

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

P. BERNARD

Quelques propriétés des trajectoires des fonctions aléatoires stables sur \mathbf{R}^k

Annales de l'I. H. P., section B, tome 6, n° 2 (1970), p. 131-151

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1970__6_2_131_0

© Gauthier-Villars, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Quelques propriétés des trajectoires des fonctions aléatoires stables sur \mathbb{R}^k

par

P. BERNARD

Faculté des Sciences, Alger.

SOMMAIRE. — Soit I un pavé compact de \mathbb{R}^k .

Nous étudions d'abord le module de continuité des trajectoires de fonctions aléatoires $X = (X_t, t \in I)$ quelconques.

Ensuite, nous améliorons ces résultats, ainsi que d'autres bien connus, dans le cas où X est une fonction aléatoire stable.

ABSTRACT. — Let I be a compact rectangle in \mathbb{R}^k .

We first study the modulus of continuity of sample functions of any random function $X = (X_t, t \in I)$.

Then, we improve these results, and other ones well known, when X is a stable random function.

0. INTRODUCTION

Le but de cet article est d'améliorer, dans le cas des fonctions aléatoires stables indexées par un pavé compact de \mathbb{R}^k , certains résultats connus, ou d'autres nouveaux, concernant les propriétés analytiques des trajectoires de fonctions aléatoires. Nous ne rappellerons pas ici les résultats concernant les trajectoires d'une fonction aléatoire indexée par un intervalle compact de la droite réelle, qui sont bien connus et rassemblés par exemple dans le livre de Cramer et Leadbetter [2].

Dans le premier paragraphe, nous donnerons la généralisation des résultats concernant la continuité et le module de continuité (conditions de Hölder) au cas où l'espace des temps est $I = [0, 1]^k$.

Le deuxième paragraphe est consacré à un certain nombre de définitions et de rappels concernant les fonctions aléatoires stables, ainsi qu'à la démonstration de deux inégalités qui seront la base de tous les résultats du troisième paragraphe.

Dans le troisième paragraphe, nous étudions le cas des processus stables, pour lesquels nous reprenons les résultats du premier paragraphe, ainsi que, pour les fonctions stables indexées par $[0, 1]$, des résultats de [2] concernant la différentiabilité des trajectoires. Toutes ces conditions sont comparées à celles obtenues dans le cas général, et l'on constate qu'elles sont plus précises.

Nous remercions enfin A. Badrikian pour l'aide précieuse et les conseils éclairés qui ont permis la rédaction de cet article.

1. TRAJECTOIRES DES FONCTIONS ALÉATOIRES : CONTINUITÉ ET CONDITIONS DE HÖLDER

PROPOSITION 1.1 (S. Chevet). — Soit $(\zeta(t), t \in I)$ une fonction aléatoire dont l'espace des paramètres est le cube $I = [0, 1]^k$ de \mathbb{R}^k , et à valeurs dans un espace polonais. Alors, si l'on a :

$$(1) \quad \mathbf{P} \{ \delta(\zeta(t+h), \zeta(t)) \geq g(|h|) \} \leq q(|h|)$$

pour tout couple $(t, t+h)$ de $I \times I$, où g et q sont deux fonctions positives, $g(|h|)$ et $q(|h|)$ décroissant vers 0 lorsque $|h|$ décroît vers 0, et telles que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{nk} q(2^{-n}) < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} g(2^{-n}) < \infty$$

le processus ζ admet une modification ayant presque sûrement ses trajectoires continues pour $t \in I$ (propriété que nous noterons [P] dans la suite pour alléger l'écriture).

En particulier, si on a (1) pour g et q vérifiant les mêmes hypothèses que ci-dessus, mais en remplaçant les conditions de convergence de séries par :

$$\int_0^1 g(t) \frac{dt}{t} < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^1 q(t) \frac{dt}{t^{k+1}} < \infty$$

alors la propriété [P] est vraie.

Pour $k = 1$, on retrouve le résultat bien connu concernant la continuité des processus indexés par $[0, 1]$.

La démonstration de cette proposition que nous ne ferons pas ici utilise le lemme suivant :

LEMME 1.1. — Si ξ est une fonction aléatoire continue en probabilité sur un espace métrique précompact K , si son espace des états est un espace polonais muni de sa tribu de Borel, et si elle admet une modification uniformément continue sur un ensemble D dénombrable et partout dense dans K , alors cette fonction aléatoire admet une modification uniformément continue sur K .

Ensuite, on fait un choix de D de la façon suivante : soit

$$D_n = \left\{ \frac{r}{2^n}; 0 \leq r \leq 2^n \right\}$$

l'ensemble des points déterminant une partition dyadique de pas 2^{-n} de $[0, 1]$, puis

$$M_n = \underbrace{D_n \times \dots \times D_n}_{k \text{ fois}} \text{ et enfin } D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$$

On procède alors de la même façon que dans le cas de la droite.

Notons que dans le cas d'une fonction aléatoire séparable, cette fonction aléatoire elle-même aura presque sûrement ses trajectoires continues sur I .

A partir de la proposition 1.1, on peut donner une autre condition suffisante, plus utilisable, pour la propriété [P], dans un cas particulier.

PROPOSITION 1.2. — Soit $(\xi(t), t \in I)$ une fonction aléatoire réelle, et soit g une fonction arbitraire, positive, $g(|h|)$ décroissant vers 0 lorsque $|h|$ décroît vers 0, telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(2^{-n}) < \infty$$

Supposons que, pour tout couple $(t, t + h) \in I \times I$, on ait :

$$(2) \quad E(|\xi(t + h) - \xi(t)|^p) \leq \varphi(|g|)$$

où φ est une fonction positive de $|h|$, $\varphi(|h|)$ décroissant vers 0 lorsque $|h|$ décroît vers 0, telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{nk} \frac{\varphi(2^{-n})}{g^p(2^{-n})} < \infty$$

Alors ξ vérifie la propriété [P].

En particulier, si on a (2) pour g et φ satisfaisant les mêmes hypothèses que ci-dessus, mais en remplaçant les conditions de convergence des séries par :

$$\int_0^{\infty} g(t) \frac{dt}{t} < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t)}{g^p(t)} \frac{dt}{t^{k+1}} < \infty$$

alors la propriété [P] est vraie.

Démonstration. — Immédiate, en utilisant la proposition 1.1 et l'inégalité de Markov :

$$P(|Z| \geq a) \leq \frac{E(|Z|^p)}{a^p}$$

Par exemple, on aura la propriété [P] sous les hypothèses suivantes :

$$E(|\xi(t+h) - \xi(t)|^p) \leq K |h|^{k+\delta} \quad \forall \delta > 0 \quad K \text{ constante} > 0$$

ou $E(|\xi(t+h) - \xi(t)|^p) \leq K \frac{|h|^k}{|\text{Log } |h||^{1+r}} \quad \forall r > p \quad K \text{ constante} > 0$

Nous allons maintenant approfondir ces résultats en étudiant le module de continuité des trajectoires d'une fonction aléatoire. Pour cela, nous allons démontrer un lemme analogue au lemme 1.1.

LEMME 1.2. — Si $(\xi(t), t \in K)$ est une fonction aléatoire continue en probabilité sur un espace métrique précompact (K, d) , si son espace des états est un espace polonais muni de sa tribu de Borel, δ étant une distance compatible avec sa topologie, et si elle admet une modification ξ satisfaisant sur une partie dénombrable D dense dans K

$$(3) \quad \delta(\xi(t), \xi(s)) \leq g[d(s, t)]$$

où g est une fonction positive, $g(x)$ décroissant vers 0 quand x décroît vers 0, et continue à droite, alors il existe une modification ξ de ξ qui satisfasse sur K la relation (3).

Démonstration. — Montrons d'abord que l'hypothèse a un sens, c'est-à-dire que si F désigne l'ensemble des ω tels que $\xi(\cdot)(\omega)$ satisfasse (3), alors F est mesurable.

$$F = \{ \omega \in \Omega / \forall (t_i, t_j) \in D \times D \quad \delta(\xi(t_i)(\omega), \xi(t_j)(\omega)) \leq g[d(t_i, t_j)] \}$$

$$F = \bigcap_{(t_i, t_j) \in D \times D} \{ \omega \in \Omega / \delta(\xi(t_i)(\omega), \xi(t_j)(\omega)) \leq g[d(t_i, t_j)] \}$$

donc F est mesurable, et par hypothèse $P(F) = 1$

Les hypothèses impliquent que ξ est uniformément continue sur D, donc d'après le lemme 1.1, il existe une modification $\tilde{\xi}$ de ξ sur K qui soit uniformément continue sur K et qui coïncide avec ξ sur D. Il s'agit de montrer que ξ satisfait la relation (3) sur K.

D'après l'uniforme continuité, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 / d(s, t) < \eta \Rightarrow \delta(\xi(t), \xi(s)) < \varepsilon \tag{*}$$

De plus, puisque D est dense dans K :

$$\forall (t, s) \in K \times K, \quad \forall \eta > 0 \quad \exists (t_0, s_0) \in D \times D \\ d(t, t_0) < \eta \quad d(s, s_0) < \eta$$

D'où, pour tout ω de Ω et tout couple (t, s) de $K \times K$

$$\begin{aligned} \delta(\tilde{\xi}(t)(\omega), \tilde{\xi}(s)(\omega)) &\leq \delta(\tilde{\xi}(t)(\omega), \xi(t_0)(\omega)) \\ &\quad + \delta(\xi(t_0)(\omega), \xi(s_0)(\omega)) \\ &\quad + \delta(\xi(s_0)(\omega), \tilde{\xi}(s)(\omega)) \\ \delta(\tilde{\xi}(t)(\omega), \tilde{\xi}(s)(\omega)) &\leq g(d(t_0, s_0)) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

ceci $\forall \varepsilon > 0$ en choisissant η déterminé par (*).

Soit, $\forall \varepsilon > 0, \forall \omega \in \Omega, \forall (t, s) \in K \times K$

$$\delta(\tilde{\xi}(t)(\omega), \tilde{\xi}(s)(\omega)) \leq g[d(t, s) + 2n] + 2\varepsilon$$

Comme on peut toujours supposer $\eta < \varepsilon$, d'après l'hypothèse g continue à droite, on obtient

$$\begin{aligned} \forall \omega \in \Omega \quad \forall (t, s) \in K \times K \\ \delta(\tilde{\xi}(\omega)(t), \tilde{\xi}(\omega)(s)) \leq g[d(t, s)]. \end{aligned}$$

Remarque 1.1. — On peut remplacer l'hypothèse de continuité sur g par une hypothèse sur K. Il suffit de supposer :

$$\forall (t, s) \in K \times K, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists (t_0, s_0) \in D \times D$$

tels que

$$d(t, t_0) < \varepsilon \quad d(s, s_0) < \varepsilon \quad d(t_0, s_0) \leq d(t, s)$$

Ceci sera vérifié si on prend K partie convexe d'un espace vectoriel métrique (T, d). En effet, considérons dans ce cas les boules ouvertes B(t, ε) et B(s, ε), et soit t₁ (resp. s₁) un point de K appartenant à B(t, ε) ∩]t, s[(resp. B(s, ε) ∩]t, s[) où]t, s[désigne le segment privé de ses extrémités.

Soit alors la boule B(t₁, η) (resp. B(s₁, η')) centrée en t₁ (resp. s₁), contenue dans B(t, ε) (resp. B(s, ε)) et ne contenant pas t (resp. s), puisque D est dense dans K, il existe un point t₀ de D dans B(t₁, η) (resp. s₀ dans B(s₁, η')).

On a alors :

$$d(t, t_0) < \varepsilon \quad d(s, s_0) < \varepsilon \quad d(t_0, s_0) \leq d(t, s)$$

De ce lemme, on va déduire le théorème suivant, précisant la proposition 1.1.

(*) THÉORÈME 1.1. — Soit $(\xi(t), t \in I)$ une fonction aléatoire dont l'espace des états est un espace polonais muni de sa tribu borélienne, δ étant une distance compatible avec sa topologie, et $I = [0, 1]^k$.

Alors, si on a :

$$(1) \quad P(\delta(\xi(t+h), \xi(t))) \geq g(|h|) \leq q(|h|)$$

pour tout couple $(t, t+h) \in I \times I$, g et q étant des fonctions de $|h|$, positives, $g(|h|)$ et $q(|h|)$ décroissant vers 0 lorsque $|h|$ décroît vers 0, telles que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{nk} q(2^{-n}) < \infty$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{m=1}^{\infty} g(2^{-(n+m)}) < ag(2^{-n})$$

où a est une constante strictement positive, g étant en outre telle que :

$$\forall \lambda > 0, \quad \exists \lambda' > 0 / g(\lambda x) < \lambda' g(x) \quad \forall x \in [0, 1] \quad (**)$$

il existe une modification $\eta(t)$ de $\xi(t)$, une constante $C > 0$ et une variable aléatoire v presque sûrement positive telle que :

si $|h| < v$ et si $(t, t+h) \in I \times I$

$$\delta(\eta(t+h), \eta(t)) < Cg(|h|)$$

En particulier, si on a (1) pour g et q vérifiant les mêmes hypothèses que ci-dessus, mais en remplaçant les conditions de convergence des séries par :

$$\int_0^1 q(t) \frac{dt}{t^{k+1}} < \infty$$

et

$$\forall u \in [0, 1/2] \quad \int_0^{1/2} g(t \cdot u) \frac{dt}{t} < ag(u)$$

on a les mêmes conclusions.

(*) M. TORTRAT m'a signalé que ce résultat avait déjà été établi par H. TOROKI dans l'article : A method of construction of measures on function spaces and its applications to stochastic processes. Memories of the Faculty of Science. Kyushu University.

Démonstration. — D’après le lemme 1.2, il suffit de montrer :

$$\delta(\eta(t+h), \eta(t)) < Cg(|h|) \quad \forall h/|h| < \nu \quad (t, t+h) \in D \times D$$

où D est un ensemble dénombrable dense dans I .

(En fait, la démonstration qui suit peut aboutir à montrer cette propriété pour $(t, t+h) \in I \times I$, sans utiliser le lemme 1.2. Mais ce lemme a pour but une généralisation de ces résultats à des espaces autres que \mathbb{R}^k).

Nous allons choisir l’ensemble D de la façon suivante :

soit $D_n = \left\{ \frac{r}{2^n}; 0 \leq r \leq 2^n \right\}$ l’ensemble des points déterminant une partition dyadique de pas 2^{-n} de $[0, 1]$, puis

$$M_n = \underbrace{D_n \times \dots \times D_n}_{k \text{ fois}} \quad \text{et} \quad D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$$

D est évidemment dénombrable et dense dans I .

D’autre part, il est clair, puisque g satisfait la condition (**), que si d_1 et d_2 sont deux distances équivalentes, il est équivalent de montrer la condition de Hölder pour l’une ou l’autre de ces distances, la constante C seule étant différente suivant la distance considérée.

Nous allons utiliser sur I la distance d définie par :

$$t = (t_i)_{1 \leq i \leq n} \quad s = (s_i)_{1 \leq i \leq n} \quad d(t, s) = \sup_{1 \leq i \leq n} |t_i - s_i|$$

Cette distance est intéressante ici, car tous les sommets appartenant à M_n d’un même cube de côté 2^{-n} sont deux à deux équidistants, leur distance pour d étant 2^{-n} . Ceci étant, considérons

$$X_n = \{ \delta(\xi(t), \xi(s)) / (t, s) \in M_n \times M_n, d(t, s) = 2^{-n} \}$$

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

Alors :

$$\begin{aligned} P\{ \{ \text{Max}_{z \in X_n} z \geq g(2^{-n}) \} \} &= P\left[\bigcup_{z \in X_n} \{ z \geq g(2^{-n}) \} \right] \\ &\leq \sum_{z \in X_n} P\{ \{ z \geq g(2^{-n}) \} \} \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (\text{Card } X_n) q(2^{-n}) \end{aligned}$$

Donc, si $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\text{Card. } X_n) q(2^{-n}) < \infty$, d'après le lemme de Borel-Cantelli,

on aura :

$$P[\limsup_n \{ \text{Max}_{z \in X_n} z \geq g(2^{-n}) \}] = 0$$

soit

$$P[\liminf_n \{ \text{Max}_{z \in X_n} z < g(2^{-n}) \}] = 1$$

Donc, il existe une variable aléatoire μ , à valeurs entières, presque sûrement finie, telle que :

pour $n \geq \mu$

$$\text{Max}_{z \in X_n} z < g(2^{-n})$$

soit

$$\text{Max}_{\substack{(t,s) \in M_n \times M_n \\ d(t,s) = 2^{-n}}} \delta(\xi(t), \xi(s)) < g(2^{-n})$$

Calculons Card X_n .

Pour tout t de M_n , il existe un nombre fini de points de M_n situés à une distance 2^{-n} de t (pour d), ce nombre étant majoré par une constante α_k dépendant uniquement de k ($\alpha_k = 3^k - 1$). Donc :

$$\text{Card } X_n \leq \alpha_k \cdot \text{Card } M_n$$

Or

$$\text{Card } M_n = [\text{Card } D_n]^k = (2^n + 1)^k \leq A_k \cdot 2^{nk}$$

A_k ne dépendant que de k . D'où :

$$\text{Card } X_n \leq \alpha'_k \cdot 2^{nk} \quad (\alpha'_k = \alpha_k \cdot A_k)$$

Mais, par hypothèse, la série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{nk} q(2^{-n})$ converge. Donc la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Card } X_n \cdot q(2^{-n})$$

converge.

Soit maintenant t et s deux points de D tels que $d(t, s) \leq h$, $0 < h \leq 1$,

$$h \in [0, 1], \quad \exists n \in \mathbb{N} / 2^{-n} \leq h < 2^{-(n-1)} = 2 \cdot 2^{-n}$$

On en déduit l'existence d'un cube : $C_{0,n}^t$ dont les sommets appartiennent au réseau M_n , qui contienne t , et d'un cube $C_{0,n}^s$ dont les sommets appartiennent au réseau M_n , qui contienne s , ces deux cubes ayant côté de longueur 2^{-n} , $C_{0,n}^t$ ayant au moins un sommet : t_n et $C_{0,n}^s$ un sommet : s_n tels

que $d(t_n, s_n)$ soit égal à 0 ou 2^{-n} . Puisque $t \in \mathbb{D}$ est contenu dans $C'_{0,n}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $t \in M_{n+p}$. De même, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $s \in M_{n+q}$ (p et q évidemment non uniques).

Or, si $t_n \in M_n$, $t \in M_{n+p}$ et de plus t est contenu dans un cube de côté 2^{-n} dont t_n est un sommet, il existe une suite de points $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$u_0 = t_n \quad \lim_{i \rightarrow \infty} u_i = t \quad u_i \in M_{n+i} \quad (u_i, u_{i+1}) \in C'_{i+1,n} \times C'_{i+1,n}$$

où $C'_{i+1,n}$ est un cube de côté $2^{-(n+i+1)}$ dont les sommets appartiennent au maillage M_{n+i+1} .

En effet, considérons tous les cubes de côtés $2^{-(n+1)}$ dont les sommets appartiennent à M_{n+1} et qui sont contenus dans le cube $C'_{0,n}$. Tous ces cubes ont un point commun, le centre du cube $C'_{0,n}$, soit u_1 . L'un d'eux au moins contient le point t . Soit $C'_{1,n}$ ce cube, u_2 son centre. On recommence l'opération. On obtient une suite de cubes : $C'_{i,n}$ de côté $2^{-(n+i)}$, dont les sommets appartiennent à M_{n+i} , tels que $C'_{i+1,n} \subset C'_{i,n}$ et dont le centre sera noté u_{i+1} . La suite $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ainsi obtenue vérifie la propriété énoncée ci-dessus.

De même, il existe une suite $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$v_0 = s_n \quad \lim_{i \rightarrow \infty} v_i = s \quad v_i \in M_{n+i} \quad (v_i, v_{i+1}) \in C^s_{i+1,n} \times C^s_{i+1,n}$$

où $C^s_{i+1,n}$ est un cube de côté $2^{-(n+i+1)}$ dont les sommets appartiennent au maillage M_{n+i+1} (les limites sont prises au sens de la topologie induite par d).

Nous pouvons écrire :

$$\delta(\xi(t), \xi(t_n)) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \delta(\xi(u_i), \xi(u_{i+1}))$$

Mais, pour $n+i \geq \mu$, $\delta(\xi(u_i), \xi(u_{i+1})) < g(2^{-(n+i+1)})$. Donc en posant $v = 2^{-\mu}$, on obtient :

$$\text{si } h < v \quad \delta(\xi(t_n), \xi(t)) \leq \sum_{i=0}^{\infty} g(2^{-(n+i+1)})$$

$$\text{soit} \quad \delta(\xi(t_n), \xi(t)) \leq ag(2^{-n})$$

$$\text{De même} \quad \delta(\xi(s_n), \xi(s)) \leq ag(2^{-n})$$

$$\text{Or} \quad \delta(\xi(t_n), \xi(s_n)) \leq g(2^{-n})$$

$$\text{Donc, si} \quad d(t, s) \leq h \quad \text{et} \quad h < v$$

$$\delta(\xi(t), \xi(s)) \leq (2a+1)g(2^{-n})$$

$$\text{soit} \quad \delta(\xi(t), \xi(s)) \leq Cg(h) \quad \text{car} \quad 2^{-n} \leq h.$$

Remarque 1.2. — Parmi les fonctions g satisfaisant les hypothèses du théorème se trouvent les fonctions du type :

$$\begin{aligned} h &\rightarrow |h|^a && \forall a > 0 \\ h &\rightarrow \frac{1}{|\text{Log } |h||^b} && \forall b > 1 \end{aligned}$$

Une simple application de l'inégalité de Markov nous conduit à la proposition suivante, qui précise la proposition 1.2.

PROPOSITION 1.3. — Soit $(\xi(t), t \in I)$ une fonction aléatoire réelle. En reprenant les notations du théorème 1.1, supposons que, pour tout couple $(t, t+h)$ dans $I \times I$, on ait :

$$(2) \quad E(|\xi(t+h) - \xi(t)|^p) \leq \varphi(|h|)$$

où φ est une fonction positive, $\varphi(|h|)$ décroissant vers 0 lorsque $|h|$ décroît vers 0, telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{nk} \frac{\varphi(2^{-n})}{g^p(2^{-n})} < \infty$$

Alors il existe une modification η de ξ dont les trajectoires satisfont presque sûrement des conditions de Hölder de type g .

En particulier, on peut remplacer la condition de convergence de série par :

$$\int_0 \frac{\varphi(t) dt}{g^p(t) t^{k+1}} < \infty$$

Si on prend pour g la fonction $h \rightarrow |h|^a$, on obtient le résultat suivant :

COROLLAIRE 1.1. — Si $(\xi(t), t \in I)$ satisfait la condition

$$E(|\xi(t+h) - \xi(t)|^p) \leq K |h|^{k+r} \quad r > 0$$

il existe une fonction aléatoire η , modification de ξ , et satisfaisant les conditions de Lipschitz

$$|\eta(t+h) - \eta(t)| \leq K |h|^a$$

pour tout a tel que $0 < a < r/p$ (pour $k = 1$, on retrouve un résultat bien connu dû à Kolmogorov, cf. [8] ou [2]).

Si $(\xi(t), t \in I)$ satisfait la condition

$$E(|\xi(t+h) - \xi(t)|^p) \leq K \frac{|h|^{k+r}}{|\text{Log } |h||^{1+\delta}} \quad r > 0 \quad \delta > 0$$

il existe une modification η de ξ satisfaisant les conditions de Lipschitz

$$|\eta(t+h) - \eta(t)| \leq K|h|^a$$

pour tout a tel que $0 < a \leq r/p$.

Nous verrons, dans la troisième partie, dans quelle mesure ces résultats peuvent être améliorés dans le cas de processus stables.

Remarque 1.3. — Si nous considérons une fonction aléatoire indexée par \mathbb{R}^k , si on a des conditions du type de celles de la proposition 1.1, pour tout pavé compact de \mathbb{R}^k , alors la fonction aléatoire ξ admet une modification η ayant ses trajectoires presque sûrement continues sur \mathbb{R}^k .

Si on a des conditions du type de celles du théorème 1.1 pour tout pavé compact de \mathbb{R}^k , alors à l'intérieur de tout pavé compact de \mathbb{R}^k , on aura une modification η de ξ satisfaisant des conditions de Hölder.

2. FONCTIONS ALÉATOIRES STABLES SUR \mathbb{R}^k

Ce paragraphe est consacré à un certain nombre de définitions et de rappels concernant les fonctions aléatoires stables, ainsi qu'à la démonstration de deux inégalités qui seront la base de tous les résultats du troisième paragraphe.

DÉFINITION 2.1. — On appelle loi stable symétrique d'exposant α une mesure sur \mathbb{R} dont la transformée de Fourier f est donnée par :

$$f(t) = e^{-c|t|^\alpha}$$

où c est une constante strictement positive, et $0 < \alpha \leq 2$.

Le cas $\alpha = 2$ correspond à la loi de Gauss. Nous serons principalement intéressés par le cas $0 < \alpha < 2$.

Une telle loi est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue ; nous noterons $p_c(x, \alpha)$ sa densité.

Nous utiliserons les résultats suivants :

PROPOSITION 2.1 [7]. — La densité $p_1(x, \alpha)$ est indéfiniment différentiable sur \mathbb{R} , et de plus vérifie l'inégalité

$$p_1(x, \alpha) \leq \frac{K}{|x|^{\alpha+1}}$$

On déduit immédiatement de ce résultat que les moments absolus d'ordre λ existent pour tout λ tel que : $0 < \lambda < \alpha$. Pour $\alpha < 2$, le moment d'ordre α n'existe pas.

PROPOSITION 2.2 [9]. — Notons $\mu_1(\xi)$ le moment absolu d'ordre λ , $0 < \lambda < \alpha$, d'une variable aléatoire ξ dont la loi est la loi stable symétrique, d'exposant α . On a alors :

$$\mu_1(\xi) = c^{\lambda/\alpha} \frac{\sin \frac{\pi}{2} \lambda \Gamma\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right)}{\sin \pi \lambda \Gamma(1 - \lambda)}$$

DÉFINITION 2.2. — On appelle loi stable symétrique sur \mathbb{R}^k une mesure sur \mathbb{R}^k dont la transformée de Fourier f est donnée par :

$$\text{Log } f(t) = -\gamma |t|^\alpha \int_{S_k} |\cos \langle t, \omega \rangle|^\alpha d\mu(\omega) \quad (0 < \alpha \leq 2)$$

où μ est une mesure simplement additive, positive, portée par la sphère unité S_k de \mathbb{R}^k , symétrique par rapport à l'origine, γ est une constante strictement positive, $0 < \alpha \leq 2$, ω désigne un point de S_k ainsi que le vecteur joignant l'origine à ce point, $\cos \langle t, \omega \rangle$ désigne le cosinus de l'angle des deux vecteurs, et $|t|$ la longueur euclidienne du vecteur t .

Si $\alpha = 2$, on a la loi normale (cf. [6]).

Nous allons maintenant démontrer deux inégalités.

LEMME 2.1. — Soit ξ une variable aléatoire réelle dont la loi est la loi stable de fonction caractéristique $f(t) = e^{-c|t|^\alpha}$. Alors :

$$(1) \quad \text{P}(|\xi| \geq b) \leq K \frac{c}{b^\alpha}$$

pour tout $b > 0$, K étant une constante > 0 .

$$(2) \quad \text{P}(|\xi| \geq b) \leq K(\lambda) \frac{\|\xi_\lambda\|^\alpha}{b^\alpha}$$

où $\|\xi\|_\lambda$ désigne la quantité $[E(|\xi|^\lambda)]^{1/\lambda}$ même si cette quantité n'est pas une norme ($\lambda < 1$), et $K(\lambda)$ ne dépend que de λ (et α).

Démonstration. — Démontrons d'abord l'inégalité (1) :

$$\text{P}(|\xi| \geq b) = 2 \int_b^{+\infty} p_c(x, \alpha) dx \quad (b > 0)$$

Mais, d'après la proposition 2.1, pour $x \geq b$, on a :

$$p_1(x, \alpha) \leq \frac{K}{x^{\alpha+1}}$$

En outre.

$$p_c(x, \alpha) = \frac{1}{c^{1/\alpha}} p_1\left(\frac{x}{c^{1/\alpha}}, \alpha\right)$$

D'où :

$$P(|\xi| \geq b) = 2 \int_{b/c^{1/\alpha}}^{+\infty} p_1(x, \alpha) dx$$

$$P(|\xi| \geq b) \leq 2 \int_{b/c^{1/\alpha}}^{+\infty} \frac{K}{x^{\alpha+1}} dx$$

ce qui démontre l'inégalité (1).

L'inégalité (2) se déduit immédiatement de l'inégalité (1) à partir de la proposition 2.2.

DÉFINITION 2.3. — Soit T un ensemble. On appellera fonction aléatoire stable indexée par T une fonction aléatoire $(\xi(t), t \in T)$ telle que, pour toute partie finie (t_1, \dots, t_n) de T, la loi conjointe des variables aléatoires $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$ soit une loi stable symétrique sur \mathbb{R}^n .

Remarques.

2.1. Existence de fonctions aléatoires stables indexées par \mathbb{R}^k .

Il est déjà connu (voir par exemple (10)) qu'une loi stable sur \mathbb{R}^k définit une fonction aléatoire linéaire stable sur \mathbb{R}^k .

Mais, on peut construire directement des fonctions aléatoires stables sur \mathbb{R}^k , en donnant certaines conditions de cohérence au système des lois de $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$, permettant d'appliquer le théorème de Kolmogorov.

Notons $f_n(x_1, \dots, x_n)$ la transformée de Fourier d'un vecteur aléatoire à n dimensions du type $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$. Les conditions de cohérence sont, on le sait :

$$f_{n+1}(x_1, \dots, x_n, 0) = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

$$f_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = e^{-\gamma(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2})^\alpha} \int_{S_{n+1}} \frac{|x_1 \omega_1 + \dots + x_{n+1} \omega_{n+1}|}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2}} \mu_{n+1}(d\omega)$$

$$f_{n+1}(x_1, \dots, x_n, 0) = e^{-\gamma(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2})^\alpha} \int_{S_{n+1}} \frac{|x_1 \omega_1 + \dots + x_n \omega_n|}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \mu_{n+1}(d\omega)$$

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = e^{-\gamma(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2})^\alpha} \int_{S_n} \frac{|x_1 \omega_1 + \dots + x_n \omega_n|}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \mu_n(d\omega)$$

Il suffit donc de définir les lois f_n à partir d'un système de mesures μ_n vérifiant des conditions de cohérence de la forme :

$$\int_{S_{n+1}} \frac{|x_1\omega_1 + \dots + x_n\omega_n|}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \mu_{n+1}(d\omega) = \int_{S_n} \frac{|x_1\omega_1 + \dots + x_n\omega_n|}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \mu_n(d\omega)$$

En particulier, le système (μ_n) pourra être choisi de telle sorte que :

$\forall A \subset S_n$, A mesurable pour μ_n , A soit mesurable pour μ_{n+1} et $\mu_{n+1}(A) = \mu_n(A)$.

Un tel système de mesures est facile à construire. Donnons un exemple trivial pour montrer qu'il existe de tels systèmes : prenons sur la droite

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \delta(+1) + \frac{1}{2} \delta(-1)$$

et ensuite μ_{n+1} définit sur S_{n+1} par : μ_{n+1} portée par S_n et coïncidant avec μ_n sur S_n , soit

$$\mu_n = \frac{1}{2} \delta_{(1,0,\dots,0)} + \frac{1}{2} \delta_{(-1,0,\dots,0)}$$

2.2. Une propriété des fonctions aléatoires stables.

Soit $(\xi(t), t \in T)$ une fonction aléatoire stable. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout vecteur $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de \mathbb{R}^n , et toute famille (t_1, \dots, t_n) de T^n , la variable réelle

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi(t_i) \text{ a une loi stable symétrique.}$$

En effet, on a :

$$E\left(e^{i \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi(t_i)}\right) = e^{-\gamma |\lambda|^n \int_{S_n} |\cos \langle \omega, x \rangle|^n \mu(d\omega)}$$

pour tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ de \mathbb{R}^n .

Prenons $x = u\lambda$, $u \in \mathbb{R}$. On obtient :

$$E\left(e^{iu \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi(t_i)}\right) = e^{-\gamma |\lambda|^n |u|^n \int_{S_n} |\cos \langle \omega, \lambda \rangle|^n \mu(d\omega)}$$

Donc la fonction caractéristique de la variable aléatoire

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi(t_i)$$

est de la forme : $f(u) = e^{-c(\lambda) |u|^n}$, ce qu'il fallait démontrer.

3. QUELQUES PROPRIÉTÉS ANALYTIQUES DES TRAJECTOIRES DES FONCTIONS ALÉATOIRES STABLES SUR \mathbb{R}^k

Dans ce paragraphe, nous allons donner, pour les fonctions aléatoires stables sur \mathbb{R}^k , des conditions suffisantes : de continuité des trajectoires, pour que les trajectoires satisfassent des conditions de Hölder ; ou, pour les fonctions aléatoires stables sur \mathbb{R} , des conditions suffisantes de différentiabilité. Toutes ces conditions seront comparées à celles obtenues pour des fonctions aléatoires quelconques (cf. [2] et paragraphe 1), et nous verrons qu'elles sont plus précises.

PROPOSITION 3.1. — Soit $(\xi(t), t \in I)$ une fonction aléatoire stable indexée par $I = [0, 1]^k$. Posons

$$\mathcal{L}[\xi(t+h) - \xi(t)](x) = e^{-c|t+h|x^\alpha}$$

$\mathcal{L}(z)$ désignant la loi de la variable aléatoire z .

Soit g une fonction réelle d'une variable réelle, positive, $g(|h|)$ décroissant vers 0 lorsque $|h|$ décroît vers 0, et telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(2^{-n}) < \infty$$

La fonction aléatoire ξ admettra une modification ayant presque sûrement ses trajectoires continues sur I si :

$$(4) \quad C_{t+h}^t \leq \varphi(|h|)$$

où φ est telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{nk} \frac{\varphi(2^{-n})}{g^\alpha(2^{-n})} < \infty$$

En particulier, si on a les mêmes hypothèses en remplaçant les conditions de convergence de séries par :

$$\int_0^1 g(t) \frac{dt}{t} < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{g^\alpha(t) t^{k+1}} dt < \infty$$

on a la même conclusion.

Démonstration. — La démonstration est immédiate. Il suffit de considérer la proposition 1.1 et l'inégalité (1) du lemme 2.1.

Remarque 3.1. — La condition de la proposition 3.1 n'est pas vide. Considérons en effet une fonction aléatoire linéaire stable sur \mathbb{R} , définie par la loi stable symétrique de fonction caractéristique

$$e^{-c|h|x^\alpha} \quad 1 < \alpha < 2$$

Dans ces conditions, $\zeta(t+h) - \zeta(t) = \zeta(h)$, et

$$\mathcal{L}(\zeta(h))(x) = e^{-c|h|^\alpha|x|^\alpha}$$

On a donc ici $\varphi(|h|) = c|h|^\alpha$, qui satisfait les hypothèses de la proposition 3.1 (en prenant $g(t) = t^\delta$ avec $0 < \delta < \frac{\alpha-1}{\alpha}$).

En utilisant encore la proposition 1.1, puis l'inégalité (2) du lemme 2.1, nous obtenons :

PROPOSITION 3.2. — Soit $(\zeta(t), t \in \mathbb{I})$ une fonction aléatoire stable. Utilisons les notations de la proposition 3.1. Si on a :

$$\|\zeta(t+h) - \zeta(t)\|_\lambda \leq k(\lambda)\psi(|h|) \quad \forall t \in \mathbb{I}$$

(il suffit de supposer ceci pour une valeur de $\lambda/0 < \lambda < \alpha$. Si c'est vrai pour un λ , c'est vrai pour tout λ tel que $0 < \lambda < \alpha$), où ψ est une fonction positive, $\psi(|h|)$ décroissant vers 0 lorsque $|h|$ décroît vers 0, telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{nk} \left[\frac{\psi(2^{-n})}{g(2^{-n})} \right]^\alpha < \infty$$

alors la fonction aléatoire ξ admet une modification ayant presque sûrement ses trajectoires continues sur \mathbb{I} .

En particulier, on peut remplacer la condition de convergence de série par :

$$\int_0 \left[\frac{\psi(t)}{g(t)} \right]^\alpha \frac{dt}{t^{k+1}} < \infty,$$

les hypothèses de la proposition 3.2 sont vérifiées.

Remarque 3.2. — Comparons la proposition 3.2 et la proposition 1.2. Ces deux propositions sont issues de la proposition 1.1, mais l'une s'obtient à partir de l'inégalité de Markov, l'autre à partir de l'inégalité (2) du lemme 2.1.

Inégalité de Markov :

$$P(|Z| \geq a) \leq \frac{E(|Z|^\lambda)}{a^\lambda} \quad 0 < \lambda < \alpha$$

Inégalité (2) :

$$P(|Z| \geq a) \leq \left[\frac{E(|Z|^\lambda)}{a^\lambda} \right]^{\alpha/\lambda} \quad 0 < \lambda < \alpha$$

Donc, l'inégalité (2) donnera de meilleurs résultats que l'inégalité de Markov chaque fois que l'on choisira les fonctions g et q de la proposition 1.1 telles que $\frac{q(|h|)}{g(|h|)}$ tende vers 0 lorsque $|h|$ tend vers 0, ce qui sera toujours le cas pour obtenir des résultats intéressants.

Par exemple, dans le cas d'une fonction aléatoire stable, on aura la propriété [P] sous les hypothèses suivantes :

$$E(|\xi(t+h) - \xi(t)|^p) \leq K |h|^{\frac{k p}{\alpha} + \delta} \quad \forall \delta > 0$$

ou

$$E(|\xi(t+h) - \xi(t)|^p) \leq K \frac{|h|^{\frac{k p}{\alpha}}}{|\text{Log } |h||^{\frac{\alpha}{p} + r}} \quad \forall r > p$$

En utilisant les mêmes méthodes à partir du théorème 1.1, on obtient les résultats suivants :

PROPOSITION 3.3. — Soit $(\xi(t), t \in I)$ une fonction aléatoire stable. En utilisant les notations du théorème 1.1, si l'on a

$$\mathcal{L}(\xi(t+h) - \xi(t))(x) = e^{-c|t+h||x|^\alpha}$$

avec

$$(4) \quad C_{t+h}^t \leq \varphi(|h|)$$

où φ est une fonction positive, $\varphi(|h|)$ décroissant vers 0 lorsque $|h|$ décroît vers 0, telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{nk} \frac{\varphi(2^{-n})}{g^\alpha(2^{-n})} < \infty$$

alors ξ admet une modification η dont presque toutes les trajectoires satisfont des conditions de Hölder de type g (on peut remplacer la condition de convergence de série par

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{g^\alpha(t) t^{k+1}} dt < \infty)$$

PROPOSITION 3.4. — Avec les notations de la proposition 3.3, si on a :

$$\|\xi(t+h) - \xi(t)\|_\lambda \leq \psi(|h|)$$

où ψ est une fonction positive, $\psi(|h|)$ décroissant vers 0 lorsque $|h|$ décroît vers 0, telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{nk} \left[\frac{\psi(2^{-n})}{g^\alpha(2^{-n})} \right]^\alpha < \infty$$

alors on a la même conclusion que dans la proposition 3.3.

Par exemple, si $(\xi(t), t \in I)$ est une fonction aléatoire stable satisfaisant la condition :

$$E(|\xi(t+h) - \xi(t)|^p) \leq K |h|^{k\frac{p}{\alpha} + r} \quad r > 0$$

il existe une modification η de ξ satisfaisant des conditions de Lipschitz

$$|\eta(t+h) - \eta(t)| \leq K |h|^a$$

pour tout a tel que $0 < a < r/p$.

Si l'on considère la fonction aléatoire stable linéaire de la remarque 3.1, on obtient ainsi qu'elle satisfait des conditions de Lipschitz d'ordre a pour tout a tel que $0 < a < \frac{\alpha - 1}{\alpha}$ (à une modification près), ce qui montre par ailleurs que ces conditions ne sont pas nécessaires.

Considérons maintenant le cas d'une fonction aléatoire stable indexée par $[0, 1]$. On a alors les conditions suivantes, suffisantes pour que cette fonction aléatoire admette une modification ayant presque sûrement ses trajectoires continuellement différentiables.

PROPOSITION 3.5. — Soit $(\xi(t), t \in I =]0, 1])$ une fonction aléatoire stable.

Notons $\mathcal{L}(\xi(t+h) + \xi(t-h) - 2\xi(t)) = e^{-c|h|^\alpha}$. Soit g_1 une fonction positive, $g_1(|h|)$ décroissant vers 0 lorsque $|h|$ décroît vers 0, telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n g_1(2^{-n}) < \infty$$

Supposons que ξ satisfasse les conditions de la proposition 1.1 et en outre que :

$$(6) \quad C'_h \leq \varphi_1(|h|) \quad \forall t \in [0, 1]$$

où φ_1 est une fonction positive, $\varphi_1(|h|)$ décroissant vers 0 lorsque $|h|$ décroît vers 0, telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{\varphi_1(2^{-n})}{g_1^\alpha(2^{-n})} < \infty$$

Alors il existe une modification η de ξ telle que presque sûrement ses trajectoires aient une dérivée continue.

(On peut remplacer les conditions de convergence de séries par :

$$\int_0 g_1(x) \frac{dx}{x^2} < \infty \quad \text{et} \quad \int_0 \frac{\varphi_1(x) dx}{g_1^\alpha(x) x^2} < \infty$$

PROPOSITION 3.6. — Avec les notations de la proposition 3.5, si l'on a :

$$(7) \quad || \xi(t+h) + \xi(t-h) - 2\xi(t) ||_\lambda \leq \psi_1(|h|) \quad \forall t \in [0, 1]$$

où ψ_1 est une fonction positive, $\psi_1(|h|)$ décroissant vers 0 lorsque $|h|$ décroît vers 0, telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left[\frac{\psi_1(2^{-n})}{g_1(2^{-n})} \right]^\alpha < \infty$$

on a la même conclusion que celle de la proposition 3.5.

La démonstration de ces deux propositions est immédiate à partir du résultat général concernant la différentiabilité des trajectoires de fonctions aléatoires indexées par $[0, 1]$ (voir (2)).

Par exemple, si $(\xi(t), t \in [0, 1])$ est une fonction aléatoire stable telle que

$$E(| \xi(t+h) + \xi(t-h) - 2\xi(t) |^p) \leq K \frac{|h|^{p+\frac{p}{\alpha}}}{|\text{Log } |h||^{\frac{p}{\alpha+r}}} \quad \text{avec } r > p$$

alors ξ admet une modification ayant presque sûrement ses trajectoires continuellement différentiables.

En ce qui concerne la fonction aléatoire linéaire de la remarque 3.1, ces conditions sont trivialement satisfaites.

Remarque 3.3. — Cas des fonctions aléatoires gaussiennes sur \mathbb{R}^k .

On peut appliquer les résultats des propositions 1.1, et du théorème 1.1 aux fonctions aléatoires gaussiennes, en utilisant l'inégalité

$$P(| \xi(t+h) - \xi(t) | \geq b) \leq \frac{\sigma_t^h}{b} e^{-b^2(\sigma_t^h)^2}$$

où l'on note $\sigma_t^h = E(| \xi(t+h) - \xi(t) |^2)$.

On peut ainsi donner une condition suffisante pour que les trajectoires satisfassent une condition de Hölder :

Soit $(\xi(t), t \in I)$ une fonction aléatoire gaussienne centrée, $I = [0, 1]$. Supposons que :

$$E(|\xi(t+h) - \xi(t)|^2) \leq \varphi(|h|)$$

où φ est une fonction positive, $\varphi(|h|)$ décroissant vers 0 lorsque $|h|$ décroît vers 0, et telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{nk} \frac{\varphi(2^{-n})}{g(2^{-n})} e^{-\frac{g^2(2^{-n})}{\varphi^2(2^{-n})}} < \infty$$

où g est définie suivant les notations du théorème 1.1.

Alors ξ admet une modification η dont presque sûrement les trajectoires satisfont une condition de Hölder de type g .

Si l'on prend $g(|h|) = |h|^a$, $a > 0$, on obtient :

Si $E(|\xi(t+h) - \xi(t)|^2) \leq |h|^a$ alors il existe une modification η de ξ satisfaisant des conditions de Lipschitz

$$|\eta(t+h) - \eta(t)| < C|h|^a \quad \text{dès que } |h| < \delta$$

pour tout a tel que $0 < a < \alpha$.

En particulier, on retrouve le fait que la fonction aléatoire du mouvement brownien à plusieurs paramètres satisfait des conditions de Lipschitz d'ordre a tel que $0 < a < \frac{1}{2}$.

On peut même démontrer, par cette méthode, que la fonction aléatoire du mouvement brownien satisfait :

$$|\xi(t+h) - \xi(t)| \leq C|h|^{1/2} |\text{Log } |h||^b \quad \forall b > \frac{1}{2} \quad \text{si } |h| < \delta.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. CHEVET, Conditions d'existence de modifications uniformément continues de processus continus en probabilité. Non publié.
- [2] Harald CRAMER and M. R. LEADBETTER, *Stationary and related stochastic processes*. Wiley, 1967.
- [3] R. DUDLEY, Gaussian processes on several parameters. *Annals of Math. Stat.*, vol. 36, n° 3, juin 1965.
- [4] GNEDENKO-KOLMOGOROV, *Limit distributions for sums of independant random variables*. Nouvelle édition. Addison Wesley, 1968.

- [5] P. LÉVY, *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Deuxième édition revue et augmentée. Gauthier-Villars, 1965.
- [6] P. LÉVY, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. Gauthier-Villars, 1937.
- [7] LINNIK et IBRAGIMOV, *Nevacimié i stazionarno sviazanie*. Velitchnoui, Moscou, 1965.
- [8] J. NEVEU, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*. Masson, 1964.
- [9] ZOLOTAREV, Transformation de Mellin-Stieljes dans la théorie des probabilités. *Teoria Verioatnostëi ce primenenia*, t. 2, 1957, p. 444-469.
- [10] BRETAGNOLLE, DACUNHA-CASTELLE et J.-L. KRIVINE, Lois stables et espaces L^p . *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, t. 2, 1966, p. 231-259.

Manuscrit reçu le 13 octobre 1969.