ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

M. LITTAYE-PETIT
J.-L. PIEDNOIR
B. VAN CUTSEM

Introduction à la statistique mathématique. II. Exhaustivité

Annales de l'I. H. P., section B, tome 5, nº 4 (1969), p. 289-322
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1969__5_4_289_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. V, n° 4, 1969, p. 289-322. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Introduction à la statistique mathématique.

II. Exhaustivité

par

M. LITTAYE-PETIT
Faculté des Sciences de Brest,

J.-L. PIEDNOIR
Faculté des Lettres et Sciences humaines de Paris,

et

B. VAN CUTSEM
Faculté des Sciences de Caen

Nous n'étudierons dans ce chapitre que les sous-tribus exhaustives et minimales exhaustives sans nier l'importance et l'intérêt des statistiques exhaustives et minimales exhaustives, il nous a semblé utile, dans une première étape, de rassembler et d'approfondir les résultats épars dans la littérature statistique sur les propriétés des sous-tribus.

Nous n'utiliserons pas ici de propriétés de mesurabilité de l'espace des paramètres Θ. Aussi, adopterons-nous la notation $(\Lambda, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, ou $(\Lambda, \mathcal{A})$ désigne un espace mesurable et $\mathcal{P} = \{ P \}$ une famille de probabilités sur $(\Lambda, \mathcal{A})$.

II.1. SOUS-TRIBUS EXHAUSTIVES

A. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

a) Généralités.

Soit $(\Lambda, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\mathcal{P}$ une famille de probabilités sur $(\Lambda, \mathcal{A})$.

Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. $\widehat{\mathcal{B}}^{P}$ désignera la tribu complétée de $\mathcal{B}$ pour la mesure P et $\hat{\mathscr{B}}$ la complétée universelle de $\mathscr{B}$ pour la famille $\mathscr{P}$ c'est-à-dire :

$$\hat{\mathscr{B}}^{\mathscr{P}} = \bigcap_{P \in \mathscr{P}} \hat{\mathscr{B}}^{P}$$

On supposera que $\mathscr{A}$ est $\mathscr{P}$-complète, c'est-à-dire $\mathscr{A} = \hat{\mathscr{A}}^{\mathscr{P}}$.

DÉFINITION 1. — On dit que $\mathscr{B}_0$ est une sous-tribu de $\mathscr{B}_1$ presque sûrement par rapport à la famille $\mathscr{P}$ et on note :

$$\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{B}_1 \qquad [\mathscr{P}]$$

Si $\forall B_0 \in \mathscr{B}_0$, $\exists B_1 \in \mathscr{B}_1$ tel que :

$$\forall P \in \mathscr{P} \qquad P(B_0 \,\Delta\, B_1) = 0$$

Ce qui est équivalent à :

$$\hat{\mathscr{B}}_0^{\mathscr{P}} \subset \mathscr{B}_1^{\mathscr{P}}$$

Remarque. — Si on n'avait pas supposé $\mathscr{A} = \hat{\mathscr{A}}^{\mathscr{P}}$, on aurait, dans la définition précédente, imposé $B_0 \,\Delta\, B_1 \in \mathscr{A}$.

b) **Espérance conditionnelle.**

DÉFINITION 2. — Soit X une (ou une classe de P-équivalence de) variable aléatoire réelle positive sur $(\Lambda, \mathscr{A})$, l'espérance conditionnelle $E_P^{\mathscr{B}}X$ de X par rapport à la sous-tribu $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$ est la classe de P-équivalence des variables aléatoires X' $\mathscr{B}$-mesurables telles que :

$$\int_B X dP = \int_B X' dP_{\mathscr{B}} \qquad \forall B \in \mathscr{B}.$$

ou

$$\int XZ dP = \int X'Z dP_{\mathscr{B}} \qquad \forall Z\ \mathscr{B}\text{-mesurable},$$

positive $P_{\mathscr{B}}$ désignant la restriction de P à $(\Lambda, \mathscr{B})$.

$\forall p \geqslant 1$ $E_P^{\mathscr{B}}$ est un projecteur de $\mathscr{L}_+^p(\Lambda, \mathscr{A})$ ou de $L_+^p(\Lambda, \mathscr{A}, P)$ dans $L_+^p(\Lambda, \mathscr{B}, P_{\mathscr{B}})$.

LEMME. — Soient $(\Lambda, \mathscr{A})$ un espace mesurable, Q et P deux probabilités sur $(\Lambda, \mathscr{A})$, telles que Q soit absolument continue par rapport à P, $\dfrac{dQ}{dP} \in L_+^1(\Lambda, \mathscr{A}, P)$ la dérivée de Radon-Nikodym de Q par rapport à P.

Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $\forall$ Y v. a. i. positive définie sur $(\Lambda, \mathcal{A})$

$$E_P^{\mathcal{B}}Y \subset E_Q^{\mathcal{B}}Y$$

2. $\exists X \in \frac{dQ}{dP}$ tel que X soit $\mathcal{B}$-mesurable.

Démonstration.

$1 \Rightarrow 2$ Soit $X' \in \frac{dQ}{dP}$ on a:

$$\forall B \in \mathcal{B} \int_B X'^2 dP = \int_B X' dQ = \int_B E_Q^{\mathcal{B}} X' dQ_{\mathcal{B}}$$

d'après l'hypothèse

$$E_P^{\mathcal{B}}X' \subset E_Q^{\mathcal{B}}X'$$

d'autre part

$$\frac{dQ_{\mathcal{B}}}{dP_{\mathcal{B}}} = E_P^{\mathcal{B}}X'$$

donc

$$\forall B \in \mathcal{B} \int_B X'^2 dP = \int_B (E_P^{\mathcal{B}}X')^2 dP_{\mathcal{B}}$$

c'est-à-dire

$$(E_P^{\mathcal{B}}X')^2 = E_P^{\mathcal{B}}X'^2$$

donc $X' \in E_P^{\mathcal{B}}X'$ ce qu'il suffisait de montrer

$2 \Rightarrow 1$ Soit Y un v. a. r. positive définie sur $(\Lambda, \mathcal{A})$ et soit $Z \in E_p^{\mathcal{B}}Y$. On a:

$$\forall B \in \mathcal{B} \int_B Z dQ = \int Z 1_B X dP$$

$1_B X$ étant $\mathcal{B}$-mesurable on a:

$$\int_B Z dQ = \int Y 1_B X dP = \int_B Y dQ$$

donc $Z \in E_Q^{\mathcal{B}}Y$. On a bien montré que $E_P^{\mathcal{B}}Y \subset E_Q^{\mathcal{B}}Y$.

c) Sous-tribus exhaustives ; sous-tribus exhaustives minimales.

DÉFINITION 3. — Soit $(\Lambda, \mathscr{A})$ un espace mesurable, $\mathscr{P}$ une famille de probabilités sur $(\Lambda, \mathscr{A})$; $\mathscr{B}$, une sous-tribu de $\mathscr{A}$, est dite exhaustive pour $(\Lambda, \mathscr{A}, \mathscr{P})$ si :

$$\forall X \in \mathscr{L}_+^\infty(\Lambda, \mathscr{A}) \bigcap_{P \in \mathscr{P}} E_P^{\mathscr{B}} X \neq \emptyset$$

PROPOSITION 1. — *Transitivité de l'exhaustivité.* — Si $\mathscr{B}_0$ est exhaustive pour $(\Lambda, \mathscr{A}, \mathscr{P})$ et si $\mathscr{B}_1$ est exhaustive pour $(\Lambda, \mathscr{B}_0, \mathscr{P}_{\mathscr{B}_0})$, alors $\mathscr{B}_1$ est exhaustive pour $(\Lambda, \mathscr{A}, \mathscr{P})$.

Démonstration. — Cela résulte de :

$$E_P^{\mathscr{B}_1}[E_P^{\mathscr{B}_0} X] = E_P^{\mathscr{B}_1} X$$

PROPOSITION 2 (d'après [*4*]). — Soit $\{\mathscr{B}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-tribus de $\mathscr{A}$ exhaustives pour $(\Lambda, \mathscr{A}, \mathscr{P})$.

1. Si la suite $\{\mathscr{B}_n\}$ est monotone décroissante, alors $\bigcap_n \mathscr{B}_n$ est exhaustive pour $(\Lambda, \mathscr{A}, \mathscr{P})$.

2. Si la suite $\{\mathscr{B}_n\}$ est monotone croissante, alors la tribu $\bigvee_n \mathscr{B}_n$ engendrée par la famille $\{\mathscr{B}_n\}$ est exhaustive pour $(\Lambda, \mathscr{A}, \mathscr{P})$.

Démonstration. — Soit $X \in \mathscr{L}_+^\infty(\Lambda, \mathscr{A})$; $\forall P \in \mathscr{P}$, X est P-intégrable. $\forall n \in \mathbb{N}$ choisissons $Y_n \in \bigcap_{P \in \mathscr{P}} E_P^{\mathscr{B}_n} X$.

$\forall P \in \mathscr{P}$, $\{Y_n, \mathscr{B}_n, P\}$ forme une martingale équi-intégrable. La proposition en résulte.

LEMME 2. — Soit $(\Lambda, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé, $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux sous-tribus de $\mathscr{A}$ contenant chacune les ensembles de P-mesure nulle de $\mathscr{A}$. Soit $\mathscr{C} = \mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2$. Soit $\{\mathscr{B}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de sous-tribus définies par :

$$\mathscr{B}_n = \begin{cases} \mathscr{B}_1 & \text{si} \quad n = 2p + 1 \\ \mathscr{B}_2 & \text{si} \quad n = 2p \end{cases}$$

Soit $X \in \mathscr{L}_+^\infty(\Lambda, \mathscr{A})$ et $\{Y_n\}$ la suite de v. a. définies par :

$$Y_1 \in E_P^{\mathscr{B}_1} X, \qquad Y_n \in E_P^{\mathscr{B}_n} Y_{n-1} \qquad n \geqslant 2.$$

Alors $\lim_{n \to \infty} Y_n \in E_p^{\mathscr{C}} X$.

Démonstration. — $X \in \mathscr{L}_+^\infty(\Lambda, \mathscr{A})$ donc $X \in \mathscr{L}^2(\Lambda, \mathscr{A}, P)$. Dans

$$L^2(\Lambda, \mathscr{A}, P)$$

$E_P^{\mathscr{B}_1}$ est le projecteur orthogonal Π_1 sur $L^2(\Lambda, \mathscr{B}_1, P_{\mathscr{B}_1})$, $E_P^{\mathscr{B}_2}$ celui sur

$$L^2(\Lambda, \mathscr{B}_2, P_{\mathscr{B}_2}).$$

Il suffit de voir que le projecteur $(\Pi_1 \circ \Pi_2)^n$ converge vers le projecteur orthogonal de $L^2(\Lambda, \mathscr{C}, \mathscr{P})$.

PROPOSITION 3. — Soit $(\Lambda, \mathscr{A})$ un espace mesurable et $\mathscr{P}$ une famille de probabilités sur cet espace; soit $\mathscr{N}$ la tribu engendrée par les ensembles $\mathscr{P}$-nuls de $\mathscr{A}$. Si $\mathscr{B}_1$ (ou $\mathscr{B}_2$) contient $\mathscr{N}$ et si $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont exhaustives pour $(\Lambda, \mathscr{A}, \mathscr{P})$, il en est de même pour $\mathscr{C} = \mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2$.

Remarque. — Si $\mathscr{B}$ est $\mathscr{P}$-complète alors $\mathscr{B}$ contient $\mathscr{N}$.

Démonstration. — Supposons $\mathscr{N} \subset \mathscr{B}_1$; définissons $\{\mathscr{B}_n\}$ comme dans le lemme précédent et $\{Y_n\}$ par

si $X \in \mathscr{L}_+^\infty(\Lambda, \mathscr{A})$:

$$Y_1 \in \bigcup_{P \in \mathscr{P}} E_P^{\mathscr{B}_1} X, \qquad Y_n \in \bigcap_{P \in \mathscr{P}} E_P^{\mathscr{B}_n} X$$

Soient Y et Z définies par :

$$Y(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{p \to \infty} Y_{2p+1}(\omega) & \text{si la limite existe} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$Z(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{p \to \infty} Y_{2p}(\omega) & \text{si la limite existe} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a

$$Y \in \mathscr{L}^\infty(\Lambda, \mathscr{B}_1) \qquad \text{et} \qquad Z \in \mathscr{L}^\infty(\Lambda, \mathscr{B}_2)$$

Considérons $\hat{\mathscr{B}}_1^P$ et $\hat{\mathscr{B}}_2^P$.

D'après le lemme 2

$$\forall P \in \mathscr{P} \ \lim Y_n \in E_p^{\hat{\mathscr{B}}_1^P \cap \hat{\mathscr{B}}_2^P} X$$

Ce qui entraîne que $\{\omega \mid Y(\omega) \neq Z(\omega)\} \in \mathscr{N}$.
Puisque $\mathscr{N} \subset \mathscr{B}_1$, $Y - Z$ est $\mathscr{B}_1$-mesurable et aussi $Z = Y + (Z - Y)$.
Z est donc $\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2$ mesurable et :

$$\begin{array}{lll} & \forall P \in \mathscr{P} & Z \in E_P^{\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2} \\ & \forall P \in \mathscr{P} & Z \in E_P^{\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2}[E_p^{\hat{\mathscr{B}}_1^q \cap \hat{\mathscr{B}}_2^q} X] \\ \text{Donc} & \forall P \in \mathscr{P} & Z \in E_P^{\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2} X \end{array}$$

et $\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2$ est exhaustive.

COROLLAIRE. — Si $\{\mathscr{B}_n\}$ est une suite de sous-tribus exhaustives pour $(\Lambda, \mathscr{A}, \mathscr{P})$ et telles que $\mathscr{N} \subset \mathscr{B}_n$, alors $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n$ est exhaustive.

Démonstration. — On applique la proposition 3 pour montrer que

$$\mathscr{C}_n = \bigcap_{k=1}^{n} \mathscr{B}_k$$

est exhaustive pour $(\Lambda, \mathscr{A}, \mathscr{P})$ et ensuite la proposition 2 à la famille $\{\mathscr{C}_n\}$.

DÉFINITION 4. — Soit $(\Lambda, \mathscr{A}, \mathscr{P})$, $\mathscr{B}^*$ sous-tribu de $\mathscr{A}$-est dite minimale pour $(\Lambda, \mathscr{A}, \mathscr{P})$ si $\forall\, \mathscr{B}$ exhaustive pour $(\Lambda, \mathscr{A}, \mathscr{P})$, on a $\mathscr{B}^* \subset \mathscr{B}[\mathscr{P}]$.

d) Cas d'une famille $\mathscr{P}$ dominée.

Supposons la famille $\mathscr{P}$ de probabilités sur $(\Lambda, \mathscr{A})$ dominée par une mesure σ-finie. Ceci est équivalent (1) à l'existence d'une sous-famille dénombrable $\mathscr{P}^*$ qui lui est équivalente, c'est-à-dire :

$$(\forall A \in \mathscr{A})(\forall P \in \mathscr{P}^* P(A) = 0) \Rightarrow (\forall P \in \mathscr{P} P(A) = 0)$$

Soient $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$, les éléments de $\mathscr{P}^*$, et $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs dont la somme est égale à 1, alors $P_0 = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i P_i$ est une probabilité équivalente à $\mathscr{P}$.

THÉORÈME 1. — Soit $(\Lambda, \mathscr{A})$ un espace mesurable $\mathscr{P}$ une famille de probabilités sur cet espace, dominée par une mesure σ-finie et P_0 une probabilité équivalente à $\mathscr{P}$.

Soit $\mathscr{B}$ une sous-tribu de $\mathscr{A}$. Les deux propositions sont équivalentes :

(1) $\mathscr{B}$ est exhaustive pour $(\Lambda, \mathscr{A}, \mathscr{P})$

(2) $\forall P \in \mathscr{P} \quad \exists X_P \in \dfrac{dP}{dP_0}$ tel que X_P soit $\mathscr{B}$-mesurable.

Démonstration. — D'après le lemme 1, la proposition (2) est équivalente à :

$$(3) \qquad \forall P \in \mathscr{P} \qquad Y \in \mathscr{L}_+^\infty(\Lambda, \mathscr{A}) \qquad E_{P_0}^{\mathscr{B}} Y \subset E_P^{\mathscr{B}} Y$$

(2) $\Rightarrow$ (1) En effet (3) entraîne que

$$Y \in \mathscr{L}_+^\infty(\Lambda, \mathscr{A}) \qquad E_{P_0}^{\mathscr{B}} Y \subset \bigcap_{P \in \mathscr{P}} E_P^{\mathscr{B}} Y$$

$\bigcap_{P \in \mathscr{P}} E_P^{\mathscr{B}} Y$ est non vide, donc $\mathscr{B}$ est exhaustive.

(1) $\Rightarrow$ (2) Soit $Y \in \mathscr{L}^{\infty}_{+}(\Lambda, \mathscr{A})$

$$\forall B \in \mathscr{B} \int_B Y dP_0 = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \int Y dP_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \int_B E^{\mathscr{B}}_{P_i} Y dP_{i/\mathscr{B}}$$

En supposant la tribu $\mathscr{B}$ exhaustive, choisissons

$$Y' \in \bigcap_{P \in \mathscr{P}} E^{\mathscr{B}}_{P} Y$$

On a

$$\int_B Y dP_0 = \int_B Y' dP_{0|\mathscr{B}}$$

donc

$$Y' \in E^{\mathscr{B}}_{P_0} Y$$

et

$$E^{\mathscr{B}}_{P} Y \cap E^{\mathscr{B}}_{P_0} Y \neq \phi \qquad \forall P \in \mathscr{P}$$

P étant absolument continu par rapport à P_0 on a nécessairement :

$$E^{\mathscr{B}}_{P_0} Y \subset E^{\mathscr{B}}_{P} Y \qquad \forall P \in \mathscr{P}$$

Corollaire 1. — Si $\mathscr{B}$ est $\mathscr{P}$-complète,

$$\forall P \in \mathscr{P}, \qquad \forall X_P \in \frac{dP}{dP_0}$$

X_P est $\mathscr{B}$-mesurable.

Corollaire 2. — Soit $\mathscr{P}$ une famille dominée de probabilités sur $(\Lambda, \mathscr{A})$. Si $\mathscr{B}_0$ est exhaustive pour $(\Lambda, \mathscr{A}, \mathscr{P})$ et $\mathscr{B}_1$, est une sous-tribu de $\mathscr{A}$ telle que $\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{B}_1$, alors $\mathscr{B}_1$ est exhaustive pour $(\Lambda, \mathscr{A}, \mathscr{P})$.

Théorème 2. — Sous les mêmes hypothèses que le théorème 1

$$\forall P \in \mathscr{P}, \qquad \text{soit} \qquad X_P \in \frac{dP}{dP_0}.$$

Soit $\mathscr{B}^*$ la tribu engendrée par les X_P.

Alors $\mathscr{B}^*$ est une sous-tribu exhaustive minimale pour $(\Lambda, \mathscr{A}, \mathscr{P})$.

Démonstration. — En effet d'après le théorème 1, $\mathscr{B}^*$ est exhaustive.

Soit $\mathscr{B}$ exhaustive. $\forall P \in \mathscr{P}$, $X'_P \in \dfrac{dP}{dP_0}$, X'_P est $\mathscr{B}$-mesurable.

Soit $\mathscr{B}'$ la tribu engendrée par les X'_P. $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$ et $\mathscr{B}' = \mathscr{B}^*[\mathscr{A}, \mathscr{P}]$ car $\forall \mathscr{P} X_P = X'_P$, P presque partout. On a donc $\mathscr{B}^* \subset \mathscr{B}[\mathscr{A}, \mathscr{P}]$.

Remarque. — $\mathscr{B}^*$ dépend du choix des représentants dans $\frac{dP}{dP_0}$; seule $\widehat{\mathscr{B}}^{*\mathscr{P}}$ est unique si $\mathscr{A} = \widehat{\mathscr{A}}^{\mathscr{P}}$ c'est la plus petite tribu $\mathscr{P}$-complète qui soit exhaustive.

e) Importance de l'hypothèse de domination.

Les énoncés du corollaire 2 et du théorème 2 ci-dessus, ne sont plus vrais sans l'hypothèse de domination de la famille $\mathscr{P}$. Le premier exemple qui suit montre un cas où $\mathscr{B}_0$ est une sous-tribu exhaustive pour $(\Lambda, \mathscr{A}, \mathscr{P})$ avec $\mathscr{P}$ non dominée, et qu'il existe une sous-tribu $\mathscr{B}_1$ non exhaustive telle que $\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{B}_1$. Le deuxième exemple montre un cas ou il n'existe pas de sous-tribu minimale exhaustive pour $(\mathscr{A}, \mathscr{P})$ avec $\mathscr{P}$ non dominée.

Exemple 1 [*4*] : Soit $\Lambda = \mathbb{R}$, $\mathscr{A}$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, $\mathscr{P}$ la famille des lois de probabilités sur $(\Lambda, \mathscr{A})$ telles que :

$$P(A) = P(-A)$$

où $-A = \{\omega, -\omega \in A\}$, $\mathscr{P}$ n'est pas dominée.

Soit $\mathscr{B}_0 = \{A \mid A \in \mathscr{A}, A = -A\}$. $\mathscr{B}_0$ est exhaustive pour $(\Lambda, \mathscr{A}, \mathscr{P})$ car $\forall X \mathscr{L}^\infty(\Lambda, \mathscr{A})$, la variable aléatoire Y définie par :

$$2Y(\omega) = X(\omega) + X(-\omega)$$

vérifie :

$$\int_B X dP = \int_B Y dP \qquad \forall B \in \mathscr{B}_0 \qquad \forall P \in \mathscr{P}.$$

et par suite :

$$\forall P \in \mathscr{P} \qquad Y \in E_P^{\mathscr{B}_0} X$$

Nous allons construire une tribu $\mathscr{B}_1 \supset \mathscr{B}_0$, qui n'est pas exhaustive. Soit S un sous-ensemble de Λ, $S \notin \mathscr{A}$, tel que $0 \in S$ et $S = -S$.

Soit $\mathscr{B}_1 = \{A \cup B_0 \mid A \subset S, A \in \mathscr{A}, B_0 \in \mathscr{B}_0\}$. On a évidemment

$$\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{B}_1 \subset \mathscr{A}.$$

Montrons que $\mathscr{B}_1$ est une sous-tribu :

— $\varnothing \in \mathscr{B}_1$.

— $\mathscr{B}_1$ est stable par union dénombrable.

— Si $B_1 \in \mathscr{B}_1$, alors $B_1^c \in \mathscr{B}_1$; en effet, soit $B_1 = A \cup B_0$, avec $A \subset S$, $A \in \mathscr{A}$, $B_0 \in \mathscr{B}_0$. Posons $C_0 = (-A) \cup A$ et $C = C_0 \setminus A$. Nous avons $C_0 \subset S$, $C_0 \in \mathscr{B}_0$ et $C \subset S$.

Il en résulte donc

$$\begin{aligned} B_1^c &= A^c \cap B_0^c \\ &= (C \cup C_0^c) \cap B_0^c \\ &= (C \cap B_0^c) \cup (C_0^c \cap B_0^c) \end{aligned}$$

De cette facon, on exprime bien B_1^c comme union de deux ensembles, l'un $C \cap B_0^c \subset S$, $C \cap B_0^c \in \mathscr{A}$ et l'autre $C_0^c \cap B_0^c \in \mathscr{B}_0$, et par suite $B_1^c \in \mathscr{B}_1$.
$\mathscr{B}_1$ est donc bien sous-tribu de $\mathscr{A}$.

Supposons maintenant que $\mathscr{B}_1$ soit exhaustive pour $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$. Soient

$$X \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{A}) \qquad \text{et} \qquad Y \in E_P^{\mathscr{B}_1}(X), \qquad \forall P \in \mathscr{P}.$$

On a donc:

$$\int_{B_1} Y dP = \int_{B_1} X dP \qquad \forall P \in \mathscr{P} \qquad \text{et} \qquad \forall B_1 \in \mathscr{B}_1$$

en particulier si $B_1 = \varnothing \cup B_0$, $B_0 \in \mathscr{B}_0$

$$\int_{B_0} Y dP = \int_{B_0} X dP \qquad \forall P \in \mathscr{P} \qquad \text{et} \qquad \forall B_0 \in \mathscr{B}_0$$

ce qui montre qu'on a aussi $Y \in E_P^{\mathscr{B}_0}(X)$ $\forall P \in \mathscr{P}$. Y est donc $\mathscr{B}_0$-mesurable et par suite $Y(-\omega) = Y(\omega)$.

Soit maintenant $\omega \in S$. En prenant $B_1 = \{\omega\}$, on obtient

$$Y(\omega)P\{\omega\} = X(\omega)P\{\omega\} \qquad \forall P \in \mathscr{P},$$

par contre pour $\omega \in \Omega/S$ et $D = \{\omega, -\omega\}$, on obtient

$$2Y(\omega)P\{\omega\} = [X(\omega) + X(-\omega)]P\{\omega\} \qquad \forall P \in \mathscr{P}$$

comme $\forall \omega \in \Omega$, $\exists P \in \mathscr{P}$ tel que $P\{\omega\} > 0$, nous avons donc

$$Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si} \quad \omega \in S \\ \frac{1}{2}[X(\omega) + X(-\omega)] & \text{si} \quad \omega \in \Omega \setminus S. \end{cases}$$

Choisissons alors

$$X(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad \omega < 0 \\ +1 & \text{si} \quad \omega \geq 0 \end{cases}$$

X est $\mathscr{A}$-mesurable et Y vaut

$$Y(\omega) = \begin{cases} \neq 0 & \text{si} \quad \omega \in S \\ 0 & \text{si} \quad \omega \in \Omega - S \end{cases}$$

et par suite $S = \Omega - Y^{-1}\{0\} \in \mathscr{B}_1$. Il y a donc contradiction avec l'hypothèse $S \notin \mathscr{A}$. $\mathscr{B}_1$ ne peut être exhaustive.

Exemple 2 [3] Soit $\Omega = [0, 1[$ et $\mathscr{A}$ la tribu des boréliens de $[0, 1[$. A tout $\omega \in [0,1/2[$, on associe la probabilité m_ω, uniforme de support $\{\omega, \omega+1/2\}$. Soit $\mathscr{B}_\omega$ la tribu des boréliens soit contenant $\left\{\omega, \omega + \frac{1}{2}\right\}$, soit extérieurs à $\left\{\omega, \omega + \frac{1}{2}\right\}$. Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des probabilités non atomiques sur $[0, 1[$ et des m_ω. $\emptyset$ est ainsi le seul ensemble de mesure nulle $\forall P \in \mathscr{P}$. En outre, $\mathscr{P}$ n'est pas dominée.

Nous allons montrer qu'il n'existe pas de sous-tribu minimale exhaustive pour $\mathscr{P}$. Vérifions d'abord que $\mathscr{B}_\omega$ est exhaustive pour $\mathscr{P}$. En effet, soit $\omega_0 \in \Omega$ et soit $X \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{A})$. Soit Y la fonction définie par :

$$Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si} \quad \omega \notin \left\{\omega_0, \omega_0 + \frac{1}{2}\right\} \\ \frac{1}{2}\left[X(\omega_0) + X\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\right)\right] & \text{si} \quad \omega \in \left\{\omega_0, \omega_0 + \frac{1}{2}\right\} \end{cases}$$

Y est ainsi $\mathscr{B}_{\omega_0}$-mesurable et on a bien

$$\int_B Y dP = \int_B X dP \qquad \forall B \in \mathscr{B}_{\omega_0} \qquad \forall P \in \mathscr{P}$$

et ainsi $\mathscr{B}_{\omega_0}$ en exhaustive pour $\mathscr{P}$.

Supposons alors que $\mathscr{A}$ admette une sous-tribu minimale exhaustive $\mathscr{B}^*$. On a donc $\mathscr{B}^* \subset \mathscr{B}_\omega$, $[\mathscr{A}, \mathscr{P}]$, $\forall \omega \in \Omega$.

$$\mathscr{B}^* = \left\{ A \mid A \subset [0, 1[, \quad A \text{ borélien}, \quad \forall \omega \left\{\omega, \omega + \frac{1}{2}\right\} \subset A \quad \text{ou} \quad \forall \omega \left\{\omega, \omega + \frac{1}{2}\right\} \subset A^c \right\}$$

Si $Y \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{B}^*)$, on a donc $Y(\omega) = Y(\omega + 1/2)$, $\forall \omega \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$

Désignons par $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de l'ensemble $A \in \Omega$ et par Y_A une fonction $\mathscr{B}^*$-mesurable telle que $Y_A \in E_P^{\mathscr{B}^*}(\mathbf{1}_A)$, $\forall P \in \mathscr{P}$.

En particulier

$$Y_{\{\omega\}} = \frac{1}{2}[\mathbf{1}_{\{\omega\}} + \mathbf{1}_{\{\omega+\frac{1}{2}\}}]$$

vérifie :

$$Y_{\{\omega\}} \in E_P^{\mathscr{B}^*}[\mathbf{1}_{\{\omega\}}] \qquad \forall P \in \mathscr{P}.$$

Par ailleurs, puisque

$$\mathbf{1}_{[0,1/2[} \geqslant \mathbf{1}_{\{\omega\}}$$

nous avons

$$Y_{[0,1/2[} \geqslant \frac{1}{2}[\mathbf{1}_{\{\omega\}} + \mathbf{1}_{\{\omega+\frac{1}{2}\}}]$$

$\mathscr{P}$-p, sûrement $\forall \omega \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$

En fait $\varnothing$ étant le seul ensemble de P-mesure nulle quelle que soit $P \in \mathscr{P}$,

$$Y_{[0,1/2[} \geqslant \frac{1}{2}[\mathbf{1}_{\{\omega\}} + \mathbf{1}_{\{\omega\}+\frac{1}{2}}] \qquad \forall \omega \in [0, 1/2[$$

c'est-à-dire

$$Y_{[0,1/2[} \geqq \frac{1}{2}$$

Mais alors

$$\int_\Omega Y_{[0,1/2[} dm_\omega = \int_\Omega \mathbf{1}_{[0,1/2[} dm_\omega = \frac{1}{2} \qquad \forall \omega \in [0, 1/2[$$

donc

$$Y_{[0,1/2[} = 1/2$$

Or, si $\mathscr{B}^*$ est exhaustive, on doit avoir

$$\int_\Omega Y_{[0,1/2[} dP = \int_\Omega \mathbf{1}_{[0,1/2[} dP = 1/2 \qquad \forall P \in \mathscr{P}$$

ce qui n'est évidemment pas vérifié pour toute mesure de probabilité non atomique sur Ω. Il n'existe donc pas de sous-tribu minimale exhaustive pour $\mathscr{P}$.

f) Cas d'une tribu séparable [*4*].

Rappelons qu'une tribu $\mathscr{A}$ est dite séparable, si $\mathscr{A}$ est engendrée par une famille dénombrable de sous-ensembles de Ω.

PROPOSITION 6. — *Soit $\mathscr{A}$ une tribu séparable sur un ensemble Ω, $\mathscr{P}$ une famille de probabilités sur $(\Omega, \mathscr{A})$, $\mathscr{B}$ une sous-tribu* (1) *exhaustive pour $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$. Il existe alors une sous-tribu exhaustive séparable $\mathscr{B}_0$ telle que*

$$\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{B}_0 \vee \mathscr{N}$$

Démonstration. — Soit $\mathscr{A}_0$ une famille dénombrable engendrant $\mathscr{A}$.

$$\forall A \in \mathscr{A}_0, \qquad \exists Y_A \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{B})$$

(1) Voici un exemple où $\mathscr{A}$ est séparable et où $\mathscr{B}$ ne l'est pas: prenons $\Omega = \mathbb{R}$, et soit $\mathscr{A}$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$. La tribu $\mathscr{B}$ engendrée par les points n'est pas séparable.

telle que

$$P(A \cap B) = \int_B Y_A dP \qquad \forall P \in \mathscr{P}$$

Soit $\mathscr{B}_0$ la plus petite tribu par rapport à laquelle les fonctions Y_A, $A \in \mathscr{A}_0$ sont mesurables. $\mathscr{A}_0$ étant dénombrable, $\mathscr{B}_0$ est séparable. De plus $\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{B}$. Soit :

$$\mathscr{A}_1 = \{ A \mid A \in \mathscr{A}, \quad \exists Y \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{B}_0) \}$$

telle que

$$P(A \cap B) = \int_B Y dP \qquad \forall B \in \mathscr{B}, \qquad \forall P \in \mathscr{P}$$

Nous avons $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}$ et $\mathscr{A}_1$ est une classe monotone et comme

$$\sigma(\mathscr{A}_0) = \mathscr{A}.$$

Nous avons $\sigma(\mathscr{A}_1) = \mathscr{A}$. Il en résulte que $\mathscr{B}_0$ est exhaustive.

Il reste à montrer que $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}_0 \vee \mathscr{N}$.

Soit $A \in \mathscr{B}$. Alors $A \in \mathscr{A}$ et $\exists Y \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{B}_0)$ telle que

$$P(A \cap B) = \int_B Y dP \qquad \forall B \in \mathscr{B} \qquad \forall P \in \mathscr{P} \tag{1}$$

En particulier

$$0 = P[A \cap (\Omega - A)] = \int_{\Omega - A} Y dP \qquad \forall P \in \mathscr{P}$$

$$P(A) = P(A \cap A) = \int_A Y dP \qquad \forall P \in \mathscr{P}$$

Il en résulte donc, si X_A est la fonction caractéristique de l'ensemble A, que $X_A = Y[\mathscr{P}]$, puisque $0 \leq Y \leq 1$ [P] d'après (1). $X_A - Y$ est donc $\mathscr{N}$-mesurable et $X_A = Y + (X_A - Y)$ est $\mathscr{B}_0 \vee \mathscr{N}$-mesurable, et par suite $A \in \mathscr{B}_0 \vee \mathscr{N}$.

COROLLAIRE. — *Si $\mathscr{A}$ est séparable et si $\varnothing$ est le seul ensemble de* P-*mesure nulle* $\forall P \in \mathscr{P}$, *alors si $\mathscr{B}$ est exhaustive pour $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$ alors $\mathscr{B}$ est séparable.*

LEMME 4. — *Soit $\mathscr{B}$ une sous-tribu exhaustive pour $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$ et soit $A \in \mathscr{A}$. Alors la tribu engendrée par $\mathscr{B} \cup \{ A \}$ est exhaustive.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{C} = \sigma(\mathscr{B} \cup \{ A \})$, c'est-à-dire

$$\mathscr{C} = \{ (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A^c) \mid B_1 \in \mathscr{B}, B_2 \in \mathscr{B} \}$$

Pour les besoins de cette démonstration, nous désignerons par X′ une fonction de $\mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{B})$ obtenue à partir de $X \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{A})$ et telle que

$$X' \in E_P^{\mathscr{B}}(X) \qquad \forall P \in \mathscr{P}.$$

Soit U la fonction caractéristique de A, V celle de A^c. Soit $X \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{A})$. Posons :

$$Y_1(\omega) = \begin{cases} \dfrac{(XU)'(\omega)}{U'(\omega)} & \text{si} \quad U'(\mathscr{A}) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad U'(\omega) = 0 \end{cases}$$

et

$$Y_2(\omega) = \begin{cases} \dfrac{(XV)'(\omega)}{V'(\omega)} & \text{si} \quad V'(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad V'(\omega) = 0 \end{cases}$$

Ainsi Y_1 et Y_2 sont $\mathscr{B}$-mesurables et, soit

$$Y = UY_1 + VY_2$$

Y est ainsi $\mathscr{C}$-mesurable.

Puisque $0 \leq UX \leq X$, nous avons $0 \leq (UX)' \leq X'[\mathscr{P}]$ et de même

$$0 \leq (VX)' \leq X'[\mathscr{P}].$$

Soient B_1 et $B_2 \in \mathscr{B}$ et posons $C = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A^c)$. Alors

$$\begin{aligned} \int_{B_1 \cap A} Y dP &= \int_{B_1} UY_1 dP \\ &= \int_{B_1} (U'Y_1)' dP \\ &= \int_{B_1} U'Y_1 dP \\ &= \int_{B_1} (UX)' dP \\ &= \int_{B_1} UX dP \\ &= \int_{B_1 \cap A} X dP \qquad \forall P \in \mathscr{P} \end{aligned}$$

De même

$$\int_{B_2 \cap A'} Y dP = \int_{B_2 \cap A'} X dP, \qquad \forall P \in \mathscr{P}.$$

D'où

$$\int_C X dP = \int_C Y dP \qquad \forall P \in \mathscr{P}.$$

et $\mathscr{C}$ est exhaustive.

PROPOSITION 7. — *Soient* $\mathscr{B}_1$ *sous-tribu exhaustive pour* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$ *et* $\mathscr{B}_2$ *sous-tribu séparable de* $\mathscr{A}$, *alors* $\mathscr{B}_1 \vee \mathscr{B}_2$ *est exhaustive.*

Démonstration. — Soit $\{ B_n \}_{n \in N}$ une suite de sous-ensembles de Ω engendrant $\mathscr{B}_2$. Soit $\{ \mathscr{C}_n \}_{n \geq 0}$ une suite de sous-tribus définie par

$$\mathscr{C}_0 = \mathscr{B}_1$$
$$\mathscr{C}_n = \mathscr{C}_{n-1} \vee \{ B_n \} \qquad \forall_n \geq 1$$

D'après le lemme précédent $\mathscr{C}_n$ est exhaustive, $\forall_n \geq 0$. Il est évident que

$$\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}_2 \subset \ldots \subset \mathscr{C}_n \subset \qquad \text{et} \qquad \bigvee_n \mathscr{C}_n = \mathscr{B}_1 \vee \mathscr{B}_2.$$

$\mathscr{B}_1 \vee \mathscr{B}_2$ est donc exhaustive.

COROLLAIRE — Si $\mathscr{B}$ est une sous-tribu séparable contenant une sous-tribu exhaustive pour $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$, alors $\mathscr{B}$ est exhaustive.

PROPOSITION 8. — *Soit* $\mathscr{A}$ *une tribu séparable sur* Λ, $\mathscr{P}$ *une famille de probabilités sur* $(\Lambda, \mathscr{A})$. *Si* $\mathscr{B}_1$ *et* $\mathscr{B}_2$ *sont des tribus exhaustives pour* $(\mathscr{A}, \mathscr{P})$ *alors* $\mathscr{B}_1 \vee \mathscr{B}_2$ *est exhaustive.*

Démonstration. — D'après la proposition 6, il existe $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ séparables et exhaustives pour $(\mathscr{A}, \mathscr{P})$ telles que

$$\mathscr{C}_i \subset \mathscr{B}_i \subset \mathscr{C}_i \vee \mathscr{N} \qquad i = 1, 2$$

$\mathscr{C}_1 \vee \mathscr{C}_2$ étant exhaustive pour $(\mathscr{A}, \mathscr{P})$ d'après la proposition 7 et comme

$$\mathscr{C}_1 \vee \mathscr{C}_2 \subset \mathscr{B}_1 \vee \mathscr{B}_2 \subset \mathscr{C}_1 \vee \mathscr{C}_2 \vee \mathscr{N}$$

$\mathscr{B}_1 \vee \mathscr{B}_2$ est exhaustive.

COROLLAIRE. — Si $\mathscr{A}$ est une tribu séparable, si $\{ \mathscr{B}_n \}$ est une suite de sous-tribus exhaustives pour $(\mathscr{A}, \mathscr{P})$, alors $\bigvee_n \mathscr{B}_n$ est exhaustive.

En effet d'après la proposition 8, $\forall_n$, $\bigvee_{k=1}^{k=n} \mathscr{B}_k$ est exhaustive.

$\bigvee_n \mathscr{B}_n$ est donc exhaustive d'après la proposition 4.

g) Équivalence par exhaustivité.

Nous répondons ici, partiellement, à une question posée au chapitre I : l'exhaustivité permet-elle de définir une relation d'équivalence sur les structures expérimentales.

La réponse est simple pour les sous-tribus d'un espace donné :

PROPOSITION. — Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace mesurable, $\mathscr{P}$ une famille de probabilités sur $\mathscr{A}$. Soit $\mathscr{N}$ la tribu engendrée par les éléments de P-mesure nulle de $\mathscr{A} \forall P \in \mathscr{P}$. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des sous-tribus de $\mathscr{A}$ contenant $\mathscr{N}$.

La relation :

$$(\mathscr{B}_1 \sim \mathscr{B}_2) \Leftrightarrow (\exists \mathscr{B}_{1\,2} \in \mathscr{F})$$

$(\mathscr{B}_{1\,2}$ exhaustive pour $(\Omega, \mathscr{B}_1, \mathscr{P})$ et $(\Omega, \mathscr{B}_2, \mathscr{P}))$, est une relation d'équivalence sur $\mathscr{F}$.

Démonstration. — Soit $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$, $\mathscr{B}_3$ trois tribus de $\mathscr{F}$. $\mathscr{B}_{1\,2}$ exhaustive *de* $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$, $\mathscr{B}_{2\,3}$ exhaustive de $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_3$.

Par la proposition 5 $\mathscr{B}_{2\,3} \cap \mathscr{B}_{1\,2}$ est exhaustive de $\mathscr{B}_2$. Elle l'est donc et de $\mathscr{B}_{1\,2}$ et de $\mathscr{B}_{2\,3}$. Par la proposition 3 elle est donc exhaustive et de $\mathscr{B}_1$ et de $\mathscr{B}_3$.

Le passage aux structures expérimentales est plus difficile.

DÉFINITION 4. — Soit $\mathscr{E}$ la catégorie « structure expérimentale »,

$$u : (X, \mathscr{X}, P_X^\Theta) \to (Y, \mathscr{Y}, P_Y^\Theta),$$

un morphisme de $\mathscr{E}$.

u [resp $(Y, \mathscr{Y}, P_Y^\Theta)$] est dit *exhaustif* de $(X, \mathscr{X}, P_X^\Theta)$ (resp *objet exhaustif*) si la tribu $u^{-1}(\mathscr{Y})$ est exhaustive de $(X, \mathscr{X}, P_X^\Theta)$ (de $X, \mathscr{X}, P_X^\Theta$).

PROPOSITION. — Soit $\mathscr{E}$ catégorie « structure expérimentale », telle que pour tout objet $(X, \mathscr{X}, P_X^\Theta)$ de $\mathscr{E}$, il existe une probabilité λ_X^* sur X, qui domine P_X^Θ.

Alors, dans $\mathscr{E}$, la relation « posséder un objet exhaustif commun » est une relation d'équivalence.

Démonstration. — Nous désignerons les espaces $(X, \mathscr{X}, P_X^\Theta)$ par X ; soit X_1, X_2, X_3 trois objets de $\mathscr{E}$. $X_{1\,2}$ exhaustif de X_1 et X_2, $X_{2\,3}$ exhaustif de X_2 et X_3, $u_1 : X_1 \to X_{1\,2}$, $u_2 : X_2 \to X_{1\,2}$, $v_2 : X_2 \to X_{2\,3}$, $v_3 : X_3 \to X_{2\,3}$ les applications correspondantes

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[dr, "u_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "u_2"'] \arrow[dr, "v_2"] & & X_3 \arrow[dl, "v_3"] \\
& X_{1\,2} & & X_{2\,3} &
\end{tikzcd}$$

On pose $\lambda_2 : \lambda^*_{X_2}$.

La tribu $u_1^{-1}u_2^{-1}(\mathscr{X}_{1\,2})$ étant exhaustive dans $(X_2, \mathscr{X}_2, P^\Theta_{X_2})$ il existe pour tout θ une variable

$$a_u(\theta, .) \in \frac{dP\theta}{d\lambda_2}$$

qui est $u_2^{-1}(\mathscr{X}_{1\,2})$ mesurable (théorème 1).

Soit α_u l'application de X_2 dans $\overline{\mathbb{R}}^\Theta$ (muni de sa tribu de Baire) définie par $(a_u(\theta, .), \theta \in \Theta)$. Chaque $a_u(\theta, .)$ factorise à travers u_2 (cf. par exemple Meyer [6], p. 27) il en est de même de α_u et il existe donc β_u mesurable de $X_{1\,2}$ dans $\overline{\mathbb{R}}^\Theta$ telle que $\alpha_u = \beta_u \circ u_2$.

On construira de même α_v de X_2 dans $\overline{\mathbb{R}}^\Theta$ et β_v de $X_{2\,3}$ dans $\overline{\mathbb{R}}^\Theta$, telles que $\alpha_v = \beta_v \circ v_2$ et $\alpha_v = (a_v(\theta, .), \theta \in \Theta)$,

$$a_v(\theta, .) \in \frac{dP^\theta}{d\lambda_2}$$

Par le théorème 2, si nous désignons par $\mathscr{B}$ la tribu de Baire de $\overline{\mathbb{R}}^\Theta$, $\alpha_u^{-1}(\mathscr{B})$ est exhaustive de $(X_2, \mathscr{X}_2, P^\Theta_{x_2})$. Soit f une fonction intégrable réelle définie sur $X_{1\,2}$ et $\mathscr{X}_{1\,2}$ mesurable.

Il existe $G \in E_P^{\alpha_u^{-1}(\mathscr{B})}(f \circ u)$, $\forall P \in \{ P^\theta_{X_2}, \theta \in \Theta \}$ (*). $\beta_u^{-1}(\mathscr{B})$ est donc exhaustive pour $(X_{1\,2}, \mathscr{X}_{1\,2}, P^\Theta_{X_{1\,2}})$.

Posons alors $\alpha_1 = \beta_u \circ u_1$. Par la proposition 3 : $\alpha_1^{-1}(\mathscr{B})$ est exhaustive de $(X_1, \mathscr{X}_1, P^\Theta_{X_1})$.

On posera de manière analogue $\alpha_3 = \beta_v \circ v_3$ et on aura une conclusion analogue.

La proposition sera démontrée si nous prouvons enfin que :

$$(\overline{\mathbb{R}}^\Theta, \mathscr{B}, \alpha, (P^\Theta_{X_1})) \qquad \text{et} \qquad (\overline{\mathbb{R}}^\Theta, \mathscr{B}, \alpha_3, (P^\Theta_{X_2}))$$

(*) Comme $\alpha_u^{-1}(\mathscr{B}) = u_2^{-1}[\beta_u^{-1}(\mathscr{B})]$ on peut écrire $\mathfrak{G} = g_0 u$, où g est $\beta_u^{-1}(\mathscr{B})$ mesurable. D'où :

$$g \in E_P \beta_u^{-1}(\mathscr{B})(f), \qquad \forall P \in \{ P^\theta_{x_{1\,2}}, \theta \in \Theta \}.$$

sont isomorphes dans $\mathscr{E}$. Pour cela il suffit de montrer que:

$$\alpha_1(P^{\Theta}_{X_1}) = \alpha_3(P^{\Theta}_{X_3})$$

soit encore

$$\alpha_u(P^{\Theta}_{X_2}) = \alpha_v(P^{\Theta}_{X_2}).$$

soit encore, pour chaque $P \in \{ P^{\Theta}_{X_2},\ \theta \in \Theta \}$, que $\alpha_u(P) = \alpha_v(P)$.

Par passage aux limites projectives (cf. par exemple Meyer [6], p. 81) il suffit de le montrer en se restreignant aux parties finies de Θ, c'est dire que pour toute famille de boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$, $B_1, B_2, \ldots, B_n$,

$$\alpha_u(P)[B_1 \times \ldots \times B_n] = \alpha_v(P)[B_1 \times \ldots \times B_n]$$

(en supposant maintenant Θ fini, contenant n éléments $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$).

Or

$$\alpha_u(P)[B_1 \times \ldots \times B_n] = P[a_u(\theta_1)^{-1}(B_1) \cap \ldots \cap a_u(\theta_n)^{-1}(B_n)]$$

et on a une relation analogue avec v.

Or $a_u(\theta_i) = a_v(\theta_i)$P presque sûrement (P étant dominée par λ_2). Posons

$$E_i = \{ x \in X_2 \mid a_u(\theta_i, x) = a_v(\theta_i, x) \}, \qquad P(E_i) = 1,$$

et

$$a_u(\theta_i)^{-1}(B_i \cap E_i) = a_v(\theta_i)^{-1}(B_i \cap E_i)$$

La démonstration résulte alors de:

$$P[a_u(\theta_1)^{-1}(B_1) \cap \ldots \cap a_u(\theta_n^{-1})(B_n)]$$
$$= P[a_u(\theta_1)^{-1}(B_1) \cap \ldots \cap a_u(\theta_n)^{-1} \cap E_1 \cap \ldots \cap E_n]$$

B. APPLICATION EN THÉORIE DE LA DÉCISION

a) **Définitions.**

Soient $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace mesurable (espace des observations), $\mathscr{P}$ une famille de probabilités sur $\mathscr{A}$, $(D, \mathscr{D})$ un espace mesurable (espace des décisions).

DÉFINITION 5. — Une *stratégie $\mathscr{A}$-mesurable* est une probabilité de transition S^{Ω}_{D} de $(\Omega, \mathscr{A})$ dans $(D, \mathscr{D})$ c'est-à-dire une application

$$\Omega \times \mathscr{D} \rightarrow [0,1]$$

telle que pour $d \in \mathscr{D}$ fixé l'application $\omega \rightarrow S_d^\omega$ soit $\mathscr{A}$-mesurable et pour ω fixé l'application $\underline{d} \rightarrow S_{\underline{d}}^\omega$ est une probabilité sur $(D, \mathscr{D})$.

A une stratégie S et à une probabilité P de $\mathscr{P}$, on associe la probabilité $\lambda_P(S)$ sur $(D, \mathscr{D})$ définie par

$$\lambda_P(S, \underline{d}) = \int_\Omega S_{\underline{d}}^\omega dP(\omega) \qquad \forall \underline{d} \in \mathscr{D}.$$

DÉFINITION 6 [*2*]. — Deux stratégies S et T sont $\mathscr{P}$-équivalentes si :

$$(\forall P \in \mathscr{P})(\forall \underline{d} \in \mathscr{D})(\lambda_P(S, \underline{d}) = \lambda_P(T, \underline{d}))$$

Le théorème suivant étend aux probabilités de transition la propriété caractéristique des sous-tribus exhaustives.

THÉORÈME 3 [*2*]. — Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace mesurable, $\mathscr{P}$ une famille de probabilités sur $(\Omega, \mathscr{A})$ et $\mathscr{B}$ une sous-tribu de $\mathscr{A}$. Soit D un borélien d'un compact métrisable, muni de la tribu borélienne induite $\mathscr{D}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $\mathscr{B}$ est une sous-tribu exhaustive pour $(\mathscr{A}, \mathscr{P})$.

(2) Pour toute stratégie S_D^Ω, $\mathscr{A}$-mesurable, il existe T_D^Ω, stratégie $\mathscr{B}$-mesurable, $\mathscr{P}$-équivalente de S_D^Ω, et telle que :

$$(\forall P \in \mathscr{P})(\forall \underline{d} \in \mathscr{D})(T_{\underline{d}}^\Omega \in E_P^{\mathscr{B}}(S_{\underline{d}}^\Omega)).$$

Démonstration.

(1) $\Rightarrow$ (2). D est homéomorphe à un borélien de $A = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Soit
$$A_n = \{0, 1\}^n.$$

S_D^Ω induit une transition S_A^Ω d'ou des transitions $S_{A_n}^\Omega$. Les espaces A_n étant finis, nous pouvons trouver une transition $T_{A_n}^\Omega$ telle que pour toute partie $\underline{a_n}$ de A_n, $T_{\underline{a_n}}^\Omega \in E^{\mathscr{B}}(S_{\underline{a_n}}^\Omega)$. Soit $n_1 < n_2$ deux entiers. L'ensemble des ω tels que $T_{A_{n_1}}^\Omega$ n'est pas l'image de $T_{A_{n_2}}^\Omega$ est un ensemble $N(n_1, n_2)$, mesurable, et de mesure nulle quel que soit $P \in \mathscr{P}$.

Sauf pour les ω de $N = \bigcup_{n_1 < n_2} N(n_1, n_2)$, ensemble de $\mathscr{P}$ mesure nulle quel que soit $P \in \mathscr{P}$, $\{T_{A_n}^\omega\}_{n \in \mathbb{N}}$ est un système projectif de probabilités. Il définit une probabilité T_A^ω, et l'application $\omega \rightarrow T_{\underline{a}}^\omega$ est mesurable (on la prolonge par une probabilité arbitraire sur N). En outre $T_{\underline{a}}^\Omega \in E^{\mathscr{B}} S_{\underline{a}}^\Omega$ (Ceci est vrai pour les compacts par limite projective, donc pour la σ-algèbre engendrée). Enfin l'ensemble des ω tel que $T_D^\Omega \neq 1$ est de mesure nulle (car $1 \geq T_{\underline{D}}^\Omega \geq 0$ et $T_{\underline{D}}^\Omega = E^{\mathscr{B}} S_{\underline{D}}^\Omega = 1$ ps.) quel que soit $P \in \mathscr{P}$. On modifie T de manière arbitraire sur cet ensemble.

L'équivalence est immédiate.

Remarque. — Si la famille $\mathcal{P}$ est dominée on peut démontrer le même théorème pour un compact quelconque, en utilisant le théorème de relèvement de manière analogue au problème de la désintégration des mesures (cf. chapitre III).

2) $\Rightarrow$ 1) $\forall f \in \mathcal{L}_+^\infty(\Omega, \mathcal{A})$, $\dfrac{f}{\| f \|_\infty}$ est une application $\mathcal{A}$-mesurable de Ω dans $[0, 1]$. Soit a et b deux points de D et $d \in \mathcal{D}$. Posons :

$$S_{\underline{d}}^{\omega} = \frac{f(\omega)}{\| f \|_\infty} \mathbf{1}_d(a) + \left(1 - \frac{f(\omega)}{\| f \|_\infty}\right) \mathbf{1}_{\underline{d}}(b)$$

S_D^Ω ainsi définie est une stratégie $\mathcal{A}$-mesurable. Il existe donc T_D^Ω, stratégie $\mathcal{B}$-mesurable, telle que $T_{\underline{d}}^\Omega \in E_P^{\mathcal{B}}(S_{\underline{d}}^\Omega)$ $\forall P \in \mathcal{P}$. Posons alors $f' = \| f \|_\infty T_{\underline{d}}^\Omega$. f' est $\mathcal{B}$-mesurable et vérifie $f' \in E_P^{\mathcal{B}}(f)$ $\forall P \in \mathcal{P}$. $\mathcal{B}$ est donc exhaustive,

COROLLAIRE. — *Si $\mathcal{B}$ est exhaustive pour $(\mathcal{A}, \mathcal{P})$, alors a toute stratégie $\mathcal{A}$-mesurable correspond une stratégie $\mathcal{B}$-mesurable équivalente.*

Démonstration. — Soient S_D^Ω et T_D^Ω les stratégies précédentes.

$$\forall \underline{d} \in \mathcal{D}, \qquad \forall P \in \mathcal{P}, \qquad T_{\underline{d}}^\Omega \in E^{\mathcal{B}}(S_{\underline{d}}^\Omega),$$

donc

$$\int_\Omega T_{\underline{d}}^\Omega dP = \int_\Omega S_{\underline{d}}^\Omega dP$$

c'est-à-dire

$$\lambda_P(S, \underline{d}) = \lambda_P(T, \underline{d}) \qquad \begin{array}{l} \forall P \in \mathcal{P} \\ \forall \underline{d} \in \mathcal{P} \end{array}$$

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] P. R. HALMOS et L. J. SAVAGE, Applications of the Radon-Nikodym theorem to the theory of sufficient statistics. *Annals of Mathematical Statistics*, **20**, 1949, p. 225-241

[*2*] R. R. BAHADUR, Sufficiency and statistical decision functions. *Annals of Mathematical Statistics*, **25**, 1954, p. 423-462.

[*3*] T. S. PITCHER, Sets of measures not admitting necessary and sufficient statistics or subfields. *Annals of Mathematical Statistics*, **28**, 1957, p. 267-268.

[*4*] D. L. BURKHOLDER, Sufficiency in the undominated case. *Annals of Mathematical Statistics*, **32**, 1961, p. 1191-1200.

[*5*] P. L. HENNEQUIN et A. TORTRAT, *Théorie des probabilités et quelques applications*. Masson, 1965.

[*6*] P. A. MEYER, *Probabilités et Potentiel*. Hermann, 1966.

II.2. EXHAUSTIVITÉ GÉNÉRALISÉE

Dans [1] Le Cam introduit une méthode de comparaison de deux expériences et une notion de sous-expériences exhaustives conduisant à celle d'exhaustivité affaiblie ; celle-ci ne diffère pas de l'exhaustivité classique dans le cas dominé et en conserve certaines propriétés dans le cas général. Par contre, pour obtenir des résultats analogues à ceux de II, 1), B il faut généraliser la notion de transition.

Nous allons exposer certains résultats de [1] en étudiant leurs rapports avec la théorie classique.

A. INTRODUCTION ET NOTATIONS

La définition suivante est propre à cette partie. Le lien avec la théorie classique est fait à la remarque 1 ci-dessous. Si X est un ensemble, $\mathscr{L}^\infty(X)$ désignera l'ensemble des fonctions réelles bornées sur X, muni de sa structure de treillis de Banach.

DÉFINITION 1. — Une expérience $\mathscr{E} = (\Omega, E, \mathscr{P})$ est constituée :

— d'un ensemble Ω,

— de E sous-treillis de Banach de $\mathscr{L}^\infty(\Omega)$ contenant 1,

— d'une famille $\mathscr{P}$ de formes linéaires positives de norme un, σ continues pour l'ordre sur E.

Remarques.

1) Si Ω est muni d'une tribu $\mathscr{A}$ et E est $L^\infty(\Omega, \mathscr{A})$ toute probabilité sur $\mathscr{A}$ définit une forme linéaire positive de norme un σ-continue pour l'ordre sur E et réciproquement. On retrouve donc la notion classique d'expérience ou $\mathscr{E} = (\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$.

2) Le Cam [1] n'impose pas aux éléments de $\mathscr{P}$ d'être σ-continues pour l'ordre. Cette condition est vérifiée dans le cas classique et dans le cas ou Ω est un compact et $E = \mathscr{C}(\Omega)$, cas qui nous intéressent ici.

DÉFINITION 2. — A toute expérience $\mathscr{E} = (\Omega, E, \mathscr{P})$ on associe

— $L(\mathscr{E})$ idéal formé par la bande engendrée par $\mathscr{P}$ dans le dual de Riesz de E,

— $M(\mathscr{E})$ dual de Riesz de $L(\mathscr{E})$.

PROPRIÉTÉS

a) E est un (M) espace avec unité 1. Il existe donc un compact X_0 et un isomorphisme de treillis de Banach (isomorphisme de Kakutani) de E sur $\mathscr{C}(X_0)$.

b) $L(\mathscr{E})$ est un (L) espace. Tout élément de $L(\mathscr{E})$ est σ-continu pour l'ordre sur E.

c) $M(\mathscr{E})$ est un treillis complet (à la différence de E) et un (M) espace avec unité I_E définie par $\langle \lambda, I_E \rangle = \| \lambda^+ \|^+ - \| \lambda^- \|$.

Le compact X de l'isomorphisme de Kakutani est donc hyperstonien car :

d) $L(\mathscr{E})$ s'identifie à l'idéal fermé du dual de Riesz de $M(\mathscr{E})$ formé des formes linéaires continues pour l'ordre (ou encore mesures normales sur X).

e) Soit $\sigma : E \to M(\mathscr{E})$ l'application définie par

$$\langle \lambda, \sigma(f) \rangle = \langle \lambda, f \rangle \qquad (\forall \lambda \in L(\mathscr{E}))$$

σ est linéaire, positive et vérifie $\sigma(1) = I_E$ ainsi que $\sigma(f \vee g) = \sigma(f) \vee \sigma(g)$ (La seule propriété non évidente est $\sigma(f^+) = [\sigma(f)]^+$. Pour cela voir [*2*] dans le cas général, les cas $E = \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{A})$ et $E = \mathscr{C}(X)$, X compact, permettent une démonstration directe plus simple).

f)
$$\sigma\Big(\bigvee_{n \in N} f_n\Big) = \bigvee_{n \in N} \sigma(f_n)$$

en effet d'après *e*) on peut supposer $0 < f_n \uparrow f$ et d'après *b*)

$$(\forall \lambda \in L(\mathscr{E})) \ \langle \lambda, \bigvee_n \sigma(f_n) \rangle = \sup_n \langle \lambda, \sigma(f_n) \rangle = \sup_n \langle \lambda, f_n \rangle = \langle \lambda, f \rangle$$

g) Cas classique : $E = \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{A})$.

Soit $\mu \in L(\mathscr{E})$, $\mu \geqslant 0$, $\| \mu \| = 1$.

Notons L^μ la bande de $L(\mathscr{E})$ engendrée par μ, M^μ la bande de $M(\mathscr{E})$, polaire de la bande orthogonale à L^μ dans $L(\mathscr{E})$.

L^μ est isomorphe à $L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ et M^μ est isomorphe à $L^\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. En particulier si la famille $\mathscr{P}$ est dominée, soit

$$\mu = \sum_1^\infty a_i P_i, \qquad \Big(a_i \geqslant 0, \sum_1^\infty a_i = 1, P_i \in \mathscr{P}\Big)$$

une mesure dominante, l'on a

$$L(\mathscr{E}) \sim L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \qquad \text{et} \qquad M(\mathscr{E}) \sim L^\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$$

h) Lorsque bous ne faisons pas de référence à une topologie précise, dans un treillis vectoriel X.

$x_\alpha \uparrow x$ signifie que $\{ x_\alpha \}$ est filtrant supérieurement et $= \bigvee_\alpha x_\alpha$.

x_α converge vers x signifie : $\exists y_\alpha \uparrow x$ et $z_\alpha \downarrow x$ avec $\forall_\alpha$, $y_\alpha \leq x_\alpha \leq z$.

$A \subset X$ est fermé signifie : si $\{ x_\alpha \} \subset A$ et $x_\alpha \to x$ alors $x \in A$. Une application linéaire positive T de X dans Y sera dite continue si $x_\alpha \to x$ dans X entraîne $T(x_\alpha) \to T(x)$ dans Y.

Dans $M(\mathscr{E})$ la topologie définie par les fermés au sens précédent est plus fine que la topologie $\sigma(M, L)$ mais tout sous-treillis vectoriel de $M(\mathscr{E})$ fermé pour $\sigma(M, L)$ est aussi fermé au sens précédent [3].

i) $M(\mathscr{E})$ sera muni d'une structure d'algèbre par l'isomorphisme de Kakutani. Cette structure d'algèbre est la seule qui soit positive et pour laquelle I soit l'unité.

DÉFINITION 3. — Soient $\mathscr{E} = (\Omega, E, \mathscr{P})$ une expérience, D un ensemble, H un sous-treillis de Banach de $\mathscr{L}^\infty(D)$ contenant 1_D.

Une transition généralisée de $\mathscr{E}$ dans (D, H) est une forme bilinéaire positive T sur $L(\mathscr{E}) \times H$ vérifiant

$$(\forall \lambda \in L(\mathscr{E}), \lambda \geqslant 0) \qquad T(\lambda, 1_D) = \| \lambda \|$$

Si H_i^*, ensemble des formes linéaires σ-continues sur H n'est pas réduit à $\{ 0 \}$ on peut de plus imposer à T de vérifier

$$(\forall \lambda \in L(\mathscr{E})) \qquad T(\lambda) \in H_i$$

Remarques

3) Si $E = \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{A})$ et $H = \mathscr{L}^\infty(D, \mathscr{D})$ toute transition S_D^Ω définit une transition généralisée de $(\Omega, E, \mathscr{P})$ dans (D, H).

4) Si $E = \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{A})$, D est compact, $H = \mathscr{C}(D)$, il en est de même et si de plus la famille $\mathscr{P}$ est dominée, alors l'ensemble des transitions généralisées est le quotient de l'ensemble des transitions habituelles par l'égalité scalairement presque sûre pour la probabilité dominante.

B. COMPARAISON DES EXPÉRIENCES ET APPLICATION A LA DÉCISION

Soient deux expériences $\mathscr{E} = (\Omega_1, E, \mathscr{P})$ avec $\mathscr{P} = \{ P^\theta ; \theta \in \Theta \}$
$\mathscr{F} = (\Omega_2, F, \mathscr{Q})$ avec $\mathscr{Q} = \{ Q^\theta ; \theta \in \Theta \}$.

DÉFINITION 4. — Soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des applications linéaires positives de un de $L(\mathscr{F})$ dans $L(\mathscr{E})$. On l'appelle « déficience » de $\mathscr{F}$ par rapport à $\mathscr{E}$ le nombre

$$\delta(\mathscr{F}, \mathscr{E}) = \inf_{R \in \mathscr{R}} \sup_{\theta \in \Theta} \| R(Q^\theta) - P^\theta \|$$

THÉORÈME 1. — Les propositions suivantes sont équivalentes

1) $\delta(\mathscr{F}, \mathscr{E}) = 0$.

2) Il existe une transition généralisée T de $\mathscr{F}$ dans (Ω_1, E) telle que

$$(\forall \theta \in \Theta) \qquad T(Q^\theta) = P^\theta$$

3) Il existe une application linéaire positive de norme un, R de $L(\mathscr{E})$ dans $L(\mathscr{F})$ telle que

$$(\forall \theta \in \Theta) \qquad R(Q^\theta) = P^\theta$$

3') Il existe une application linéaire positive de norme un, R' de $L(\mathscr{F})$ dans $L(\mathscr{E})$ telle que

$$(\forall \theta \in \Theta) \qquad R'(S^\theta) = P^\theta$$
$$(\forall \mu \in L(\mathscr{F}),\ \mu \geqslant 0) \qquad \| R'(\mu) \| = \| \mu \|$$

4) Il existe une application linéaire positive de norme un, Π de $M(\mathscr{E})$ dans $M(\mathscr{F})$ telle que

$$(\forall \theta \in \Theta) \qquad (\forall \varphi \in M(\mathscr{E})) \qquad \langle Q^\theta, \Pi(\varphi)) \rangle = \langle P^\theta, \varphi \rangle$$

4') Il existe une application linéaire positive de norme un, Π' de $M(\mathscr{E})$ dans $M(\mathscr{F})$ telle que $(\forall \theta \in \Theta)(\forall \varphi \in M(\mathscr{E}))\ \langle Q^\theta, \Pi'(\varphi) \rangle = \langle P^\theta, \varphi \rangle$

$$\Pi'(I_{\mathscr{E}}) = I_{\mathscr{F}}$$

Démonstration.

1) $\Rightarrow$ 2) Soit $\mathscr{B}$ l'ensemble des formes bilinéaires positives de norme un sur $L(\mathscr{F}) \times E$ muni de la norme $\| (\lambda, f) \| = \sup(\| \lambda \|, \| f \|)$.

Muni de la topologie de la convergence simple sur $L(\mathscr{F})$ E est compact et l'on a $\mathscr{R} \subset \mathscr{B}$.

Il existe une suite R^n telle que

$$(\forall n \in N) \qquad \sup_\theta \| R^n(Q^\theta) - P^\theta \| < \frac{1}{n}$$

Soit ρ un point adhérent de cette suite dans $\mathscr{B}$. ρ vérifie

$$(\forall \theta \in \Theta) \qquad \rho(Q^\theta) = P^\theta$$

Choisissons $\lambda_0 \in E^\times$, $\lambda_0 \geqslant 0$, $\| \lambda_0 \| = 1$ et posons

$$(\forall \mu \in L(\mathscr{F}),\ \mu \geqslant 0) \qquad T(\mu) = \rho(\mu) + (\| \mu \| - \| \rho(\mu) \|)\lambda_0$$

Prolongeons T par linéarité à L($\mathscr{F}$), c'est une transition généralisée de $\mathscr{F}$ dans (Ω_1, E) vérifiant

$$(\forall \theta \in \Theta) \qquad T(Q^\theta) = \rho(Q^\theta) = P^\theta$$

1) $\Rightarrow$ 3') voir la construction suivante,

2) $\Rightarrow$ 3') en appliquant la construction suivante à T au lieu de ρ,

3) $\Rightarrow$ 3') en appliquant la construction suivante à R au lieu de ρ.

Soit l la projection de E^X sur L($\mathscr{E}$) et choisissons un élément positif de norme un dans L($\mathscr{E}$), soit λ_α. Posons

$$(\forall \mu \in L(\mathscr{F}),\ \mu \geqslant 0) \qquad R'(\mu) = l \circ \rho(\mu) + (\|\mu\| - \|l \circ \rho(\mu)\|)\lambda_0$$

et prolongeons R' par linéarité à L($\mathscr{F}$).

R' est une application linéaire positive de norme un de L($\mathscr{F}$) dans L($\mathscr{E}$) vérifiant

$$(\forall \theta \in \Theta) \qquad R'(Q^\theta) = P^\theta$$
$$(\forall \mu \in L(\mathscr{F}),\ \mu \geqslant 0) \qquad \|R(\mu)\| = \|\mu\|$$

3') $\Rightarrow$ 4') Il suffit de prendre pour π' le transposé de R',

4') $\Rightarrow$ 4) évident,

3') $\Rightarrow$ 1) évident.

4) $\Rightarrow$ 3) Soit ${}^t\Pi : M(\mathscr{F})^\times \to M(\mathscr{E})^\times$ le transposé de Π, ${}^t\Pi$ est linéaire, positif, continu.

Soit la restriction de ${}^t\Pi$ à L($\mathscr{F}$), R vérifie

$$(\forall \theta \in \Theta) \qquad R(Q^\theta) = P^\theta$$

et par suite

$$R[L(\mathscr{F})] \subset L(\mathscr{E})$$

Application de la décision

Soit $\mathscr{E} = (X, E, \mathscr{P})$ avec $\mathscr{P} = \{\rho^\theta, \theta \in \Theta\}$ une expérience θ restera fixée.

DÉFINITION 5.

Un espace de décision est le couple (D, H) formé d'un ensemble D et un sous-treillis de Banach H de $\mathscr{L}^\infty(D)$ contenant 1_D.

Une fonction de coût est une fonction réelle définie sur $\Theta \times D$ telle que $(\forall \theta \in \Theta)$ la fonction $l^\theta : |d \to l(\theta, d)|$ appartienne à H.

— Une stratégie généralisée de $\mathscr{E}$ dans (D, H) est une transition généralisée S de $\mathscr{E}$ dans (D, H). On définit son risque par

$$r(\theta, S) = S(\rho^\theta, l^\theta)$$

THÉORÈME 2. — Les propositions suivantes sont équivalentes

1) $\delta(\mathscr{F}, \mathscr{E}) = 0$.

5) Pour tout espace de décision (D, H), pour toute stratégie S de $\mathscr{E}$ dans (D, H) il existe une stratégie S′ de $\mathscr{F}$ dans (D, H) telle que

$$(\forall \theta \in \Theta) \qquad S(P^{\theta}) = S'(Q^{\theta})$$

6) Pour tout espace de décision (D, H), pour toute fonction de coût l, pour toute stratégie S de $\mathscr{E}$ dans (D, H), il existe une stratégie S′ de $\mathscr{F}$ dans (D, H) telle que

$$(\forall \theta \in \Theta) \qquad r(\theta, S) = r(\theta, S')$$

Démonstration.

1) ⇒ 5) Soit R l'élément défini à la proposition 3) du théorème 1. Il suffit de prendre $S = S \circ R$.

5) ⇒ 6) Évident car $r(\theta, S') = S'(Q^{\theta}, P^{\theta}) = S(P^{\theta}, l^{\theta}) = r(\theta, S)$.

5) ⇒ 1) En prenant pour (D, H) le couple (Ω_1, E) et pour S l'application identique de $L(\mathscr{E})$ dans $L(\mathscr{E})$ la proposition 5) n'est que la proposition 2) du théorème 1.

6) ⇒ 1) Nous n'écrirons pas la démonstration qui est une version affaiblie du théorème 3 (4) ⇒ 1)) de [*1*].

C. RÉDUCTION D'UNE EXPÉRIENCE. EXHAUSTIVITÉ AFFAIBLIE

Proposition 1. — Soient $\mathscr{E} = (\Omega, E, \mathscr{P})$, F un sous-treillis de Banach de E σ-fermé contenant 1. $\mathscr{Q}$ l'ensemble des restrictions à F des éléments de $\mathscr{P}$, $\mathscr{F} = (\Omega, F, \mathscr{Q})$.

1) Soit $s : E^{\times} \to F^{\times}$ l'application « restriction à F ». On a

$$s[L(\mathscr{E})] = L(\mathscr{F})$$

2) Soit $\rho : M(\mathscr{F}) \to M(\mathscr{E})$ la transposée de s. ρ est un isomorphisme de σ treillis vectoriel de $M(\mathscr{F})$ sur $\rho[M(\mathscr{F})]$.

3) $\rho[M(\mathscr{F})]$ est un sous-treillis vectoriel de $M(\mathscr{E})$, contenant I, fermé.

Démonstration.

1) s est linéaire, positive, continue, surjective.

Soient $\lambda \in E^{\times}$, $\mu' \in F^{\times}$ vérifiant $0 \leqslant \mu' \leqslant s(\lambda)$. Alors il existe $\mu \in E$, tel que $0 \leqslant \mu \leqslant \lambda$ et $\mu' = s(\lambda)$. Il suffit en effet d'appliquer le théorème de Hahn Banach à μ' et à l'application $\{f \to \lambda(f^{+})\}$.

Par suite

$$(\forall \lambda \in E, \lambda > 0) \qquad s([0, \lambda]) = [0, s(\lambda)]$$

s vérifie $s(\mathscr{P}) = \mathscr{Q}$, d'où

$$s\left(\left[0, \sum_1^n a_i P_i\right]\right) = \left[0, \sum_1^n a_i Q_i\right]$$

et par suite

$$s[I(\mathscr{P})] = I(\mathscr{Q})$$

où $I(\mathscr{P})$ [respectivement $I(\mathscr{Q})$] désigne l'idéal engendré par $\mathscr{P}$ dans E [respectivement par $\mathscr{Q}$ dans F].

L'on a donc $r[L(\mathscr{E})] \subset L(\mathscr{F})$, montrons l'inclusion inverse : soit

$$\lambda' \geqslant 0 \qquad \lambda' \in L(\mathscr{F})$$

$$\lambda' = \lim \uparrow \lambda'_\alpha, \qquad \lambda'_\alpha \in I(\mathscr{Q}), \qquad \lambda'_\alpha \geqslant 0$$

On peut supposer

$$\lambda' = \lim_{n \in N} \uparrow \lambda'_n \qquad \text{car} \qquad \inf_\alpha \| \lambda' - \lambda_\alpha \| = \inf_\alpha \langle \lambda' - \lambda_\alpha, 1 \rangle = 0$$

soit

$$\mu'_n = \lambda'_n - \lambda'_{n-1}$$

$$\mu'_n \geqslant 0, \qquad \mu'_n \in I(\mathscr{Q})$$

donc

$$(\exists \mu_n \geqslant 0, \qquad \mu_n \in I(\mathscr{P}), \qquad \mu'_n = s(\mu_n)$$

soit

$$\lambda_n = \sum_1^n \mu_k$$

$$\lambda_n \geqslant 0, \qquad \lambda_n \in I(\mathscr{P}), \qquad \lambda_n \ , \qquad s(\lambda_n) = \lambda'_n$$

donc

$$\sup_n \| \lambda_n \| < +\infty$$

Il existe une sous-suite de $\{ \lambda_n, n \in N \}$ qui converge faiblement vers un un élément λ mais étant croissante elle converge et par suite $\in L(\mathscr{E})$

$$s(\lambda) = \lambda'$$

2) Soit ρ : $M(\mathscr{F}) \to M(\mathscr{E})$ le transposé de s.

ρ est linéaire, positive, continue.

$$(\forall \varphi' \in M(\mathscr{F}))(\forall \lambda \in L(\mathscr{E}), \qquad \lambda \geqslant 0)$$

$$\langle \lambda, [\rho(\varphi')]^+ \rangle = \sup_{[0,\lambda]} \langle \mu, \rho(\varphi') \rangle = \sup_{[0,\lambda]} \langle s(\mu), \varphi' \rangle$$

$$= \sup_{[0,s(\lambda)]} \langle \mu', \varphi' \rangle = \langle s(\lambda), \varphi'^+ \rangle = \langle \lambda, \rho(\varphi'^+) \rangle$$

On a donc

$$\rho(\varphi'^{+}) = [\rho(\varphi')]^{+}$$

par suite ρ est un isomorphisme de treillis vectoriel de $M(\mathscr{F})$ sur $\rho[M(\mathscr{F})]$ mais ρ étant continu, l'isomorphisme est un isomorphisme de σ treillis vectoriel.

3) $\rho(I_{\mathscr{F}}) = I_{\mathscr{E}}$.

$\rho[M(\mathscr{F})]$ est un sous-σ-treillis vectoriel de $M(\mathscr{E})$ contenant $I_{\mathscr{E}}$, fermé pour la topologie $\sigma(M(\mathscr{E}), L(\mathscr{E}))$ et donc fermé [*4*].

PROPOSITION 1'. — Soit $\mathscr{E} = (\Omega, E, \mathscr{P})$ et soit M_1 un sous-treillis vectoriel de $M(\mathscr{E})$, contenant $I_{\mathscr{E}}$ et fermé.

Soit $F = \sigma^{-1}(M_1 \cap \sigma(E))$, F est alors un sous-treillis de Banach de E, σ-fermé, contenant 1 et $\rho[M(\mathscr{F})] = M_1$.

Démonstration. — M_1 sous-treillis vectoriel fermé de $M(\mathscr{E})$ est fermé pour la topologie $\sigma(M, L)$ et la norme. F est donc un sous-σ-treillis de Banach, contenant 1.

Il revient au même de prendre l'image par ρ de la fermeture de $\sigma'(F)$ pour la topologie $\sigma(M(\mathscr{F}), L(\mathscr{F}))$ ou de prendre la fermeture $\sigma \circ i(F)$ c'est-à-dire $M_1 \cap \sigma(E)$ pour la topologie $\sigma(M(\mathscr{E}), L(\mathscr{E}))$ et par suite

$$M_1 = \rho[M(\mathscr{F})]$$

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{i} & E \\ \sigma' \downarrow & & \downarrow \sigma \\ M(\mathscr{F}) & \xrightarrow{\rho} & M(\mathscr{E}) \end{array}$$

REMARQUE 5. — Le Cam dans [*1*] définit une sous-expérience de $\mathscr{E}$ comme un sous-treillis vectoriel de $M(\mathscr{E})$, contenant I, fermé pour $\sigma(M, L)$.

Les propositions ci-dessus montrent que tout sous-σ-treillis de Banach de E contenant 1 définit une telle sous-expérience et que réciproquement, toute sous-expérience peut être ainsi définie.

PROPOSITION 2 (cas classique). — Soit $\mathscr{E} = (\Omega, E, \mathscr{P})$ avec $E = \mathscr{L}^{\infty}(\Omega, \mathscr{A})$.

1) Soient $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$, $F = \mathscr{L}^{\infty}(\Omega, \mathscr{B})$, $\mathscr{Q}$ l'ensemble des restrictions à $\mathscr{B}$ des éléments de $\mathscr{P}$, $\mathscr{F} = (\Omega, F, \mathscr{Q})$.

Les résultats de la proposition 1 sont valables. On notera $M^{\mathscr{B}} = \rho[M(\mathscr{F})]$.

2) Soit M_1 un sous-treillis vectoriel de $M(\mathscr{E})$, contenant I, fermé pour $\sigma(M, L)$.

Alors il existe une sous-tribu $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$ tel que $\rho[M(\mathscr{F})] = M_1$, avec les notations précédentes.

Démonstration. — La première partie est immédiate.

2) M_1 est un sous-σ-treillis vectoriel de $M(\mathscr{E})$ et donc $F = \sigma^{-1}(M_1)$ est un sous-σ-treillis de E contenant 1.

Soit $\mathscr{B} = \{\text{idempotent de } F\}$, $\mathscr{B}$ est une sous-tribu de $\mathscr{A}$.

On a trivialement $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{B}) \subset F$. Montrons l'inclusion inverse, soit

$$f \geqslant 0, \qquad f \in F$$

$(\forall \alpha > 0)$ soit

$$B_\alpha = [f > \alpha]$$

soit

$$g = \frac{f}{\alpha} - \frac{f}{\alpha} \wedge 1 \qquad g \in F$$

soient

$$g_n = 1 \wedge ng \qquad g_n \in F \qquad \text{et} \qquad g_n \uparrow 1_{B_\alpha} \qquad \text{dans E}$$

donc

$$1_{B_\alpha} \in F \qquad \text{et} \qquad B_\alpha \in \mathscr{B}$$

Par suite

$$f \in \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{B})$$

Remarque. — Si $\mathscr{B} = \mathscr{B}'[\mathscr{P}]$, alors $M^{\mathscr{B}} = M^{\mathscr{B}'}$.

Si $M^{\mathscr{B}} = M^{\mathscr{B}'}$, alors $L(\mathscr{F})$ et $L(\mathscr{F}')$ sont isomorphes et par suite $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ ont même complété par rapport à $\mathscr{P}$.

DÉFINITION 6. — Nous appellerons « projecteur exhaustif » un opérateur linéaire, positif idempotent π sur $M(\mathscr{E})$ vérifiant : $\pi(I) = I$

$$(\forall P \in \mathscr{P})(\forall \varphi \in M) \ \langle P, \pi(\varphi) \rangle = \langle P, \varphi \rangle$$

PROPOSITION 3. — Soit Π un projecteur exhaustif et soit $M_\Pi = \Pi(M)$. Alors

1) Π est continu.

2) M_Π est un sous-treillis vectoriel de M, contenant I, fermé et par suite une sous-algèbre.

3) Π est le transposé d'un opérateur linéaire positif idempotent R sur $L(\mathscr{E})$ vérifiant :

$$(\forall P \in \mathscr{P}) \qquad R(P) = P$$

4) Π vérifie

$$(\forall \varphi \in M)(\forall \Psi \in M_\Pi) \qquad \Psi\Pi(\varphi) = \Pi(\varphi\Psi)$$

5) Si $\Pi(M) = \Pi'(M)$ alors $\Pi = \Pi'$.

Démonstration

1) Soit $0 \leqslant \varphi_\alpha \downarrow 0$, alors $0 \leqslant \Pi(\varphi_\alpha) \downarrow \varphi$, montrons que $\varphi = 0$

$$(\forall \mathrm{P} \in \mathscr{P}) \qquad \langle \mathrm{P}, \varphi \rangle = \inf_\alpha \langle \mathrm{P}, \Pi(\varphi_\alpha) \rangle = \inf_\alpha \langle \mathrm{P}, \varphi_\alpha \rangle = 0$$

et par suite $\varphi = 0$ car l'ensemble $\{ \lambda \in \mathrm{L}(\mathscr{E}), \langle |\lambda|, \varphi \rangle = 0 \}$ est un idéal fermé de $\mathrm{L}(\mathscr{E})$ contenant $\mathscr{P}$ donc égal à $\mathrm{L}(\mathscr{E})$.

2) Soit $\varphi \in \mathrm{M}_\Pi$

$$\Pi(\varphi) = \varphi$$
$$\Pi(\varphi^+) \geqslant [\Pi(\varphi)]^+ = \varphi^+$$

donc

$$\Pi(\varphi^+) = \varphi^+ + \Psi \qquad \Psi \geqslant 0$$
$$\Pi^2(\varphi^+) = \Pi(\varphi^+) = \Pi(\varphi^+) + \Pi(\Psi)$$

donc

$$\Pi(\Psi) = 0.$$

mais $\Psi \geqslant 0$ $\Pi(\Psi) = 0$ entraîne $\Psi = 0$.

M_Π est donc un sous-treillis vectoriel de M contenant I, fermé. C'est donc un (M) espace avec unité, il peut donc être muni d'une structure d'algèbre, mais d'après l'unicité de celle-ci, ce n'est autre que celle de M.

3) Soit R le transposé de Π :

$$\langle \mathrm{R}(\lambda), \varphi \rangle = \langle \lambda, \Pi(\varphi) \rangle \qquad (\forall \lambda \in \mathrm{L}(\mathscr{E}))$$

$\mathrm{R}(\lambda)$ est continu et donc appartient à $\mathrm{L}(\mathscr{E})$, R est idempotent, positif et vérifie

$$\forall \mathrm{P} \in \mathscr{P} \qquad \mathrm{R}(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$$

4) Il suffit de le montrer dans le cas ou Ψ est un idempotent puisque les combinaisons linéaires finies d'idempotents de M_Π sont denses dans M_Π.

Soit $u \in \mathrm{M}_\Pi$ idempotent et soit $\varphi \in \mathrm{M}$

$$\varphi = \varphi u + \varphi(\mathrm{I} - u)$$
$$\Pi(\varphi) = [\Pi(\varphi)]u + [\Pi(\varphi)](\mathrm{I} - u)$$
$$= \Pi(\varphi u) + \Pi[\varphi(\mathrm{I} - u)]$$

or

$$|\Pi(\varphi u)| \leqslant \Pi(\|\varphi\| u) \leqslant \|\varphi\| \Pi(u) = \|\varphi\| u$$

de même

$$|\Pi[\varphi(\mathrm{I} - u)]| \leqslant \|\varphi\| (\mathrm{I} - u)$$

or u et $(\mathrm{I} - u)$ sont disjoints, on en déduit l'égalité

$$\Pi(\varphi u) = \Pi(\varphi) u$$

5) Soit $\Pi(M) = \Pi'(M)$

$$(\forall \varphi \in M) \qquad (\forall \Psi \in \Pi(M)) \qquad (\forall P \in \mathscr{P})$$
$$\langle P, \Pi(\varphi\Psi) - \Pi'(\varphi\Psi) \rangle = \langle P, [\Pi(\varphi) - \Pi'(\varphi)]\Psi \quad = 0$$

d'où
$$\langle P, | \Pi(\varphi) - \Pi'(\varphi) | \rangle = 0$$

d'où
$$\Pi(\varphi) = \Pi'(\varphi) \qquad \text{et} \qquad \Pi = \Pi'$$

La relation suivante sur les opérateurs exhaustifs est donc une relation d'ordre :

$$\Pi \leqslant \Pi' \qquad \text{si} \qquad \Pi(M) \subset \Pi(M')$$

ou encore

$$\Pi'\Pi = \Pi\Pi' = \Pi$$

DÉFINITION 7. — Si $M_1 = \Pi(M)$ où Π est un projecteur exhaustif, M_1 est dit exhaustif.

PROPOSITION 4. — Il existe un plus petit projecteur exhaustif et donc un plus petit ensemble exhaustif.

Démonstration. — Soit π la classe des projecteurs exhaustifs, muni de la topologie de la convergence simple sur $M \times L$, c'est un compact. Toute chaîne décroissante possède un point adhérent qui en est un minorant, π contient l'élément identité, il possède donc un élément minimal Π_0, montrons que c'est un plus petit élément.

Soient Π_1 élément de π et Π point adhérent à la suite

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\Pi_0\Pi_1)^k$$
$$\Pi_0\Pi_1\Pi = \Pi\Pi_0\Pi_1 = \Pi$$

d'où
$$\Pi \leqslant \Pi_0$$

mais
$$\Pi \in \pi$$

d'où
$$\Pi = \Pi_0 \qquad \text{et} \qquad \Pi_0\Pi_1 = \Pi$$
$$(\forall \varphi \in M_{\Pi_0}\Pi) \qquad (\forall P \in \mathscr{P})$$
$$\langle P, [\varphi - \Pi_1(\varphi)]^2 \rangle = \langle P, \varphi[\varphi - \Pi_1(\varphi)] \rangle - \langle P, \Pi_1(\varphi)[\varphi - \Pi_1(\varphi)] \rangle$$
$$= \langle P, \varphi[\varphi - \Pi_1(\varphi)] \rangle = \langle P, \varphi\Pi_0[\varphi - \Pi_1(\varphi)] \rangle = 0$$

d'où
$$\Pi_1(\varphi) = \varphi$$
$$\Pi_1\Pi_0 = \Pi_0 = \Pi_0\Pi_1$$

et donc

$$\Pi_0 \leqslant \Pi_1$$

PROPOSITION 5. — Soit M_1 un sous-treillis vectoriel de $M(\mathscr{E})$, contenant I, fermé. Pour tout élément P de $\mathscr{P}$, soient i_P le plus petit idempotent de M_1 tel que $\langle P, i_P \rangle = 1$ et Π_P un opérateur linéaire positif idempotent de M dans M_1 vérifiant

$$\Pi_P(I) = i_P \qquad \text{et} \qquad (\forall \varphi \in M) \qquad \langle P, \Pi_P(\varphi) \rangle = \langle P, \varphi \rangle$$

L'existence de i_P et Π_P est due au fait que M_1 est un treillis vectoriel complet.

Les propositions suivantes sont alors équivalentes :

1) il existe un projecteur exhaustif Π de M sur M_1,
2) $\forall P, Q \in \mathscr{P} \qquad \Pi_P i_Q = \Pi_Q i_P$,
3) M_1 contient M_0, plus petit ensemble exhaustif.

Démonstration

1) $\Rightarrow$ 2) évident car $\Pi_P = \Pi i_P$,
1) $\Rightarrow$ 3) évident,
2) $\Rightarrow$ 1) $I = \bigvee\limits_{P \in \mathscr{P}} i_P$

Considérons la classe des couples (Π_α, i_α) ou Π_α est une application linéaire positive idempotente de M dans M_1.

i_α est un idempotent de M_1 tel que $\Pi_\alpha(I) = i_\alpha$

$$\forall P \in \mathscr{P} \qquad \Pi_\alpha i_P = \Pi_P i_\alpha$$

et munissons-là de l'ordre

$$\alpha > \beta \qquad \text{si} \qquad i_\alpha > i_\beta \qquad \text{et} \qquad \Pi_\beta = \Pi_\alpha i_\beta$$

Soit A une chaîne croissante, définissons :

$$i = \lim_{\alpha \in A} \uparrow i_\alpha$$
$$\Pi = \lim_{\alpha \in A} \uparrow \Pi_\alpha$$

Π est linéaire, positif, idempotent et vérifie

$$\Pi(I) = i$$

$$(\forall \varphi \in M, \varphi \geqslant 0) \qquad \Pi(\varphi) i_P = [\lim_{\alpha \in A} \Pi_\alpha(\varphi)] i_P = \lim_{\alpha \in A} [\Pi_\alpha(\varphi) i_P]$$
$$= \lim_{\alpha \in A} [\Pi_P(\varphi) i_\alpha] = \Pi_P(\varphi) i$$

La classe est donc inductive, non vide, soit (Π, i) un élément maximal. Supposons $i \neq \mathrm{I}$,

$$\exists \mathrm{P} \in \mathscr{P}$$

tel que

$$i' = i \vee i_{\mathrm{P}}$$

soit différent de i, soit

$$\begin{aligned}
\Pi' &= \Pi + \Pi_{\mathrm{P}} - \Pi_{\mathrm{P}}(i \wedge i_{\mathrm{P}}) \\
\Pi'(\mathrm{I}) &= i \vee i_{\mathrm{P}} = i' \\
\Pi' i_{\mathrm{Q}} &= \Pi i_{\mathrm{Q}} + \Pi_{\mathrm{P}} i_{\mathrm{Q}} - \Pi_{\mathrm{P}}(i \wedge i_{\mathrm{P}}) i_{\mathrm{Q}} = \Pi_{\mathrm{Q}}(i + i_{\mathrm{P}} - i \wedge i_{\mathrm{P}}) = \Pi_{\mathrm{Q}} i'
\end{aligned}$$

(Π', i') est alors strictement supérieur à (Π, i) qui ne peut donc être maximal. On a donc $\Pi(\mathrm{I}) = \mathrm{I}$

$$(\forall \mathrm{P} \in \mathscr{P}) \quad (\forall \varphi \in \mathrm{M}) \quad \langle \mathrm{P}, \Pi(\varphi) \rangle = \langle \mathrm{P}, \Pi(\varphi) i_{\mathrm{P}} \rangle = \langle \mathrm{P}, \Pi_{\mathrm{P}}(\varphi) \rangle = \langle \mathrm{P}, \varphi \rangle$$

De plus si $\Pi(\varphi) = 0$

$$(\forall \mathrm{P} \in \mathscr{P}) \qquad \Pi_{\mathrm{P}}(\varphi) = \Pi_{\mathrm{P}}(\varphi i_{\mathrm{P}}) = 0$$

d'où

$$\varphi i_{\mathrm{P}} = 0$$

par suite

$$\varphi = 0$$

Π est donc surjectif.

3) $\Rightarrow$ 2) Soit $\mu = \dfrac{1}{2}(\mathrm{P} + \mathrm{Q})$.

Il existe une version dans M_0 de $\dfrac{d\mathrm{P}}{d\mu}$ et $\dfrac{d\mathrm{Q}}{d\mu}$ donc *a fortiori* dans M_1 et par suite

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathrm{P}} &= \Pi_\mu i_{\mathrm{P}} \\
\Pi_{\mathrm{Q}} &= \Pi_\mu i_{\mathrm{Q}}
\end{aligned}$$

d'où

$$\Pi_{\mathrm{P}} i_{\mathrm{Q}} = \Pi_{\mathrm{Q}} i_{\mathrm{P}}$$

Cas classique. Exhaustivité affaiblie.

Soient $\mathscr{E} = (\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$ avec $\mathrm{E} = \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{A})$, $\mathscr{B}$ sous-tribu de $\mathscr{A}$

$$\mathrm{F} = \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{B}) \qquad \mathrm{M}^{\mathscr{B}} = \rho[\mathrm{M}(\mathscr{F})]$$

DÉFINITION 8. — $\mathscr{B}$ est dite exhaustive au sens affaibli si $\mathrm{M}^{\mathscr{B}}$ est exhaustif.

PROPOSITION 6. — Toute sous-tribu contenant une sous-tribu exhaustive au sens affaibli est exhaustive au sens affaibli.

Démonstration. — Si $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}'$ alors $M^{\mathscr{B}} \subset M^{\mathscr{B}'}$ et si $\mathscr{B}$ est exhaustive au sens affaibli $M^{\mathscr{B}}$ et par suite $M^{\mathscr{B}'}$ contiennent M_0 et il suffit d'appliquer la proposition 5.

PROPOSITION 7. — Il existe une plus petite tribu $[\mathscr{P}]$ complète exhaustive au sens affaibli.

Démonstration. — Découle directement de la proposition 4 et de la proposition 2 suivie de sa remarque.

PROPOSITION 8. — Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $\mathscr{B}$ est exhaustive au sens affaibli.

2) Pour toute sous-famille dominée $\mathscr{P}_0$ de $\mathscr{P}$, $\mathscr{B}$ est $[\mathscr{A}, \mathscr{P}_0]$ exhaustive.

3) Pour tout couple $\mathscr{P}_0 = (P, Q)$ dans $\mathscr{P}$, $\mathscr{B}$ est $[\mathscr{A}, \mathscr{P}_0]$ exhaustive.

Démonstration. — Soit $\mathscr{P}_0$ sous-famille dominée par

$$\mu = \sum_1^\infty a_i P_i,\ P_i \in \mathscr{P}_0,\ a_i \geqslant 0 \qquad \sum_1^\infty a_i = 1.$$

Soit m_μ l'isomorphisme de M^μ et $L^\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$,

m'_μ l'isomorphisme de $[M(\mathscr{F})]^\mu$ et $L^\infty(X, \mathscr{B}, \mu)$.

σ et σ' sont définis à la propriété *e*), ρ à la proposition 1.

1) $\Rightarrow$ 2) Soit μ, probabilité dominant $\mathscr{P}_0$. Soit

$$\Pi_0 = m_\mu \circ \rho^{-1} \circ \Pi \circ \sigma$$

Π_0 est une application de $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})$ dans $L^\infty(X, \mathscr{B}, \mu)$ vérifiant

$$(\forall P \in \mathscr{P}_0) \qquad (\forall f \in \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})) \qquad \langle P, \Pi_0(f) \rangle = \langle P, f \rangle$$

2) $\Rightarrow$ 3) évident.

3) $\Rightarrow$ 1) Soit $\mu = \frac{1}{2}(P + Q)$ et soit ε l'application de $\mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A})$ dans $L^\infty(X, \mathscr{B}, \mu)$ vérifiant

$$\forall f \in \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{A}) \ \langle P, \varepsilon f \rangle = \langle P, f \rangle$$
$$\langle Q, \varepsilon f \rangle = \langle Q, f \rangle$$

Soit

$$\Pi_\mu = \rho \circ m_\mu'^{-1} \circ \varepsilon$$
$$\Pi_P = \Pi_\mu i_P \qquad \text{et} \qquad \Pi_Q = \Pi_\mu i_Q$$

d'où

$$\Pi_P i_Q = \Pi_Q i_P$$

et il suffit d'appliquer ensuite la proposition 5.

THÉORÈME 3. — Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1) $\mathscr{B}$ est exhaustive au sens affaibli.

4) $\delta(\mathscr{F}, \mathscr{E}) = 0$, où

$$\mathscr{F} = (\Omega, \mathscr{L}^{\infty}(\Omega, \mathscr{A}), \{ P/\mathscr{B}, P \in \mathscr{P} \})$$

et par suite le théorème 2 est valable.

Démonstration. — Application du théorème 1.

Remarque. — La proposition 8 montre que: l'exhaustivité affaiblie définie en 8 est l'exhaustivité par paire définie dans [5]. Celle-ci possède donc les propriétés suivantes:

Toute tribu contenant une tribu exhaustive par paire est exhaustive par paire (proposition 6).

Il existe une plus petite tribu (à l'équivalence [$\mathscr{P}$] près) exhaustive par paire (proposition 7).

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. LE CAM, Sufficiency and Approximate sufficiency. *Annals of Mathematical Statistics*, vol. **35**, 1964, p. 1419-1455.

[2] SCHAEFFER, Topological vectorial spaces.

[3] KAPLAN, Second dual of the space of continuous functions. *Trans. of the Am. Math. Soc.*, vol. **86**, 1957, p. 70 à 365; vol. **93**, 1959, p. 329-350.

[4] R. E. EDWARDS, *Functional analysis*.

[5] HALMOS SAVAGE, Application of the R. N. theorem to sufficient statistic. *Annals of Mathematical Statistics*, vol. **20**, n° 2, 1949.

Manuscrit reçu le 11 juin 1969.