_i^{(n)}$ sont des ensembles invariants, pour tout entier m supérieur à 1, on a

$$P^m(x, E_i^{(n)}) = 1_{E_i^{(n)}}(x) \text{ sur C} \qquad (\mu\text{-p. s.}),$$
$$P^m(x, A) = 1_A(x) \quad \text{sur C} \qquad (\mu\text{-p. s.}).$$

Par suite

$$\mu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} \mathrm{P}^m(x, \mathrm{A})\mu(dx) = \sum_{i=1}^{k_n} \int_{\mathrm{A}} \mathrm{P}^m(x, \mathrm{E}_i^{(n)})\mu(dx)$$

$$\mu(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{k_n} \int_{\mathrm{E}_i^{(n)}} \mu(dx)\mathrm{P}^m(x, \mathrm{E}_i^{(n)}).$$

Si nous calculons chaque terme en utilisant la décomposition :

$$\mathrm{P}^m(x, \mathrm{E}_i^{(n)}) = \mathrm{P}_1^m(x, \mathrm{E}_i^{(n)}) + \int_{\mathrm{E}_i^{(n)}} p_m(x, y)\mu(dy),$$

nous obtenons que

$$\mu(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{k_n} \int_{\mathrm{E}_i^{(n)} \times \mathrm{E}_i^{(n)}} p_m(x, y)\mu(dx)\mu(dy) + \sum_{i=1}^{k_n} \int_{\mathrm{E}_i^{(n)}} \mu(dx)\mathrm{P}_1^m(x, \mathrm{E}_i^{(n)}).$$

De $0 \leqslant \mathrm{P}_1^m(x, \mathrm{E}_i^{(n)}) \leqslant \mathrm{P}^m(x, \mathrm{E}_i^{(n)})$, on déduit que

$$\mathrm{P}_1^m(x, \mathrm{E}_i^{(n)}) = 0 \text{ sur } \mathrm{C} - \mathrm{E}_i^{(n)} \qquad (\mu\text{-p. s.}),$$
$$\mathrm{P}_1^m(x, \mathrm{A}) = 0 \text{ sur } \mathrm{C} - \mathrm{A} \qquad (\mu\text{-p. s.}).$$

Posons $\mathrm{B}_n = \bigcup_{i=1}^{k_n} \mathrm{E}_i^{(n)} \times \mathrm{E}_i^{(n)}$: les B_n forment une suite décroissante d'ensembles dans $(\mathrm{E}^2, \otimes^2\mathscr{F})$, de limite B^∞.

Nous avons la relation :

$$\mu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{B}_n} p_m(x, y)\mu(dx)\mu(dy) + \int_{\mathrm{A}} \mathrm{P}_1^m(x, \mathrm{A})\mu(dx)$$

et, par passage à la limite,

$$\mu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{B}^\infty} p_m(x, y)\mu(dx)\mu(dy) + \int_{\mathrm{A}} \mathrm{P}_1^m(x, \mathrm{A})\mu(dx).$$

Or

$$(\mu \otimes \mu)(\mathrm{B}_n) = \sum_{i=1}^{k_n} (\mu \otimes \mu)(\mathrm{E}_i^{(n)} \times \mathrm{E}_i^{(n)}) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k_n} \mu(\mathrm{E}_i^{(n)}) = \frac{1}{n}\mu(\mathrm{A}) \to 0$$

lorsque $n \to \infty$. Par suite $(\mu \otimes \mu)(\mathrm{B}^\infty) = 0$ et $\int_{\mathrm{B}^\infty} p_m(x, y)\mu(dx)\mu(dy) = 0$.
Il reste donc que

$$\mu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} \mu(dx)\mathrm{P}_1^m(x, \mathrm{A}) \leqslant \int_{\mathrm{A}} \mu(dx)g_m(x)$$

Les fonctions $g_m(x)$ décroissent vers 0 par hypothèse ; donc

$$\int_A \mu(dx)g_m(x) \to 0 \qquad (m \to \infty) \qquad \text{et} \qquad \mu(A) = 0$$

Il y a contradiction avec le fait que $\mu(A) > 0$; ce qui montre que $\mathscr{C}$ est atomique. ■

Remarque. — Un cas particulier de ce qui précède est celui d'une chaîne de Markov μ-continue où $P(x, dy)$ est absolument continue par rapport à μ pour tout x de E : alors $g_1(x) = 0$. C'est ce cas particulier qu'étudie Shu-Teh-Moy dans [5].

RÉFÉRENCES

[1] J. AZEMA, M. DUFLO et D. REVUZ, Note sur la mesure invariante des processus de Markov récurrents. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **III**, n° 4, 1967.

[2] DOOB, *Stochastic processes*. Wiley and Sons, 1953.

[3] J. NEVEU, *Bases mathématiques du Calcul des Probabilités*. Masson, Paris, 1963.

[4] S. OREY, *Lecture Notes on limit theorem for Markov chain Transition Probability functions*. University of Minnesota, 1968.

[5] SHU-TEH-MOY, λ-continuous Markov chains. *T. A. M. S.*, t. **117**, n° 5, 1965, p. 68-91.

(Manuscrit reçu le 14 février 1972).