ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. BONAMI
N. KAROUI
B. ROYNETTE
H. REINHARD

Processus de diffusion associé à un opérateur elliptique dégénéré

Annales de l'I. H. P., section B, tome 7, n° 1 (1971), p. 31-80
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1971__7_1_31_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VII, n° 1, 1971, p. 31-80.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Processus de diffusion associé à un opérateur elliptique dégénéré

par

A. BONAMI, N. KAROUI, B. ROYNETTE
Faculté des Sciences, 91-Orsay

et H. REINHARD
Faculté des Sciences, Paris-V^e.

SUMMARY. — The aim of this article is to study diffusion processes on R^n corresponding to an elliptic degenerate operator

$$L = \frac{1}{2} \sum a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

In the first chapter it is shown that the existence and uniqueness of the diffusion corresponding to L holds whenever existence and uniqueness of Ito's stochastic equation do : $x_t = x + \int_0^t \sigma(x_u) d\beta_u + \int_0^t b(x_u) du$. In a second chapter we study the rank of the process reformulating a definition of Skorokhod and give a generalisation of the Ventcell's classical theorem concerning the martingales-additive functionals of Brownian motion. Third chapter is concerned with studying the process from a purely probabilistic point of view. In chapter four it is proved that when the coefficients of L are of class C^2, the diffusions corresponding to L and his adjoint L^* are in duality; we use this fact to study the solution of the Dirichlet problem. In chapter 5 the case of an hypoelliptic operator L is considered.

INTRODUCTION

Le but de cet article est d'étudier les processus de diffusion sur R^n associés à un opérateur elliptique dégénéré, $L = \frac{1}{2}\sum a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$. Les processus de diffusion associés à des opérateurs elliptiques ont fait, on le sait, l'objet de nombreux travaux, et sont liés à des spécialités aussi différentes que les équations aux dérivées partielles, la théorie des semi-groupes d'opérateurs et les axiomatiques de théorie du potentiel, ou les équations stochastiques browniennes.

Historiquement, c'est tout d'abord à partir de résultats sur les équations aux dérivées partielles qu'on a su construire des processus de diffusion : il est bien connu que, lorsque la matrice $a = (a_{ij})_{i,j}$ est uniformément définie positive, et lorsque les coefficients de L sont bornés et höldériens, l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = 0$ admet une solution fondamentale $p(t, x, y)$ qui engendre les probabilités de transition d'une diffusion [*3*]. Lorsque l'opérateur L est dégénéré, une telle méthode ne peut être envisagée, puisque l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = 0$ n'admet pas, en général, de solution fondamentale. Citons toutefois le cas des équations hypoelliptiques de Hormander, étudiées par Bony [*2*] dont les solutions forment une axiomatique de Brelot, et auxquelles, de ce fait, on peut associer une diffusion, dont on montrera, au chapitre V, qu'elle possède de nombreuses propriétés des diffusions associées aux opérateurs elliptiques non dégénérés.

La méthode d'Ito, pour construire des diffusions à partir des solutions d'équations stochastiques, s'étend, par contre, immédiatement au cas des opérateurs dégénérés. Rappelons brièvement cette méthode : on suppose donné un mouvement brownien r-dimensionnel $(\Omega, \mathcal{F}_t, \beta_t, P)$ et on suppose qu'il existe une matrice (n, r), $\sigma(x)$, telle que $\sigma\sigma^* = a$. Ito montre que, lorsque la matrice $\sigma(x)$ et le vecteur $b(x) = (b_i(x))$ sont lipschitziens, l'équation stochastique

$$x_t = x + \int_0^t \sigma(x_s)d\beta_s + \int_0^t b(x_s)ds$$

admet une solution et une seule, que nous désignerons par $x_t(x)$ et l'égalité $P_t f(x) = E[f(x_t(x))]$ définit un semi-groupe de Feller qui permet de construire une diffusion associée à L. Sans s'occuper de savoir si c'était là l'unique diffusion associée à L, de nombreux auteurs ont utilisé la construction explicite de cette diffusion et les propriétés des équations stochastiques pour formuler de façon probabiliste les solutions d'équations aux dérivées partielles liées à L, et en déduire des résultats sur l'existence, l'unicité ou la régularité de ces solutions. On trouvera à ce sujet un résumé des résultats obtenus et une bonne bibliographie dans [*4*].

Citons enfin les travaux récents de Stroock et Varadhan [*12*] qui ont montré que lorsque la matrice $a(x)$ est strictement définie positive, il existe une et une seule diffusion associée à l'opérateur L sous les seules hypothèses que $a(x)$ est continu et $b(x)$ mesurable. Beaucoup de leurs résultats sont encore vrais lorsque $a(x)$ peut être dégénérée, nous y ferons largement appel. Nous reprendrons en particulier leur définition d'une diffusion associée à l'opérateur L : on dira que le processus de Markov à trajectoires continues $(\Omega, \mathcal{F}_t, x_t, \mathrm{P}_x)$ est une diffusion associée à l'opérateur L si, quels que soient $x \in \mathrm{R}^n$ et $f \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n)$:

$$\mathrm{E}_x[f(x_t)] - f(x) = \mathrm{E}_x \int_0^t \mathrm{L}f(x_s)ds.$$

(Lorsque le processus est fellerien et l'opérateur L à coefficients continus, on a affaire à une diffusion de générateur différentiel L au sens de Dynkin [*3*]). Stroock et Varadhan montrent qu'alors pour tout x, $\mathrm{P}_x[x_0 = x] = 1$ et quel que soit $\theta \in \mathrm{R}^n$,

$$\exp \left(\langle \theta, x_t - x \rangle - \langle \theta, \int_0^t b(x_s)ds \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t \langle \theta, a(x_s)\theta \rangle \, ds \right)$$

est une P_x-martingale et c'est cette propriété des diffusions plutôt que la définition que nous utiliserons.

Dans un premier chapitre, nous montrons l'existence et l'unicité de la diffusion associée à L chaque fois qu'il y a existence et unicité de la solution de l'équation stochastique d'Ito :

$$x_t = x + \int_0^t \sigma(x_u)d\beta_u + \int_0^t b(x_u)du, \text{ quel que soit } x.$$

Il y a en particulier unicité de la diffusion lorsque σ et b sont lipschitziens.

Dans le second chapitre, on étudie à quelles conditions le brownien β_t, qui figure dans l'équation stochastique, peut s'exprimer comme intégrale stochastique relative à la martingale $x_t - x_0 - \int_0^t b(x_u)du$. Plus précisément, on reprend la notion de rang d'un processus de Skorokhod, et on montre que, du moins si b est nul, le rang de la diffusion associée à L est égal à k

si et seulement si le rang de la matrice σ est k, sauf sur un ensemble de R^n où l'on séjourne un temps nul. Le rang de la diffusion apparaît ainsi comme très lié à la dégénérescence de σ. On montre en même temps que toute fonctionnelle additive du processus M_t, telle que, pour tout x, $E_x(M_t) = 0$ et $E_x(M_t^2) < \infty$ est somme d'intégrales stochastiques relatives aux coordonnées de $x_t - x_0 - \int_0^t b(x_u)du$: c'est la généralisation d'un théorème classique de Vent'cell.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude proprement dite du processus de diffusion suivant les hypothèses faites sur L : recherche des ensembles où l'on séjourne un temps nul (et, par conséquent, de conditions suffisantes pour que le processus soit de rang k), de points effilés, calculs de temps d'atteinte...

Dans le chapitre IV, nous montrons que, lorsque les coefficients de L sont de classe $\mathcal{C}^2$, les diffusions associées à L et à son adjoint L* sont en dualité : si V^λ et $V^{*\lambda}$ sont leurs résolvantes, pour λ assez grand et pour toutes fonctions f, g boréliennes positives :

$$\int V^\lambda f(x)g(x)dx = \int f(x)V^{*\lambda}g(x)dx.$$

Ceci nous permet de montrer que les solutions au problème de Dirichlet obtenues de manière probabiliste sont, en fait, des solutions au sens des distributions. Nous montrons l'existence de ces solutions sous des conditions très faibles, sans nous attarder aux problèmes d'unicité et de régularité, largement étudiés par Freidlin [5] (ainsi que les problèmes d'existence d'ailleurs, mais il nous a semblé que nos conditions étaient moins restrictives).

Dans le chapitre V, nous considérons le cas particulier des opérateurs hypoelliptiques de Hörmander, déjà étudié par Bony.

NOTATIONS ET RAPPELS

1) Opérateur L

Dans la suite, L désigne l'opérateur du second ordre sur R^n

$$Lu(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

On appelle $a(x)$ la matrice $(a_{ij}(x))$, $b(x)$ le vecteur $(b_j(x))$; $\sigma(x)$ est une matrice (n, r) telle que $\sigma\sigma^* = a$ (σ^* désignant la transposée de σ).

On supposera toujours, même lorsque ce ne sera pas explicitement indiqué que $a(x)$, $b(x)$ et $\sigma(x)$ sont mesurables bornés et que $a(x)$ est continu. L'hypothèse que a et b sont bornés n'est pas essentielle. Les résultats obtenus restent vrais sans cette hypothèse, mais les processus sont définis jusqu'à un temps d'explosion, comme dans [*8*].

Lorsque les a_{ij} et b_j sont de classe C^∞, on considérera également l'opérateur sous la forme :

$$Lu = \frac{1}{2}\sum_{k=1} X_k^2 u + Yu,$$

où $X_1, \ldots, X_r$, Y sont des champs de vecteurs C^∞ assimilés à des opérateurs différentiels du premier ordre et X_k^2 désigne le carré en tant qu'opérateur.

2) Diffusion

On désignera par $(\Omega^0, \mathcal{F}_t, \xi_t)$ l'espace canonique tel que :

Ω^0 est l'espace des fonctions continues définies sur $[0, \infty]$ à valeurs dans R^n;

$\xi_t(w)$ est la valeur en t de la fonction w;

$\mathcal{F}_t$ est la tribu engendrée par ξ_s, $s \leqslant t$.

Un processus de Markov homogène à trajectoires continues est encore la donnée de probabilités P_x telles que $(\Omega^0, M_t, \xi_t, P_x)$ soit un processus de Markov.

3) Intégrale stochastique

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, $\mathcal{A}_t$ une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$, Z_t et $a(t)$ deux processus à valeurs dans R^r et $R^r \otimes R^r$ respectivement continus et progressivement mesurables. On suppose de plus que $a(t)$ est une matrice positive bornée, et que, quel que soit $\theta \in R^r$,

$$\exp\left(\langle \theta, Z_t - Z_0 \rangle - \frac{1}{2}\int_0^t \langle \theta, a(s)\theta \rangle\, ds\right)$$

est une martingale. Si $m(t)$ est un processus progressivement mesurable pour $\mathcal{A}_t$ à valeurs dans $R^n \otimes R^r$ et si, pour tout t, $E\left[\int_0^t \| mam^* \|\, ds\right] < \infty$, on peut définir l'intégrale stochastique $\zeta_t = \int_0^t m(s)dZ_s$: quel que soit $\theta \in R^n$, $\langle \theta, \zeta_t \rangle$ est une martingale de processus croissant associé

$\frac{1}{2}\int_0^t \langle \theta, m(s)a(s)m(s)^*\theta \rangle \, ds$ ([*12*] chapitre III, [*8*] construction de l'intégrale stochastique, et [*9*]). Si $m(t)$ est borné, quel que soit θ,

$$\exp\left(\langle \theta, \zeta_t \rangle - \frac{1}{2}\int_0^t \langle \theta, m(s)a(s)m^*(s)\theta \rangle \, ds\right)$$

est une martingale.

On note $\{ M; M \}_t$ le processus croissant associé à la martingale M_t, $\{ M, N \}_t = \frac{1}{2}(\{ M + N; M + N \}_t - \{ M; N \}_t - \{ N; N \}_t$ le produit scalaire de deux martingales.

4) SYMBOLES

On utilisera les notations suivantes :

$B(R^n)$ espace des fonctions boréliennes bornées sur R^n,

$\mathcal{C}_0^\infty(R^n)$ espace des fonctions indéfiniment dérivables sur R^n, nulles à l'infini,

$\mathcal{D}(R^n)$ espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact sur R^n,

$\mathcal{D}'(R^n)$ espace des distributions sur R^n,

$\langle .,. \rangle$ produit scalaire dans R^n,

$| . |$ norme d'un vecteur de R^n,

$\| . \|$ norme d'une matrice,

σ^* adjoint de la matrice σ,

$\{ .,. \}$ produit scalaire de deux martingales.

Nous remercions Monsieur S. Watanabe des conseils qu'il a bien voulu nous donner.

CHAPITRE PREMIER

EXISTENCE ET UNICITÉ

Énonçons le théorème d'existence et d'unicité sous sa forme la plus générale, avant d'étudier des cas particuliers.

THÉORÈME I.1. — *On suppose qu'il existe une matrice (n, r), $\sigma(x)$, telle que $\sigma(x)\sigma^*(x) = a(x)$, et que, si $(\Omega, \mathcal{A}_t, \beta_t, P)$ est un mouvement brownien r-dimensionnel, l'équation*

$$(1) \qquad x_t = x + \int_0^t \sigma(x_u) d\beta_u + \int_0^t b(x_u) du$$

admette une solution unique quel que soit $x \in \mathrm{R}^n$. *Alors il existe un et un seul semi-groupe de Markov* P_t *sur* $\mathrm{B}(\mathrm{R}^n)$ *tel que, quel que soit* $f \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n)$ *et* $x \in \mathrm{R}^n$.

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{P}_t f(x) - f(x) = \int_0^t \mathrm{P}_u \mathrm{L} f(x) du.$$

La fonction de transition associée à P_t *est la fonction de transition d'une diffusion fortement markovienne.*

Le théorème 1 est conséquence de deux lemmes, dont le premier est dû à Stroock et Varadhan. Nous le transcrivons ici pour plus de commodité.

LEMME 1 (Stroock-Varadhan [*12*], théorème IV.1). — Soit P_t un semi-groupe de Markov sur $\mathrm{B}(\mathrm{R}^n)$ tel que, quel que soit $f \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n)$ et $x \in \mathrm{R}^n$,

$$\mathrm{P}_t f(x) - f(x) = \int_0^t \mathrm{P}_u \mathrm{L} f(x) du.$$

Alors, pour tout $x \in \mathrm{R}^n$, il existe une probabilité unique P_x sur $(\Omega^0, \mathcal{F}_\infty)$ telle que $\mathrm{P}_t f(x) = \mathrm{E}_x[f(\xi_t)]$, $\mathrm{P}_x[\xi_0 = x] = 1$ et, pour tout $\theta \in \mathrm{R}^n$,

$$\exp\left(\langle \theta, \xi_t - x \rangle - \langle \theta, \int_0^t b(\xi_s) ds \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t \langle \theta, a(\xi_s)\theta \rangle ds\right)$$

est une P_x-martingale.

On sait que lorsque la matrice $a(x)$ est strictement définie positive, il existe sur $(\Omega^0, \mathcal{F}_\infty)$ un brownien β_t pour la probabilité P_x tel que

$$\xi_t = x + \int_0^t b(\xi_s) ds + \int_0^t \sigma(\xi_s) d\beta_s.$$

Nous allons généraliser ce résultat au cas où la matrice $a(x)$ est dégénérée, de manière à pouvoir relier le semi-groupe P_t, s'il existe, aux solutions de l'équation stochastique (1).

LEMME 2. — Soit $(\Omega', \mathcal{A}', \mathrm{P}')$ un espace de probabilité, $\mathcal{A}'_t$, une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}'$, Z'_t et $\sigma'(t)$ deux processus progressivement mesurables par rapport à $\mathcal{A}'_t$, à valeurs dans R^n et $\mathrm{R}^n \otimes \mathrm{R}^r$ respectivement. On suppose de plus que $\sigma'(t)$ est borné presque sûrement, que Z'_t est presque sûrement continu en t, que $\mathrm{P}'[\mathrm{Z}'_0 = 0] = 1$, et que, quel que soit $\theta \in \mathrm{R}^n$,

$$\exp\left(\langle \theta, \mathrm{Z}'_t \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t \langle \theta, \sigma'(u)\sigma'^*(u)\theta \rangle du\right)$$

est une P'-martingale. On peut alors trouver un espace de probabilité $(\Omega'', \mathcal{A}'', P'')$ tel que, si $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne l'espace de probabilité produit de $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ et $(\Omega'', \mathcal{A}'', P'')$ et si Z_t et $\sigma(t)$ sont respectivement définis par $Z_t(w', w'') = Z'_t(w')$ et $\sigma(t, w', w'') = \sigma'(t, w')$, il existe un brownien r-dimensionnel, β_t, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathcal{A}'_t \otimes \mathcal{A}''_t$-mesurable, tel que :

$$Z_t = \int_0^t \sigma(s) d\beta_s \qquad \text{P presque sûrement.}$$

Réservant pour plus tard la démonstration du lemme 2, montrons tout de suite comment le théorème 1 s'en déduit : soit tout d'abord P_t un semi-groupe satisfaisant à (2), P_x la probabilité correspondante sur $(\Omega^0, \mathcal{F}_\infty)$. Appliquons le lemme 2 avec

$$(\Omega', \mathcal{A}', P') = (\Omega^0, \mathcal{F}_\infty, P_x) \qquad Z'_t = \xi_t - x - \int_0^t b(\xi_s) ds, \qquad \sigma'(t) = \sigma(\xi_t)$$

On en déduit l'existence d'un mouvement brownien $(\Omega, \mathcal{A}_t, \beta_t, P)$ tel que $E_x[f(\xi_t)] = E[f(x_t))]$, si $x_t(x)$ est la solution de l'équation :

$$x_t = x + \int_0^t \sigma(x_u) d\beta_u + \int_0^t b(x_u) du.$$

Le semi-groupe P_t est donc, s'il existe, unique.

Nous avons, dans cette démonstration admis le résultat suivant : si $(\Omega, \mathcal{A}_t, \beta_t, P)$ et $(\Omega', \mathcal{A}'_t, \beta'_t, P')$ sont deux mouvements browniens r-dimensionnels, $x_t(x)$ et $x'_t(x)$ les solutions respectives des équations

$$x_t = x + \int_0^t \sigma(x_s) d\beta_s + \int_0^t b(x_s) ds$$

$$x'_t = x + \int_0^t \sigma(x'_s) d\beta_s + \int_0^t b(x'_s) ds,$$

alors $E[f(x_t(x))] = E'[f(x'_t(x))] \forall f \in B(R^n)$. Il suffit de considérer le cas où $(\Omega', \mathcal{A}'_t, \beta'_t, P')$ est le brownien canonique $((R^n)^{R^+}, \mathcal{A}_t, c_t, B)$ où les c_t sont les applications coordonnées et B la mesure brownienne. L'unicité de la solution de l'équation différentielle stochastique entraîne que x_t est mesurable par rapport à la tribu $B(\beta_s, s \leqslant t)$ d'après un résultat récent de Watanabe [*15*]. Soit π l'application de Ω dans $(R^n)^{R^+}$ définie par $\omega \mapsto \beta_t(\omega)$, la formule $y_t(\omega) = x_t(\pi(\omega))$ définit sans ambiguïté une variable aléatoire y_t sur $(R^n)^{R^+}$ puisque x_t est $B(\beta_s, s \leqslant t)$ mesurable et que pour cette tribu, deux trajectoires ω_1 et ω_2 telles que $\beta_s(\omega_1) = \beta_s(\omega_2)$ $\forall s \leqslant t$, sont indistinguibles [*14*].

π envoyant β_t sur c_t, il est facile de voir que y_t est solution de l'équation $y_t = x + \int_0^t \sigma(y_s)dc_s + \int_0^t b(y_s)ds$. Le résultat annoncé résulte alors de l'unicité de cette dernière solution et de la formule des probabilités images.

Prouvons maintenant l'existence d'une solution :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}_t, \beta_t, P)$ un mouvement brownien r-dimensionnel, $x_t(x)$ l'unique solution de l'équation (1). Posons $P_t f(x) = E[f(x_t(x))]$. Il est aisé de voir, en utilisant la formule de changement de variables d'Ito, que P_t satisfait à (2). Nous allons montrer que P_t est un semi-groupe de Markov fort, ou, si P_x désigne la probabilité sur $(\Omega^0, \mathcal{F}_\infty)$ telle que $P_t f(x) = E_x[f(\xi_t)]$, que $(\Omega^0, \mathcal{A}_t, \xi_t, P_x)$ est un processus de Markov fort : quel que soit le temps d'arrêt τ, $P_x[\xi_{\tau+t} \in \Gamma \mid \mathcal{F}_\tau] = P_{x_\tau}[\xi_t \in \Gamma]$ P_x presque sûrement. Nous allons utiliser à cet effet le théorème II.1 de Stroock et Varadhan [*12*]. montrant l'existence de versions régulières des probabilités conditionnelles : suivant leurs notations que nous ne reproduirons pas ici,

$$P_x[\xi_{\tau+t} \in \Gamma \mid \mathcal{F}_\tau](\omega) = Q_{x,\omega}[\xi_{t+\tau} \in \Gamma] \quad P_x - \text{p. s.}$$

Mais, pour la probabilité P_x et pour tout $\theta \in R^n$,

$$\exp\left(\langle \xi_t - x, \theta \rangle - \langle \theta, \int_0^t b(\xi_s)ds \rangle - \frac{1}{2}\int_0^t \langle \theta, a(\xi_s)\theta \rangle\, ds\right)$$

est une martingale (conséquence de (1) et des propriétés de l'intégrale stochastique [*8*], page 25). Donc, d'après le théorème 3.1 de [*12*], P_x presque sûrement en ω, si l'on pose

$$Z_t = \xi_{t+\tau(\omega)} - \xi_{\tau(\omega)} - \int_{\tau(\omega)}^{t+\tau(\omega)} b(\xi_s)ds,$$

$$\exp\left(\langle \theta, Z_t \rangle - \frac{1}{2}\int_0^t \langle \theta, a(\xi_{s+\tau(\omega)}\right)\theta \rangle\, ds \text{ est une } Q_{x,\omega}\text{-martingale.}$$

Grâce au lemme 2, on en déduit que, quitte peut-être à agrandir l'espace Ω^0, $Z_t = \int_0^t \sigma(\xi_{s+\tau(\omega)})d\beta_s$. Donc $\xi_{t+\tau(\omega)}$ est, P_x presque sûrement en ω, solution de l'équation :

$$\xi_{t+\tau(\omega)} = \xi_{\tau(\omega)} + \int_0^t \sigma(\xi_{s+\tau(\omega)})d\beta_s + \int_0^t b(\xi_{s+\tau(\omega)})ds,$$

qui, par hypothèse, admet une solution et une seule. La probabilité $Q_{x,\omega}[\xi_{t+\tau(\omega)} \in \Gamma]$ est égale, par conséquent à $P(x_t(\xi_{\tau(\omega)}) \in \Gamma) = P_{\xi_{\tau(\omega)}}(\xi_t \in \Gamma)$.

On pourra donc parler, sous les hypothèses du théorème 1, de la diffusion associée à l'opérateur L. Remarquons qu'on ne sait pas, en général, si cette diffusion est fellerienne.

Démonstration du lemme 2. — Nous allons tout d'abord démontrer le lemme 2 dans un cas particulier.

LEMME 3. — Soient Z'_t et $\sigma'(t)$ satisfaisant aux hypothèses du lemme 2. On suppose de plus que pour tout t, presque sûrement, l'un des mineurs de $\sigma'(t)$ est non nul. Il existe alors un brownien r-dimensionnel, β_t, sur $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ tel que $Z'_t = \int_0^t \sigma'(s)d\beta_s$ P' presque sûrement.

Autrement dit, dans les conclusions du lemme 2, on peut prendre $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (\Omega', \mathcal{A}' P')$. Nous supposerons, pour la simplicité de l'écriture, que les données sont Ω, $\mathcal{A}$, P, Z_t, $\sigma(t)$ en supprimant le prime. Nous supposerons de plus que le mineur de σ non nul (le même pour tout t et presque tout ω) est le mineur formé des r premières lignes. Appelons σ_r la matrice issue de σ correspondante. Posons enfin $a = \sigma\sigma^*$, $a_r = \sigma_r\sigma_r^*$ et appelons y_t la projection de Z_t sur l'espace vectoriel engendré par les premiers vecteurs de la base canonique de R^n : y_t peut être considéré comme un processus à valeurs dans R^r, tel que, pour tout $\theta \in R^r$,

$$\exp\left(\langle \theta, y_t \rangle - \frac{1}{2}\int_0^t \langle \theta, a_r(s)\theta \rangle ds\right)$$

est une martingale. On peut donc définir l'intégrale stochastique

$$\beta_t = \int_0^t \sigma_r^{-1}(s)dy_s$$

puisque $\int_0^t \| \sigma_r^{-1}a_r\sigma_r^*(s) \| ds = t$. Nous allons montrer que β_t est le brownien cherché. Mais on sait que le processus croissant associé à $\langle \theta, \beta_t \rangle$ est $\frac{t}{2}$ quel que soit $\theta \in R^r$ de module 1, β_t est donc un brownien r-dimensionnel [*9*]. Il reste à vérifier que $Z_t = \int_0^t \sigma(s)d\beta_s$ ou, ce qui est équivalent, que quel que soit $\theta \in R^n$, le processus croissant associé à $\langle \theta, Z_t \rangle - \langle \theta, \int_0^t \sigma(s)d\beta_s \rangle$ est nul. Si $\{ e_i \}_{i=1}^n$ désigne la base canonique de R^n, et si $\theta = \Sigma\theta_i e_i$, on voit aisément que ce processus croissant est encore égal à :

$$\int_0^t \langle \theta, a(s)\theta \rangle ds - 2\{ \langle \theta, Z_t \rangle ; \langle \theta, \int_0^t \sigma(s)d\beta_s \rangle\}.$$

On montre successivement que ce dernier produit scalaire est égal à :

$$\left\{ \sum \theta_i \langle e_i, Z_t \rangle ; \sum \theta_j \langle e_j, \int_0^t \sigma\sigma_r^{-1} dy_s \rangle \right\}$$
$$= \left\{ \sum \theta_i \langle e_i, Z_t \rangle ; \sum \theta_j \sum_k \int_0^t (\sigma\sigma_r^{-1})_{j,k} d \langle e_k, y_s \rangle \right\}$$
$$= \int_0^t \sum_{i,j} \theta_i \theta_j \Big(\sum_k (\sigma\sigma_r^{-1})_{j,k} d(\{ \langle e_i, Z_s \rangle ; \langle e_k ; y_s \rangle \}) $$
$$= \int_0^t \langle \theta, a(s)\theta \rangle \, ds.$$

Il suffit de remarquer que la matrice des $\{ \langle e_i, Z_s \rangle ; \langle e_k, y_s \rangle \}$ est la matrice $\frac{1}{2} \sigma_r \sigma^*$. Ceci termine la démonstration du lemme 3.

Revenons à la démonstration du lemme 2 : là où le rang de la matrice σ' est inférieur à r, il va nous falloir ajouter des browniens annexes pour construire β_t, et c'est là le rôle de Ω''. Plus précisément, on peut diviser l'espace des matrices $R^n \otimes R^r$ en parties disjointes $\Gamma_{k,j}$ telles que :

— les matrices $\Gamma_{k,j}$ sont de rang $r - k$;

— si l'on ordonne les mineurs de rang $r - k$ qu'on peut extraire d'une matrice (n, r) de 1 à $C_n^{r-k} \times C_r^{r-k}$, les matrices de $\Gamma_{k,j}$ ont leur $j^{\text{ième}}$ mineur de rang $r - k$ non nul.

Soit alors $(\Omega'', \mathcal{A}'', P'')$ un espace de probabilité sur lequel il existe des browniens $b_t''^{k,j}$ pour toutes les valeurs possibles de k et de j, $\mathcal{A}_t''$ les sous-tribus engendrées par les $b_t''^{k,j}$. On suppose que $b_t''^{k,j}$ est à valeurs dans R^k.

Posons comme prévu $\Omega = \Omega' \times \Omega''$, $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_t' \otimes \mathcal{A}_t''$, $P = P' \otimes P''$, $Z_t(\omega', \omega'') = Z_t'(\omega')$, $b_t^{k,j}(\omega', \omega'') = b_t''^{k,j}(\omega'')$: les $b_t^{k,j}$ sont encore des browniens indépendants sur Ω. Nous voulons trouver des matrices $\sigma_{k,j}(t)$ et $\sigma'_{k,j}(t)$, respectivement (r, n) et (r, k) telles que si l'on pose :

$$y_t^{k,j} = \int_0^t \sigma_{k,j}(s) 1_{\Gamma_{k,j}}(\sigma(s)) dZ_s + \int_0^t \sigma'_{k,j}(s) 1_{\Gamma_{k,j}}(\sigma(s)) db_s^{k,j},$$

la somme $\sum_{k,j} y_t^{k,j}$ soit un brownien r-dimensionnel β_t, et que $Z_t = \int_0^t \sigma(s) d\beta_s$ P presque sûrement. Mais il est aisé de voir, du fait de l'indépendance des $b_t^{k,j}$ entre eux et de leur indépendance de Z_t, et du fait que les $\Gamma_{k,j}$ forment une partition, qu'il en est ainsi si :

(3) pour tout $\theta \in \mathrm{R}^r$, le processus croissant associé à $\langle \theta, y_t^{k,j} \rangle$ est égal à $\frac{|\theta|^2}{2} \int_0^t 1_{\Gamma_{k,j}}(\sigma(s))ds$;

(4)
$$\int_0^t \sigma(s)dy_t^{k,j} = \int_0^t 1_{\Gamma_{k,j}}(\sigma(s))dZ_s.$$

Il nous reste donc à déterminer $\sigma_{k,j}$ et $\sigma'_{k,j}$ satisfaisant à (3) et (4). On peut toujours supposer que le $j^{\text{ième}}$ mineur de σ est le déterminant de la matrice $[\sigma(i, l)]_{\substack{i>n-r+k \\ l>k}}$, si $\sigma(i, l)$ désigne le coefficient (i, l) de σ.

Considérons dans R^{n+k}, le vecteur $\zeta_t = (\mathrm{Z}_t, b_t^{k,j})$. Quel que soit $\theta \in \mathrm{R}^{n+k}$, $\exp\left(\langle \theta, \zeta_t \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t \langle \theta, \mathrm{A}(s)\theta \rangle ds\right)$ est une martingale, si A désigne la matrice $(n + k, n + k)$ égale à $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \mathrm{I}d \end{pmatrix}$. Cherchons, pour nous ramener à la situation du lemme 3, une matrice Σ telle que $\Sigma\Sigma^* = \mathrm{A}$: Si Σ est de la forme $\begin{pmatrix} \sigma \\ \sigma' \end{pmatrix}$, où σ' est une matrice (k, r), on est ramené à chercher σ' telle que $\sigma\sigma'^* = 0$, $\sigma'\sigma'^* = \mathrm{I}d$, du moins si σ appartient à $\Gamma_{k,j}$. Il suffit de prendre pour $\sigma'(t)$ une matrice formée de vecteurs lignes orthonormés, orthogonaux aux $r - k$ derniers vecteurs lignes de σ : il est possible de choisir σ' de manière que $\sigma'(t)$ soit progressivement mesurable pour $\mathcal{A}_t$. Comme, lorsque σ est dans $\Gamma_{k,j}$, les k premiers vecteurs lignes de σ sont dans le sous-espace vectoriel de R^r engendré par les $r - k$ derniers, on a bien l'égalité $\sigma\sigma'^* = 0$.

On est dès lors ramené, formellement, tant que σ est dans $\Gamma_{k,j}$, à la situation du lemme 3 dans R^{n+k}, puisque la matrice Σ est de rang r. Nous allons procéder de la même manière que dans la démonstration du lemme 3 : on appelle successivement σ^1 la matrice $(r - k, r)$ formée des $r - k$ dernières lignes de σ, $\Sigma' = \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma \end{pmatrix}$, $\mathrm{A}' = \Sigma\Sigma'^* = \begin{pmatrix} a^1 & 0 \\ 0 & \mathrm{I}d \end{pmatrix}$, si $a^1 = \sigma^1\sigma^{1*}$, du moins lorsque σ appartient à $\Gamma_{k,j}$. On appelle enfin η_t la projection de ζ_t sur l'espace vectoriel engendré par les r derniers vecteurs de la base canonique de R^{n+k} : η_t est un processus à valeurs dans R^r tel que, pour tout $\theta \in \mathrm{R}^r$, $\exp\left(\langle \theta, \eta_t \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t \langle \theta, \mathrm{A}'(s)\theta \rangle ds\right)$ est une martingale. On définit :

$$y_t^{k,j} = \int_0^t \Sigma'^{-1}(s) 1_{\Gamma_{k,j}}(\sigma(s))d\eta_t$$

expression qui est bien de la forme :

$$\int_0^t \sigma_{k,j}(s) 1_{\Gamma_{k,j}}(\sigma(s))dZ_s + \int_0^t \sigma'_{k,j}(s) 1_{\Gamma_{k,j}}(\sigma(s))db_s^{k,j}.$$

Nous n'expliciterons pas $\sigma_{k,j}$ et $\sigma'_{k,j}$.

Il reste à vérifier que $y_t^{k,j}$ satisfait aux conditions (3) et (4). Les calculs sont tout à fait semblables à ceux que nous avons menés dans la démonstration du lemme 3. Nous ne les referons pas.

On sait que l'équation

$$x_t = x + \int_0^t \sigma(x_s)d\beta_s + \int_0^t b(x_s)ds \tag{1}$$

admet une solution et une seule lorsque σ et b sont lipschitziens [*3*] et on sait que dans ces conditions le processus est Fellérien (Watanabe, dans [*15*], a donné des exemples de matrices σ non lipschitziennes pour lesquelles il y a encore existence et unicité).

Remarque. — Il y a encore existence et unicité du semi-groupe satisfaisant à (2) lorsque σ et b satisfont aux conditions suivantes :

(A) Il existe une constante K telle que, pour tout x et y dans $\mathbb{R}^n$,

$$\| \sigma(x) - \sigma(y) \| \sigma \leqslant \mathrm{K} \| x - y \|$$

(B) $b(x)$ est une fonction mesurable bornée, et pour tout x, $b(x)$ appartient au sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs colonnes de $\sigma(x)$.

En vertu de [*12*], il suffit de montrer qu'il y a existence et unicité du problème des martingales c'est-à-dire qu'il existe une probabilité unique P_x sur $(\Omega^o, \mathcal{F}_\infty)$ telle que :

$$\exp\left(\langle \theta, \xi_t - x \rangle - \langle \theta, \int_0^t b(\xi_s)ds \rangle - \frac{1}{2}\int_0^t \langle \theta, a(\xi_s)\theta \rangle\, ds\right)$$

soit une P_x-martingale et $\mathrm{P}_x[\xi_0 = x] = 1$. Nous utilisons une généralisation de la formule de Cameron-Martin. D'après ce qui précède, il y a une probabilité unique $\tilde{\mathrm{P}}_x$ sur $(\Omega^0, \mathcal{F}_\infty)$ telle que

$$\exp\left(\langle \theta, \xi_t - x \rangle - \frac{1}{2}\int_0^t \langle \theta, a(\xi_s)\theta \rangle\, ds\right)$$

soit une $\tilde{\mathrm{P}}_x$-martingale, et $\tilde{\mathrm{P}}_x[\xi_0 = x] = 1$. Reprenons alors la construction du lemme 2, avec $(\Omega', \mathcal{A}', \mathrm{P}') = (\Omega^0, \mathcal{F}_\infty, \tilde{\mathrm{P}}_x)$, $z'_t = \xi_t - x$, $\sigma'_t = \sigma(\xi_t)$: on sait qu'il existe un brownien β sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ tel que $z_t = \int_0^t \sigma(\xi_s)d\beta_s$. On définit alors $\mathrm{R}(t) = \exp\left(\int_0^t c^*(\xi_s)d\beta_s - \int_0^t | c(\xi_s) |^2 ds\right)$, où $c(x)$ est une solution mesurable du système d'équations $a(x)c(x) = b(x)$. Nous allons montrer que, si P' est la probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ ayant la densité $\mathrm{R}(t)$ par rapport à P sur $\mathcal{A}_t$, P′ satisfait aux conditions suivantes : $P'(z_t = 0) = 1$; quel que soit $\theta \in \mathbb{R}^n$,

$$\exp\left(\langle \theta, z_t \rangle - \langle \theta, \int_0^t b(\xi_s)ds \rangle - \frac{1}{2}\int_0^t \langle \theta, a(\xi_s)\theta \rangle\, ds\right)$$

est une P′-martingale. Appliquant à nouveau le lemme 2, on en déduira l'existence de P_x : mais ces propriétés de P′ s'obtiennent comme dans [*12*], chapitre VI. On écrit que :

$$\exp\left(\int_0^t \theta^*(s)dz_s - \frac{1}{2}\int_0^t \langle \theta(s), a(\xi_s)\theta(s) \rangle\, ds\right)$$

est une P-martingale pour tout vecteur $\theta(s)$ progressivement mesurable par rapport à $\mathcal{A}_t$ et on pose $\theta(s) = \theta + c(\xi_s)$. Nous ne referons pas la démonstration.

La démonstration de l'unicité suit le schéma inverse : partant de la probabilité P_x, on construit, de la même manière, une probabilité $\tilde{P}_x$ telle que

$$\exp\left(\langle \theta, \xi_t - x \rangle - \frac{1}{2}\int_0^t \langle \theta, a(\xi_s)\theta \rangle\, ds\right) \text{ soit une } \tilde{P}_x\text{-martingale.}$$

Comme il y a unicité de la probabilité $\tilde{P}_x$, il y a encore unicité de la probabilité P_x.

Remarque. — Si la solution $c(x)$ de l'équation $a(x)c(x) = b(x)$ est continue bornée, on peut montrer que la diffusion associée à l'opérateur L est fellérienne. Soit P_t le semi-groupe de Markov de cette diffusion : si $(\Omega, \mathcal{A}_t, \beta_t, P)$ désigne un brownien r-dimensionnel et si $x_t(x)$ est l'unique solution de l'équation :

$$x_t = x + \int_0^t \sigma(x_s)d\beta_s,$$

d'après ce qui précède :

$$P_t f(x) = E\left[f(x_t(x)) \exp\left(\int_0^t c^*(x_s(x))d\beta_s - \int_0^t |\, c(x_s(x))\,|^2 ds\right)\right].$$

La continuité de $P_t f$ se déduit d'une majoration classique [*3*].

CHAPITRE II

RANG DE LA DIFFUSION ASSOCIÉE A L

Nous allons tout d'abord généraliser le théorème suivant de Vent'cel [*9*]: soit $\beta_t^1, \ldots, \beta_t^r$, r mouvements browniens unidimensionnels indépendants,

$\mathscr{F}_t$ la tribu engendrée par $\{ \beta_s^1, \ldots, \beta_s^r ; s \leqslant t \}$, M_t est une martingale continue de la famille $\mathscr{F}_t$ telle que :

— M_t est une fonctionnelle additive ;

— $E_x(M_t) = 0$ et $E_x(M_t^2) < \infty$ quels que soient $x \in \mathbb{R}^r$, $t \geqslant 0$. Alors il existe r fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^r$, $g_1, \ldots, g_r$, telles que pour tout i :

$$E_x \int_0^t g_i^2(\beta_s^1, \ldots, \beta_s^r) ds < \infty \qquad \text{et} \qquad M_t = \sum_{i=1}^r \int_0^t g_i(\beta_s^1, \ldots, \beta_s^r) d\beta_s^i.$$

Soit maintenant $(\Omega^0, \mathscr{F}_t, \xi_t, P_x)$ la diffusion canonique associée à l'opérateur L sous les hypothèses du théorème I-1. On suppose ici que $\mathscr{F}_t$ est la tribu engendrée par $\{ \xi_s ; s \leqslant t \}$. On appelle $\xi_t^1, \ldots, \xi_t^n$ les coordonnées de ξ_t.

Soit $\mathscr{M}$ la classe des fonctionnelles additives continues de la diffusion telles que $E_x(M_t) = 0$ et $E_x(M_t^2) < \infty$ pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $t \geqslant 0$. (M est, de ce fait, une martingale de la famille $\mathscr{F}_t$). Si z_t désigne le vecteur $\xi_t - \xi_0 - \int_0^t b(\xi_s) ds$, les coordonnées $z_t^1, z_t^2, \ldots, z_t^n$ sont des exemples de telles martingales.

THÉORÈME II.1. — *Pour toute martingale* M_t *de la classe* $\mathscr{M}$, *il existe n fonctions* g_i *mesurables sur* R^n *telle que pour tout t et pour tout x,*

$$\int_0^t g_i^2(\xi_s) d \{ z^i ; z^i \}_s < \infty \quad P_x \textit{ presque sûrement,}$$

et

$$M_t = \sum_{i=1}^n \int_0^t g_i(\xi_s) dz_s^i.$$

En vertu du lemme 2, chapitre premier, il existe un mouvement brownien multidimensionnel $(\Omega', \mathscr{F}_t', \beta_t', P_y')$ tel qu'on puisse trouver, sur l'espace $(\Omega^o \times \Omega', \mathscr{F}_t \otimes \mathscr{F}_t')$ un mouvement brownien β_t pour chaque probabilité $P_x \otimes P_y'$ pour lequel ξ_t peut s'écrire :

$$\xi_t = x + \int_0^t \sigma(\xi_s) d\beta_s + \int_0^t b(\xi_s) ds \qquad P_x \text{ p. s.}$$

Le brownien β_t peut s'écrire sous la forme :

$$\beta_t(\omega, \omega') = \int_0^t \sigma'(\xi_s(\omega)) dz_s(\omega) + \int_0^t n(\xi_s(\omega)) d\beta_s'(\omega'),$$

où $\sigma' \, a \, \sigma'^*$ est la projection sur un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

La martingale M_t est, d'après [15], adaptée à la famille des tribus engendrées par $\{ \beta_s, s \leqslant t \}$. D'après le théorème de Vent'cel précédemment rappelé, M_t s'écrit :

$$M_t = \sum_{i=1}^{r} \int_0^t f_i(\beta_s) d\beta_s^i,$$

avec $E_{x,y}\left(\int_0^t \sum_1^r f_i^2(\beta_s) ds \right) < \infty$ quel que soit (x, y).

Quel que soit i, $\int_0^t f_i(\beta_s) d\beta_s^i$ est une martingale fonctionnelle additive du processus de Markov produit (ξ_t, β_t^i). Énonçons alors le lemme suivant :

PROPOSITION 1 (*). — *Soit* H_t *une martingale fonctionnelle additive d'un processus de Markov* (Ω, a_t, x_t, P_x) *qui s'écrit sous la forme* $H_t = \int_0^t h(s, \omega) d\zeta_s$, *où* ζ_t *est une martingale fonctionnelle additive du même processus, de processus croissant* $\int_0^t \varphi(x_s) ds$, *et où* $E_x \int_0^t h^2(s, \omega)\, \varphi(x_s) ds < \infty$ quel que soit x. Alors *il existe une fonction g mesurable telle que* :

$$H_t = \int_0^t g(x_s) d\zeta_s \qquad P_x \text{ p. s.}$$

Remarquons que cette proposition est classique sous l'hypothèse L de Meyer [9]. Elle résulte ici principalement du théorème suivant dû à Mokobodzki [10] : si V_λ est une résolvante sous-markovienne telle que $V = \sup_\lambda V_\lambda$ soit borné, et si u est une fonction excessive bornée par un entier n telle que $Vn - u$ soit excessive, il existe une fonction φ telle que $V\varphi = u$, $0 \leqslant \varphi \leqslant n$.

On désignera dans la suite par U^μ la résolvante du processus (Ω, a_t, x_t, P_x) et on appliquera le résultat à U^μ, $\mu \geqslant \lambda$ où $\lambda > 0$.

LEMME 1. — Soit u λ-excessive bornée par n, telle qu'il existe $g \leqslant n$ satisfaisant à la relation $u = U^\lambda g$. Alors g est positif ou nul, sauf peut-être sur un ensemble de potentiel nul.

DÉMONSTRATION. — $U^\lambda n - u = U^\lambda(n - g)$ est λ-excessive : U^λ étant un noyau borné, il existe g' telle que $u = U^\lambda g'$ et $0 \leqslant g' \leqslant n$. Alors $U^\lambda g = U^\lambda g'$.

(*) Skorokhod dans [11] affirme cette proposition sans démonstration.

Soit $A_t = \int_0^t g(x_s)ds$ et $B_t = \int_0^t g'(x_s)ds$, $U^\lambda g(x) = E_x\int_0^\infty e^{-\lambda s}dA_s = U_A^\lambda(x)$ et $U^\lambda g'(x) = U_B^\lambda(x)$; comme U^λ est de norme $\frac{1}{\lambda}$ et que g est bornée, $U_A^\lambda < \infty$. On sait alors que la relation $U_A^\lambda = U_B^\lambda$ entraîne que les fonctionnelles A_t et B_t sont équivalentes [1], et cela prouve le lemme.

LEMME 2. — Soit u une fonction bornée, λ-excessive pour un $\lambda > 1$; soit f une fonction positive bornée telle que $U^\lambda f - u$ soit λ-excessive; il existe alors une fonction g telle que $u = U^\lambda g$ et $0 \leqslant g \leqslant f$ sauf peut-être sur un ensemble de potentiel nul.

Démonstration. — Soit $n \geqslant \sup_x [f(x), u(x)]$;

$$U^\lambda n - [U^\lambda(n-f) + u] = U^\lambda f - u \text{ est } \lambda\text{-excessive.}$$

Or, $U^\lambda(n - f) + u \leqslant U^\lambda n \leqslant n$ est excessive. Il existe donc une fonction h telle que :

$$U^\lambda(n-f) + u = U^\lambda h \quad \text{et} \quad 0 \leqslant h \leqslant n.$$

Soit :

$$u = U^\lambda[h + f - n].$$

D'après le lemme 1, la fonction $g = h + f - n$ est inférieure ou égale à f et positive, sauf sur un ensemble de potentiel nul, ce qui établit le lemme 2.

Revenons à la démonstration de la proposition 1.

Puisque H_t est une fonctionnelle additive :

$$\int_t^{t+u} h(v, \omega)d\zeta_v = \int_0^u h(s, \theta_t\omega)d\zeta_{s+t}(\omega).$$

D'où

$$\int_0^u [h(s, \theta_t\omega) - h(s+t, \omega)]d\zeta_{s+t}(\omega) = 0$$

et donc :

$$\int_0^u [h(s, \theta_t\omega) - h(s+t, \omega)]^2 d\{\zeta, \zeta\}_s = 0$$

ce qui prouve que :

(1) $\qquad$ p. s, $h(s, \theta_t\omega) = h(s+t, \omega)[d\{\zeta ; \zeta\}_s$ p. s en $s]$.

Soit alors : $h^+ = h \vee 0, h^- = -(h \wedge 0)$; h^+ et h^- vérifient la relation (1). Soit

$$\psi_n = \mathrm{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda s}[(n+1) \wedge (h^+)(\omega, s)] - [n \wedge (h^+)(\omega, s)]\varphi(x_s)ds.$$

Comme les fonctions à intégrer sont positives et bornées, la relation (1) entraîne que φ_n est λ-excessive; de même :

$$\mathrm{U}^\lambda[(n+1)\varphi] - \psi_n = \mathrm{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda s}[(n+1) - (n+1) \wedge (h^+) + (n \wedge (h^+))]\varphi(x_s)ds$$

et $\psi_n \leqslant n+1$; il existe donc une fonction f_n^+ telle que :

$$\varphi_n = \mathrm{U}^\lambda[f_n^+ \varphi] \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant f_n^+ \leqslant n+1,$$

Soit $g_n^+ = \sum_0^n f_k^+$; comme g_n est croissante, elle a pour limite g, et à la limite

$$\mathrm{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda s}(h^+)(\omega, s)d\{\zeta, \zeta\}_s = \mathrm{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda s} g^+(x_s)\varphi(x_s)ds.$$

Puisque les fonctionnelles additives $\int_0^t h^+(\omega, s)\varphi(x_s)ds$ et $\int_0^t g^+(x_s)\varphi(x_s)ds$ ont même potentiel, $h^+(\omega, s)\varphi(x_s) = g^+(x_s)\varphi(x_s)$ presque sûrement. Procédant de même pour h^-, on en déduit l'existence de

$$g(x) = g^+(x) - g^-(x) \quad \text{tel que} \quad \int_0^t (h(\omega, s) - g(x_s))\varphi(x_s)ds = 0.$$

On peut dès lors terminer la démonstration du théorème 1 : en vertu du lemme 1, la martingale M_t peut s'écrire sous la forme :

$$\mathrm{M}_t = \int_0^t f^*(\xi_s, \beta_s')d\beta_s$$

où

$$\mathrm{E}_{x,y}\left(\int_0^t < f(\xi_s, \beta_s'), f(\xi_s, \beta_s') > ds\right) < \infty,$$

ou encore

$$\mathrm{M}_t = \int_0^t f^*(\xi_s, \beta_s')\sigma'(\xi_s)dz_s + \int_0^t f^*(\xi_s, \beta_s')n(\xi_s)d\beta_s'$$

La martingale M_t étant, par hypothèse, mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t$, est orthogonale aux coordonnées du mouvement brownien β_t'. En conséquence, le deuxième terme est nul. Il reste à voir que $f^*(\xi_s(\omega),\ \beta'_s(\omega'))\sigma'(\xi_s(\omega))$ ne dépend pas de ω'. Cela résulte facilement du fait que M_t n'en dépend pas. On vérifie que :

$$E_x\left(\int_0^t \|f^*\sigma' a\sigma'^* f\|\, ds\right) \leqslant E_{x,y}\int_0^t \|f^* f\|\, ds < \infty$$

Remarque. — Si le rang de la matrice σ est k au voisinage de x_0 et si le mineur $|\,\sigma_{ij}\,|_{\substack{i\leqslant k\\ j\leqslant k}}$ de σ est non nul dans ce voisinage, les fonctions g_i du théorème 1, pour $i = k+1, \ldots, n$, peuvent être choisies nulles dans un voisinage de x_0 : ceci résulte de la construction explicite du lemme 2, chapitre premier.

Le chapitre premier a mis en lumière l'utilité d'exprimer un certain nombre de mouvements browniens à partir du processus. Il paraît donc naturel de chercher le « nombre maximum de mouvements browniens contenus dans le processus ». Nous allons préciser cette notion, en reprenant, à peu de choses près, la définition de rang d'un processus de Skorokhod [*11*].

DÉFINITIONS :

— Une famille $\{ M_1, \ldots, M_r, \ldots \}$ de martingales de $\mathcal{M}$ est dite subordonnée à une famille $\{ N_1, \ldots, N_r, \ldots \}$ s'il existe, pour tout i, des fonctions mesurables $g_{i,p}$ telles que :

$$M_t^i = \sum_1^{n(i)} \int_0^t g_{i,p}(\xi_s) dN_s^p \qquad (P_x \text{ p. s. pour tout } x)$$

— Deux systèmes de martingales $\{ M_1, \ldots, M_r, \ldots \}$ et $\{ N_1, \ldots, N_r, \ldots \}$ sont équipotents si le premier système est subordonné au second et réciproquement.

— Deux systèmes de martingales $\{ M_1, \ldots, M_r, \ldots \}$ et $\{ N_1, \ldots, N_r, \ldots \}$ sont équipotents au voisinage de x s'il existe $\mathcal{V}$, voisinage de x, tel que :

$$M_{t\wedge\tau}^i = \sum_{i=1}^{n(i)} \int_0^{t\wedge\tau} g_{i,p}(\xi_s) dN_s^p \qquad (P_x \text{ p. s. pour tout } x \in v)$$

où τ est le temps de sortie de $\mathcal{V}$, et réciproquement.

— Une martingale M^1 est maximale si la relation M^1 subordonnée à M^2 implique M^2 subordonnée à M^1 (M^1, M^2 dans $\mathcal{M}$).

— Un système de martingales de $\mathcal{M}$, $\{ M^1, M^2, \ldots \}$ est complet si toute martingale M de $\mathcal{M}$ orthogonale à chaque M^i est nulle. Il est non dégénéré si, pour tout k, M_k n'est pas subordonné à $\{ M^1, \ldots, M^{k-1} \}$.

— Il est démontré dans [*11*] que, si M^1 et M^2 sont deux martingales de $\mathcal{M}$, la mesure associée au produit scalaire $\{ M^1 ; M^2 \}$ est absolument continue par rapport à la mesure associée à $\{ M^2, M^2 \}$. Raisonnant comme dans le lemme 1 de ce chapitre, on montre alors l'existence d'une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n$, notée $\dfrac{\partial M^1}{\partial M^2}$, telle que

$$d\{ M^1 ; M^2 \}_t = \frac{\partial M^1}{\partial M^2}(\xi_t) d\{ M^2 ; M^2 \}_t . \text{ (*)}$$

— Il est prouvé, dans [*11*], que deux martingales maximales M_1 et M_2 ont leur processus croissant équivalent au sens suivant : il existe deux fonctions g_1 et g_2 strictement positives telles que

$$\{ M_1 ; M_1 \} = g_1 . \{ M_2 ; M_2 \} \quad \text{et} \quad \{ M_2 ; M_2 \} = g_2 . \{ M_1 ; M_1 \}.$$

D'autre part, si M_1 est maximale et si $\{ M_2, M_2 \}$ est équivalent à $\{ M_1, M_1 \}$, alors M_2 est maximale. Nous utiliserons ces résultats sans y faire explicitement référence.

Toutes les notions précédentes (martingale maximale, système complet non dégénéré) peuvent être définies localement, au voisinage d'un point. Les résultats énoncés sont encore valables, jusqu'au premier temps de sortie de ce voisinage.

Définition du rang d'un processus. — Soit $\{ M^1, \ldots \}$ un système complet, non dégénéré de martingales maximales et : $D(x) = \left(\dfrac{\partial M^i}{\partial M_j}(x) \right)$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$. Soit $r(D(x))$ le rang de cette matrice. Si $\{ N^1, \ldots \}$ est un autre système complet non dégénéré de martingales maximales et si $D'(x)$ est la matrice associée, il est connu que

$$\int_0^t 1_{0^c} [r(D(\xi_u)) - r(D'(\xi_u))] d\{ M ; M \}_u = 0$$

pour toute martingale maximale M. Nous donnerons les définitions suivantes :

a) S'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 tel que pour toute martingale M maximale : $\int_0^t 1_{\mathcal{V}}(\xi_s) d\{ M, M \}_s = 0$ P_x p. s. pour tout $x \in \mathcal{V}$, nous dirons que le processus est de rang 0 au voisinage de x_0.

(*) Skorokhod, dans [*11*] affirme cette proposition sans démonstration.

b) S'il existe une martingale M de $\mathcal{M}$, un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 et un entier k strictement positif tels que :

$$\int_0^t 1_{\mathcal{V}}(\xi_s)d\{\mathrm{M}\,;\mathrm{M}\}_s > 0 \qquad \mathrm{P}_x \text{ p. s. pour tout} \quad x \in \mathcal{V},$$

$$\int_0^{t\wedge\tau} 1_{0^c}[k = r(\mathrm{D}(\xi_u))]d\{\mathrm{M}\,;\mathrm{M}\}_u = 0 \quad \mathrm{P}_x \text{ p. s. pour tout} \quad x \in \mathcal{V},$$

si τ est le premier temps de sortie de $\mathcal{V}$, nous dirons que le processus est de rang k au voisinage de x_0.

Le rang du processus est, de façon évidente, indépendant du système complet non dégénéré localement choisi.

Avant de caractériser les processus de rang k, montrons tout d'abord :

THÉORÈME II.2. — *Supposons qu'au voisinage de x_0 la matrice σ est de rang k, sauf peut-être sur un ensemble* E *ou le processus séjourne presque sûrement un temps nul. Alors $\{ z_t^1, z_t^2, \ldots, z_t^n \}$ est un système de martingales équipotent à un mouvement brownien k-dimensionnel dans un voisinage de x_0.*

Soit $\mathcal{V}$ le voisinage dont il est question dans l'énoncé. On peut toujours supposer que, sur $\mathcal{V}\backslash\mathrm{E}$, la matrice $[\sigma_{ij}]_{\substack{i\leq k\\ j\leq k}}$ est inversible. Si $\mathcal{V}$ est $\mathbb{R}^n$ tout entier, si E est vide et si $k = r$, le théorème est une conséquence immédiate du lemme 3, chapitre premier.

Supposons tout d'abord E vide. Il résulte de la remarque suivant le théorème II.1 que les systèmes $\{ z^1, \ldots, z^n \}$ et $\{ z^1, \ldots, z^k \}$ sont équipotents. Appelons a' la matrice $[a_{ij}]_{\substack{i\leq k\\ j\leq k}}$, σ' une matrice carrée (k, k) telle que $\sigma'\sigma'^* = a'$, y_t la projection de z_t sur l'hyperplan $x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots = x_n = 0$. Posons enfin :

$$\gamma_t = \int_0^{t\wedge\tau} \sigma'^{-1}(\xi_s)dy_s = \int_0^t 1_{\{s\leq\tau\}}\sigma'^{-1}(\xi_s)dy_s$$

si τ est le premier temps de sortie de $\mathcal{V}$ de ξ_t.

Quel que soit $\theta \in \mathbb{R}^k$, il est aisé de voir que le processus croissant associé à $\langle \theta . \gamma_t \rangle$ est égal à $\frac{1}{2} | \theta |^2(t \wedge \tau)$. D'autre part, $y_{t\wedge\tau} = \int_0^{t\wedge\tau} \sigma'(\xi_s)d\gamma_s$. Les systèmes $\{ z^1, \ldots, z^n \}$ et $\{ \gamma^1, \ldots, \gamma^k \}$ sont donc équipotents.

Il reste à montrer que γ_t est, non pas un brownien, mais un brownien jusqu'à τ suivant la définition suivante :

DÉFINITIONS. — Soit γ_t un processus sur $(\Omega^0, \mathcal{F}_t)$. On dira que γ_t est un brownien jusqu'à τ pour la probabilité P s'il existe un espace de probabilité $(\Omega'', \mathcal{A}'', P'')$ et un processus $\tilde{\gamma}_t$ sur $(\Omega \times \Omega^0, \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{A}'')$ qui est un brownien pour $P \otimes P''$, et qui coïncide jusqu'à τ avec γ_t.

LEMME 3. — Soit γ_t un processus sur $(\Omega^0, \mathcal{F}_t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ tel que, quel que soit $\theta \in \mathbb{R}^k$, $\langle \theta, \gamma_t \rangle$ est une martingale de processus croissant associé $\frac{|\theta|^2}{2} t \wedge \tau$. Alors, γ_t est un mouvement brownien jusqu'à τ.

On construit $(\Omega'', \mathcal{A}'', P'')$ d'une manière analogue à celle qu'on a utilisé dans le lemme 2 (chapitre premier), pour ajouter des browniens indépendants, et on définit $\tilde{\gamma}_t$ comme intégrale stochastique. Nous n'expliciterons pas les calculs, déjà menés dans le chapitre II.

Supposons maintenant E non vide et convenons de poser $\sigma'^{-1} = 0$ là où cette matrice n'est pas définie. On définit encore $\gamma_t = \int_0^{t \wedge \tau} \sigma'^{-1}(\xi_s) dz_s$. Le reste des calculs se poursuit comme précédemment, les processus croissants n'étant pas modifiés lorsqu'on donne à σ'^{-1} une valeur différente sur un ensemble de potentiel nul (En fait, la démonstration est légèrement plus compliquée car on ne peut pas supposer que le même mineur de la matrice σ est non nul dans tout $\mathcal{V}$. Il faudrait, comme au chapitre précédent, faire une partition de $\mathcal{V}$).

Nous allons maintenant relier la notion de rang du processus à celle de rang de la matrice σ.

THÉORÈME II.3. — *Si le rang de la matrice σ est nul au voisinage de x_0, le rang du processus est nul au voisinage de x_0. Si le rang de la matrice σ est égal à $k > 0$ au voisinage de x_0 sauf peut-être sur un ensemble* E *où le processus séjourne presque sûrement un temps nul, le rang du processus est k au voisinage de x_0.*

Réciproquement : si le rang du processus est égal à 0 au voisinage de x_0, la matrice σ est nulle dans un voisinage de x_0. Si le rang du processus est égal à $k > 0$ au voisinage de x_0 et si $b(x_0) = 0$, le rang de σ est égal à k au voisinage de x_0 sauf peut-être sur un ensemble où l'on séjourne un temps nul.

Démonstration de la partie directe. — Si le rang de la matrice σ est nul dans le voisinage $\mathcal{V}$ de x_0, et si τ est le premier temps de sortie de $\mathcal{V}$, $z_{t \wedge \tau}$ est nul pour tout t, et donc, d'après le théorème 1, quelle que soit la martingale M_t de $\mathcal{M}$, $M_{t \wedge \tau} = 0$.

Supposons maintenant que le rang de σ est k sauf sur un ensemble de potentiel nul. Il suffit de montrer que les $\gamma_t^1, \ldots, \gamma_t^k$ introduits dans le théorème 2 forment localement un système complet non dégénéré de martingales maximales. Or, le processus croissant associé à toute martingale de $\mathcal{M}$ est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue d'après le théorème 1. D'autre part, $z_{t\wedge\tau}$ peut s'écrire comme intégrale stochastique en γ_t et donc également toute martingale $\mathrm{M}_t \in \mathcal{M}$.

Démonstration de la réciproque. — Supposons qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 tel que $\int_0^t 1_{\mathcal{V}}(x_s)d\{\mathrm{M}, \mathrm{M}\}_s = 0$ P_x presque sûrement ($x \in \mathcal{V}$). Ceci prouve que toute martingale $\mathrm{M}_t \in \mathcal{M}$ est nulle jusqu'au premier temps de sortie, τ, de $\mathcal{V}$. En particulier, pour tout θ, $\langle \theta, z_{t\wedge\tau} \rangle = 0$, donc

$$\int_0^t \langle \theta, a(\xi_s)\theta \rangle \, ds = 0.$$

Ceci n'est possible que si $\sigma(x)$ est nul dans $\mathcal{V}$.

Supposons maintenant $b(x_0) = 0$ et que le rang du processus est $k > 0$ au voisinage de x_0. Montrons que forcément $\sigma(x_0) \neq 0$: sinon $x_t = x_0$ serait l'unique solution de l'équation $x_t = x_0 + \int_0^t \sigma(x_s)d\beta_s + \int_0^t b(x_s)ds$, et x_0 serait absorbant, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il existe donc θ tel que $\sigma(x)\theta$ soit non nul au voisinage de x_0 et la martingale $\langle \theta, z_{t\wedge\tau} \rangle$ admet comme processus croissant $\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau} \langle \theta, a(\xi_s)\theta \rangle \, ds$, dont la mesure associée est, jusqu'à τ, équivalente à la mesure de Lebesgue. Cette martingale est donc localement maximale. Toute martingale maximale de $\mathcal{M}$ jouit de la même propriété. Soit alors $\mathrm{M}^1, \ldots, \mathrm{M}^l$ un système complet de martingales maximales tel que :

$$\int_0^{t\wedge\tau} 1_{\mathrm{O}^c}[k = r(\mathrm{D}(\xi_u))]du = 0 \qquad \mathrm{P}_x \text{ p. s.} \quad (\forall x \in \mathcal{V}).$$

Il est facile de voir, grâce au procédé d'orthonormalisation de Schmidt, que l'on peut trouver un mouvement brownien k-dimensionnel, jusqu'à τ, $\gamma^1, \ldots, \gamma^k$ tel que les systèmes $\{\mathrm{M}^1, \ldots, \mathrm{M}^l\}$ et $\{\gamma^1, \ldots, \gamma^k\}$ soient équipotents dans $\mathcal{V}$. Plus précisément, si $d\{\mathrm{M}^i; \mathrm{M}^i\}_t = g_i^2(\xi_t)dt$ jusqu'à τ; on pose :

$$\gamma_t^1 = \int_0^{t\wedge\tau} \frac{1}{g_1(\xi_s)} d\mathrm{M}_s^1$$

$$\gamma_t^2 = \int_0^{t\wedge\tau} \alpha d\gamma^1 + \int_0^{t\wedge\tau} \beta d\mathrm{M}^2$$

α et β étant choisis de telle sorte que $\{\gamma^1; \gamma^1\}_t = t \wedge \tau$, $\{\gamma^1; \gamma^2\}_t = 0$, ce qui est toujours possible, et ainsi de suite.

Le système $\gamma^1, \ldots, \gamma^k$ étant complet, il existe une matrice $(n, k)\tilde{\sigma}$, telle que

$$z_{t \wedge \tau} = \int_0^{t \wedge \tau_\sim} \tilde{\sigma}(\xi_s) d\gamma_s.$$

La formule de changement de variables d'Ito nous montre alors que, au voisinage de x_0, la matrice a est de la forme $\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}^*$. Notre théorème sera donc prouvé si nous établissons que le rang de $\tilde{\sigma}$ est égal à k au voisinage de x_0, sauf sur un ensemble où le processus ne séjourne pas. Or, d'après le théorème II.1, il existe une matrice $\tilde{\sigma}'$ telle que :

$$\gamma_{t \wedge \tau} = \int_0^{t \wedge \tau_\sim} \tilde{\sigma}'(\xi_s) dz_s = \int_0^{t \wedge \tau_\sim} \tilde{\sigma}'(\xi_s)\tilde{\sigma}(\xi_s) d\gamma_s.$$

Ceci montre que $\tilde{\sigma}'(x)\tilde{\sigma}(x) = \mathrm{I}d$, sauf sur un ensemble où l'on ne séjourne pas et établit le théorème.

Le théorème II.3 prouve l'intérêt de la notion de rang d'un processus. Il montre aussi que cette notion est plus souple que la notion de rang de σ, puisqu'elle gomme en quelque sorte les irrégularités de ce rang.

Nous donnerons, dans le chapitre III, des conditions suffisantes non triviales pour que le rang de σ soit égal à k sauf sur un ensemble où l'on ne séjourne pas.

CHAPITRE III

ÉTUDE DU PROCESSUS

1. Mouvement sur les variétés.

Dans ce paragraphe, nous supposons que L est donné sous la forme suivante :

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2} \sum_1^r \mathrm{X}_k^2 + \mathrm{Y} \qquad \text{où} \qquad \mathrm{X}_k \ (k = 1, \ldots r)$$

et Y sont des champs de vecteurs C^∞ identifiés à des opérateurs différentiels du premier ordre. On peut prendre pour matrice σ la matrice dont les colonnes sont formées des coordonnées des vecteurs X_k. Le théorème I.2 affirme que, dans ce cas, il existe une diffusion unique associée à L et qu'elle est Fellerienne. On la notera par $(\Omega, \mathcal{A}_t, x_t, \mathrm{P}_x)$.

THÉORÈME III.1. — *Nous supposons que dans un voisinage* $U(x_0)$ *de* x_0 *le champ* $(X_1 \dots Y)$ *est intégrable, soit* V *la variété intégrale de ce champ qui passe par* x_0, *soit* τ *le temps de sortie de* $U(x_0)$; *alors*

$$P_{x_0}(x_{t\wedge\tau} \in V\ ;\ \forall t \geqslant 0) = 1.$$

Ceci entraîne évidemment que le processus n'est pas fortement fellerien si $V \neq R^n$.

Démonstration. — D'après le théorème de Frobenius, il existe un difféomorphisme φ de classe C^∞ tel que l'image par φ de V soit une variété linéaire H de même dimension que V définie par : $\varphi^1 = \dots \varphi^j = 0$ où φ^i sont les coordonnées du difféomorphisme φ.

Énonçons maintenant un lemme qui nous sera utile plusieurs fois.

LEMME. — Soit x_t la diffusion associée à l'opérateur $L = \frac{1}{2}\Sigma X_k^2 + Y$; soit φ un difféomorphisme de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Alors l'image $\varphi(x_t)$ de x_t par φ est la diffusion associée à $L' = \frac{1}{2}\Sigma(X_k')^2 + Y'$, où X_k' et Y' sont les images par la différentielle $d\varphi$ de X_k et Y.

Ce lemme est une conséquence immédiate du théorème 10.13 de [3].

Revenons à la démonstration du théorème. — D'après le lemme 1 et la formule d'Ito, nous avons :

$$\varphi(x_t) = \varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t X_i'(\varphi(x_s))d\beta_s^i + \int_0^t b'(\varphi(x_s))ds.$$

En particulier $\varphi^i(x_t) = \varphi^i(x)$ pour $i = 1, \dots, j$, ce qui prouve le résultat annoncé.

2. Étude des points de dégénérescence de la matrice σ.

Sous les hypothèses du théorème I.1, il est évident que les zéros communs de σ et b sont les points absorbants de la diffusion associée à l'opérateur L. Nous allons nous intéresser maintenant aux points où σ s'annule sans que b s'annule. On notera $(\Omega, \mathcal{A}_t, x_t, P_x)$ la diffusion associée à L.

THÉORÈME III.2. — *On suppose que* σ *est lipschitzienne et* b *continu, que* σ *est dégénéré en* x_0 *et que* $b(x_0) \neq 0$: *le point* x_0 *est alors effilé.*

C'est dire que, si τ_0 est le temps de retour en x_0, $P_{x_0}[\tau_0 > 0] = 1$. On sait qu'alors l'ensemble des t tels que $x_t = x_0$ est presque sûrement dénombrable.

On peut toujours supposer que x_0 est l'origine dans $\mathbb{R}^n$, que la première coordonnée de $b(x)$, $b_1(x)$, est minorée par $\alpha > 0$, tandis que $| b(x) | < 2\alpha$ dans le voisinage $\mathcal{V}$ de 0. On appellera τ le premier temps de sortie de $\mathcal{V}$. On supposera que $\mathcal{V} = B(0, r)$.

LEMME 1. — Il existe une constante $C > 0$ telle que $E_0(| x_{t\wedge\tau} |^2) \leqslant Ct^2$, si $t \leqslant 1$.

En effet, pour la probabilité P_0, si x_t^i désigne la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de x_t, $x_t^i = \int_0^t b_i(x_s)ds$ est une martingale de processus croissant associé $\int_0^t a_{ii}(x_s)ds$:

$$E_0(| x^i_{t\wedge\tau} |^2) = 2E_0\left[\left(x^i_{t\wedge\tau}\int_0^{t\wedge\tau} b_i(x_s)ds\right)\right]^2 - E_0\left(\int_0^{t\wedge\tau} b_i(x_s)ds\right)^2 + E_0\left(\int_0^{t\wedge\tau} a_{ii}(x_s)ds.\right)$$

$$E_0(| x^i_{t\wedge\tau} |)^2 \leqslant \alpha^2 t^2 + E_0\left(\int_0^{t\wedge\tau} a_{11}(x_s)ds\right).$$

En vertu de la condition de Lipschitz satisfaite par σ, il existe une constante K telle que $| a_{11}(x) | \leqslant K \, | x |^2$. Si l'on pose : $\tilde{x}_t = x_t 1_{\{t<\tau\}}$, on en déduit que

$$E_0(| \tilde{x}_t |^2) \leqslant n\alpha^2 t^2 + n\kappa \int_0^t E_0(| \tilde{x}_s |^2)ds,$$

et donc, par un raisonnement classique, que $E_0(| \tilde{x}_t |^2)$ est inférieur à la solution nulle en zéro de l'équation

$$\Psi(t) = n\alpha^2 t^2 + n\kappa \int_0^t \Psi(s)ds.$$

Or

$$\Psi(t) = 2\frac{\alpha}{\kappa}[e^{n\kappa t} - 1 - n\kappa t] \leqslant Ct^2$$

pour tout $t \leqslant 1$. Mais, $E_0(| x_{t\wedge\tau} |^2) \leqslant E_0(| \tilde{x}_t |^2) + E_0(| x_t |^2 1_{\{\tau \geqslant t\}})$ le lemme résulte alors de l'inégalité

$$E_0(| x_\tau |^2 1_{\{\tau\leqslant t\}}) \leqslant r^2 \exp\frac{-r^2}{kt}$$

Revenons à la démonstration du théorème. Posons $A_t = \int_0^t \| \sigma(x_s) \|^2 ds$.

Puisque σ est lipschitzien et $E_0(|x_{t\wedge\tau}|^2) \leqslant Ct^2$, il existe une constante C′ telle que $E_0(A_{t\wedge\tau}) \leqslant C't^3$. Soit alors $2 < \delta < 3$: $P_0(A_{t\wedge\tau} \geqslant C't^\delta) \leqslant t^{3-\delta}$. Donc :

$$\sum_1^\infty P_0(A_{2^{-n}\wedge\tau} C'2^{-n\delta}) < \infty.$$

D'après le lemme de Borel Cantelli, $P_0(\overline{\lim}\ (A_{2^{-n}\wedge\tau} \geqslant C'2^{-n\delta})) = 0$. Puisque A_t est croissant, on en déduit l'existence, presque sûrement, d'une constante C″ telle que $A_{t\wedge\tau} \leqslant C''t^\delta$ lorsque t est petit. Or on sait ([*8*], p. 46) que :

$$P_0\left[\overline{\lim}\ \frac{\left| x_t - \int_0^t b(x_s)ds \right|}{(2A_t \log_2 1/A_t)^{1/2}} \leqslant 1\right] = 1.$$

Étant donné $2 < \delta < 3$, il existe donc, presque sûrement, une constante C‴ telle que $\left| x_t^1 - \int_0^t b_1(x_s)ds \right| \leqslant C'''t^{\delta/2}$ pour t assez petit. Mais on sait que $\int_0^{t\wedge\tau} b_1(x_s)ds \geqslant \alpha(t \wedge \tau)$. Presque sûrement, x_t séjourne donc partant de 0, un temps strictement positif dans le demi-espace $x_1 > 0$ avant de revenir en 0.

3. Étude des temps d'atteinte des points de dégénérescence isolés de l'opérateur L.

Nous utiliserons dans cette question des techniques de tests analogues à celles qu'utilise Khas'minskii dans [7] pour étudier le comportement à l'infini. L'utilisation en contrôle stochastique des fonctions de Lyapounov pour étudier la stabilité des trajectoires relève de la même idée.

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que l'opérateur L, défini comme précédemment à partir d'une matrice $a = \sigma\sigma^*$, et un vecteur b, est dégénéré en 0, mais que σ a un rang constant > 0, dans un voisinage pointé D_{R_0} de 0, $(0 < |x| \leqslant R_0 = D_{R_0})$.

A. **Généralités.** — Nous définissons une classe U de fonctions u à valeurs réelles telle que : u soit positive et deux fois continuement différentiable dans l'ensemble $\{0 < |x| \leqslant R_0\} = D_{R_0}$.

PROPOSITION 1. — On suppose qu'il existe une fonction u de la classe U telle que :

a) $Lu \leqslant u\ \forall x \in D_{R_0}$.

b) (Grad $u)^*.a.$grad u ne s'annule que sur des ensembles où le processus ne séjourne pas presque sûrement.

c) $u(x)$ tend vers l'infini lorsque $|x|$ tend vers zéro.

Alors $\forall\alpha \in D_{R_0}$, $P_\alpha(\tau_0 = \infty) = 1$ si τ_0 désigne le temps d'atteinte de 0.

En effet, définissons $\sigma = \sup\{0 < t < \tau_0, |x_t| = R_0\}$ (0 si cet ensemble est vide). Supposons que l'ensemble $\{\tau_0 < +\infty\}$ soit non négligeable pour P_α. On peut alors appliquer la formule d'Ito pour tout temps t, $t \in]\sigma(\omega)$, $\tau_0(\omega)[$

$$e^{-t}(x_t) - e^{-\sigma}(x_\sigma) = \int_\sigma^t e^{-s}\,(\text{grad } u)^*\sigma d\beta s + \int_\sigma^t e^{-s}(Lu - u)ds.$$

Pour tout $s \in [\sigma, t] x_s \in D_{R_0}$, donc :

$$e^{-t}u(x_t) - e^{-\sigma}u(x_\sigma) \leqslant \int_\sigma^t e^{-s}\,(\text{grad } u)^*\sigma d\beta_s.$$

$\int_0^t e^{-s}\,(\text{grad } u)^*\sigma d\beta_s$ est un changé de temps de brownien a_t un dimensionnel par le changement de temps $\tau(t) = \int_0^t e^{-2s}\,(\text{grad } u)^*.a \text{ grad } u ds$, strictement croissant d'après l'hypothèse *b*).

Alors $\varliminf_{t\to\tau_0} (a_{\tau(t)} - a_{\tau(\sigma)}) < +\infty$, en effet ou bien $\tau(\tau_0) < +\infty$ et $a_{\tau(\tau_0)} < +\infty$ p. s. ou bien $\tau(t)$ tend vers l'infini quand t tend vers τ_0 et $\tau(t)$ prend alors toutes les valeurs comprises entre 0 et l'infini.

Ceci entraîne que $\forall\omega \in \{\tau_0 < \infty\}$,

$$\lim_{t\to\tau_0} [e^{-t}u(x_t)] \leqslant e^{-\sigma}u(x_\sigma) + \varliminf_{t\to\tau_0} (a_{\tau(t)} - a_{\tau(\sigma)}) < +\infty.$$

Ce qui est en contradiction avec $P_\alpha(\tau_0 < +\infty) > 0$, puis que $u(0) = \infty$.

PROPOSITION 2. — Supposons qu'il existe u appartenant à la classe U telle que

a) $Lu \geqslant u \ \forall x \in D_{R_0}$,

b) $\sup_{|x|=R_0} u(x) = 1 < u(y) \ \forall y \ 0 < |y| < R_0$,

c) $u(0) = \lim_{x\to 0} u(x) < \infty$.

Alors $\forall\alpha \in D_{R_0}$ $P_\alpha(\tau_0 < \infty) > 0$.

En effet, définissons T_n, temps d'atteinte de la boule $|x| < \frac{R_0}{n}$. Partant de y, $(0 < |y| < R_0)$, on peut appliquer la formule d'Ito entre les temps 0 et $T_n \wedge T_1 \wedge t$:

$$e^{-T_n \wedge T_1 \wedge t} u(x_{T_n \wedge T_1 \wedge t}) - u(y) = \int_0^{T_1 \wedge T_n \wedge t} e^{-s} (\operatorname{grad} u)^* \sigma d\beta_s + \int_0^{T_1 \wedge T_n \wedge t} e^{-2s} (Lu - u)(x_s) ds.$$

$\forall s \in [0, T_n \wedge T_1 \wedge t]$ $Lu - u \geqslant 0$ donc, puisque $E(T_n \wedge T_1 \wedge t) < +\infty$,

$$E_y(e^{-T_n \wedge T_1 \wedge t} u(X_{T_n \wedge T_1 \wedge t})) \geqslant u(y).$$

Alors comme u est bornée et comme $e^{-T_n \wedge T_1 \wedge t} u(x_{T_n \wedge T_1 \wedge t})$ converge vers $e^{-T_n \wedge T_1} u(x_{T_n \wedge T_1})$ P_y presque sûrement quand t devient infini

$$E_y[e^{-T_n \wedge T_1} u(X_{T_n \wedge T_1})] \geqslant u(y)$$

ou encore :

$$u(y) \leqslant E_y(e^{-T_n} ; u(x_{T_n}) ; T_n < T_1) + E_y(e^{-T_1} u(x_{T_1}) ; T_1 < T_n).$$

$$u(y) \leqslant E_y[e^{-T_n} u(x_{T_n})] + 1 \qquad \text{car} \qquad \sup_{|x| = R_0} u(x) = 1.$$

Comme u est bornée sur $\overline{D}_{R_0}$ par M, $1 < u(y) \leqslant M \lim_n E_y(e^{-T_n}) + 1$. T_n étant une suite croissante vers T_0 quand n tend vers l'infini

$$1 < u(y) \leqslant 1 + ME_y(e^{-T_0}).$$

B. Étude dans le cas d'une dimension. — Dans cette partie, nous supposons que l'opérateur L est défini sur $\mathbb{R}$: il est alors de la forme :

$$L = \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{d^2}{dx^2} + b(x) \frac{d}{dx}.$$

L'existence et l'unicité de l'équation stochastique 1, dans le cas d'une dimension, et dans les conditions du théorème III.3, sont démontrées dans [*15*] de sorte qu'on peut appliquer le théorème I.1.

THÉORÈME III.3. — *On suppose que* $\sigma(0) = 0$ *et* $\sigma(x)$ *est différent de* 0 *dans l'intervalle* $]0, R_0]$.

a) *Si* σ *satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre* 1 *et si* $b(0) = 0$, *alors, quel que soit* $\alpha \in]0, R_0]$, $P_\alpha(\tau_0 = \infty) = 1$.

b) *S'il existe* $\beta < 1$, *tel que* $x^{-\beta}\sigma(x)$ *tende vers l'infini lorsque* x *tend vers* 0 *et si* $b(0) = 0$, *quel que soit* $\alpha \in]0, R_0]$, $P_\alpha(\tau_0 < \infty) = 1$.

c) *Si σ satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre $\frac{1}{2}$ au moins et si $b(x) > 0$ dans* $[0, R_0]$, *alors, quel que soit* $\alpha \in]0, R_0]$, $P_\alpha(\tau_0 = \infty) = 1$.

d) *Si σ satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre $\frac{1}{2}$ au moins et si $b(x) < 0$ dans* $[0, R_0]$, *alors, quel que soit* $\alpha \in]0, R_0]$, $P_\alpha(\tau_0 < \infty) = 1$.

Remarque. — Lorsque σ est lipschitzien, nul en 0, et non nul, sauf en 0, dans un voisinage de 0, les conclusions du théorème III.2 et de ce théorème permettent d'affirmer que, si $b(0) \neq 0$, partant de tout point le processus passe au plus une fois en 0.

Nous nous proposons de démontrer le théorème 1, en construisant des fonctions qui satisfassent aux hypothèses des propositions 1 ou 2.

A cet effet, définissons par récurrence : $u_0 = 1$,

$$u_n(x) = 2\int_x^{R_0} \exp \int_z^{R_0} \frac{b}{\sigma^2}(y)dy \int_z^{R_0} \frac{du}{\sigma^2(u)} u_{n-1}(u) \exp - \int_u^{R_0} \frac{b}{\sigma^2}(y)dy.$$

Il est facile de voir que $u_n(x) \leqslant \frac{u_1^n}{n!}$: puisque u_1 décroit,

$$u_n(x) \leqslant 2\int_x^{R_0} \exp \int_z^{R_0} \frac{b}{\sigma^2}(y)dy \int_z^{R_0} \frac{du}{\sigma^2(u)} \frac{u_1^{n-1}}{(n-1)!} \exp - \int_u^{R_0} \frac{b}{\sigma^2}(y)dy$$

$$\leqslant - \int_x^{R_0} \frac{u_1^{n-1}}{(n-1)!}(z)du_1 = \frac{u_1^n}{n!} \qquad \text{car} \qquad u_1(R_0) = 0.$$

Soit $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$, cette fonction est bien définie sur $]0, \alpha]$, est de classe C^2 sur tout intervalle $[x, \alpha]$ avec $x > 0$ et possède les propriétés suivantes :

— u satisfait à l'équation différentielle

$$u = \frac{1}{2}\sigma^2 u'' + bu', \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad Lu = u.$$

— u est décroissante strictement positive et $u(R_0) = 1$

— u' est strictement négative sauf en R_0, ensemble sur lequel on ne séjourne pas.

Donc, si $u(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers zéro, u satisfait aux hypothèses de la proposition 1; si, au contraire, $u(0) < +\infty$, u satisfait aux hypothèses de la proposition 2.

Comme $1 + u_1 \leqslant u \leqslant e^{u_1}$, u se comporte comme u_1 au voisinage de 0.

Pour obtenir des caractérisations précises dans le cas d'une dimension, démontrons la proposition suivante :

PROPOSITION 2'. — Sous les hypothèses de la proposition 2, dans $\mathbb{R}$, $P_\alpha(T_0 < \infty) = 1$.

En effet, nous avons vu que

$$\forall y \in]0, R_0[\quad u(y) \leqslant E_y(e^{-T_n} u(x_{T_n}) ; T_n < T_1) + E_y(e^{-T_1} ; T_1 \leqslant T_n).$$

Si nous faisons tendre $n \to +\infty$, u étant bornée et la suite T_n décroissante

$$u(y) \leqslant E_y[e^{-T_0} u(x_{T_0}) ; T_0 < T_1] + E_y(e^{-T_1} ; T_1 \leqslant T_0).$$

Si nous posons $y = x_{T_n}$ et faisons tendre $u \to +\infty$

$$u(0) \leqslant u(0) \underline{\lim}\, F_{x_{T_n}}(e^{-T_0} ; T_0 < T_1) + \underline{\lim}\, E_{x_{T_n}}(e^{-T_1} ; T_1 \leqslant T_0)$$

or $u(0) > 1$ et $E_{x_{T_n}}(e^{-T_0} ; T_0 < T_1) + T_{x_{T_n}}(e^{-T_1} ; T_1 \leqslant T_0) \leqslant 1$.
Par suite

$$\underline{\lim}\, E_{x_{T_n}}(e^{-T_0} ; T_0 < T_1) = 1.$$

$$\forall \alpha \in]0, R_0[\quad E_\alpha\left[\underline{\lim}\, E_{x_{T_n}}(e^{-T_0} ; T_0 < T_1)\right] = 1 \leqslant \underline{\lim}\, E_\alpha\left[E_{x_{T_n}}(e^{-T_0} ; T_0 < T_1).\right]$$

$$1 \leqslant \underline{\lim}\, E_\alpha(e^{-(T_0 - T_n)} ; T_0 < T_n + T_1 \circ \theta_{T_n}) \leqslant \underline{\lim}\, P_\alpha(T_0 - T_n < +\infty).$$

Or, comme $\sigma(x)$ est strictement positif dans l'intervalle

$$]0, R_0[, P_\alpha(T_n < +\infty) = 1.$$

Ce qui entraîne que $1 \leqslant P_\alpha(T_0 < +\infty)$, d'où le résultat annoncé.

Démonstration du théorème. — Nous sommes ramenés à étudier le comportement, lorsque x tend vers 0, de

$$I(x) = \int_x^{R_0} \exp \int_z^{R_0} \frac{b}{\sigma^2(y)}\, dydz \int_z^{R_0} \frac{dx}{\sigma^2(x)} \exp\left(-\int_x^{R_0} \frac{b(t)}{\sigma^2(t)}\, dt\right).$$

1) Supposons $b(x) \equiv 0$: alors

$$I(x) = M \int_x^{R_0} dz \int_z^{R_0} \frac{dy}{\sigma^2(y)} = M \int_x^{R_0} \frac{(z-x)}{\sigma^2(z)}\, dz.$$

On suppose que $a(x) \sim x^\beta$ dans un voisinage de l'origine.

Si $\beta > \frac{1}{2}$ $I(x)$ est de même nature que l'intégrale $\int_x^{R_0} \frac{zdz}{\sigma^2(z)}$ qui converge si $\frac{1}{2} < \beta < 1$ et diverge si $\beta \geqslant 1$.

Si $\beta = \frac{1}{2}$, I(x) est de même nature que $- x \log x$ qui tend vers 0.

La formule de Cameron-Martin généralisée (cf. chapitre premier) permet d'obtenir les mêmes conclusions lorsque $b(x)$ est non identiquement nul, mais s'annule en 0.

2) Supposons $b(0) \neq 0$, $b(0) > 0$. Soient m et M les bornes positives de b sur $[0, \mathrm{R}_0]$.

$$\mathrm{I}(x) \geqslant \frac{1}{\mathrm{M}} \int_x^{\mathrm{R}_0} \frac{b}{\sigma^2} \exp\left(- \int_z^{\mathrm{R}_0} \frac{b}{\sigma^2} dt\right) \int_x^z dy \exp \int_z^{\mathrm{R}_0} \frac{b}{\sigma^2}(u) du$$

$$= \frac{1}{\mathrm{M}} \left[\exp\left(- \int_z^{\mathrm{R}_0} \frac{b}{\sigma^2} dt\right) \int_x^z dy \exp \int_y^{\mathrm{R}_0} \frac{b}{\sigma^2}(u) du\right]_x^{\mathrm{R}_0} - \frac{\mathrm{R}_0 - x}{\mathrm{M}}$$

$$\mathrm{I}(x) \geqslant \frac{1}{\mathrm{M}} \int_x^{\mathrm{R}_0} dy \exp \int_y^{\mathrm{R}_0} \frac{b}{\sigma^2} du - \frac{\mathrm{R}_0 - x}{\mathrm{M}}.$$

I(x) diverge si $\int_x^{\mathrm{R}_0} dy \exp \int_y^{\mathrm{R}_0} \frac{b}{\sigma^2} du$ diverge, ce qui est le cas si σ est höldérien d'ordre $\geqslant \frac{1}{2}$.

3) Si $b(0) \neq 0$ et $0 < m \leqslant - b(x) \leqslant \mathrm{M}$, un calcul analogue au précédent montre que :

$$\mathrm{I}(x) \leqslant \frac{\mathrm{R}_0 - x}{m} - \frac{1}{m} \int_x^{\mathrm{R}_0} dz \exp \int_z^{\alpha} \frac{b}{\sigma^2}(y) dy < + \infty \text{ car } b \text{ est toujours négatif.}$$

C. **Étude dans le cas où la dimension est supérieure à 1.** — Nous supposons l'opérateur L défini à partir d'une matrice σ et d'un vecteur b lipschitziens. Comme dans le cas d'une dimension, nous nous proposons de construire des fonctions u qui satisfassent aux hypothèses des propositions 1 ou 2. Pour cela, nous définissons

$$\mathrm{B} = \frac{2b^*.x + \operatorname{trace} a}{x^*.ax}$$

$$\mathrm{A}^- = \inf_{|x|=\mathrm{R}} (x^*ax) \qquad \mathrm{B}^- = \inf_{|x|=\mathrm{R}} \mathrm{B} \qquad \mathrm{C}^- = \exp - \int_{\mathrm{R}}^{\alpha} \mathrm{B}^-(z) z dz.$$

A^+, B^+, C^+ sont définis de la même façon en prenant les sup.

Nous procédons comme en dimension 1, et construisons la fonction :

$u\left(\frac{R^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\left(\frac{R^2}{2}\right)$, où $u(0) \equiv 1$, u_n est définie par récurrence par :

$$u_n\left(\frac{R^2}{2}\right) = 2\int_R^\alpha (C)^{-1}(y)y dy \int_y^\alpha u_{n-1} \frac{C^-}{A^+} z dz.$$

On vérifie facilement que $u \leqslant \frac{u_1^n}{n\,!}$, que u est de classe C_2 dans $\left]0, \frac{\alpha^2}{2}\right]$ et satisfait à l'équation différentielle.

$$u(z) = \frac{1}{2}A^+(\sqrt{2z})(u''(z) + B^-(\sqrt{2z})u').$$

Étant donné $x \in \mathbb{R}^n$, appelons $z = |\, x \,|$.

$$\forall z \in]0, \alpha] \qquad Lu\left(\frac{z^2}{2}\right) = \frac{1}{2}x^*.ax(u'' + Bu').$$

Comme u est décroissante, positive, $u'' + Bu' \leqslant u'' + B^-u' = \frac{2u\left(\frac{z^2}{2}\right)}{A^+} \geqslant 0$ donc $Lu \leqslant u$. De plus $(\text{grad } u)^*.a.\text{grad } u = u'\left(\frac{z^2}{2}\right)(x^*.ax)$, et $u' < 0$ sauf en $\frac{\alpha^2}{2}$.

Ainsi $(\text{grad } u)^*.a.\text{grad } u$ ne s'annule en dehors de 0 que lorsque $x^*.ax$ est nul. Donc, si l'on suppose que l'on ne séjourne pas dans l'ensemble $x^*.ax = 0$, u satisfait aux hypothèses *a)* et *b)* de la proposition 1.

Enfin, $1 + u_1 \leqslant u \leqslant e^{u_1}$, donc au voisinage de zéro $u(z)$ se comporte comme $u_1(z)$. On démontre de la même façon que :

$$u\left(\frac{z^2}{2}\right), \quad \text{définie par} \quad u = \sum u_n, \quad \text{avec} \quad u_0 \equiv 1,$$

$$u_n\left(\frac{z^2}{2}\right) = 2\int_R^\alpha (C^+)^{-1} y dy \int_y^\alpha u_{n-1} \frac{C^+}{A^-} z dz$$

satisfait aux hypothèses de la proposition 2 si $u(0) < +\infty$, ce qui est équivalent à :

$$\lim_{R \to 0} \int_R^\alpha (C^+)^{-1} y dy \int_R^\alpha \frac{C^+}{A^-} z dz < +\infty.$$

THÉORÈME III.4. — *Si le processus ne séjourne pas dans l'ensemble*

$$\{ x, x \neq 0, x^*ax = 0 \}$$

si a est complètement dégénérée (*) *en* 0 *et* $b \equiv 0$, *alors*

$$\forall x \neq 0 \qquad P_x[\tau_0 = \infty] = 1.$$

Ceci est encore vrai si $b(0) = 0$ *et si, en tout point d'un voisinage de* 0, $b(x)$ *appartient au sous-espace engendré par les vecteurs colonnes de* σ.

En effet, nous étudions

$$I(R) = \int_R^\alpha z \exp \int_z^\alpha B^-(y)ydydz \int_z^\alpha xdx \frac{\exp - \int_x^\alpha B^-(t)tdt}{A^+(x)}.$$

Si $B^-(y) > 0 \ \forall y > 0$, alors $\exp \int_z^\alpha B^-(y)ydy$ est une fonction décroissante.

Par suite $I(R) \geqslant \int_R^\alpha \frac{xdx}{A^+(x)} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right)$

$$A^+(x) = \sup_{|y|=x} (y^*ay) \leqslant x^2 \sup_{|y|=x} \| \sigma(y) \|^2.$$

La matrice σ étant lipschitzienne, $A^+(x) \leqslant Mx^4$.

Donc $I(R) \geqslant \frac{1}{M} \int_R^\alpha \frac{dx}{x^3} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right)$.

Cette dernière quantité ayant même comportement en 0 que — Log R, l'intégrale I(R) tend vers l'infini.

Les hypothèses de la proposition 1 seront donc satisfaites si $B^-(y) > 0$ pour tout $y > 0$. C'est le cas en particulier lorsque $b \equiv 0$, ou si b est suffisamment petit par rapport à a. Lorsque b appartient, en tout point d'un voisinage de 0, à l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de σ, on obtient les mêmes conclusions en utilisant la formule de Cameron-Martin généralisée.

Remarque. — Il est naturel de se demander, même lorsque $\sigma(0) \neq 0$, si l'on atteint 0 au bout d'un temps fini ou non. Nous pouvons énoncer à ce sujet un résultat partiel relatif aux opérateurs strictement elliptiques : *si la matrice a est de rang n, supposé au moins égal à* 2, *dans un voisinage de* 0, *alors quel que soit* $\alpha \neq 0$, $P_\alpha(\tau_0 = \infty) = 1$.

On procède à cet effet comme précédemment, en introduisant la norme $| x |_a = (x^*a^{-1}(0)x)^{1/2} = | \sigma^{-1}(0)x |$. On définit

$$A^+ = \sup_{|x_a|=R} x^*\sigma^{*-1}(0)a(x)\sigma^{-1}(0)x.$$

$$B^- = \inf_{|x_a|=R} \frac{b^*\sigma^{-1}(0)x + \sum_{i,j} (a(x)a^{-1}(0))_{i,j}}{x^*\sigma^{*-1}(0)a(x)\sigma^{-1}(0)x}.$$

(*) On dit que a est complètement dégénérée en 0 si $\forall i, j \, a_{ij}(0) = 0$.

On vérifie que, pour que $P_\alpha(\tau_0 = \infty) = 1$, il suffit que, si $\beta = |\alpha|_d$, l'intégrale :

$$I(R) = \int_R^\beta z \exp \int_z^\beta B^-(y)ydy \int_z^\beta x \frac{\exp - \int_x^\beta B^-(t)dt}{A^+(x)} dxdz$$

diverge lorsque R tend vers 0. Sous les hypothèses faites,

$$A^+(R) = R^2 + R^2\sigma(R)$$

$$B^-(R) = \frac{n}{R^2} + \frac{\sigma(R)}{R^2}.$$

Un calcul explicite montre qu'alors I(R) diverge si $n \geqslant 2$.

4. Recherche de conditions suffisantes pour que la diffusion associée à L soit de rang constant au voisinage d'un point.

Nous allons, dans ce paragraphe, donner des conditions suffisantes pour que la matrice σ soit, au voisinage de x_0, de rang constant $k > 0$, sauf sur un ensemble où le processus séjourne presque sûrement un temps nul. D'après le théorème II.3, on sait qu'alors le processus est de rang k au voisinage de x_0.

Nous supposerons que l'opérateur L est donné sous la forme

$$L = \frac{1}{2}\Sigma X_k^2 + Y,$$

où $X_1, \ldots, X_r$, Y sont des champs de vecteurs C^∞ : on pourra ainsi transformer le processus par difféomorphisme. Certains des résultats énoncés seraient encore vrais sous des hypothèses plus faibles.

THÉORÈME III.5. — *Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de x_0. Le temps de séjour dans l'ensemble des points de $\mathcal{V}$ ou le rang de $(X_1, \ldots, X_r)$ est différent de k est nul dans les cas suivants :*

(I) *En tout point de $\mathcal{V}$, sauf en x_0, le rang de $(X_1, \ldots, X_r)$ est égal à k; il est nul en x_0, mais $Y(x_0) \neq 0$.*

(II) *En tout point de $\mathcal{V}$, sauf en x_0, le rang de $(X_1, \ldots, X_r)$ est égal à k; il est strictement positif en x_0.*

(II′) *En tout point de* $\mathcal{V}$, *sauf peut-être sur des sous-variétés* (V_p) $p \in \mathbb{N}$, *de dimension* $< n$ *de* $\mathbb{R}^n$ *passant par* x_0, *le rang de* $(X_1, \ldots, X_r)$ *est égal à* k; *quel que soit* p, *il existe un vecteur* θ_p *tangent à* V_p *tel que* $\langle \theta_p, a(x_0)\theta_p \rangle > 0$.

(III) *Le vecteur* $b(x)$ *est identiquement nul*; *en tout point de* $\mathcal{V}$, *sauf peut-être sur la sous-variété* $V = \{ \psi(x) = 0 \}$ *passant par* x_0, *le rang de* $(X_1, \ldots, X_r)$ *est égal à* k; *l'un des vecteurs* X_i *est tel que, dans* $\mathcal{V}$, $\langle X_i, d\psi \rangle$ *soit non nul, sauf peut-être sur une sous-variété* W *de* V; *il existe un vecteur* θ_0, *non tangent à* W *en* x_0, *tel que* $\langle \theta_0, a(x_0)\theta_0 \rangle > 0$.

La démonstration pour le cas (I) a déjà été faite (théorème III.2).

Étude du cas (II). — Il nous faut prouver que $\int_0^t 1_{\{x_0\}}(x_s)ds = 0$ P_{x_0} p. s. Nous supposerons $x_0 = 0$. Montrons tout d'abord le résultat lorsque $b(x) \equiv 0$. Comme a n'est pas totalement dégénéré en zéro, il existe une direction θ_0 telle que dans un voisinage V de l'origine $0 < \alpha \leqslant \langle \theta_0, a(x_0)\theta_0 \rangle \leqslant \beta$. Soit τ le temps d'atteinte de V^c. On sait que, pour P_0 :

$$\exp \left\{ \lambda \langle x_{t\wedge\tau}, \theta_0 \rangle - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^{t>\tau} \langle \theta_0, a(x_s)\theta_0 \rangle \, ds \right\} \text{ est une martingale.}$$

L'intégrale stochastique $\beta_t = \int_0^{t\wedge\tau} \frac{1}{\langle \theta_0, a(x_s)\theta_0 \rangle} d\langle x_s, \theta_0 \rangle$ existe et son processus croissant associé est $\int_0^{t\wedge\tau} \frac{1}{\langle \theta_0, a(x_s)\theta_0 \rangle^2} \langle \theta_0, a(x_s)\theta_0 \rangle^2 ds = t \wedge \tau$.

C'est donc un processus brownien jusqu'à τ. D'après Mac Kean [*8*, p. 41].

$$\langle x_{t\wedge\tau}, \theta_0 \rangle = \int_0^{t\wedge\tau} \langle \theta_0, a(x_s)\theta_0 \rangle \, d\beta_s$$

est un mouvement brownien changé de temps par la fonctionnelle

$$c_t = \int_0^{t\wedge\tau} \langle \theta_0, a(x_s)\theta_0 \rangle^2 ds.$$

Comme $\alpha(t \wedge \tau) \leqslant c_t \leqslant \beta(t \wedge \tau)$ $\langle x_t, \theta_0 \rangle$ séjourne en zéro jusqu'à τ comme le brownien, c'est-à-dire un temps nul p. s., ce qui prouve le résultat pour $b \equiv 0$.

Supposons maintenant que b est non nul.

Conservant θ_0 choisi comme précédemment, nous savons que pour P_0

$$\exp \left\{ \int_0^{\wedge\tau} \lambda(s, \omega) d\langle \theta_0, x_s \rangle - \int_0^{t\wedge\tau} \lambda(s, \omega) \langle \theta_0, z(x_s) \rangle \, ds \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2(s, \omega) \langle \theta_0, a(x_s)\theta_0 \rangle \, ds \right\}$$

est une martingale pour toute fonction progressivement mesurable λ [*12*].

Soit θ réel et $\lambda(s, \omega) = \theta - \dfrac{\langle \theta_0, b(x_s) \rangle}{\langle \theta_0, a(x_s)\theta_0 \rangle}$, l'expression précédente devient :

$$\exp\left(\langle \theta_0, x_{t\wedge\tau} \rangle . \theta - \frac{\theta^2}{2} \int_0^{t\wedge\tau} \langle \theta_0, a(x_s)\theta_0 \rangle \, ds\right) \mathrm{R}_t,$$

où l'on a posé :

$$\mathrm{R}_t = \exp\left(- \int_0^{t\wedge\tau} \frac{\langle \theta_0, b(x_s) \rangle}{\langle \theta_0, a(x_s)\theta_0 \rangle} d\langle \theta_0, x_s \rangle + \frac{1}{2} \int_0^{t\wedge\tau} \frac{\langle \theta_0, b(x_s) \rangle^2}{\langle \theta_0, a(x_s)\theta_0 \rangle^2} \langle \theta_0, a(x_s)\theta_0 \rangle \, ds\right).$$

Si on pose $\lambda'(s, \omega) = - \dfrac{\langle \theta_0, b(x_s) \rangle}{\langle \theta_0, a(x_s)\theta_0 \rangle}$, on voit que R_t est une martingale.

Soit alors $\mathrm{P}'_0 = \mathrm{R}_t . \mathrm{P}_0$, R_t est bornée supérieurement et inférieurement, donc P_0 et P'_0 sont équivalentes. P'_0 est définie sur $\mathcal{B}(x_s, 0 \leqslant s \leqslant t \wedge \tau)$. Pour P'_0,

$$\exp\left\{\theta . \langle \theta_0, x_{t\wedge\tau} \rangle - \frac{\theta^2}{2} \int_0^{t\wedge\tau} \langle \theta_0, a(x_s)\theta_0 \rangle \, ds\right\}$$

est une martingale à laquelle on peut appliquer le raisonnement précédent. Donc

$$\mathrm{P}'_0 \{ \omega \,;\, \text{mesure Lebesgue} \{ t \,;\, x_{t\wedge\tau} = 0 \} = 0 \} = 1.$$

Cette propriété reste vraie pour P_0, ce qui établit le résultat.

Étude du cas (II'). — Il suffit de montrer que, pour chaque n, le temps de séjour dans $\mathrm{V}_n \cap \mathcal{U}$ est nul. Mais on peut, par difféomorphisme, se ramener au cas où V_n est contenu dans l'hyperplan $x_1 = 0$. La démonstration est alors la même que dans le cas précédent, en prenant $\theta_0 = (1, 0, \ldots, 0)$.

Étude du cas (III). — On peut se ramener, par difféomorphisme local, à la situation suivante :

— x_0 est le point 0, $\mathcal{U}$ la boule unité de $\mathbb{R}^n$,
— V est l'hyperplan $\{ x_1 = 0 \}$ et $\mathrm{X}_1(x) \neq 0$ lorsque $x \notin \mathrm{W}$.

Posons alors $\mathrm{A}_t = \displaystyle\int_0^{t\wedge\sigma} a_{11}(x_s) ds$, où σ est le premier temps de sortie de $\mathcal{U}$. Nous allons montrer que, jusqu'à σ, A_t est strictement croissant. Or l'ensemble $\{ a_{11}(x_s) > 0 \}$ contient le complémentaire de W dans $\mathcal{U}$.

Raisonnant comme dans le cas (II), on montre aisément que, en vertu de la condition sur θ_0, le processus pénètre immédiatement dans le complémentaire de W. Par un raisonnement classique [*1*], on en déduit la croissance de A_t.

Définissons $\tau_t = \inf\{ u ; A_u > t \}$. On a, pour tout $t \leqslant A_\sigma$,

$$\tau_t = \int_0^t \frac{1}{a_{11}(x_{\tau_s})} ds.$$

Pour montrer que $E_x \int_0^\sigma 1_V(x_s) ds = 0$ pour tout x, il suffit de le montrer lorsque x appartient à V. Or, pout un tel x,

$$E_x \int_0^\sigma 1_V(x_s) ds = E_x \int_0^\sigma 1_0(x_s^1) ds = E_x \int_0^{A_\sigma} 1_0(x_{\tau_s}^1) d\tau_s = E_x \int_0^{A_\sigma} 1_0(x_{\tau_s}^1) \frac{ds}{a_{11}(x_{\tau_s})}.$$

Or la fonctionnelle A_t a été choisie de manière que $x_{\tau_t}^1$ soit, jusqu'à A_σ, un mouvement brownien. On sait que, pour un brownien, $1_0(x_{\tau_s}^1) = 0$ p. s.

Chapitre IV

DUALITÉ ET PROBLÈME DE DIRICHLET

1. Dualité.

Nous supposerons, dans ce paragraphe, que les coefficients de σ et b sont de classe $\mathcal{C}^3$ et bornés ainsi que leurs dérivées. L'opérateur L possède alors un adjoint L*, défini par :

$$L^*u = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}(a_{ij}u) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i u)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i' \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu.$$

La fonction $c(x)$ étant bornée, soit λ tel que, pour tout x, $c(x) - \lambda \leqslant -\lambda_0 < 0$. A l'opérateur $L^* - c$, on peut faire correspondre, d'après le chapitre premier, une diffusion fellérienne. A l'opérateur $L^* - \lambda$, on pourra donc faire correspondre une diffusion, tuée de la précédente par la fonctionnelle multiplicative $\exp \int_0^t [c(x_s) - \lambda] ds$ ([*3*], p. 298). Soit U_μ^* la résolvante de cette diffusion, U_μ la résolvante de la diffusion tuée de la diffusion associée à L par la fonctionnelle exp $(-\lambda t)$. Nous allons montrer que ces résolvantes sont en dualité au sens suivant :

THÉORÈME IV.1. — *Quelles que soient les fonctions f, g boréliennes bornées positives sur* $\mathbb{R}^n$,

$$\int f(U^*g)dx = \int (Uf)gdx.$$

Si $(\Omega, \mathcal{A}_t, \beta_t, P)$ est un mouvement brownien, et si $x_t(x)$ et $x_t^*(x)$ respectivement sont les solutions des équations stochastiques :

$$x_t = x + \int_0^t \sigma\ x_s)d\beta_s + \int_0^t b(x_s)ds$$

$$x_t^* = x + \int_0^t \sigma(x_s)d\beta_s + \int_0^t b'(x_s)ds,$$

c'est encore dire que :

$$(1)\quad E\left[\int f(x)\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{\int_0^t c(x_s^*(x))ds}g(x_t^*(x))dtdx\right] = E\left[\int g(x)\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(x_t(x))dtdx\right].$$

Or, soit L^ε l'opérateur différentiel défini par la matrice $\sigma + \varepsilon Id$ et le vecteur b, $L^{*\varepsilon}$ l'adjoint de L^ε. Les opérateurs L^ε et $L^{*\varepsilon}$ étant strictement elliptiques, on sait que les résolvantes U_μ^ε et $U_\mu^{*\varepsilon}$ qui leur correspondent sont en dualité [*2*] : l'inégalité (1) est satisfaite si $x_t(x)$ et $x_t^*(x)$ sont remplacés par $x_t^\varepsilon(x)$ et $x_t^{*\varepsilon}(x)$, solutions des équations :

$$x_t^\varepsilon = x + \varepsilon\beta_t + \int_0^t \sigma(x_s^\varepsilon)d\beta_s + \int_0^t b(x_s^\varepsilon)ds,$$

$$x_t^{*\varepsilon} = x + \varepsilon\beta_t + \int_0^t \sigma(x_s^{*\varepsilon})d\beta_s + \int_0^t b'(x_s^{*\varepsilon})ds.$$

Mais x_t^ε tend vers x_t, $x_t^{*\varepsilon}$ tend vers x_t^* : on a, plus précisément, l'inégalité suivante ([*3*], p. 341) :

$$P(\sup_{0\leqslant t\leqslant u} |x_t(x) - x_t^\varepsilon(x)| > \delta) \leqslant \frac{\varepsilon^2\alpha(u)}{\delta^2},$$

ainsi que l'inégalité analogue pour $x_t^{*\varepsilon}(x)$. Il suffit de montrer l'égalité (1) lorsque f et g sont continues à support compact. On montre alors qu'il y a convergence uniforme de $U^\varepsilon f$ vers Uf et de $U^{*\varepsilon}g$ vers Ug :

$$|Uf(x) - U^\varepsilon f(x)| \leqslant 2\|f\|_\infty \frac{e^{-\lambda u}}{\lambda} + \left| E\left(\int_0^u e^{-\lambda t}[f(x_t(x)) - f(x_t^*(x))]dt\right|\right.$$

Étant donné η, il existe δ tel que, dès que $|x-y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| < \eta$. Le dernier terme de l'inégalité précédente est donc majoré par

$$2\frac{\varepsilon^2\alpha(u)}{\lambda\delta^2}\|f\|_\infty + \frac{\eta}{\lambda}$$

on procède de la même façon pour U^*g.

COROLLAIRE 1. — *Soit* A *le générateur infinitésimal dans* $\mathcal{C}_0$ *de la diffusion associée à* L. *Quelle que soit* $f \in \mathcal{D}(A)$, Af *est égal, au sens des distributions, à* Lf.

On sait déjà que toute fonction de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact appartient au domaine de A, et que, pour une telle fonction f, $Af = Lf$. Soit A^* le générateur infinitésimal de la diffusion associée à $L^* - \lambda$. Si g est de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact et si f appartient au domaine de A, en vertu de la dualité :

$$\int (Af)g\,dx = \int (Af)(U^*A^*g)dx = \int U(Af)(A^*g)dx = \int fL^*g\,dx = \int Lfg\,dx.$$

2. Problème de Dirichlet.

Nous supposons pour l'instant que σ et b sont lipschitziens.
On sait qu'alors il existe une et une seule diffusion associée à l'opérateur L.
On la notera par $(\Omega, \mathcal{A}_t, x_t, P_x)$.

DÉFINITION 1. — *Soit* ω *un ouvert de frontière* $\partial\omega$ *et* φ *une fonction continue bornée sur* $\partial\omega$ *on appelle solution du problème de Dirichlet toute fonction harmonique pour* x_t *sur* ω *et telle que, pour tout* $x_0 \in \partial\omega$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = \varphi(x_0)$.

On sait (Dynkin [3'], p. 25) que la fonction $f(x) = E_x f(x_\tau)$, où τ est le premier temps de sortie de ω, est harmonique dans ω. Nous allons montrer que, sous des hypothèses de régularité sur $\partial\omega$, c'est une solution du problème de Dirichlet :

DÉFINITION 2. — *Soit* $x_0 \in \partial\omega$, *nous dirons que* x_0 *est très régulier si, quel que soit* $u > 0$, *quel que soit* ε, *il existe un voisinage* $V(x_0)$ *de* x_0 *tel que, si* $x \in V(x_0)$ $P_x(\tau > u) < \varepsilon$.

Si tout point de $\partial\omega$ est très régulier, nous dirons que ω est un ouvert très régulier. Lorsque x est fortement fellérien, tout point régulier est très régulier ([*3'*], p. 88).

LEMME 1. — Soit ω un ouvert de frontière $\partial\omega$, x_0 un point très régulier de $\partial\omega$, φ une fonction bornée sur $\partial\omega$ continue en x_0. La fonction $E_x(e^{-\lambda\tau}\varphi(x_\tau))$ où τ est le premier temps de sortie de ω satisfait à :

$$\lim_{x\to x_0} (e^{-\lambda\tau}\varphi(x_\tau)) = \varphi(x_0).$$

En effet, puisque x_0 est très régulier, il existe un voisinage tel que $P_x(e^{-\lambda\tau} > 1 - \varepsilon)$ soit supérieur à $1 - \eta$; il suffit donc de faire la démonstration pour $\lambda = 0$.

Soit $\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi_1(x)$; ε étant donné, il existe un voisinage $W(x_0)$ tel que, si $x \in W(x_0)$, $| \varphi_1(x) | < \varepsilon$. On supposera que $W(x_0)$ est une boule de rayon r et on désignera par τ_r le premier temps de sortie de $W(x_0)$

$$| E_x\varphi_1(x_\tau) | \leqslant \varepsilon + 2 \| \varphi_\infty \| P_x(\tau_r < \tau)$$
$$P_x[\tau_r \leqslant \tau] \leqslant P_x[\tau_r \leqslant u] + P_x[\tau > u].$$

D'après l'inégalité des martingales ([*12*], chap. 3) :

$$P_x(\tau_r \leqslant u) \leqslant P_x\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant u} | x_t - x | \geqslant \frac{r}{2}\right] \leqslant 2n \exp(-kr/u),$$

k désignant une constante qui ne dépend que de L, et ceci si $| x - x_0 | < \frac{r}{2}$. Donc par un choix de u convenable, $P_x(\tau_r \leqslant u)$ peut être rendu arbitrairement petit. Puisque x_0 est très régulier, $P_x[\tau > u]$ tend vers zéro lorsque x tend vers x_0, ce qui établit le lemme.

THÉORÈME IV.2. — *Soit $(\Omega, \mathcal{A}_t, x_t, P_x)$ la diffusion associée à l'opérateur* L, *dont les coefficients sont lipschitziens. Soit ω_0 un ouvert très régulier de frontière compacte, φ une fonction bornée continue sur $\partial\omega_0$: quel que soit $\lambda > 0$, la fonction $f(x) = E_x(e^{-\lambda\tau}\varphi(x_\tau))$, où τ désigne le premier temps de sortie de ω_0, est une fonction continue sur $\overline{\omega_0}$ solution du problème de Dirichlet :*

$$\begin{cases} \mathcal{A}u - \lambda u = 0 & \textit{dans} \quad \omega_0 \\ u = \varphi & \textit{sur} \quad \partial\omega_0 \end{cases}$$

où $\mathcal{A}$ désigne l'opérateur de Dynkin de x_t.

Le lemme 1 assure la continuité à la frontière. On sait, d'autre part, que $E_x(e^{-\lambda\tau}\varphi(x_\tau))$ est solution de $\mathcal{A}u - \lambda u = 0$. Montrons la continuité de f dans ω_0. Du fait que ω_0 est un ouvert très régulier de frontière compacte, il existe, pour tout ε, une constante $\eta > 0$ telle que, si $x \in \omega_0$, $y \in \partial\omega_0$ et $|x - y| < \eta$, alors $|f(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$.

Soit $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}_t, \tilde{\beta}_t, \tilde{P})$ un mouvement brownien, $\tilde{x}_t(x)$ la solution de l'équation stochastique :

$$\tilde{x}_t = x + \int_0^t \sigma(\tilde{x}_s)d\beta_s + \int_0^t b(\tilde{x}_s)ds.$$

On désignera par $\tilde{\tau}_x$ le premier temps de sortie de ω_0 pour $\tilde{x}_t(x)$.

On peut toujours supposer, comme dans [3] (p. 349), que $\Omega = \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^n$, que la tribu $\mathcal{A}_t$ est formée de tous les ensembles A tels que, pour tout x, $A_x = \{\tilde{\omega}; (\tilde{\omega}, x) \in A\}$ appartienne à $\tilde{\mathcal{A}}_t$ et que $x_t(\tilde{\omega}, x) = \tilde{x}_t(x)(\tilde{\omega})$. Soit alors $\tilde{\alpha}$ un temps d'arrêt pour la famille $\tilde{\mathcal{A}}_t$; α défini par $\alpha(\tilde{\omega}, x) = \tilde{\alpha}(\tilde{\omega})$ est un temps d'arrêt pour la famille $\mathcal{A}_t$, et en appliquant la propriété de Markov forte, on obtient, si τ' désigne le temps de sortie de ω_0 après α:

$$E_x(e^{-\lambda\tau'}\varphi(x_{\tau'})) = E_x(e^{-\lambda\alpha-\lambda\tau_0\theta_\alpha}\varphi(x_{\tau_0\theta_\alpha})) = E_x(e^{-\lambda\alpha}f(x_\alpha)),$$

ou encore, comme $P_x(A) = \tilde{P}(A_x)$:

$$\tilde{E}\left(e^{-\lambda\tilde{\tau}'_x}\varphi\left(x_{\tilde{\tau}'_x}(x)\right)\right) = \tilde{E}\left(e^{-\lambda\alpha}f\left(\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}(x)\right)\right),$$

Soient alors x et y donnés dans ω_0. Posons $\tilde{\alpha} = \tilde{\tau}_x \wedge \tilde{\tau}_y \wedge u$. On a l'inégalité :

$$\tilde{P}(\sup_{0 \leqslant t \leqslant u} |\tilde{x}_t(x) - \tilde{x}_t(y)| > \eta) \leqslant \frac{k(u)}{\eta^2}|x - y|^2$$

et donc :

$$\tilde{P}(|\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}(x) - \tilde{x}_{\tilde{\alpha}}(y)| > \eta) \leqslant \frac{k(u)}{\eta^2}|x - y|^2.$$

Par ailleurs $\tilde{\tau}'_x = \tilde{\tau}_x$, $\tilde{\tau}'_y = \tilde{\tau}_y$, donc :

$$f(x) = E(e^{-\lambda\tilde{\alpha}}f(\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}(x))) \quad ; \quad f(y) = E(e^{-\lambda\tilde{\alpha}}f(\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}(y))).$$

Définissons

$$\tilde{\Omega}_1 = \{\tilde{\alpha} = u\}$$

$$\tilde{\Omega}_2 = \{\tilde{\alpha} = \tilde{\tau}_x \wedge \tilde{\tau}_y ; |\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}(x) - x_{\tilde{\alpha}}(y)| < \eta\}$$

$$\tilde{\Omega}_3 = \complement(\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_2).$$

Il est aisé de vérifier que :

$$|E(e^{-\lambda\tilde{\alpha}}f(\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}(x))1_{\tilde{\Omega}_1}) - E(e^{-\lambda\tilde{\alpha}}f(\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}(y))1_{\tilde{\Omega}_1})| \leqslant 2e^{-\lambda u}\|\varphi\|_\infty ;$$

$$\left| \mathrm{E}\left(e^{-\lambda\tilde{\alpha}} \tilde{f}(\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}(x)) 1_{\tilde{\Omega}_2}\right) - \mathrm{E}\left(e^{-\lambda\tilde{\alpha}} \tilde{f}(\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}(y)) 1_{\tilde{\Omega}_2}\right) \right| \leqslant \varepsilon ;$$

$$\left| \mathrm{E}\left(e^{-\lambda\tilde{\alpha}} \tilde{f}(\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}(x)) 1_{\tilde{\Omega}_3}\right) - \mathrm{E}\left(e^{-\lambda\tilde{\alpha}} \tilde{f}(\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}(y)) 1_{\tilde{\Omega}_3}\right) \right| \leqslant \frac{k(u)}{\eta^2} | x - y |^2 \| \varphi \|_\infty .$$

Finalement $| f(x) - f(y) | \leqslant 2e^{-\lambda\tilde{\alpha}} \| \varphi \|_\infty + \varepsilon + \frac{k(u)}{\eta^2} \| \varphi \|_\infty | x - y |^2$ peut-être rendu arbitrairement petit.

Remarque. — Les conclusions du théorème 1 sont encore vraies pour $\lambda = 0$ lorsque ω est un ouvert borné et lorsque, pour tout $x \in \omega_0$, $\mathrm{P}_x[\tau > t] \leqslant e^{-kt}$, où k est une constante strictement positive. On trouvera dans [5] des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi.

Supposons maintenant que l'opérateur L est donné sous la forme

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2} \Sigma \mathrm{X}_k^2 + \mathrm{Y},$$

où $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r$, Y sont des champs de vecteurs C^∞.

Nous allons énoncer des conditions suffisantes pour qu'un point x_0 de $\partial\omega$ soit très régulier.

THÉORÈME IV.3. — *Les conditions suivantes sont des conditions suffisantes que pour $x_0 \in \partial\omega_0$ soit très régulier.*

a) *Il existe une fonction $\Psi(x)$ deux fois continûment différentiable telle que*

$$\psi(x_0) = 0 \qquad et \qquad \sum a_{ij}(x_0) \frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x_0) \frac{\partial\psi}{\partial x_j}(x_0) > 0,$$

et un voisinage $\mathrm{V}(x_0)$ tel que $\mathrm{V}(x_0) \cap \omega_0$ soit entièrement contenue dans l'ensemble des points x tels que $\Psi(x) < 0$.

b) *Il existe une fonction Ψ deux fois continûment différentiable telle que $\Psi(x_0) = 0$ et $\langle \mathrm{Y}(x_0), d\Psi(x_0) \rangle > 0$ et un voisinage $\mathrm{V}(x_0)$ tel que $\mathrm{V}(x_0) \cap \omega_0$ soit entièrement contenu dans l'ensemble des points x tels que $\Psi(x) < 0$.*

c) $b(x) \equiv 0$ *et il existe une fonction Ψ deux fois continûment différentiable telle que $\Psi(x_0) = 0$ et $d\Psi(x_0) \neq 0$, l'un des vecteurs X_i est tel que, au voisinage de x_0 $\langle \mathrm{X}_i, d\Psi \rangle$ soit non nul, sauf peut-être sur une sous-variété W de $\{ x ; \Psi(x) = 0 \}$; il existe un vecteur θ_0, non tangent à W en x_0, tel que $\langle \theta_0, a(0)\theta_0 \rangle > 0$; il existe enfin un voisinage $\mathrm{V}(x_0)$ tel que*

$$\mathrm{V}(x_0) \cap \omega_0 \subset \mathrm{V}(x_0) \cap \{ x ; \Psi(x) < 0 \}.$$

Démonstration.

a) Par difféomorphisme local et prolongement en dehors d'un voisinage de x_0, on peut toujours se ramener au cas où $\Psi(x) = x_1$ première fonction coordonnée et $a_{11}(x) \geqslant \alpha > 0$ uniformément sur R^n. Supposons tout d'abord $b \equiv 0$. Soit ξ_t la première coordonnée de x_t :

$$\exp\left(\theta\cdot(\xi_t - \xi) - \frac{\theta^2}{2}\int_0^t a_{11}(x_s)ds\right)$$

est une P_x-martingale, donc $\xi_t = \xi + \beta_{A_t}$ où $A_t = \int_0^t a_{11}(x_s)ds$ et où β est un brownien pour P_x. Soit τ' le temps d'entrée dans l'hyperplan $x_1 = 0$

$$P_x(\tau > u) \leqslant (P_x(\tau' > u) = P_x(\sup_{0\leqslant t\leqslant u} \beta_{A_t} < -\xi) = P_x(\sup_{0\leqslant t\leqslant A_u} \beta_t < |\xi|).$$

Comme $A_u > \alpha u$ et comme un brownien unidimensionnel entre immédiatement dans la demi-droite $\{\xi > 0\}$, cette quantité tend vers zéro avec ξ.

Si $b \neq 0$, on sait que P_x est, sur la tribu $\mathcal{A}_u$, équivalente à une probabilité P'_x telle que

$$\exp\left(\theta.(\xi_t - \xi) - \frac{\theta^2}{2}\int_0^t a_{11}(x_s)ds\right)$$

soit une P'_x martingale avec $P'_x = R_u P_x$ où R_u est une fonction bornée supérieurement et inférieurement ; alors $P_x(\tau > u) \leqslant \sup R_u^{-1} P'_x[\tau > u]$ et cette dernière quantité tend vers zéro (voir théorème III.5).

b) Là encore, on peut supposer que

$$x_0 = 0, \quad \Psi(x) = x_1 \quad \text{et} \quad Y(x) = (1, 0, \ldots, 0).$$

Soit ξ_t la première coordonnée de x_t, τ' le temps d'entrée dans le demi-plan $x_1 > 0$, x un point de ω_0 ou bien l'un des vecteurs X_i a une première coordonnée non nulle, mais alors la démonstration de *a)* donne le résultat; ou bien $b_1(0) = 1$, et, dans un voisinage de 0, $b_1(x) > \frac{1}{2}$. Alors, si τ_0 est le temps de sortie de ce voisinage,

$$E_x(\xi_{t\wedge\tau'\wedge\tau_0}) = \xi + E_x\int_0^{t\wedge\tau'\wedge\tau_0} b_1(x_s)ds.$$

Donc $E_x[t \wedge \tau' \wedge \tau_0] \leqslant -2\xi$

$$\begin{aligned} P_x[\tau > u] \leqslant P_x[\tau' > u\wedge\tau_0] &\leqslant P_x[\tau' > u\,;\, \tau_0 > u] + P_x[u\wedge\tau_0\wedge\tau' = u] \\ &\leqslant P_x[\tau_0 > u] - \frac{2\xi}{u}. \end{aligned}$$

On peut choisir u et ξ suffisamment petits de manière que $P_x[\tau > u]$ soit inférieur à tout nombre fixé à l'avance.

c) Il suffit de reprendre l'étude du cas (III), théorème III.5, pour voir que dans ce cas, comme dans le cas *a)*, $\xi_t = \xi + \beta_{A_t}$, où A_t est une fonctionnelle additive strictement croissante. On utilise encore le fait que le brownien entre immédiatement dans la demi-droite $\{ x > 0 \}$.

Remarque. — Soit ω_0 un ouvert borné dont tous les points satisfont à l'une des hypothèses *a)* ou *b)*. Il est clair qu'alors ω_0 est très régulier non seulement pour l'opérateur L, mais également pour les opérateurs L^ε définis au paragraphe 1 et ceci uniformément en ε. On peut montrer que, dans ces conditions, la fonction $f(x) = E_x(e^{-\lambda\tau}\varphi(x_\tau))$ est solution de l'équation $Lu = \lambda u$ au sens des distributions. Nous allons esquisser la démonstration. Il résulte tout d'abord des inégalités écrites dans la démonstration du théorème III.2 que le processus $\widehat{x}_t$ obtenu en stoppant x_t en τ est fellerien. Comme son générateur de Dynkin coïncide, dans ω_0 avec le générateur de Dynkin de x_t, on en déduit que f appartient au domaine du générateur infinitésimal, $\widehat{A}$, de $\widehat{x}_t$ ([3], théorème 5.5). Il suffit alors de montrer que les résolvantes des processus associés à L et L^*, stoppés à la sortie de ω_0 sont en dualité, comme dans le théorème IV.1. On utilisera le fait que $\tilde{E}(| \tilde{\tau}_x \wedge u - \tilde{\tau}_x^\varepsilon \wedge u |)$ tend vers 0, résultat qu'on obtiendra grâce aux mêmes inégalités.

CHAPITRE V

ÉTUDE DES DIFFUSIONS ASSOCIÉES A DES OPÉRATEURS HYPOELLIPTIQUES

L'opérateur L est, dans tout ce chapitre, supposé à coefficients C^∞. Suivant Hörmander, on dit que L est hypoelliptique si toute distribution u telle que Lu soit C^∞ est elle-même C^∞. Lorsque L est de la forme

$$L = \sum_{i=1}^{r} X_k^2 + Y,$$

où $X_1, \ldots, X_r$, Y sont des champs de vecteur C^∞, Hörmander a donné une condition suffisante pour que l'opérateur L soit hypoelliptique :

Si l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r, Y)$ engendrée par $X_1, \ldots, X_r$, Y est en tout point de rang n, l'opérateur L est hypoelliptique.

Nous ferons dans la suite l'hypothèse que $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$ est en tout point de rang n, bien qu'elle ne soit pas nécessaire pour tous les résultats obtenus. Sous cette hypothèse, Bony a montré que les solutions de l'équation $Lu = 0$ formaient une axiomatique de Brelot [2]. Nous allons montrer, en utilisant certains de ses résultats, que la diffusion associée à L possède la plupart des propriétés des diffusions canoniques associées aux opérateurs strictement elliptiques.

1. Dualité.

Nous reprenons les notations du chapitre IV relatif à la dualité.

THÉORÈME V.1. — *On suppose que $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r, Y)$ est en tout point de rang n et que $X_1, \ldots, X_r$ n'ont pas de zéro commun. Les résolvantes U_μ et U_μ^* sont alors en dualité, au sens de Blumenthal et Getoor, par rapport à la mesure de Lebesgue.*

C'est dire, en plus de la dualité exprimée par le théorème IV.1, que les mesures $f \rightsquigarrow Uf(x)$ et $g \rightsquigarrow U^*g(x)$ sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour le montrer, nous utilisons la méthode de Bony dans [2], en remarquant que les opérateurs $L - \lambda$ et $L^* - \lambda$ sont hypoelliptiques. $f \rightsquigarrow Uf(x)$ est une forme linéaire positive sur $C_0(R^n)$, il existe donc une mesure $\mu_x(dy)$ telle que $Uf(x) = \mu_x(f)$. Alors

$$\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : -f(x) = U(L - \lambda I)f(x) = \mu_x(L - \lambda I)f = (L^* - \lambda I)\mu_x . f$$

Ainsi

$$(1) \qquad (L^* - \lambda I)\mu_x = -\delta_x.$$

Il existe donc une fonction $h_x(y)$ de $L^1(\mathbb{R}^n)$, C^∞ hors de x grâce à l'hypoellipticité de $L^* - \lambda$ et une constante k telles que $\mu_x = h_x + k\delta_x$; (1) s'écrit alors :

$$kL^*\delta_x = \lambda h_x + (\lambda k - 1)\delta_x - L^*h_x.$$

En prenant les transformées de Fourier des deux membres, on montre que $k = 0$: $\mathcal{F}(kL^*\delta_x) = ke^{itx}P(t)$, où $P(t)$ est un polynôme du second degré exactement puisque L^* est NTD, tandis que la transformée de Fourier du second membre est $0(|t|^2)$ à l'infini. Ainsi $Uf(x) = \int f(y)h(x, y)dy$. On définit de la même façon une fonction h^* telle que $U^*g(x) = \int g(y)h^*(x, y)dy$. On pourrait montrer de plus que $h(x, y)$ est de classe C^∞ dans le complémentaire de la diagonale dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et que $h(x, y) = h(y, x)$.

2. Densité des semi-groupes de transition.

THÉORÈME V.2. — *On suppose que* $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$ *est en tout point de rang n. Il existe alors une fonction* $p_t(x, y)$, C^∞ *sur* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, *telle que, si* P_t *est le semi-groupe de diffusion associé à* L,

$$P_t f(x) = \int p_t(x, y) f(y) dy.$$

La fonction $p_t(x, y)$ *est solution de* $\frac{\partial u}{\partial t} - L^* u = 0$ *en tant que fonction de y, de* $\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = 0$ *en tant que fonction de x.*

Remarque. — Ce théorème admet deux conséquences immédiates : *la diffusion associée à* L *est fortement fellerienne; l'équation* $\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = 0$ *admet une solution fondamentale.*

On utilise la méthode de Mac-Kean relative aux opérateurs elliptiques : si $f(t, y)$ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$, on applique la formule de changement de variable d'Ito à $f(t, x_t(x))$, où $x_t(x)$ est la solution de l'équation stochastique :

$$x_t = x + \int_0^t \sigma(x_s) d\beta_s + \int_0^t b(x_s) ds.$$

Comme f est à support compact :

$$0 = E \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial t} + L\right) f(t, x_t(x)) dt :$$

c'est dire, si μ_x est la mesure sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ définie par $\int f(t, y) d\mu_x = P_t f(x)$, que $L^* \mu_x - \frac{\partial}{\partial t} \mu_x = 0$. Il existe donc une version $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ de μ_x, qu'on appellera $P_t(x, y)$,

Montrons maintenant que, quelle que soit la fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact, $P_t f$ est solution de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu$: on sait que, si A est le générateur infinitésimal de la diffusion, $P_t f$ est solution de l'équation $\frac{du}{dt} = Au$, ou encore de l'équation $\frac{du}{dt} = \mathcal{A}u$, $\mathcal{A}$ désignant le générateur de Dynkin. Or, quel que soit x_0, il existe un voisinage $\mathcal{V}(x_0)$ et une fonction $\tilde{u}$, $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathcal{V}(x_0)$, continue dans $\overline{\mathcal{V}(x_0)}$, telle que $L\tilde{u} - \tilde{u} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}$ dans $\mathcal{V}(x_0)$, $\tilde{u} = e^{-t}P_t f$ sur $\partial\mathcal{V}(x_0)$ [*2*]. La fonction $\tilde{u}$ est, *à fortiori*, solution de $\frac{du}{dt} = \mathcal{A}u - u$ dans $\mathcal{V}(x_0)$, $u = e^{-t}P_t f$ sur $\partial\mathcal{V}(x_0)$, équation qui n'admet qu'une solution d'après le principe du maximum ([*3*], théorème 5.3). La fonction $P_t f$ est donc $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, et est solution de $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu$.

Il nous reste à montrer que $p_t(x, y)$ est $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Considérons l'application qui, aux fonctions f, g, h de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ respectivement, fait correspondre $\iint_0^\infty g(x)h(t)P_t f(x)dxdt$: elle définit une distribution dont on peut montrer aisément d'après les résultats précédents qu'elle est solution de $Ku = 0$, où K est l'opérateur $2\frac{\partial}{\partial t} + L_x + L_y^*$: K étant hypoelliptique d'après le critère de Hörmander, il existe une version $\mathcal{C}^\infty$ de $p_t(x, y)$.

3. Ensembles absorbants.

Ces résultats correspondent aux théorèmes sur la propagation des maximums dans Bony [*2*]. La proposition suivante montre l'intérêt qu'il y a à connaître les ensembles fermés absorbants à propos desquels nous énonçons le théorème qui est l'objet principal de ce paragraphe.

On désignera par $(\Omega, \mathcal{A}_t, x_t, P_x)$ la diffusion associée à $L = \frac{1}{2}\Sigma X_k^2 + Y$ par A son générateur infinitésimal.

PROPOSITION 1. — *Soit f une fonction du domaine de* A *telle que* $Af \geqslant 0$. *L'ensemble F des points où f atteint son maximum est un fermé absorbant.*

Démonstration. — La proposition exprime que $\forall x \in F \; P_x(\sigma < \infty) = 0$ σ étant le temps de sortie de F.

Soit F l'ensemble des points où f atteint son maximum [nous supposons $F \neq \phi$] soit $x_0 \in F$; soit $F_n = \left\{ x ; d(F, x) \geqslant \frac{1}{n} \right\}$ et σ_n le temps d'entrée dans F_n. Supposons que $P_{x_0}(\sigma < \infty) > 0$, il existe alors n tel que $P_{x_0}(\sigma_n < \infty) > 0$ alors, comme

$$E_{x_0} f(x_{t\wedge\sigma_n}) - f(x_0) = E_{x_0}\int_0^{t\wedge\sigma_n} Af(x_s)ds, \quad E_{x_0} f(x_{t\wedge\sigma_n}) \geqslant f(x_0)$$

ce qui est absurde puisque $f(x_0)$ est un maximum et que $P_{x_0}(\sigma_n < \infty) > 0$.

Dans [2], Bony a donné les deux définitions suivantes :

Un vecteur n est normal à un fermé F en un point $x_0 \in \mathrm{F}$, s'il existe une boule ouverte contenue dans F^c centrée en x_1, telle que x_0 soit adhérent à cette boule et que les vecteurs $x_1 - x_0$ et n soient parallèles.

Un champ de vecteurs $\mathrm{X}(x)$ est tangent à F si pour tout point $x_0 \in \mathrm{F}$ et tout vecteur n normal à F en x_0, les vecteurs $\mathrm{X}(x_0)$ et n sont orthogonaux.

PROPOSITION 2. — *En tout point d'un fermé absorbant* F, *chacun des champs de vecteur x est tangent à* F.

Démonstration. — Nous pouvons par un difféomorphisme local nous ramener à la situation suivante : il existe un hyperplan H tel que F soit contenu dans un demi-espace déterminé par H et tel que $x_0 = \mathrm{F} \cap \mathrm{H}$. Nous allons prouver que pour tout i, $\mathrm{X}_i(x_0) \in \mathrm{H}$.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et que $\mathrm{X}_1(x_0) \notin \mathrm{H}$, $\mathrm{X}_1(x_0) \neq 0$. La projection du processus sur la direction X_1 est un mouvement brownien changé de temps qui pénètre immédiatement dans le demi-espace H_1 déterminé par H et disjoint de F (théorème IV.3). Soient

$$\mathrm{H}_p = \mathrm{H}_1 \cap \left\{ x \,;\, d(x, \mathrm{H}) \geqslant \frac{1}{p} \right\}$$

et σ_p le temps d'entrée dans H_p, il existe n tel que $\mathrm{P}_{x_0}(\sigma_n < \infty) > 0$, ce qui est comme précédemment en contradiction avec le fait que F est un fermé absorbant.

THÉORÈME V.3. — *Si* $\mathcal{L}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r)$ *est de rang n en tout point, le plus petit fermé absorbant non vide est* $\mathbb{R}^n$ *tout entier.*

Ce théorème est une conséquence de la proposition 2 et du théorème suivant de Bony [2] :

Soient F un fermé et $\mathrm{X}_1 \ldots \mathrm{X}_r$ des champs de vecteur de classe C^∞ tangents à F : $\forall \mathrm{Z} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r)$, Z est tangent à F et toute courbe intégrale de Z qui rencontre F est contenue dans F.

Nous allons montrer, de la même manière, le théorème suivant :

THÉORÈME V.4. — *Soit* B *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, σ_B *le temps d'entrée dans* B. *Si* $\mathcal{L}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r)$ *est de rang n, quel que soit* $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{P}_x[\sigma_\mathrm{B} < \infty] > 0$.

On peut supposer que B est un ouvert très régulier. Bony a montré dans [2] qu'il existe une base de tels ouverts. Il suffit, d'après ce qui précède, de montrer que $\mathrm{F} = \{ x ; \mathrm{P}_x[\sigma_\mathrm{B} < \infty] = 0 \}$ est fermé, et que tous les champs X_k sont tangents à F. Soit f une fonction continue strictement positive définie sur $\partial\mathrm{B}$, soit $g_\lambda(x) = \mathrm{E}_x[e^{-\lambda\sigma_\mathrm{B}} f(x_{\sigma_\mathrm{B}})]$, $\lambda \neq 0$; il est clair que $\mathrm{F} = \{ g_\lambda(x) = 0 \}$ ce qui implique que F est fermé puisque $g_\lambda(x)$ est continue sur B^c (théorème IV.1). Supposons alors que $X_1(x_0)$ n'est pas tangent à F, $x_0 \in F$; il existe une boule fermée $B_1(x_1, \rho)$ qui rencontre F en x_0 telle que

$$P_{x_0}(\sigma_{\mathring{B}_1} = 0) = 1$$

($\mathring{B}_1$ est l'intérieur de B_1), alors si $V_n = \{ x ; d(F, x) \geqslant \frac{1}{n} \}$ et σ_n le temps d'entrée dans V_n, il est clair qu'il existe n tel que $P_{x_0}(\sigma_n < \infty) > 0$. Soit

$$0 = P_{x_0}(\sigma_B < \infty) \geqslant P_{x_0}[\sigma_n < \infty ; \sigma_B \circ \theta_{\sigma_n} < \infty] = P_{x_0}[\sigma_n < \infty ; E_{X_{\sigma_n}}(\sigma_B < \infty)].$$

Cette dernière quantité est positive, ce qui est absurde.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLUMENTHAL-GETOOR, *Markov processes and potential theory.* Academic Press, New York.

[2] BONY, Principe du maximum... pour les opérateurs elliptiques dégénérés. Séminaire de théorie du potentiel, 1967-1968, n° 10.

[3] DYNKIN, *Markov processes.* Vol. 1, Springer Verlag, Berlin, 1965.

[3'] DYNKIN, *Markov processes.* Vol. 2.

[4] FREIDLIN, *Markov processes and differential equations. Progress in mathematics.* Plenum Press, New York, 1969.

[5] FREIDLIN, On the statement of boundary value problems for degenerate elliptic equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, t. **3**, 1966, p. 170.

[6] HÖRMANDER, Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Math. Uppsala*, t. **119**, 1967, p. 147-171.

[7] KHAS'MINSKII, Ergodic properties of recurrent diffusion processes. *Teor. Veroyat. Ec. Primen*, 1960, p. 196-214.

[8] MACKEAN, *Stochastic integrals.* Academic Press, New York, 1969.

[9] MEYER, Séminaire de probabilités. I. Université de Strasbourg. Springer Verlag.

[10] MOKOBODZKI, Densité relative de deux potentiels comparables. Séminaire de probabilité. IV. Université de Strasbourg. Springer Verlag.

[11] SKOROKHOD, On the local construction of a Markov process. *Teor. Veroyat. Ec. Primen*, t. **3**, 1966, p. 11.

[12] STROOCK VARADHAN, Diffusion processes with continuous coefficients. Comm. in *Pure and Applied Math.*, vol. **22**, 1969.

[13] TANAKA HASEGAWA, Stochastic differential equations. Seminar on Probability, vol. **19**, 1964 (Japan).

[14] COURRÈGE et PRIOURET, Temps d'arrêt d'une fonction aléatoire... Publications de l'ISUP, vol. **14**, 1965.

[15] S. WATANABE, T. YAMADO, On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations, *J. of Math.*, Kyoto University, vol. **11**, n° 1, 1971.

(Manuscrit reçu le 22 octobre 1970).

Directeur de la publication : GUY DE DAMPIERRE.

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPÔT LÉGAL ÉD. N° 1795*b*. IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 6201. 5-1971.