C. BRUTER

Le système dynamique de Beboutoff

Annales de l'I. H. P., section B, tome 7, n° 3 (1971), p. 235-251
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1971__7_3_235_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VII, n° 3, 1971, p. 235-251.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Le système dynamique de Beboutoff

par

C. BRUTER
Faculté des Sciences, Brest.

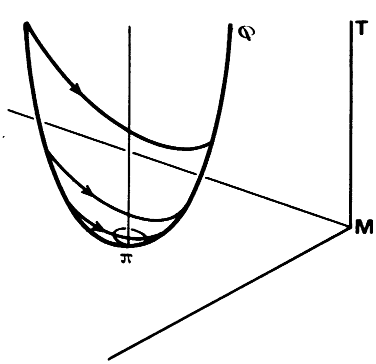
RÉSUMÉ. — Cet article d'exposition s'appuie en particulier sur les travaux de Nemitski. L'introduction de la notion de système dynamique élémentaire de Beboutoff permet de concevoir un énoncé du théorème de Beboutoff plus général que celui celui donné par Nemitski.

0. GÉNÉRALITÉS ET RAPPELS

On se propose, sous le nom d'étude des *systèmes dynamiques*, d'examiner les différentes propriétés qualitatives des *trajectoires* ou *lignes de force* décrivant le mouvement d'un point dans un espace d'observation M.

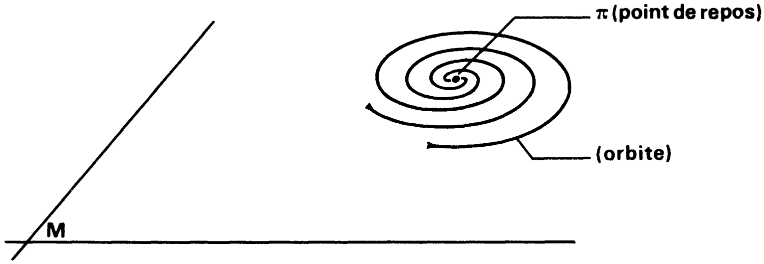
On appelle M *espace des phases* du système dynamique $\mathscr{D}$ considéré. Si T désigne l'axe des temps $V = M \times T$ est l'*univers des phases* ou *espace d'évolution.*

L'exemple géométrique suivant nous servira de référence :



Nous avons dessiné un paraboloïde $\mathscr{P}$ et son axe qui coupe $\mathscr{P}$ en π. $\mathscr{P}$ est supposé être tangent en π à M, isomorphe à R^2. π est le *point de repos* d'une famille de trajectoires dessinées sur $\mathscr{P}$: le mobile placé en π ne change pas de position au cours du temps. Les trajectoires autres que π sont des spirales qui convergent vers π sans l'atteindre.

Voici ce qu'on observe dans l'espace des phases :



Un point fixe π autour duquel s'enroulent une famille continue de spirales.

On appellera *orbite* la projection sur M d'une trajectoire observée dans M × T. On suppose que les propriétés de la famille des orbites de $\mathscr{D}$ font de M une variété différentiable. Les valeurs des vitesses en chaque point caractérisent $\mathscr{D}$. On est donc conduit à la première définition suivante :

DÉFINITION 1. — *On appelle système dynamique au sens de Birkhoff,* $\mathscr{D}$, *la donnée d'une variété différentiable* M *et d'un champ de vecteurs (vitesses)* X *sur* M.

X est une application de M dans son fibré tangent TM :

$$X : x \in M \to \frac{dx}{dt} = X(x) \in TM$$

Remarque 1. — X définit en chaque point $x \in M$ un groupe local de transformations locales à un paramètre.

Remarque 2. — On peut caractériser $\mathscr{D}$ non seulement par X, mais encore par l'application continue intégrale de X, $\varphi_X : M \times T \to M$.

De ces deux remarques on déduit la

DÉFINITION 2. — *On appelle système dynamique au sens de Birkhoff,* $\mathscr{D}$, *la donnée d'une variété différentiable* M *et d'un groupe* φ_t *à un paramètre* $t \in T$ *de difféomorphismes de* M.

Dans la plupart des systèmes dynamiques classiques tels que les systèmes hamiltoniens, M est une variété munie d'une mesure invariante (invariants intégraux):

$$t \in \mathrm{T} \qquad \mathrm{A} \subset \mathrm{M} \qquad \mu(\mathrm{A}) = \mu(\varphi_t(\mathrm{A}))$$

On aboutit à la

DÉFINITION 3 [1]. — *On appelle système dynamique classique* $\mathscr{D} = (\mathrm{M}, \mu, \varphi_t)$ *la donnée d'une variété différentiable* M, *d'une mesure* μ *sur* M *définie par une densité positive et continue, d'un groupe* φ_t *à un paramètre* X *de difféomorphismes de* M *préservant la mesure.*

On peut remarquer que dans les cas classiques que traite la physique mathématique, M est une variété symplectique feuilletée par les orbites.

Notons également qu'un processus stochastique généralise à sa façon un système dynamique classique qui s'apparente à un processus d'évolution markovien où le caractère aléatoire de la transition a disparu.

La définition 2 peut s'étendre aisément en imposant des conditions moins restrictives à M:

DÉFINITION 4. — *On appelle système dynamique généralisé* $\mathscr{D} = (\mathrm{M}, \mathrm{G})$ *la donnée d'un espace topologique* M *et d'un groupe de Lie* G *agissant sur* M.

On prend ordinairement pour G, qu'on appelle parfois *groupe dynamique*, le groupe additif des réels T. On trouvera dans [5] un exposé de synthèse sur les principales propriétés de ces systèmes dynamiques.

On peut enfin remarquer que la donnée d'une trajectoire permet de définir une relation d'équivalence ρ sur $\mathrm{M} \times \mathrm{T}$: si x, $y \in \mathrm{M} \times \mathrm{T}$, $x \rho y$, si x et y appartiennent à la même trajectoire. Par suite, on peut définir des systèmes dynamiques très généraux. Nous les appellerons *systèmes dynamiques généralisés de Reeb*, au travail duquel [9] nous renvoyons le lecteur.

REMARQUE SUR LES ESPACES D'OBSERVATIONS

Considérons le mouvement d'une particule dans un espace de référence, de masse unité, et soumise à une force $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ qui dépend des coordonnées spatiales x de la particule, et de sa vitesse $v = \frac{dx}{dt}$. La loi du mouvement est régie par l'équation

$$\frac{dx^2}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$$

ou encore par le système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = f(x, y)$$

On voit alors apparaître deux types de paramètres. Les premiers sont apparents ; il nous est facile de localiser la position x d'un objet dans un espace tridimensionnel. On appellera *espace substrat* S *ou espace écran* [*11*] l'espace des paramètres apparents. Les seconds paramètres, tels que la vitesse $\frac{dx}{dt}$, nous sont perceptibles mais sont plus « cachés » ; ils forment ce qu'on appelle l'*espace interne* I du mouvement. « C'est dans l'espace produit S × I qu'a lieu le processus dynamique proprement dit ».

La projection sur S d'une orbite de $M \subseteq S \times I$ donne la forme globale observée par nos sens du mouvement que décrit cette orbite. La projection sur S d'un point p de l'orbite, dont la localisation sur cette orbite est caractérisée par un instant t, définit la forme instantanée du mouvement.

Si maintenant nous considérons un objet spatial O_t en évolution, par exemple une peau de baudruche que l'on gonfle, on peut lui associer un système dynamique $\mathscr{D}$, de sorte que deux points voisins de la surface de O_t sont les projections sur S de deux points p_t et p'_t situés sur deux orbites « voisines ». La forme F_t de l'objet à l'instant t est donc donnée par la projection sur S d'une section de M à l'instant t.

Les problèmes importants que le dynamicien va rencontrer sont alors les suivants :

(*i*) formes des variétés M et de leurs projections dans S (morphologie),

(*ii*) stabilité de ces formes quand t varie (théorie de la bifurcation, étude de la stabilité structurelle ; morphogenèse).

Deux types de méthodes ont été utilisés pour traiter globalement ces problèmes (l'étude locale donne des résultats très intéressants du point de vue pratique, voir par exemple [*11*]) :

(*i*) décomposition spectrale de M en variétés « élémentaires » sous l'action des groupes de transformations (exemple, le théorème spectral de Smale [*10*]),

(*ii*) recollement de variétés « élémentaires » qu'on se donne *a priori* (cette méthode débouche sur l'étude de la stratification des morphismes).

Nous allons l'utiliser pour généraliser un théorème de représentation des systèmes dynamiques définis sur un espace métrique compact, et dû à Beboutoff [*3*]. Ce théorème est cité par exemple dans l'ouvrage de Vogel [*12*]. Une démonstration légèrement différente et très claire du théorème de Beboutoff généralisé a été proposée par Kakutani [6]. Nous reprenons ici, en la clarifiant et en la précisant, la démonstration qu'en donne Nemitski [4]. Nous introduisons la notion de Beboutoff élémentaire, cellules invariantes dont le recollement permet de construire les Beboutoff plus généraux. Quelques propriétés topologiques de ces cellules sont évidentes. A cet égard, les méthodes algébriques qu'ont essayées de mettre en pratique différents auteurs, dont par exemple Auslander et Hahn [2] [5] ne sont pas très concluantes.

Nous indiquons brièvement comment le théorème de Beboutoff peut être utilisé conjointement avec le théorème du point fixe pour démontrer le dernier théorème géométrique de Poincaré.

A l'origine de cette note, rédigée en 1969, se trouve notre travail d'exposition de seconde thèse; le sujet nous en avait été donné par Monsieur le Professeur Avez. Nous sommes heureux de l'en remercier ici.

1. LE SYSTÈME DYNAMIQUE DE BEBOUTOFF

DÉFINITION 5

A) *Nous appellerons système dynamique élémentaire de Beboutoff, ou Beboutoff élémentaire,* $\mathscr{B} = (\mathrm{M}, \varphi_t)$ *un système dynamique pour lequel*

(*i*) M *est une variété compacte, à bord* $\partial\mathrm{M}$ *compact,*

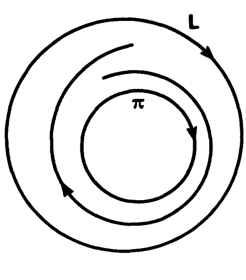
(*ii*) $\partial\mathrm{M} = \pi \cup \mathrm{L}$, $\pi \cap \mathrm{L} = \emptyset$,

(*iii*) $\forall p \in \mathrm{M}$, *p est régulier* (p est situé sur une orbite O_p et une seule (M est donc feuilletée par ses orbites),

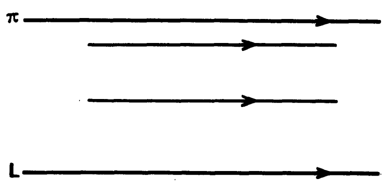
(*iv*) *si les orbites ne sont pas toutes parallèles* (autrement dit si $\mathrm{O}_p \neq \mathrm{O}_q$ il existe t tel que $d[\varphi_t(p), \varphi_t(q)] \neq d(p, q)$) *quels que soient le voisinage de* π, $\mathrm{V}(\pi)$, *et le point* $p \in \mathrm{M} - \partial\mathrm{M}$, *il existe un point* $p_\pi \in (\mathrm{M} - \pi) \cap \mathrm{V}_\pi$ *dont p est l'évolué.*

Exemples :

1.

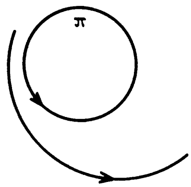


2.



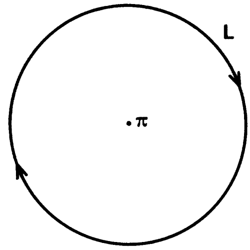
π, L « de rayon infini »
($\exists p$, $p \in \mathrm{L}$ (resp. π) tels que
$\mathrm{N} > 0$, $d(p, q) > \mathrm{N}$)

3.



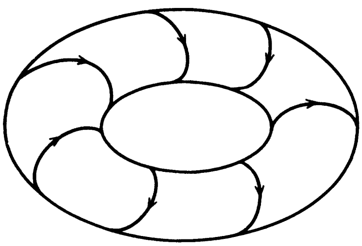
L de rayon infini

4.



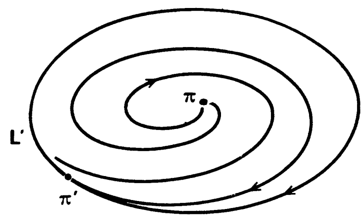
π est point de repos.
$(\forall t,\ \varphi_t(\pi) = \pi)$

5.



$\pi = \emptyset$
(voir [*1*])

6.



$(\pi', L') = L$

La définition 5 A se complète de la façon suivante :

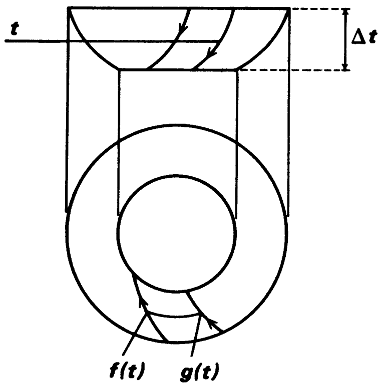
B) *On appellera système dynamique de Beboutoff généralisé (ou plus simplement Beboutoff généralisé) un système dynamique* $\mathscr{B} = (\mathrm{M}, \varphi_t)$ *pour lequel il existe un recouvrement de* M *à l'aide de variétés* M_i *associées chacune à un Beboutoff élémentaire, telles que si*

$$\mathrm{I}_{ij} = \mathrm{M}_i \cap \mathrm{M}_j \neq \emptyset, \quad \mathrm{I}_{ij} = \mathrm{L}_h = \pi_{h'}, \quad h = i \text{ ou } j, \quad h' = i \text{ ou } j.$$

Plutôt que d'étudier un Beboutoff généralisé, nous allons nous restreindre au cas suffisant de Beboutoff élémentaire. Si $\pi \neq \emptyset$ n'est pas dégénéré en un point de repos, on se ramène à ce cas par homéomorphisme sans rien changer à la nature des trajectoires.

2. LE THÉORÈME DE BEBOUTOFF

Reprenons le premier exemple géométrique de système dynamique donné au début du paragraphe précédent. Coupons le paraboloïde $\mathscr{P}$ par deux plans parallèles à M, séparés dans le temps de Δt. Projetons sur M le tronc de paraboloïde ainsi obtenu :



Ce schéma nous montre qu'on peut remplacer l'étude de la famille $\mathcal{O}$ des orbites de $\mathcal{B}$ dans M par l'étude d'un espace fonctionnel $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ en correspondance bijective avec $\mathcal{O}$.

On veut naturellement munir $\mathcal{F}$ d'une distance. Observons que si nous décrivons en partant près de π deux trajectoires r et r' sur le paraboloïde, les points courants $p(t)$ et $p(t')$ s'éloignent de plus en plus sur $\mathcal{P}$. On aimerait pourtant dire que les trajectoires restent à égale distance d. Si, près du point de repos, pour t petit $d(f, g) < \varepsilon$ est voisin de $|f(t) - g(t)|$, pour une valeur élevée de t, on pourra convenir d'approcher $d(f, g)$ par $\frac{1}{t} < \varepsilon$. Finalement on posera :

$$d(f, g) = \sup_{N>0} \left| \min \left(\max_{|t| \leq N} |f(t) - g(t)|, \frac{1}{N} \right) \right|$$

On pourra remarquer que :

$$d(f, g) < \varepsilon \iff \max_{|t| < \frac{1}{\varepsilon}} |f(t) - g(t)| < \varepsilon$$

Il en résulte que l'égalité $\lim_n d(f_n, f) = 0$ signifie que la suite f_n converge uniformément vers f sur tout intervalle borné de T. Par suite on peut trouver une base dénombrable de $\mathcal{F}(\mathcal{B})$: on peut prendre comme base l'ensemble des polynômes de t à coefficients rationnels. Nous exploiterons plus loin cette propriété de $\mathcal{F}(\mathcal{B})$.

On peut bâtir sur $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ un système dynamique $\mathcal{B}' = (\mathcal{F}(\mathcal{B}), \psi_t)$ en posant :

$$\theta(\varphi(p, t)) = f(t) \quad \text{et} \quad \theta[(p, t + t')] = \psi_{t'}[f(t)] = f(t + t').$$

On dira que $\mathscr{B}'$ est le (système dynamique) *dérivé* du système dynamique $\mathscr{B}$. Il est maintenant intuitif qu'on peut énoncer le

THÉORÈME BEBOUTOFF [3]. — *Il existe un homéomorphisme θ de $\mathscr{B}$ sur $\mathscr{B}'$ qui a toute orbite de $\mathscr{B}$ associe un élément unique de $\mathscr{F}(\mathscr{B})$.*

Le paragraphe suivant sera consacré à la démonstration constructive de ce théorème.

Une méthode simple pour construire géométriquement $\mathscr{B}'$ est la suivante : on plaque l'espace des trajectoires dans $M \times T$ sur une boule S de dimension convenable. On construit $\mathscr{B}'$ en faisant une projection stéréographique de S sur un plan tangent à S ; on peut prendre π comme pôle de la projection.

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE BEBOUTOFF

Cette démonstration repose sur le schéma géométrique précédent qui suggère de réaliser un pavage annulaire de M. Ce pavage servira de support à une fonction polynomiale approchant $f \in \mathscr{F}$.

Après un homéomorphisme convenable si nécessaire, on pourra supposer M contenue dans l'espace annulaire situé entre deux boules de rayon 1 et 2 centrées en π.

Soit c un point de M choisi de telle sorte que la boule S de rayon 1 coupe L et contienne π. Pour éviter tout ennui, on prendra $c \neq \pi$.

On posera $S_0 = M$ et on désignera par $\{ S_n \}$, $n \in N - \{ 0 \}$, une famille de boules de rayon $1/n$ centrées en c auxquelles on a enlevé π, par $\{ A_n \}$ la famille des espaces annulaires compris entre deux boules successives :

$$A_n = M \cap S_{n-1} - M \cap S_n \qquad (S_0 = M)$$

On réalise ensuite un pavage plus fin de chaque A_n à l'aide de tubes finis disjoints sur lesquels on va définir θ.

DÉFINITION. — On dit que l'ouvert U de M est un *tube fini* de *section locale* Σ si :

(i) $\Sigma \subseteq U$,

(ii) tout point $u \in U$ est l'évolue en un temps unique, fini, d'un point de Σ.

On convient de « mettre la section au milieu du tube » et d'écrire celui-ci sous la forme $(\Sigma[\tau])$ où $[\tau]$ désigne ici l'intervalle du temps $[-\tau, +\tau]$.

3.1. Pavage de A_n

On désignera par $\varphi(p)$ l'orbite de $\mathscr{B}$ passant par p.
On va montrer :

LEMME 1. — *Soit* $V(A_n)$ *un voisinage de* A_n. *Il existe un compact* Σ_n *de* A_n *section locale d'un tube fini* $(\Sigma_n, [\tau_n]) \subset V(A_n)$ *tel que*

(*i*) $p \in A_n \Longrightarrow \Sigma_n \cap \varphi(p) \neq \emptyset$,
(*ii*) $m, n \in N$, $m \neq n \Longrightarrow (\Sigma_n, [\tau_n]) \cap (\Sigma_m, [\tau_m]) \neq \emptyset$.

Démonstration. — Elle procède par récurrence.

1.1. Établissons la première partie du lemme pour $n = 1$. Puisque M est compact, il est de même de A_n. On peut donc recouvrir A_n par une famille de tubes finis. Précisons les caractéristiques de ces tubes.

De façon que $f \in \mathscr{F}$ décrivent bien les orbitrs de $\mathscr{B}$, il est nécessaire de ne pas recouvrir une orbite périodique par un seul tube.

M étant compact, p un point régulier, $V_\alpha(p)$ un voisinage de p de diamètre α, il existe un $\lambda \in T^+$ tel que $|t| < \lambda \Longrightarrow \varphi_t(p) \in V_{\alpha_1}(p)$.

A_1 est également compact et ne contient pas de point singulier. Il existe donc $\lambda' \in T$ tel que tout orbite périodique entrant dans A_1 soit de période supérieure à 4λ.

Soit $\mu = \inf(\lambda, \lambda')$; pour tout $p \in A_1$, $\delta < \alpha_1$, $\varphi_{[\mu]}(V_\delta(p))$ admet une section locale σ passant par p. Ainsi :

$$p \in A_1 \Longrightarrow V_\delta(p) \subset V_{\alpha_1}(A_1) \Longrightarrow \sigma \subset \varphi_{[\mu]}(V_\delta(p)) \subset V_{2\alpha_1}(A_1) \Longrightarrow \varphi_{[\mu]}(\sigma) \subset V_{3\alpha_1(A_1)}$$

On peut recouvrir A_1 d'une famille finie de tubes semblables à celui que l'on vient de construire. Notons $\Phi = \{(\sigma_i, [\mu])\}$ cette famille de tubes. Nous allons montrer qu'on peut, à partir de cette famille de tubes, construire un tube $(\Sigma_1, [\tau_1]) \subseteq V_{5\alpha_1}(A_1)$ tel que

$$p \in A_1 \Longrightarrow \varphi(p) \cap (\Sigma_1, [\tau_1]) \neq \emptyset.$$

Cette assertion est vérifiée si $|\Phi| = 1$. Supposons qu'elle soit vraie si $|\Phi| = n - 1$. Montrons qu'elle l'est encore si $|\Phi| = n$: on pose

$$B_1 = \bigcup_{i=1}^{n-1} \varphi_{[\mu]}(\sigma_i), \qquad B_2 = (\sigma_n, [\mu]).$$

Il existe un tube fini $(\Sigma'_1, [\tau'_1])$ d'après l'hypothèse de récurrence, tel que

$$p \in B_1 \Longrightarrow \varphi(p) \cap (\Sigma'_1, [\tau'_1]) \neq \emptyset, \quad (\Sigma'_1, [\tau'_1]) \subseteq V_{5\alpha_1}(A_1 \cap B_1).$$

$(\Sigma'_1, [\tau'_1])$ est un tube compact. Si $(\Sigma'_1, [\tau'_1]) \cap (\sigma_n, [\tau_1]) \neq \emptyset$, on applique une nouvelle fois l'hypothèse de récurrence: il existe un tube $(\Sigma_1, [\tau_1])$ qui vérifie notre assertion. Si l'intersection précédente est vide, soit μ' la valeur minimale si elle existe de $t \in \mathrm{T}$ telle que

$$(\sigma_n, [\mu']) \cap (\Sigma'_1, [\tau'_1]) = \emptyset.$$

Si μ' existe on répète l'argument précédent. Sinon B_1 et B_2 forment un revêtement disjoint de A_1. Mais alors si $\mathrm{B}'_2 \supset \mathrm{B}_2$, B_1 et B'_2 ne sont plus disjoints et on reprend l'argumentation précédente. Finalement notre assertion est prouvée.

1.2. Supposons que nous ayons déterminé les tubes $(\Sigma_1, [\tau_1]), \ldots, (\Sigma_n, [\tau_n])$ qui satisfont dans les espaces annulaires respectifs $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ aux conditions du lemme. On peut construire sur A_{n+1} un tube $(\Sigma'_{n+1}, [\tau'_{n+1}])$ qui satisfait à la condition (i) du lemme : on procède pour cela comme au paragraphe précédent. On peut choisir α_{n+1} de sorte que pour $i < n - 1$

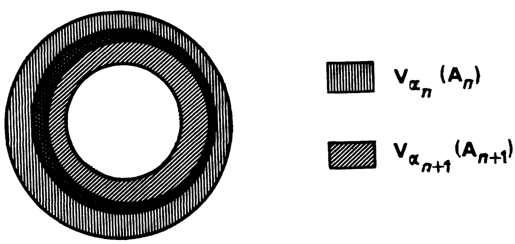
$$\mathrm{V}_{5\alpha_{n+1}}[\mathrm{A}_{n+1}] \cap \mathrm{V}_{5\alpha_i}(\mathrm{A}_i) \neq \emptyset.$$

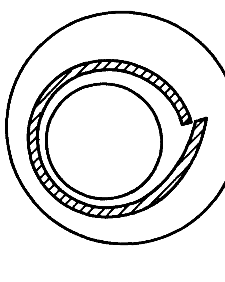
Si $(\Sigma'_{n+1}, [\tau'_{n+1}]) \cap (\Sigma_n, [\tau_n]) = \emptyset$, alors le lemme est démontré. Sinon il existe un tube $(\Sigma'', [\tau'']) \subset (\Sigma'_{n+1}, [\tau'_{n+1}]) \cup (\Sigma_n, [\tau_n]) = \mathrm{U}$ tel que

$$p \in \mathrm{U} \Longrightarrow \varphi(p) \cap (\Sigma'', [\tau'']) \neq \emptyset : \mathrm{A}_n \cap (\Sigma'', [\tau'']), \mathrm{A}_{n+1} \cap (\Sigma'', [\tau'']) \text{ et } (\Sigma_i, [\tau_i]), \quad i < n - 1,$$

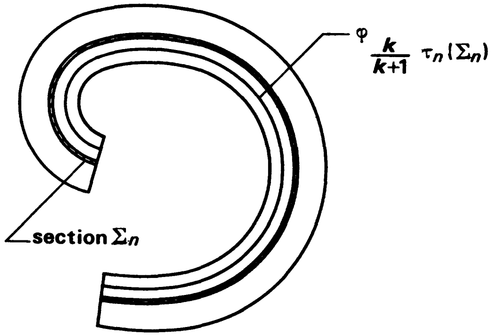
vérifient alors les conditions du lemme. C. Q. F. D.

On illustre ci-dessous le pavage de A_n:





tube $(\Sigma_n, [\tau_n])$
dans $\mathrm{V}(\mathrm{A}_n)$



On raffine maintenant le pavage de A_n en substituant au tube $(\Sigma_n, [\tau_n])$ un tissage du tube par des évolués Σ_n^k de la section locale Σ_n:

$$\Sigma_n^k = \varphi_{\frac{k\tau_n}{k+1}}(\Sigma_n)$$

Il est clair, puisque d'une part les tubes sont disjoints, d'autre part par un point p régulier ne passe qu'une orbite, que les Σ_n^k sont disjoints quels que soient n et k; la distance entre Σ_n^k et $\Sigma_{n'}^{k'}$ ($n' \neq n$ ou $k \neq k'$) n'est pas nulle.

3.2. Construction de la fonction $\theta[\varphi(p)] = f_p(t)$

On désigne par $\{ U_n^k \}$ une base dénombrable du compact Σ_n, $U_n^0 = \Sigma_n$. Si $\bar{U}_n^k$ est l'adhérence de U_n^k, on définit ensuite la suite des évolués W_n^k de U_n^k:

$$W_n^k = \varphi_{\frac{k}{k+1}\tau_n}(\bar{U}_n^k)$$

Remarquons que par construction $W_n^k \subseteq \Sigma_n^k$.

p et son orbite $\varphi(p)$ étant donnés, on définit maintenant sur W_n^k une fonction $\theta_n^k(p)$:

$$\theta_n^k(p) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \varphi(p) \cap W_n^k = \emptyset \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \left(\dfrac{1}{3}\right)^k & \text{si} \quad \varphi(p) \cap W_n^k \neq \emptyset \end{cases}$$

et on pose:

$$\theta[\varphi(p)] = \sum_n \sum_k \theta_n^k[p]$$

On peut prendre par exemple pour $f_p(t)$ la fonction

$$f_p(t) = \sum_n \sum_k \theta_n^k(p) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2} dx$$

On verra comment faire mieux au paragraphe 3.4.

3.3. **Propriétés de la fonction θ**

θ est une fonction bijective: puisqu'à toute trajectoire de $\mathscr{B}$ est associée par construction une fonction de $\mathscr{F}(\mathscr{B})$, il suffit de montrer que

$$\theta[\varphi(p)] \neq \theta[\varphi(q)]$$

entraîne $\varphi(p) \neq \varphi(q)$.

Posons si $W_n^k \cap \varphi(p) \neq \emptyset$, $W_n^k = W_n^k(p)$, et $W(p) = \bigcup_n \bigcup_k W_n^k(p)$. Puisque $\theta[\varphi(p)] \neq \theta[\varphi(q)]$, c'est, étant donné le mode de construction de $\theta[\varphi(p)]$, qu'il existe n et k tels que

$$W_n^k(p) \neq \emptyset, \quad W_n^k(p) \subset W(p) - W(q)$$

par suite $\varphi(q) \cap W_n^k(p) = \emptyset$ condition qui entraîne $\varphi(p) \neq \varphi(q)$ puisque p et q, différents de π, sont des points réguliers de M.

θ est une fonction continue: soit $\varepsilon > 0$ tel que $d(\theta[\varphi(p)], \theta[\varphi(q)]) < \varepsilon$ et soient $W_n^k(p) \subset W(p) - W(q)$, $W_n^l(q) \subset W(q) - W(p)$. Posons

$$d[\varphi(p), \varphi(q)] = \min_{(n,k),(m,l)} d[W_n^k(p), W_n^l(q)] = \delta$$

$$d'[\varphi(p), \varphi(q)] < \delta \Longrightarrow d[\theta[\varphi(p)], \theta[\varphi(q)]] < \varepsilon$$

D'après la définition du système dynamique $\mathscr{B}$, si $p \neq \pi$, $\varphi_t(p)$ est une fonction continue de p et de t. On peut donc trouver deux points p' et q' situés respectivement sur les orbites $\varphi(p)$ et $\varphi(q)$, un temps $|t| < \frac{1}{\varepsilon}$ de sorte que

$$d(p', q') < \alpha \Longrightarrow d'[\varphi_t(p'), \varphi_t(q')] < \delta$$

En résumé, rappelant que $\theta[\varphi(p')] = f_{p'}$, $\varepsilon > 0$ étant donné, on peut trouver p' et q', $|t| < \frac{1}{|\varepsilon|}$ tels que

$$d(p', q') < \alpha \Longrightarrow d(f_{p'}, f_{q'}) < \varepsilon$$

M étant une variété compacte θ^{-1} est un homéomorphisme de $\mathscr{B}$ sur $\mathscr{B}'$. Le théorème de Beboutoff est démontré.

On remarquera que la valeur de θ dépend du choix de c, centre de la famille des espaces annulaires. Nous aurions dû écrire θ^c au lieu de θ. Mais la première, plus lourde, ne nous était pas utile jusqu'à présent.

3.4. Construction de $\mathscr{B}$

On peut à partir de $\mathscr{F}(\mathscr{B})$ construire un très vaste ensemble de systèmes $\mathscr{B}'$. Mais on peut s'imposer les conditions naturelles suivantes :

(*i*) φ périodique $\Longleftrightarrow f$ périodique,

(*ii*) $\underset{|t| \to \infty}{\varphi(p, t) \to}$ ensemble limite $\Longleftrightarrow \underset{|t| \to \infty}{f_p(t)}$ borné

(*iii*) $\varphi(p, t)(|t| \to \infty)$ n'atteint pas d'ensemble $\Longleftrightarrow f_p(t)$ borné ($|t| \to \infty$) non limite à distance finie.

Il est relativement facile de construire $f_p(t)$ de manière que ces conditions soient réalisées.

Si une orbite $\varphi(p)$ est périodique, elle est de période Δ.

Soit alors $\{ V_n \}$ un recouvrement fini du compact $\varphi(p)$ tel que $V_n \cap V_m = \emptyset$ sauf si $n = m \pm 1$. On suppose $d(V_n, V_{n+1}) < \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in N - 0$. Soit $h : \varphi(p) \to \Delta$ un homéomorphisme de $\varphi(p)$ sur Δ. $\{ h(V_n) \} = \{ T_n \}$ est un recouvrement fini de Δ.

On suppose que $p \in V_0$; on évalue $\theta^p[\varphi(p)]$. Si $t_n \in T_n$, on suppose que $\varphi(p, t_n) = p_n \in V_n$. On évalue $\theta^{p_n}[\varphi(p_n)]$. On pose, si $t \in T_n$:

$$f_p^\alpha(t) = \sum_{p_j \in \{V_0, \ldots, V_j, \ldots\}} (1/2)^j \theta^{p_j}[\varphi(p_j)] \tag{1}$$

et enfin

$$f_p(t) = \lim (\alpha \to \infty) f_p^\alpha(t) \tag{2}$$

On vérifie sans peine que cette expression a un sens et permet de satisfaire à la condition (*i*).

Si maintenant $\varphi(p)$ n'est pas périodique, on la décompose en sections de longueur Δ qui forment une partition dénombrable de T. On choisit une origine t_0 : on pose $\Delta_j = (t_0 + j\Delta) - (t_0 + (j - 1)\Delta)$, $j \in Z$. Si $\varphi(p)$ n'a pas d'ensemble limite, si $t \in \Delta_n$, on posera

$$f_p(t) = \Sigma f_p(t_0 + n - 1)\Delta) + f_{p,\Delta_n}(t)$$

$f_{p,\Delta_n}(t)$ a la signification suivante : on calcule par les formules (1) et (2) $f_{p,\Delta_n}(t)$ en remplaçant Δ par Δ_n, p par l'évolué par $(n-1)\Delta$ du point de l'orbite situé en t_0. On peut de la sorte satisfaire à la condition (*iii*). Si maintenant $\varphi(p)$ a un ensemble limite, par exemple pour $t > 0$, alors que dès que $t > t_0$ on pondère $f_{p,\Delta_n}(t)$ défini précédemment du coefficient $\frac{1}{n^2}$. De la sorte (*ii*) est satisfait.

4. QUELQUES PROPRIÉTÉS DE $\mathscr{B}$

L'intérêt du dérivé $\mathscr{B}'$ est de permettre d'examiner les propriétés d'un système dynamique homéomorphe à $\mathscr{B}$.

4.1. Fonctions presque périodiques au sens de Bochner

Puisque M est compacte, $\mathscr{F}$ contient un sous-ensemble F de fonctions presque périodiques au sens de Bochner : on entend par là que $F = \{ f_p(t) \}$ est compact dans l'espace des fonctions continues.

Les orbites correspondantes sont *stables au sens de Poisson* : puisque la suite $f_p(t_n)$ admet une valeur d'adhérence, on peut trouver un point p' de l'orbite passant par p et une valeur N_p tels que, ε étant donné, $|t| > N_p$ entraîne

$$d[\varphi(t, p'), p'] < \varepsilon$$

ce qui est la définition de la stabilité à la Poisson.

(Nous acceptons les cas où le point d'adhérence ne peut être atteint qu'en un temps non fini, ou se trouve à distance non finie).

4.2. Fonctions pseudopériodiques au sens de Bohr

On dit que l'orbite $\varphi(p, t)$ est *uniformément stable au sens de Poisson*, si pour tout t (ou encore pour tout point de l'orbite), pour tout $\varepsilon > 0$, $N > 0$, il existe $|\tau| > N$ tel que

$$d[\varphi(p, t + \tau), \varphi(p, t)] \leqslant \varepsilon.$$

Dans le système dynamique $\mathscr{B}'$, cette définition entraîne que la fonction $f_p(t)$, définie et continue pour toute valeur de t, vérifie les propriétés suivantes :

quels que soient $\varepsilon > 0$, $N > 0$, il existe $\tau > N$ tel que

$$\sup_{-\infty < t < +} | f_p(t + \tau) - f_p(t) | < \varepsilon$$

La fonction f_p est alors une fonction pseudopériodique au sens de Bohr.

4.3. **Fonctions presque périodiques**

On dit que l'orbite $\varphi(p)$ est *stable au sens de Liapounoff* si, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver un $\delta > 0$ tel que $q(p, q) < \delta$ entraîne, quel que soit $t \in T$, $d[\varphi(p, t), \varphi(q, t])) < \varepsilon$.

$\mathscr{F}$ étant un espace compact de fonctions supposées continues, $\mathscr{B}'$ contient des orbites stables au sens de Liapounoff.

On dira que : A est *α-dense* dans M si quel que soit le point $p \in M$, $V_\alpha(p) \cap A \neq \emptyset$; $f(t)$ est presque périodique si, ε étant donné, il existe un ensemble $\alpha(\varepsilon)$-dense de nombres $\{ \tau_n \}$ tels que

$$t \in T : \; d(f(t + \tau_n), \; f(t)) < \varepsilon$$

Si $f(t_0) = f(p, t)$ on peut remplacer la ligne précédente par

$$\sup_{-\infty < t < +\infty} | f_p(t + \tau_n) - f_p(t) | < \varepsilon$$

On peut établir que toute fonction presque périodique dans un espace complet est stable au sens de Liapounoff par rapport à elle-même. Et par suite le

THÉORÈME DE NEMITSKI. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un compact* C *soit la fermeture d'une orbite presque périodique est que* C *soit un groupe abélien compact et connexe.*

On en déduit alors des propriétés d'ergodicité.

On dit d'abord qu'un sous-ensemble S d'un ensemble sous-jacent à un système dynamique $\mathscr{B}$ est *invariant*, s'il est fermé et si $\varphi_t(S) = S$, $t \in T$. Un invariant minimal sera simplement appelé *minimal.* Exemple, les systèmes dynamiques de Beboutoff élémentaires (non formés d'orbites parallèles entre elles).

L'existence d'une mesure invariante sur $\mathscr{B}$ est assurée par le

THÉORÈME DE KRYLOFF ET BOGOLIUBOFF. — *Si* M *est compact, il existe une mesure μ invariante.*

Si μ est de plus transitive et définie en chaque point d'un sous-ensemble minimal S de M (chaque point de S est un « point de densité »), on dit que S est *strictement ergodique.*

Les deux théorèmes que l'on vient de citer, la définition de l'ergodicité stricte montrent que :

COROLLAIRE. — C *et plus généralement l'ensemble minimal engendré par les orbites presque périodiques sont strictement ergodiques.*

Mais Markoff a pu construire des fonctions de $\mathscr{B}'$ qui engendrent des ensembles minimaux qui ne sont pas ergodiques (voir [*8*]).

4.4. Autres propriétés et conséquences

On peut montrer que l'ensemble des points qui sont situés sur des orbites périodiques est partout dense dans $\mathscr{B}'$, et qu'on peut construire des systèmes $\mathscr{B}'$ qui possèdent une orbite partout dense dans $\mathscr{B}'$.

Si un système dynamique $\mathscr{B}$ est défini sur une variété localement compacte, à base dénombrable, on peut, par passage au complémentaire de l'ensemble des points de repos de $\mathscr{B}$, obtenir un système dynamique de Beboutoff.

Par ailleurs Grabar a montré qu'un tel système pouvait être défini par un système dénombrable d'équations différentielles dans un espace de Hilbert.

Notons enfin une application possible que nous esquissons ici du théorème de Beboutoff à la démonstration de la première partie du dernier théorème géométrique de Poincaré, supposé connu du lecteur [*4*] ; il s'agit alors de montrer que toute transformation continue T, biunivoque, préservant l'aire de l'espace annulaire situé entre deux cercles concentriques C_a et C_b de rayons respectifs a et b (qui fait tourner les deux cercles en des sens opposés) possède au moins un point fixe. Soit S un segment joignant un point de C_a à un point de C_b. T transforme S en un arc de Jordan J : par la biunivocité de T tout point de C_a a une image dans J et réciproquement. Par suite A est tapissé par un réseau de courbes formant les trajectoires d'un système dynamique de Beboutoff $\mathscr{B}$. Inversons, comme le fait d'ailleurs Birkhoff, le sens des mouvements sur les cercles C_a et C_b. Le nouveau Beboutoff obtenu $\mathscr{B}'$ a pour espace fonctionnel $\mathscr{F}(\mathscr{B}')$ qui se déduit de $\mathscr{F}(\mathscr{B})$ espace fonctionnel associé à $\mathscr{B}$ par une application continue de $\mathscr{F}(\mathscr{B})$ sur lui-même. D'après le théorème de Brouwer cette application a un point fixe $\hat{f}$. Il existe une trajectoire, éventuellement réduite à un point, globalement invariante.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] V. ARNOLD et A. AVEZ, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique.* Gauthier-Villars, Paris, 1967.
[*2*] J. AUSLANDER and F. HAHN, Point transitive flows, algebras of functions and the Bebutov system. *Fund. Math.*, t. LX, 1967, p. 117-137.
[*3*] M. BEBOUTOFF, Sur les systèmes dynamiques dans l'espace des fonctions continues. *Doklady (N. S.)*, t. **27**, 1940, p. 904-906.
[*4*] G. D. BIRKHOFF, Dynamical systems. *A. M. S. colloquium Publ.*, vol. **9**, 1927.
[*5*] W. GOTTSCHALK and G. HEDLUND, Topological dynamics. *A. M. S. Colloquium Publ.*, vol. **36**, 1955.
[*6*] S. KAKUTANI, A proof of Beboutov's theorem. *J. of Diff. equation*, t. **4**, 1968, p. 194-201.
[*7*] V. NEMITSKI, Topological problems of the theory of dynamical systems. Translation from *Usp. Mat. Nauk (N. S.)*, t. **4**, 1949, p. 1-153. Translation *A. S. M.*, série 1, vol. **5**, 1962, p. 414-497.
[*8*] V. NEMITSKI and V. STEPANOV, *Qualitative theory of dynamical systems.* Princeton University Press.
[*9*] G. REEB, Sur la théorie générale des systèmes dynamiques. *Ann. Institut Fourier*, t. **6**, 1956, p. 89-115.
[*10*] S. SMALE, Differential dynamical systems. *Bull. Am. Math. Soc.*, novembre 1967.
[*11*] R. THOM, Topologie et signification. *L'âge de la Science*, t. **4**, 1968, p. 220-242.
[*12*] Th. VOGEL, *Théorie des systèmes évolutifs*, G. V., Paris, 1965.

Manuscrit reçu le 12 mars 1971.

Directeur de la publication : GUY DE DAMPIERRE.

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPOT LÉGAL ÉD. N° 1795*b*. IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 6232. 9-1971