

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. TORTRAT

Sur les mesures aléatoires

Annales de l'I. H. P., section B, tome 7, n° 1 (1971), p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1971__7_1_1_0

© Gauthier-Villars, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section B* » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur les mesures aléatoires

par

A. TORTRAT

SUMMARY. — In I we prove the compacity of the law of any random uniformly σ -finite measure on the borelian σ -algebra of a Lusinian space E. In II we study general properties of punctual measures on \mathbb{R}_+ , defined by the sequence of the conditional laws of $(T_{n+1} | T_1, \dots, T_n)$.

I. — LA COMPACITÉ DES MESURES ALÉATOIRES UNIFORMÉMENT σ -FINIES ⁽¹⁾ SUR UN ESPACE LUSINIEN E

L'utilité d'une telle compacité a été montrée dans [2], auquel cette première partie apporte un complément.

Soit E un espace Lusinien ⁽²⁾, muni de sa tribu borélienne \mathcal{B} . Nous considérons l'espace Ω de toutes les mesures (≥ 0) définies sur \mathcal{B} et finies sur une même suite E_n ($E_n \in \mathcal{B}$) croissant vers E. Par exemple E est un espace métrique, les E_n sont des boules de même centre, de rayon n , les ω sont alors toutes les mesures finies sur les parties bornées de E. $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ désigne la tribu (« cylindrique »), dans Ω , engendrée par les v. a. ωB ($B \in \mathcal{B}$). Cette tribu est à base dénombrable comme \mathcal{B} et égale celle engendrée par les ωA relatives à tout anneau \mathcal{A} (tel $\cup \mathcal{B}_{E_n}$, \mathcal{B}_{E_n} restriction de \mathcal{B} à E_n) sur lequel les ω sont finies, si \mathcal{B} égale le σ -anneau engendré par \mathcal{A} .

⁽¹⁾ Ce sont les mesures aléatoires que M. R. Fortet a appelées σ -finies; nous préférons ajouter la précision essentielle « uniformément ».

⁽²⁾ La définition de E Lusinien est rappelée après la preuve du lemme 2.

LEMME 1. — Lorsque E est espace métrique, \mathfrak{L} est aussi la plus petite tribu \mathfrak{L}' rendant mesurables les intégrales ωf des fonctions réelles continues bornées : $f \in \mathcal{C}(E)$.

Preuve. — Soit F un fermé borné. On a $1_F = \lim \downarrow f_n$, où f_n continue prend ses valeurs dans $[0, 1]$, et est à support borné. Inversement toute f continue ≥ 0 est une limite croissante de fonctions simples χ_n mesurables \mathfrak{B} . On a donc $\omega F = \lim \downarrow \omega f_n$ et $\omega f = \lim \uparrow \omega \chi_n$. Ainsi les ωF donc les ωB (suivant la propriété de preuve aisée dite ci-dessus) sont mesurables \mathfrak{L}' et les ωf sont mesurables \mathfrak{L} .

Remarque 1. — Peut-on prouver que $\mathfrak{L}_{\mathfrak{B}} = \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}$ lorsque $\mathfrak{B} = \sigma(\mathcal{A})$, mais que les ω ne sont pas nécessairement toutes finies sur \mathcal{A} ?

LEMME 2. — Soit Ω' l'espace des mesures $\omega' (\geq 0)$ bornées ($\omega'E < \infty$), et \mathfrak{L}' la tribu correspondante. On pose $C_n = E_n - E_{n-1}$ ($E_0 = \phi$). L'application

$$(1) \quad \omega' = \sum_{a_n \neq 0} 2^{-n} \frac{\omega_n}{a_n e^{a_n}}, \quad \text{avec} \quad a_n = \omega C_n, \quad \omega_n B = \omega(B \cdot C_n),$$

définit une correspondance biunivoque et bimesurable entre (Ω, \mathfrak{L}) et $(\Omega'_0, \mathfrak{L}'_0)$, Ω'_0 étant la partie de Ω' :

$$(2) \quad \Omega'_0 = \{ \omega' : \omega' C_n < 2^{-n} \} \in \mathfrak{L}', \quad \mathfrak{L}'_0 \text{ restriction de } \mathfrak{L}' \text{ à } \Omega'_0.$$

Preuve :

a) La biunivocité résulte de ce que, si ω'_n est la restriction de ω' à C_n ,

$$(3) \quad \frac{\omega'_n}{a'_n} = \frac{\omega_n}{a_n}, \quad \text{avec} \quad a'_n = \omega' C_n = \frac{1}{2^n e^{a_n}};$$

si $a'_n < 2^{-n}$, a_n existe bien défini par $a_n = -\text{Log}(2^n a'_n)$ si $a'_n \neq 0$, 0 si $a'_n = 0$.

b) La bimesurabilité résulte des relations

$$\{ \omega' : \omega A < a, A \subset C_n \} = \left\{ \omega' : \omega' A < \frac{a \omega' C_n}{-\text{Log}(2^n \omega' C_n)} \right\} \in \mathfrak{L}'$$

et

$$\{ \omega : \omega' A < a, A \subset C_n \} = \{ \omega : \omega A < 2^n e^{\omega C_n} a \cdot \omega C_n \} \in \mathfrak{L}.$$

Par définition de E, il existe un espace polonais X, que nous munissons de sa tribu borélienne \mathcal{A} et une application $\varphi(x) = y$ continue et injective

de X sur E : Il y a isomorphisme entre (X, \mathcal{A}) et (E, \mathcal{B}) (*) ($x \leftrightarrow \varphi(x)$, $A = \varphi^{-1}B \leftrightarrow B$). Il y a donc aussi un tel isomorphisme entre $(\Omega'_0, \mathcal{L}'_0)$ et $(\Omega''_0, \mathcal{L}''_0)$, où Ω'' est l'ensemble des mesures (≥ 0) ω'' bornées sur (X, \mathcal{A}) , et $\Omega''_0 = \{ \omega'' : \omega'' \Gamma_n < 2^{-n}, \text{ tout } n \}$, avec $\Gamma_n = \varphi^{-1}C_n$; les tribus \mathcal{L}'' et \mathcal{L}''_0 sont définies comme ci-dessus \mathcal{L} et \mathcal{L}' , \mathcal{L}_0 et \mathcal{L}'_0 . La tribu \mathcal{L}'' n'est autre que la tribu borélienne de l'espace Ω'' muni de la distance de Prohorov ; on sait en effet que Ω'' est polonais pour cette distance, sa tribu est identique à celle relative à la topologie de la convergence des ωf sur $\mathcal{C}(X)$ (les ouverts dans Ω'' sont les mêmes pour les deux topologies, X étant polonais), c'est donc \mathcal{L}'' (lemme 1). Ainsi, Ω''_0 est une partie borélienne de Ω'' , et se donner une probabilité P sur (Ω, \mathcal{L}) équivaut à se donner P' ou P'' (images) sur $(\Omega'_0, \mathcal{L}'_0)$ ou $(\Omega''_0, \mathcal{L}''_0)$ respectivement, ou encore P'' sur $(\Omega'', \mathcal{L}'')$, avec $P'' \Omega''_0 = 1$. P'' est donc compacte (au sens topologique : K -régulière, ou t -régulière, *a fortiori* au sens ensembliste, de Marczewski) sur la tribu à base dénombrable \mathcal{L}''_0 . C'est dire qu'elle est parfaite, sur \mathcal{L}''_0 , donc que P l'est sur \mathcal{L}_0 , car toute image conserve la propriété pour une probabilité d'être parfaite. Ainsi on a :

THÉORÈME I. — La loi P d'une mesure aléatoire uniformément σ -finie sur la tribu borélienne \mathcal{B} d'un espace Lusinien E , est compacte si elle est définie sur la tribu cylindrique de l'espace Ω de toutes les mesures (finies sur un même anneau $\mathcal{A} = \cup \mathcal{B}_{E_n}, E_n \uparrow E$).

Remarque 2. — Dans Ω' existe une distance ρ' , correspondant à la distance de Prohorov ρ'' dans Ω'' , pour laquelle \mathcal{L}' est la tribu borélienne. Cette tribu correspond à la topologie définie par la convergence des $\omega f'$ pour toute $f' \in \mathcal{C}'(E) \supset \mathcal{C}(E)$, où $\mathcal{C}'(E)$ se compose de toutes les fonctions $f'(y) = f'' \circ \varphi^{-1}(y)$, avec f'' continue bornée sur X . Ces f' ne sont pas nécessairement continues, mais toute $g'(y) \in \mathcal{C}(E)$ est image de

$$g''(x) = g' \circ \varphi(x)$$

continue, donc $\in \mathcal{C}'(E)$. La classe Γ' compacte approchant P' sur \mathcal{L}' (ou \mathcal{L}'_0) est donc formée de compacts pour cette topologie. Mais la correspondance (1) entre Ω'_0 et Ω rompt cette signification, bien qu'ici, l'application $\omega' \rightarrow \omega$ étant injective, P soit approchée par la classe compacte Γ image de la classe Γ' . La tribu \mathcal{L} n'est plus reliée à une notion de convergence des ω . Lorsque E est un espace métrique, une définition naturelle est celle de la convergence des ωf pour chaque f de $\mathcal{C}(E)$ qui soit, en outre, à support borné.

(*) Ce point est loin d'être élémentaire, cf. par exemple *Lecture notes in Mathematics*, n° 139, Springer 1970, de A. BADRIKIAN.

II. — SUR LES MESURES ALÉATOIRES PONCTUELLES LES PLUS GÉNÉRALES, DANS R

Plaçons-nous, en fait, dans $R_+ = \{t \geq 0\}$. Par définition, l'événement élémentaire ω est identifiable à une suite infinie presque sûrement strictement croissante

$$0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots, T_i(\omega) \dots$$

P est une loi de probabilité sur la tribu cylindrique \mathcal{L} dans $\Omega = \{\omega\}$, c'est-à-dire la plus petite tribu rendant mesurables les v. a. $T_i(\omega)$ (de Ω dans R_+). Notre seule hypothèse sera, pour l'instant :

- (H₁) a) $N(t)$ est fini et augmente indéfiniment avec t ,
b) $P\{T_i = T_{i+1}\} = 0$, tout i .

Nous voulons étudier la définition de la loi temporelle de ce processus (*i. e.* P sur \mathcal{L}) au moyen de la suite des fonctions

$$(1) \quad \bar{H}_{n+1}(\tau_1, \dots, \tau_n, \tau) = P\{T_{n+1} > \tau \mid T_1 = \tau_1, \dots, T_n = \tau_n\}.$$

Il est, en effet, toujours possible de définir P par ces lois conditionnelles.

L'hypothèse (H₁) b) se traduit par $\bar{H}_{n+1}(\tau_1, \dots, \tau_n, \tau_n) \stackrel{\text{p.s.}}{=} 1$, compte tenu de ce que, vu la définition (1), H_{n+1} est continue à droite comme fonction de τ . Pour chaque τ fixé, $\bar{H}_{n+1}(\theta, \tau)$ est mesurable en $\theta = \prod_1^n \tau_i \in R_+^n$

et le « p. s. » ci-dessus signifie sauf pour un ensemble P-nul de valeurs de θ . Il est entendu que θ décrit le domaine $0 \leq \tau_1(\theta) \leq \tau_2(\theta) \dots \leq \tau_n(\theta) \leq \tau$ (lorsque $\tau_{n+1} = \tau$ fixé). Nous écrirons aussi $\theta \leq \tau$ pour $\tau_n(\theta) \leq \tau$. La définition de la suite des \bar{H}_{n+1} est alors arbitraire, ces conditions étant posées, à ceci près qu'il faudra en plus imposer (H₁) a).

Remarque 3. — Nous n'avons besoin de connaître les $\bar{H}_{n+1}(\theta, \tau)$ que p. s. relativement à $P(d\theta)$ ($\theta \leq \tau$) et désignerons par $v_i(d\theta)$ la mesure $\bar{H}_{n+1}(\theta, t)P(d\theta)$ sur le domaine $\theta \leq t$ (l'indice n étant sous-entendu) on a donc ([] désignant la variation totale)

$$(2) \quad v_i(d\theta) = P\{T_{n+1} > t, d\theta\},$$

$$[v_t] = \int_{\theta \leq t} P(d\theta) \bar{H}_{n+1}(\theta, t) = P\{T_{n+1} > t, T_n \leq t\}.$$

On a

$$[v_t] = P\{N(t) = n\}, \quad \text{soit } p_n(t) \text{ cette fonction.}$$

Nous poserons encore

$$(3) \quad H_{n+1}(t, \tau) = P \{ T_{n+1} > \tau \mid N(t) = n \} = \frac{\int_{\theta \leq t} \bar{H}_{n+1}(\theta, \tau) P(d\theta)}{p_n(t)}, \quad \text{si } p_n(t) \neq 0.$$

PROPOSITION 1. — Les fonctions $p_n(t)$ et $H_{n+1}(t, \tau)$ sont continues à droite (en t et τ séparément, avec $p_n(t) \neq 0$, pour la deuxième).

La continuité en probabilité du processus $N(t)$ équivaut à la continuité en τ des $\bar{H}_{n+1}(\theta, \tau)$ pour presque tout θ ($\theta \leq t$, modulo P). Alors $p_n(t)$ est continue et $H_{n+1}(t, \tau)$ l'est en chacun de ses arguments ($p_n(t) \neq 0$).

Preuve :

a) On a (n fixé)

$$p_n(t') - p_n(t) = \int_{\theta \leq t} \bar{H}(\theta, t') - \bar{H}(\theta, t) P(d\theta) + \int_{t < \theta \leq t'} \bar{H}(\theta, t') P(d\theta).$$

Puisque le numérateur de (3) a son accroissement en t majoré par $P \{ t < T_n \leq t' \}$, les continuités à droite affirmées dans l'énoncé de la proposition sont bien assurées.

b) Dire que $N(t)$ n'est pas continu en probabilité, en t , c'est dire qu'il existe n et $\alpha > 0$ avec $P \{ T_{n+1} = t \} = \alpha$, donc que

$$\int_0^{t'} \{ \bar{H}(\theta, t') - \bar{H}(\theta, t) \} P(d\theta) \text{ reste } \geq \alpha \text{ lorsque } t' \uparrow t.$$

Il est pour cela nécessaire et suffisant que $\bar{H}(\theta, t)$ ne soit pas p. s. en θ (modulo P) continue.

c) On a (avec $\Delta =]t', t]$)

$$P \{ \Delta N \geq 1 \} = \sum_0^{\infty} P \{ T_n \leq t', T_{n+1} \in \Delta \}$$

et

$$\Delta p_n(t) = - P \{ T_n \leq t', T_{n+1} \in \Delta \} + P \{ T_n \in \Delta, T_{n+1} > t \},$$

d'où les continuités de p_n et H_{n+1} lorsque $N(t)$ est continu en Probabilité.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où :

(H₂) Le processus $N(t)$ est continu en probabilité.

Désignons par $\Theta = \sum_j \Delta_j$ ($\Delta_j = \Delta_j^{(n)}$: d'ordre n), la somme d'intervalles ouverts Δ_j telle que :

$$\Theta = \{ t : p_n(t) > 0, t > 0 \}, \Delta_j =]c_j, C_j[.$$

PROPOSITION 2. — La connaissance de $\overline{H}_{n+1}(\theta, t)$ n'est utile que lorsque τ_n et t appartiennent à un même intervalle Δ_j .

Preuve. — On a

$$p_n(t') = \int_{\theta \leq t'} \overline{H}(\theta, t') P(d\theta) \geq \int_{\theta \leq t'} \overline{H}(\theta, t) P(d\theta), \quad \text{tout } t \geq t'.$$

Si donc il existe entre $\tau_n(\theta)$ et $t > \tau_n(\theta)$ un t' avec $p_n(t') = 0$, $\overline{H}(\theta, t)$ est nulle pour tout $t \geq t'$, p. s. modulo $P(d\theta)$. La connaissance de \overline{H} est donc inutile si $\tau_n(\theta) \notin \mathcal{O}$, car $P\{T_n = c_j\} = 0$ et si $\tau_n(\theta) \in \Delta_j$, $\overline{H}_{n+1}(\theta, t)$ est nulle pour $t \geq C_j$, p. s. modulo $P(d\theta)$.

Remarque 4. — En fait, $P\{T_n \in \mathcal{O}\} = 0$. Ce point est intuitif, puisque $t \in \mathcal{O}$ signifie que $p_n(t) = P\{T_n \leq t, T_{n+1} > t\} = 0$, c'est-à-dire que t ne peut (p. s.) séparer T_n et T_{n+1} , alors que $T_{n+1} - T_n$ est p. s. > 0 . Il nous semble cependant qu'une preuve rigoureuse doit passer par l'argument suivant :

PROPOSITION 3. — T_n prend ses valeurs dans l'ouvert où $p_n(t) > 0$.

Preuve. — Posons $\mathcal{O}^c = F$ et soit m la loi de T_n . On a

$$\int_F p_n(t) m(dt) = 0 = \int_{\tau_n(\theta) \in F} P(d\theta) \int_{\tau_n \leq t \in F} \overline{H}(\theta, t) m(dt).$$

C'est dire que p. s. en θ , pour $\tau_n(\theta) \in F$, donc *a fortiori* p. s. en $\tau_n \in F$ (modulo m) il existe un θ (avec $\tau_n(\theta) = \tau_n$) tel que $m\Delta_\tau = 0$, pour $\Delta_\tau =]\tau_n, \tau_n + \varepsilon(\tau_n)[$ et $\overline{H}(\theta, t) > 0$ sur Δ_τ (puisque $\overline{H}(\theta, t)$ est continue à droite en t et vaut 1 pour tout $t = \tau_n(\theta)$). Soit A l'ensemble des $\tau \in F$, qui sont extrémités gauches de Δ_τ (non vides) m -nuls et $\mathcal{O}' = \bigcup_{\tau \in A} \Delta_\tau$. Dans chaque $\Delta'_i =]a_i, b_i[$, tout t est intérieur à un Δ_τ , donc $[a_i + \varepsilon, b_i - \varepsilon]$ est recouvert par un nombre fini de ces Δ_τ et

$$m\Delta'_i = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \uparrow m[a + \varepsilon, b - \varepsilon] = 0.$$

$F - A$ étant m -nul et $A - \mathcal{O}'$ étant l'ensemble dénombrable des a_i , on a bien $mF = 0$.

PROPOSITION 4. — Dans chaque $\overline{\Delta}_j = [c_j, C_j]$, le plus petit segment portant la v. a. T_n , admet c_j pour extrémité gauche (et $C'_j \leq C_j$ pour extrémité

droite, vu la proposition 3). De même T_{n+1} prend ses valeurs dans $\sum_j [c'_j, C_j]$, $c'_j \geq c_j$. La preuve concernant T_n résulte de ce que $p_n(c_j) = 0$ implique

$$p_n(t) = \int_{\theta \leq t} P(d\theta) \bar{H}(\theta, t) = \int_{c_j < \tau_n(\theta) \leq t} P(d\theta) \bar{H}(\theta, t) > 0, \quad t \in]c_j, C_j[.$$

L'affirmation concernant T_{n+1} résulte des propriétés de T_n et $\bar{H}_{n+1}(\theta, t)$. Ainsi on a le

THÉORÈME II. — Si $N(t)$ est un processus ponctuel sur R_+ , continu en probabilité (à points $T_n \leq T_{n+1} \dots$, p. s. séparés, $N(t)$ p. s. fini), il existe pour chaque n , un ouvert

$$\mathcal{O}^{(n)} = \Sigma \Delta_j^{(n)} = \{ t : P \{ N(t) = n \} > 0 \},$$

tel que

a) $P(T_n \notin \mathcal{O}^{(n)} = P(T_{n+1} \notin \mathcal{O}^{(n+1)}) = 0,$

b) Dans $[c_j, C_j]$, fermeture de $\Delta_j^{(n)}$, les plus petits segments portant T_n et T_{n+1} ont respectivement c_j pour extrémité gauche et C_j pour extrémité droite.

Remarque 5. — Lorsqu'on suppose le processus $N(t)$ Markovien, on peut expliciter $\bar{H}_{n+1}(\theta, t)$ dans chaque Δ_j , sous la forme

$$\bar{H}_{n+1}(\theta, t) \stackrel{p.s.}{=} \frac{H_{n+1}(t)}{H_{n+1}(\tau_n(\theta))},$$

suivant l'exposé [I]. $H_{n+1}(t)$ est une fonction continue non croissante dans chaque Δ_j , nulle en C_j (> 0 en $C_j - \varepsilon$); elle peut $\uparrow \infty$ lorsque $t \downarrow c_j$, à condition que

$$\int_{c_j}^{c_j + \eta} \frac{H_{n+1}(\eta)}{H_{n+1}(\tau)} P(d\tau) = p_n(\eta) \xrightarrow{\eta \downarrow 0} 0 \quad (P(d\tau) = \text{loi de } T_n).$$

Remarque 6. — L'hypothèse (H_1) a) ($N(t)$ fini) n'était pas indispensable. Elle limite lorsque $n \uparrow \infty$, l'accumulation à distance finie des $\Delta_j^{(n)}$. Cette accumulation paraît possible, pour n fixé. Approfondir ces points, lorsque $N(t)$ est markovien pourrait être intéressant (lié à la notion d'états instantanés ?).

Remarque 7. — Dans le cas des processus cumulatifs (cf. [I]), c'est-à-dire lorsqu'on impose

$$P(d\theta) \bar{H}_{n+1}(\theta, t) = p_n(t) \frac{n!}{t^n} d\tau_1 \dots d\tau_n \quad \text{dans} \quad \{ \tau_1 \leq \dots \leq \tau_n \leq t \},$$

la répartition de $\tau_1 \times \dots \times \tau_n$ conditionnée par $N(t) = n$, est uniforme, on a $p_n(t) > 0$ pour tout $t > 0$, sous l'hypothèse $(H_1) a$.

En effet, on a

$$p_{n'}(t') \geq p_n(t) \left(\frac{t'}{t}\right)^n \left(1 - \frac{t'}{t}\right)^{n-n'}, \quad \text{tous } n' \leq n, t' < t;$$

Si donc $a_n = \inf_{p_n(t)=0} t$, on a $p_{n'}(t') = 0$ pour tout $t' > a_n$ et $n' \geq n$.

On aurait donc, suivant la proposition 3, $P\{T_{n'} \geq a_n\} = 0$, tout $n' \geq n$, ce qu'interdit $(H_1) a$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. FORTET et KAMBOUZIA, Les répartitions ponctuelles markoviennes; estimations et tests concernant leurs lois de probabilité, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. V, 1969, p. 185.
- [2] A. TORTRAT, Sur les mesures aléatoires dans les groupes non abéliens, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. V-1, 1969, p. 31-47.

(Manuscrit reçu le 16 septembre 1970).