ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

C. FRÉMOND

M. SUEUR-PONTIER

Caractérisation des groupes localement compacts de type (T) ayant la propriété de point fixe

Annales de l'I. H. P., section B, tome 7, nº 4 (1971), p. 293-298

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1971__7_4_293_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B:
Vol. VII, n° 4, 1971, p. 293-298. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Caractérisation des groupes localement compacts de type (T) ayant la propriété de point fixe

par

C. FRÉMOND (*) et M. SUEUR-PONTIER
(Paris) (Poitiers)

SUMMARY. — Using results of Azencott, we characterize all locally compact groups for which the bounded measurable functions of non singular random walks are constant.

INTRODUCTION

Dans sa thèse [*1*], Azencott définit les espaces de Poisson d'un groupe G localement compact à base dénombrable, associés à des mesures de probabilité μ de la manière suivante : on appelle *fonction μ-harmonique* toute fonction borélienne bornée f sur le groupe G telle que $f * \mu = f$; Azencott munit l'espace vectoriel H_μ des fonctions μ-harmoniques uniformément continues à gauche d'une structure de C*-algèbre ; l'*espace de Poisson* π_μ associé à la probabilité μ est alors le spectre de la C*-algèbre H_μ. L'espace π_μ est un G-espace. Une mesure de probabilité est dite *étalée* s'il existe un entier n tel que μ^{*n} n'est pas étrangère à la mesure de Haar sur G. Le groupe G est dit *de type* (T) si, pour toute mesure de probabilité μ étalée, il est transitif sur l'espace de Poisson π_μ associé. Un groupe G a la *propriété de point fixe* si : chaque fois que G opère continûment sur une partie convexe compacte K d'un espace vectoriel topologique localement convexe, par des transformations affines, alors G laisse fixe un point de K.

(*) Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications » dépendant de la section n° 2 « Théories physiques et Probabilités », associée au C. N. R. S.

NOTATIONS

Si G est un groupe localement compact à base dénombrable, on notera G_0 sa composante connexe, R son radical. La classe des groupes de type (T) sera symbolisée par (T), celle des groupes ayant la propriété de point fixe par (PF).

Azencott démontre dans [*1*] (théorèmes V-2 et V-3) les résultats suivants.

THÉORÈME 0.1. — *Si* G *est un groupe de Lie connexe, et si* G/R *est compact, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) $G \in (T)$.

2) $R \in (T)$.

D'autre part, Azencott caractérise les groupes de la classe (T) ayant la propriété de point fixe :

THÉORÈME 0.2. — *Si* G *est un groupe de Lie à base dénombrable, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $G \in (T) \cap (PF)$.

b) G/G_0 *est fini ;* $G_0 \in (T) \cap (PF)$.

c) G/G_0 *est fini ;* G_0/R *est compact ; pour tout élément* X *du radical* $\mathscr{R}$ *de l'algèbre de Lie de* G, *les valeurs propres de* $\mathrm{ad}_{\mathscr{R}} X$ *sont imaginaires pures.*

d) *Pour toute mesure de probabilité étalée* μ *sur* G, *l'espace de Poisson* π_μ *est fini.*

e) *Pour toute mesure de probabilité étalée* μ *sur* G, *l'espace vectoriel des fonctions* μ*-harmoniques est de dimension finie.*

f) G/G_0 *est fini ; pour toute mesure de probabilité étalée* μ *sur* G, *une fonction mesurable bornée sur* G *est* μ*-harmonique si et seulement si elle admet comme périodes tous les points du support de* μ.

Azencott suggère ([*1*], remarque V.5) que l'on doit pouvoir étendre cette caractérisation aux groupes localement compacts en utilisant le résultat suivant de Rickert [*5*] (qui est d'ailleurs une extension de résultats de Furstenberg [*3*]) :

THÉORÈME 0.3. — *Si* G *est un groupe localement compact à base dénombrable, et si* G/G_0 *est compact, les propositions suivantes sont équivalentes :*

a) $G \in (PF)$.

b) G/R *est compact.*

Le but de cet article est de montrer que l'on peut effectivement étendre ainsi cette caractérisation.

§ 1. EXTENSION DU THÉORÈME 0.1 AUX GROUPES DE LIE NON CONNEXES

THÉORÈME 1.1. — *Si* G *est un groupe de Lie à base dénombrable tel que* G/R *est compact, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $G \in (T)$.
ii) $G_0 \in (T)$.
iii) $R \in (T)$.

Démonstration. — Comme R est inclus dans G_0, G_0/R est un fermé du compact G/R, donc G_0/R est compact. De plus, R est aussi le radical de G_0 ; le théorème 0.1 appliqué à G_0 montre l'équivalence de *ii)* et *iii)*. Par ailleurs, G/G_0, isomorphe à $G/R \,/\, G_0/R$, est compact, donc fini. Le fait que G_0/R est compact entraîne que $G_0 \in (PF)$ (théorème 0.3). Alors, le théorème 0.2 permet d'affirmer que *ii)* entraîne *i)*. La réciproque est vraie (d'après [*1*], § IV.1, corollaire 2).

§ 2. EXTENSION DU THÉORÈME 0.2 AUX GROUPES LOCALEMENT COMPACTS A BASE DÉNOMBRABLE

THÉORÈME 2.1. — *Si* G *est un groupe localement compact à base dénombrable tel que* G/R *est compact, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i) $G \in (T)$.
ii) $G_0 \in (T)$.

Démonstration. — Puisque G/R est compact, G/G_0 est compact pour la même raison que dans le § 1. On peut alors appliquer un résultat de Montgomery et Zippin ([*4*], p. 153 et 175) : « il existe un sous-groupe compact distingué K de G tel que G/K soit un groupe de Lie ». L'image du radical R par l'application naturelle $p : G \to G/K$, RK/K, est un sous-groupe connexe, distingué et résoluble ; donc, RK/K est contenu dans le radical de G/K, R(G/K). Par ailleurs, le quotient $G/K \,/\, RK/K$, isomorphe à G/RK, est compact, puisque G/R l'est et que RK contient R. Le fait que RK/K est contenu dans R(G/K) induit une surjection canonique de $G/K \,/\, RK/K$ sur $G/K \,/\, R(G/K)$, qui, par conséquent, est aussi compact. Le théorème 1.1 s'applique alors au groupe de Lie G/K, dont la composante connexe est G_0K/K ([*2*], p. 58) : les propositions suivantes sont équivalentes :

a) $G/K \in (T)$.

b) $G_0/G_0 \cap K \in (T)$ (puisque G_0K/K est isomorphe à $G_0/K \cap G_0$). Or, K et $G_0 \cap K$ sont des sous-groupes compacts distingués, respectivement de G et G_0. Un résultat d'Azencott ([*1*], proposition IV.4 *c*)) permet de dire que chacune des propositions *a*) et *b*) est équivalente respectivement à *i*) et *ii*) du théorème, qui se trouve ainsi démontré.

On peut alors démontrer l'extension du théorème 0.2 aux groupes localement compacts à base dénombrable :

THÉORÈME 2.2. — *Si G est un groupe localement compact à base dénombrable, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $G \in (T) \cap (PF)$.

b) G/G_0 *est compact et* $G_0 \in (T) \cap (PF)$.

c) G/G_0 *est compact,* G_0/R *est compact et il existe un sous-groupe compact distingué* K *de* G *tel que* G/K *est un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes et tel que, si* $\mathcal{R}$ *est l'algèbre de Lie de* G/K, *pour tout* X *de* $\mathcal{R}$, *les valeurs propres de* $\mathrm{ad}_{\mathcal{R}}\, X$ *sont imaginaires pures.*

d) *Pour toute mesure de probabilité étalée* μ *sur* G, *l'espace de Poisson* π_μ *est fini.*

e) *Pour toute mesure de probabilité étalée* μ *sur* G, *l'espace vectoriel des fonctions* μ*-harmoniques est de dimension finie.*

f) G/G_0 *est compact, et pour toute mesure de probabilité étalée* μ *sur* G, *une fonction mesurable bornée est* μ*-harmonique si et seulement si elle admet comme périodes tous les points du support de* μ.

Démonstration. — Rappelons d'abord un résultat d'Azencott ([*1*], théorème IV.2).

(*) Pour que le groupe G soit de type (T), il faut et il suffit que G/G_0 soit compact, et qu'il existe un sous-groupe compact distingué K de G tel que G/K soit un groupe de Lie de type (T) ayant un nombre fini de composantes connexes.

Montrons que *a*) *équivaut à b*) : d'après (*) dans l'hypothèse *a*) G/G_0 est compact et G/K est un groupe de Lie de type (T). Par ailleurs, $K \cap G_0$ est un sous-groupe compact distingué de G_0 ; $G_0/K \cap G_0$ est isomorphe à G_0K/K, composante connexe de G/K. On peut alors appliquer le théorème 0.2 au groupe de Lie G/K : G_0K/K, donc aussi $G_0/K \cap G_0$, est de type (T). Le résultat (*) appliqué au groupe G_0 permet de conclure que G_0 est de type (T). Enfin d'après ([5], 5.4), $G \in (PF) \Rightarrow G_0 \in (PF)$.

Réciproquement, si G/G_0 est compact, d'après ([5], 4.8):

$$G_0 \in (PF) \Rightarrow G \in (PF).$$

De plus, si G_0 a la propriété du point fixe, G_0/R est compact ([5], 5.3); ceci ajouté au fait que G/G_0 est compact permet de dire que G/R est compact. On peut appliquer alors le théorème 2.1: $G_0 \in (T) \Rightarrow G \in (T)$.

Montrons que *a) équivaut à c)*; on vient de voir que dans l'hypothèse *a*), G/G_0 est compact. De plus, d'après ([5], 5.3), G_0/R est compact. Soit par ailleurs un sous-groupe compact distingué K de G tel celui du rappel 2.3: G/K est un groupe de Lie de type (T) ayant un nombre fini de composantes connexes. A ce groupe de Lie, on applique le théorème 0.2 dont la proposition *c*) donne la condition cherchée ici.

Dans l'hypothèse *c*) il suffira de montrer que G/K appartient à $(T) \cap (PF)$ pour montrer *a*), puisque K est un sous-groupe compact distingué de G. Pour montrer que G/K appartient à $(T) \cap (PF)$, on applique à ce groupe de Lie l'équivalence des propositions *a*) et *c*) de 0.2: pour s'y ramener, il faut montrer que le quotient de la composante connexe de ce groupe de Lie par son radical, $R(G/K)$ est compact. On a vu que sa composante connexe est G_0K/K, et que son radical contient RK/K. Il existe donc une surjection canonique de $G_0K/K\,/\,RK/K$, isomorphe à G_0K/RK, sur ce quotient. Par ailleurs, G_0K/RK est isomorphe à $G_0/G_0 \cap RK$ ($G_0K = G_0 \cdot RK$ puisque G_0 contient R), et $G_0 \cap RK$ s'écrit encore $R \cdot (G_0 \cap K)$ et par conséquent contient R. Il existe donc une surjection canonique de G_0/R, compact par hypothèse, sur $G_0/G_0 \cap RK$. Donc, G_0K/RK, et par conséquent le quotient $G_0K/K\,/\,R(G/K)$, sont compacts.

Pour les dernières équivalences, la démonstration est la même que celle du théorème 0.2, puisque, pour les montrer, Azencott fait appel à des propositions concernant les groupes localement compacts à base dénombrable, et non pas seulement les groupes de Lie ([*1*], propositions IV.1; IV.7; IV.8). Cette dernière proposition ([*1*], IV.8) montre exactement que *a) entraîne d*). Montrons que *d) entraîne a*). μ est une mesure de probabilité étalée sur G, l'espace de Poisson associé π_μ est fini. Soit H le sous-groupe fermé engendré par le support de μ. En appliquant ([*1*], IV.7), on obtient que π_μ est isomorphe à G/H. La proposition ([*1*], IV.1) montre alors que G est transitif sur π_μ, donc G appartient à (T).

L'équivalence de *d*) et de *e*) résulte immédiatement de la proposition ([*1*], IV.7). Dans l'hypothèse *d*), le groupe G appartient à (T), et par conséquent G/G_0 est compact. En utilisant à nouveau la proposition ([*1*], IV.7), on voit que, dans l'hypothèse *d*), la proposition *f*) est complètement démontrée. Pour montrer la réciproque, on se ramène une dernière fois à la proposition ([*1*], IV. 7). On montre que G/H est fini, où H est toujours le sous-groupe fermé engendré par le support de la mesure μ : en effet, puisque la mesure μ est étalée, le sous-groupe H est ouvert. Ceci entraîne d'une part que G/H est discret, et d'autre part que H contient G_0 ; or, G/G_0 est compact ; donc G/H l'est aussi, et par conséquent G/H est effectivement fini.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] R. Azencott, Espaces de Poisson des groupes localement compacts, *Lecture Notes in Math.* Springer Verlag, 1970.
[*2*] N. Bourbaki, Topologie Générale III.
[*3*] H. Furstenberg, Poisson Formula for semi-simple Lie groups. *Ann. of Math.*, t. **77**, 1963, p. 335-386.
[*4*] D. Montgomery et L. Zippin, *Topological transformation groups*, New York, Interscience Publishers, 1955.
[*5*] N. W. Rickert, Amenable groups and groups with the fixed point property. *Transactions Amer. Math. Soc.*, t. **127**, 1967, p. 221-232.

Manuscrit reçu le 14 juin 1971.