ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. BASS

Fonctions stationnaires. Fonctions de corrélation. Application à la représentation spatio-temporelle de la turbulence

Annales de l'I. H. P., section B, tome 5, nº 2 (1969), p. 135-193

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1969__5_2_135_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. V, n° 2, 1969, p. 135-193. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Fonctions stationnaires. Fonctions de corrélation. Application à la représentation spatio-temporelle de la turbulence

par

J. BASS

RÉSUMÉ. — Le problème de la turbulence consiste à trouver les « solutions turbulentes » des équations de Navier-Stokes. Mais, il faut d'abord définir une fonction turbulente de l'espace et du temps. Dans une première partie (§ 1 à 8), on rappelle les propriétés essentielles des fonctions stationnaires du temps, et en particulier des fonctions pseudo-aléatoires, qui ont les propriétés voulues pour représenter une vitesse turbulente en fonction du temps, sans référence à son comportement spatial. On étudie ensuite le problème de la construction d'une fonction pseudo-aléatoire ayant une fonction de corrélation donnée. On termine par quelques définitions et critères d'irrégularité semi-locale d'une fonction oscillante.

Dans une seconde partie (§ 10, 11, 12), on étudie les dilatées des fonctions pseudo-aléatoires et l'on démontre à leur sujet, dans un cas particulier fondamental, un théorème d'orthogonalité qui servira dans la suite.

La troisième partie (§ 13, 14, 15, 16), donne un exemple de construction mathématique d'un champ spatio-temporel de vitesse dont les fonctions de corrélation spatio-temporelles soient en bon accord numérique avec les résultats expérimentaux.

1. — INTRODUCTION

Dans les publications antérieures [*1*, *2*], j'ai proposé de représenter certains phénomènes naturels, par des fonctions du temps dont les propriétés moyennes étaient directement inspirées de résultats expérimentaux. Il s'agissait à l'origine de fonctions du temps seul, qu'on a souvent l'habitude d'interpréter comme des fonctions aléatoires. Mais les moyennes fournies par l'expérience sont des moyennes temporelles de la forme

$$Mf = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t) dt$$

et non des moyennes stochastiques. Les fonctions considérées sont par suite des fonctions « ordinaires », non aléatoires, caractérisées par les propriétés des moyennes temporelles qui leur sont attachées.

J'ai ainsi défini les *fonctions pseudo-aléatoires*, j'ai montré comment on peut en construire des classes étendues, et j'ai vérifié que leurs caractères généraux s'accordent convenablement avec ce que l'expérience nous fait connaître de phénomènes tels que la turbulence.

L'usage de ces fonctions pour représenter la turbulence a d'ailleurs été discuté. $f(t)$ est dans ce cas une composante en un point fixe de la vitesse d'un écoulement turbulent stationnaire en moyenne. Or plusieurs expériences successives (limitées dans le temps) fournissent des fonctions $f(t)$ tout à fait différentes. Elles apparaissent comme des épreuves successives sur une même fonction aléatoire stationnaire, ce qui introduit nécessairement les idées probabilistes dans la théorie. Mais on est en droit de penser que les causes qui d'une expérience à l'autre, modifient la fonction f, sont dues essentiellement à des variations dans les données initiales et aux limites de l'écoulement ; la fonction f se déduit de ces données par une opération bien déterminée, elle n'est aléatoire que dans la mesure ou les données le sont, et elle est localement très sensible aux variations des données. Ce n'est pas le hasard (ou le calcul des probabilités) qui est responsable de la forme compliquée de la fonction f. Quoi qu'il en soit, bien des problèmes restent à résoudre.

Certaines questions fondamentales se posent d'abord : en quoi ces fonctions peuvent-elles être considérées comme « irrégulières », alors même qu'elles sont partout continues et dérivables? Comment peut-on les choisir de manière qu'elles aient une fonction de corrélation donnée à l'avance? Que peut-on dire de la distribution statistique de leurs valeurs?

Dans un stade ultérieur, on doit remarquer que les phénomènes turbulents sont définis par des champs de vecteurs dans l'espace et dans le temps. Comment, à l'aide de fonctions pseudo-aléatoires du temps, peut-on construire des champs de vecteurs ayant les propriétés moyennes spatio-temporelles que suggère l'expérience?

Enfin, ces champs de vecteurs ayant été suffisamment précisés, comment s'accordent-ils avec les équations fonctionnelles du phénomène étudié, par exemple avec les équations de Navier-Stokes? Dans sa thèse, M. Vo Khac Khoan a démontré, sous certaines conditions, l'existence de solutions des équations de Navier-Stokes qui sont fonctions pseudo-aléatoires du temps en chaque point de l'espace. Mais les résultats obtenus restent trop théoriques, et ne renseignent guère sur la structure des corrélations spatio-temporelles des champs de vitesse. Il semble nécessaire de chercher les solutions dans des espaces de fonctions qui tiennent compte non seulement des propriétés temporelles, mais aussi de certains caractères spatiaux.

Je donnerai dans ce qui suit des réponses aussi complètes que possible à quelques-unes des questions qui viennent d'être posées. Je ne m'occuperai cependant pas du problème des solutions turbulentes des équations de Navier-Stokes. Ce problème n'a pas assez progressé pour qu'on puisse en parler d'une façon utile. Je me limiterai donc à des résultats purement descriptifs, de nature cinématique, et non dynamique.

Remarques sur les notations mathématiques.

Dans ce qui suit, il est important, comme dans toutes les questions d'analyse fonctionnelle, de distinguer les fonctions et leurs valeurs en un point. Cependant j'utiliserai peu des notations telle que « la fonction $f : t \to f(t)$ ». Car leur emploi n'est pas assez souple ni général, et n'évite pas des difficultés. Comment va-t-on par exemple noter la convolution de la dilatée d'une fonction f_0 par une fonction K, c'est-à-dire la fonction f telle que, en tout point t,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0[\lambda(t-s)]\mathrm{K}(s)ds.$$

La notation condensée correcte consisterait à introduire l'opérateur S_λ de dilatation, à poser, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(\mathrm{S}_\lambda f_0)(t) = f_0(\lambda t),$$

puis à représenter la convolution par

$$(\mathrm{S}_\lambda f_0) * \mathrm{K}.$$

Il sera plus simple, en général, d'accepter la notation

$$f_0(\lambda t) * \mathrm{K}(t),$$

que le lecteur saura interpréter sans risques, bien qu'elle représente non la fonction, mais sa valeur au point t.

De même, le produit de la fonction « $t \to f(t)$ » par l'exponentielle « $t \to e^{2i\pi\omega t}$ » sera noté, sans scrupules excessifs, $f(t)e^{2i\pi\omega t}$, etc.

2. — RÉSUMÉ DES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS PSEUDO-ALÉATOIRES [*1*, *2*]

On appelle *fonction stationnaire* une fonction à valeurs complexes f de la variable réelle t telle que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \bar{f}(t) f(t+\tau) dt \qquad (\bar{f} \text{ conjugué de } f)$$

existe pour tout τ. Cette limite est une fonction $\gamma(\tau)$ de la variable réelle τ, appelée *fonction de corrélation* de τ.

En particulier $\gamma(0)$ existe ; c'est la *moyenne quadratique* de f. Mais réciproquement l'existence de la seule moyenne quadratique n'entraîne pas celle de $\gamma(\tau)$ pour $\tau \neq 0$.

$\gamma(\tau)$ est une moyenne temporelle. D'une façon générale, on appellera *moyenne* de f le nombre

$$Mf = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t) dt$$

M est le symbole d'un opérateur linéaire, mais nous n'essaierons pas ici de préciser dans quelles classes de fonctions il opère. Si une fonction est stationnaire, cela n'implique pas qu'elle ait une moyenne. Si une fonction a une moyenne, cela n'implique pas qu'elle ait une moyenne quadratique.

La fonction de corrélation est la moyenne du produit $\bar{f}(t)f(t+\tau)$. Dans la suite, *nous la supposerons continue* pour tout τ. Il suffit pour cela qu'elle le soit pour $\tau = 0$.

Exemples. — $e^{i\omega t}$ est stationnaire et a pour fonction de corrélation $e^{i\omega\tau}$.

e^{it^2} est stationnaire, mais sa fonction de corrélation est discontinue ($\gamma(0) = 1$, $\gamma(\tau) = 0$ pour tout $\tau \neq 0$).

$e^{i \log |t|}$ n'a pas de moyenne.

$1 + e^{i \log |t|}$ n'a pas de moyenne quadratique.

Voici quelques propriétés de $\gamma(T)$. Remarquons d'abord que les translatées $f(t+h)$ de f ont même fonction de corrélation. $\gamma(\tau)$ ne dépend que de la classe des translatées de f. $\gamma(\tau)$ a la symétrie hermitienne : $\gamma(-\tau) = \overline{\gamma(\tau)}$. $\gamma(\tau)$ est une *fonction de type positif*. Si γ est continue, il existe donc une fonction σ à valeurs réelles de la variable réelle ω, non décroissante, bornée, continue à gauche, telle que

$$\gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\omega\tau} d\sigma(\omega)$$

$\sigma(\omega)$ s'appelle la *fonction spectrale* de la fonction stationnaire f.

Si σ est une fonction de sauts, on dit que f admet un spectre discontinu, ou spectre de raies. Le spectre est constitué par les points ω_n où σ est discontinue. Si σ est absolument continue, sa dérivée $\psi = \sigma'$ est appelée *densité spectrale*, et l'on dit que f a un spectre continu. Nous ne nous occuperons pas du cas où σ est continue et singulière.

Si Mf et $\gamma(\tau)$ existent, si en outre $\gamma(\tau)$ admet une moyenne par rapport à la variable τ, on démontre la propriété suivante :

Mγ *est un nombre réel non négatif et*

$$|\,\mathrm{M}(f)\,|^2 \leqslant \mathrm{M}\gamma.$$

Si donc M$\gamma = 0$, alors M$f = 0$. Cette circonstance se produit si

$$\lim_{\tau \to \infty} \gamma(\tau) = 0,$$

et en particulier si $\gamma(\tau)$ s'annule en dehors d'un intervalle fini.

Enfin, *si f est une fonction en escalier, constante sur chaque intervalle* $(n, n+1)$, *n entier, alors γ est une fonction continue variant linéairement dans chaque intervalle* $(n, n+1)$: le graphe de γ est une ligne brisée.

Le polynôme trigonométrique

$$f(t) = \Sigma c_k e^{2\pi i \omega_k t}$$

est stationnaire. Sa fonction de corrélation est

$$\gamma(\tau) = \Sigma\,|\,c_k\,|^2 e^{2\pi i \omega_k \tau}.$$

Si l'ensemble des indices k est infini, et si la série $\Sigma |\,c_k\,|$ est convergente, les formules ci-dessus sont encore valables. f est une *fonction presque-périodique continue*. L'ensemble des fonctions ainsi construites n'est d'ailleurs qu'une partie de l'espace vectoriel des fonctions presque-périodiques continues. Ces fonctions sont limites uniformes de certaines suites de polynômes trigonométriques, plus généraux que les sommes partielles des séries $\Sigma c_k e^{2i\pi\omega_k t}$ (supposées absolument convergentes).

On dit que la fonction stationnaire f est pseudo-aléatoire si sa fonction de corrélation $\gamma(\tau)$ tend vers 0 *lorsque $\tau \to \infty$.*

Alors la moyenne de f est nulle (l'existence de Mf résulte d'ailleurs de la propriété $\lim\limits_{\tau \to \infty} \gamma(\tau) = 0$). Si f admet une densité spectrale, f est pseudo-aléatoire (d'après le théorème de Riemann-Lebesgue).

Voici comment on peut construire des modèles de fonctions pseudo-aléatoires. Soit $\varphi(t)$ un *polynôme* réel de degré $\nu \geqslant 2$, tel que l'un au moins des coefficients de $\varphi''(t)$ soit un *nombre irrationnel.* Désignons par $\hat{t}$ la *partie entière* de t :

$$\hat{t} \leqslant t < \hat{t} + 1$$

et par $\underset{\smile}{t}$ la partie décimale (ou partie fractionnaire) de t :

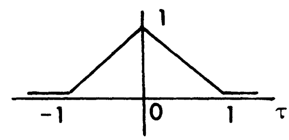
$$t = \hat{t} + \underset{\smile}{t}.$$

Posons

$$f(t) = e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}.$$

Alors f est une fonction en escalier à valeurs complexes, dont la fonction de corrélation est

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) = \max\,(1 - |\,\tau\,|, 0) &= 1 - |\,\tau\,| \quad \text{si} \quad |\,\tau\,| \leqslant 1 \\ &= \quad 0 \qquad\; \text{si} \quad |\,\tau\,| \leqslant 1 \end{aligned}$$



f est donc pseudo-aléatoire.

Notons que, pour $\nu = 1$, f n'est pas pseudo-aléatoire. C'est une fonction presque périodique non continue.

3. — TRANSFORMÉES PAR CONVOLUTION DES FONCTIONS STATIONNAIRES

Soit $f(t)$ une fonction stationnaire bornée. Soit K une fonction complexe absolument intégrable sur $(-\infty, +\infty)$: $\mathrm{K} \in \mathrm{L}^1$ pour la mesure de Lebesgue. Introduisons la convolution

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t - s)\mathrm{K}(s)ds, \qquad \text{ou} \qquad g = f * \mathrm{K}.$$

Montrons que f admet une fonction de corrélation
On a

$$\overline{f}(t)f(t + \tau) = \iint \overline{f}_0(t - s)f(t + \tau - s')\overline{\mathrm{K}}(s)\mathrm{K}(s')dsds'.$$

Comme f_0 est bornée et $|\,\mathrm{K}\,|$ intégrable, on justifie facilement les calculs suivants :

$$\mathrm{M}\overline{f}(t)f(t + \tau) = \iint \mathrm{M}\overline{f}_0(t - s)f_0(t + \tau - s')\overline{\mathrm{K}}(s)\mathrm{K}(s')dsds'.$$

Désignons par γ la fonction corrélation de f, par γ_0 celle de f_0 :

$$\gamma(\tau) = \iint \gamma_0(\tau + s - s')\overline{K}(s)K(s')ds ds'.$$

Or

$$\gamma_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\omega\tau} d\sigma_0(\omega).$$

Donc

$$\gamma(\tau) = \int d\sigma_0(\omega) \iint e^{2\pi i\omega(\tau+s-s')}\overline{K}(s)K(s')ds ds'.$$

Introduisons la transformée de Fourier de K, ou plutôt la transformée conjuguée $\overline{\mathscr{F}}$:

$$H(\omega) = (\overline{\mathscr{F}}K)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\omega s}K(s)ds.$$

On voit que

$$\gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\omega\tau} | H(\omega) |^2 d\sigma_0(\omega).$$

g a donc une fonction spectrale σ définie par

$$d\sigma(\omega) = | H(\omega) |^2 d\sigma_0(\omega).$$

Comme $K \in L^1$, on a

$$| H(\omega) | \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} | K(\omega) | d\omega = \| K \|_{L^1}$$

H est donc bornée. Donc $| H |^2$ est intégrable par rapport à la mesure bornée $d\sigma_0(\omega)$. La formule ci-dessus définit bien une fonction spectrale. Lorsque σ_0 est une fonction en escalier, il en est de même de σ. Lorsque σ_0 admet une densité ψ_0, σ admet une densité ψ telle que

$$\psi(\omega) = | H(\omega) |^2 \psi_0(\omega).$$

Donc, si f_0 est pseudo-aléatoire et admet une densité spectrale ψ_0,

$$f = f_0 * K(K \in L^1)$$

est pseudo-aléatoire et admet pour densité spectrale $\psi = | H |^2 \psi_0$ où $H = \overline{\mathscr{F}}K$.

L'opération de convolution permet, à partir de fonctions f_0 particulières, de construire des classes plus étendues de fonctions. Cela est particulièrement intéressant pour former, à partir de fonctions pseudo-aléatoires du type $f_0(t) = e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}$, des fonctions pseudo-aléatoires continues.

THÉORÈME. — *Si f_0 est une fonction bornée en escalier, et si* $K \in L^1$, *la convolution* $f_0 * K$ *est une fonction continue.*

En effet

$$g(t) = (f_0 * K)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t-s)K(s)ds$$

$$g(t+\tau) - g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_0(t+\tau-s) - f_0(t-s)]K(s)ds.$$

t étant fixé, la fonction sous le signe somme tend vers 0 pour presque tout s (valeurs exceptionnelles ; les s tels que $t - s$ soit un point de discontinuité de f_0). Elle est intégrable et, si $|f_0| < A$, elle est majorée par $2A|K(s)|$, fonction intégrable. D'après le théorème de Lebesgue, elle tend donc vers 0 avec τ.

4. — RECHERCHE D'UNE FONCTION PSEUDO-ALÉATOIRE AYANT UNE FONCTION DE CORRÉLATION DONNÉE. PREMIÈRE APPROXIMATION

Ce problème se pose dans toutes les applications. L'expérience fournit, d'une façon stable et relativement précise, une fonction de corrélation $\gamma(\tau)$. On veut définir théoriquement et construire numériquement une fonction f satisfaisante à l'équation

$$M\bar{f}(t)f(t+\tau) = \gamma(\tau).$$

Un raisonnement théorique montre d'abord que le problème a bien des solutions. Supposons pour fixer les idées que $\gamma(\tau)$ soit réelle. On peut construire une fonction *aléatoire* $X(t)$, stationnaire au sens strict, admettant $\gamma(\tau)$ pour covariance. Il suffit de choisir pour $X(t)$ une *fonction laplacienne.* Elle est entièrement définie par sa covariance.

Comme par hypothèse $\lim_{\tau\to\infty} \gamma(\tau) = 0$, $X(t)$ est ergodique et

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)dt = EX(t) = 0.$$

Mais le résultat s'applique aussi à l'expression de la covariance $\gamma(\tau)$ par une moyenne temporelle. Il suffit pour cela de vérifier que la covariance de

$$Y(t) = X(t)X(t+\tau)$$

tend vers 0 lorsque l'accroissement τ tend vers l'infini.

Or

$$\mathrm{EY}(t) = \gamma(\tau)$$
$$\mathrm{EY}(t)\mathrm{Y}(t + h) = \mathrm{E}[\mathrm{X}(t)\mathrm{X}(t + \tau)\mathrm{X}(t + h)\mathrm{X}(t + \tau + h)].$$

D'après les propriétés des moments de la loi normale, le second membre vaut

$$\gamma^2(h) + \gamma^2(\tau) + \gamma(h + \tau)\gamma(h - \tau).$$

La covariance de Y(t) est donc

$$\gamma^2(h) + \gamma(h + \tau)\gamma(h - \tau)$$

et elle tend vers 0 avec $\frac{1}{h}$.

Il en résulte que, sur presque toute épreuve, la réalisation de X(t) est une fonction dont la covariance temporelle (fonction de corrélation) est identique à $\gamma(\tau)$. Pour construire une fonction $f(t)$ pseudo-aléatoire ayant une fonction de corrélation donnée γ, on construit donc un échantillon d'un processus laplacien stationnaire ayant γ pour covariance. Cela peut se faire numériquement.

Mais nous voulons ici construire une expression analytique d'une telle fonction, sans recours à des techniques statistiques (usage de nombres aléatoires).

Naturellement ce problème a en général une infinité de solutions. Il arrive que l'expérience fournisse d'autres propriétés de f dont il faille tenir compte. Nous allons donner des indications sur une solution possible où, f_0 étant une fonction pseudo-aléatoire choisie, du type $e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}$, on cherche f dans la classe des fonctions $f_0 * \mathrm{K}$, convolution de f_0 par des fonctions K convenables.

On remarquera que toutes les fonctions $f_0(t) = e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}$ ont la même fonction de corrélation. Elles diffèrent par des propriétés plus fines que les propriétés du second ordre. Nous n'essayerons pas d'étudier les moyennes de produits de plusieurs facteurs, qui toutes sont des cas particuliers du moment multilinéaire

$$\mathrm{M}f(t + \tau_1) \ldots f(t + \tau_n).$$

Par contre, nous examinerons avec quelques détails ce qu'on peut appeler l'irrégularité locale d'une fonction pseudo-aléatoire, intermédiaire entre l'irrégularité macroscopique, et la régularité locale au sens usuel, qui concerne seulement la continuité et, la dérivabilité en chaque point.

Donnons-nous donc $\gamma(\tau)$ et supposons que f soit pseudo-aléatoire. Si nous excluons, comme peu intéressants, les cas où γ est la transformée de Fourier d'une mesure singulière, il existe une fonction ψ telle que

$$\gamma = \mathscr{F}\psi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\omega\tau}\psi(\omega)d\omega$$

ψ est une fonction positive telle que $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega)d\omega$ existe.

Cherchons à représenter f par une convolution $f_0 * \mathrm{K}$.

Si ψ_0 est la densité spectrale de f_0, on a vu que

$$\psi = |\mathrm{H}|^2\psi_0 \qquad \mathrm{H} = \mathscr{F}\mathrm{K}.$$

Nous allons montrer, en deux étapes successives, que le problème *ainsi posé* admet toujours des solutions approchées.

Donnons-nous f sous la forme $f = f_0 * \mathrm{K}$, puis, faisons un changement d'échelle sur l'axe des t, et considérons la fonction

$$g_\lambda(t) = \sqrt{\lambda} f_0(\lambda t) * \mathrm{K}$$

où λ est un paramètre positif.

Elle a pour fonction de corrélation

$$\gamma_\lambda(\tau) = \lambda \iint \mathrm{M}[\bar{f}_0(\lambda t - \lambda s) f_0(\lambda t + \lambda\tau - \lambda s')]\overline{\mathrm{K}}(s)\mathrm{K}(s')dsds'$$

$$= \lambda \iint \gamma_0(\lambda\tau - \lambda s' + \lambda s)\overline{\mathrm{K}}(s)\mathrm{K}(s')dsds'$$

$$\gamma_\lambda = \iiint e^{2\pi i\omega\lambda\tau}e^{-2\pi i\omega\lambda s}e^{2\pi i\omega\lambda s}\psi_0(\omega)\overline{\mathrm{K}}(s)\mathrm{K}(s')dsds'd\omega.$$

Si l'on pose $\omega\lambda = \omega'$, on voit que

$$\gamma_\lambda(\tau) = \iiint e^{2\pi i\omega'\tau}e^{-2\pi i\omega' s'}e^{i\omega' s}\psi_0\left(\frac{\omega'}{\lambda}\right)\overline{\mathrm{K}}(s)\mathrm{K}(s')dsds'd\omega'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\omega'\tau}|\mathrm{H}(\omega')|^2\psi_0\left(\frac{\omega'}{\lambda}\right)d\omega'. \qquad \mathrm{H} = \mathscr{F}\mathrm{K}.$$

Supposons maintenant que ψ_0 soit bornée et continue à l'origine.

Lorsque $\lambda \to \infty$, la fonction sous le signe somme tend, pour tout ω' fixé, vers $\psi_0(0)e^{2\pi i\omega'\tau}|\mathrm{H}(\omega')|^2$. Elle est majorée par $\mathrm{A}|\mathrm{H}(\omega')|^2$, où A est une borne supérieure de ψ_0. Si donc $|H|^2$ est intégrable, l'intégrale satisfait aux conditions du théorème de Lebesgue, et

$$\lim_{\lambda \to \infty} \gamma_\lambda(\tau) = \psi_0(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega \tau} |H(\omega)|^2 d\omega.$$

On arrive ainsi au résultat suivant :

THÉORÈME. — *Si* K *est une fonction appartenant à* L^1 *et si sa transformée de Fourier appartient à* L^2, *si d'autre part* f_0 *est une fonction pseudo-aléatoire admettant une densité spectrale bornée et continue à l'origine, alors la densité spectrale de la fonction* $f_\lambda(t) = \sqrt{\lambda} f_0(\lambda t) * K$ *tend, lorsque* $\lambda \to \infty$, *vers* $\psi_0(0)|H(\omega)|^2$, *et la fonction de corrélation* $\gamma_\lambda(\tau)$ *de* $f_\lambda(t)$ *tend, pour tout* τ *fixé, vers* $\psi_0(0)\mathscr{F}(|H|^2)$, *avec* $H = \overline{\mathscr{F}}K$.

Remarque. — *On peut préciser que* $\gamma_\lambda(\tau)$ *tend vers sa limite uniformément sur* $\mathbb{R}$. La différence entre $\gamma_\lambda(\tau)$ et sa limite est en effet :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} |H(\omega)|^2 \left(\psi_0\left(\frac{\omega}{\lambda}\right) - \psi_0(0) \right) d\omega.$$

Son module est inférieur à

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 \left| \psi_0\left(\frac{\omega}{\lambda}\right) - \psi_0(0) \right| d\omega.$$

Avec les hypothèses faites, cette quantité tend vers 0 lorsque $\lambda \to \infty$.

Discussion. — Les hypothèses faites sur la densité spectrale sont tout à fait naturelles. Dans le cas des fonctions pseudo-aléatoires usuelles de la forme $e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}$, on a

$$\gamma_0(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau| & \text{si} \quad |\tau| \leqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad |\tau| \geqslant 1. \end{cases}$$

On vérifie que

$$\gamma_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega \tau} \psi_0(\omega) d\omega, \qquad \text{avec} \qquad \psi_0(\omega) = \left(\frac{\sin \pi\omega}{\pi\omega} \right)^2$$

et que $\lim_{\omega \to 0} \psi_0(\omega) = 1$, $|\psi_0(\omega)| \leqslant 1$.

Remarque. — On peut remplacer la condition « densité spectrale bornée et continue à l'origine » par une condition légèrement différente : *la fonction de corrélation* $\gamma_0(\tau)$ *doit seulement être intégrable.* Il en résulte bien que la densité spectrale existe, est continue, et est bornée. Réciproquement, si la densité spectrale est bornée et continue à l'origine, il n'en résulte pas que la fonction de corrélation soit intégrable (Exemple :

$$\gamma_0(\tau) = 2\,\frac{\sin\,\tau}{\tau},$$

transformée de Fourier de l'indicateur de l'intervalle $(-1, 1)$).

Voici comment se fait la démonstration :

On a

$$\gamma_\lambda(\tau) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\lambda\omega\tau}\,|\,\mathrm{H}(\lambda\omega)\,|^2 d\sigma_0(\omega)$$

(il n'est même pas nécessaire de supposer *a priori* qu'il existe une densité spectrale).

En introduisant la transformée de Fourier (conjuguée) $\mathrm{H}' = \overline{\mathscr{F}}(\,|\,\mathrm{H}\,|^2)$, on trouve que

$$\gamma_\lambda(\tau) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{H}'\left(\tau - \frac{s}{\lambda}\right)\gamma_0(s)ds.$$

Si γ_0 est intégrable, le théorème de Lebesgue montre que, lorsque $\lambda \to \infty$, $\gamma_\lambda(\tau)$ tend uniformément vers

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{H}'(\tau)\gamma_0(s)ds = \mathrm{H}'(\tau) \times \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_0(s)ds.$$

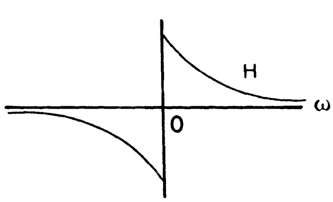
On voit que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \gamma_\lambda(\tau) = \overline{\mathscr{F}}(\,|\,\mathrm{H}\,|^2) \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} \gamma_0(\tau)d\tau\right).$$

On notera que $\mathscr{F}(\,|\,\mathrm{H}\,|^2) = \mathrm{K} * \overline{\mathrm{K}}$.

En ce qui concerne l'hypothèse faite sur $\mathrm{H}(\mathrm{H} \in \mathrm{L}^2)$, elle est beaucoup plus artificielle. Si $\mathrm{H} \in \mathrm{L}^2$, il n'existe pas forcément de fonction $\mathrm{K} \in \mathrm{L}^1$ telle que $\mathrm{H} = \overline{\mathscr{F}}\mathrm{K}$. Si par exemple

$$\begin{aligned} \mathrm{H}(\omega) &= e^{-\omega} \quad \text{si} \quad \omega > 0 \\ &= -\,e^{\omega} \quad \text{si} \quad \omega < 0 \end{aligned}$$



on vérifie que $\mathrm{K}(s) = \dfrac{4i\pi s}{1 + 4\pi^2 s^2}\cdot$

K appartient à L^2 mais non à L^1. La transformée de Fourier de K est représentée par une intégrale semi-convergente.

Or aucune hypothèse raisonnable sur f ne s'accorde avec $\mathrm{H} \in \mathrm{L}^2$. Si f

n'est pas bornée, l'espace dans lequel il est commode de placer f n'est pas l'espace L^2, comme nous le verrons. Un nouveau problème se pose donc, celui de l'approximation qu'il faut faire lorsque $H \in L^2$.

5. — SECONDE APPROXIMATION

Donnons nous donc $\gamma(\tau)$. A $\gamma(\tau)$ correspond une densité spectrale ψ positive. Soit $\sqrt{\psi}$ sa racine carrée positive. Soit maintenant H une fonction de carré intégrable telle que

$$|H|^2 = \psi.$$

On a

$$H(\omega) = \psi(\omega)e^{i\theta(\omega)}$$

où $\theta(\omega)$ est une fonction mesurable réelle quelconque.

Soit K une fonction appartenant à L^2 telle que, au sens du théorème de Plancherel, $H = \overline{\mathscr{F}}K$. Cela signifie que

$$H(\omega) = \lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} e^{-2\pi i\omega s}K(s)ds,$$

la limite étant entendue au sens de L^2. $K(\omega)$ est définie à une L^2-équivalence près. En général, K n'a pas les propriétés voulues pour former des fonctions stationnaires par convolution. Il faut que $K \in L^1$. Si $K \in L^1 \cap L^2$, le problème posé est résolu :

On se donne γ. On désigne par ψ la transformée de Fourier inverse de γ : $\gamma = \mathscr{F}\psi$. Soit H *une fonction telle que* $|H|^2 = \psi$, K *la transformée de Fourier de* H : $H = \overline{\mathscr{F}}K$. *Soit enfin f_0 une fonction stationnaire dont la fonction de corrélation satisfait aux hypothèses du paragraphe précédent. Si λ est suffisamment grand, la fonction de corrélation de la fonction*

$$\sqrt{\lambda}f_0(\lambda t) * K(t)$$

est une approximation de $\gamma(\tau)$.

Une fonction f_0 utilisable est $e^{2i\pi\varphi(t)}$, où φ est un polynôme réel de degré $v \geqslant 2$ tel que φ'' ait au moins un coefficient irrationnel.

Supposons maintenant que K n'appartienne pas à L^1. Cela signifie que φ n'a aucune racine carrée dont la transformée de Fourier appartienne à L^1. Ce cas peut se présenter. En effet, si φ a des points de discontinuité, il en est de même de $\sqrt{\varphi}$, et aucune racine carrée H de φ ne peut être transformée de Fourier d'une fonction de L^1.

On approche alors la fonction K choisie par une fonction de $L^1 \cap L^2$. Posons par exemple :

$$\begin{aligned} K_n(s) &= K(s) \quad \text{si} \quad |s| \leqslant n \\ &= 0 \quad \text{si} \quad |s| > n. \end{aligned}$$

Comme

$$\int_{-n}^{n} |K(s)|\,ds \leqslant \sqrt{2n} \int_{-n}^{n} |K(s)|^2 ds \leqslant \sqrt{2n}(\| K \|_{L^2})^2,$$

on voit que $K_n \in L^1$. Lorsque $n \to \infty$, K_n tend vers K au sens L^2.

En effet

$$(\| K_n - K \|_{L^2})^2 = \int_{|s|>n} |K(s)|^2 ds$$

quantité qui tend vers 0 puisque $K \in L^2$.

Si K_n tend vers K au sens L^2, sa transformée H_n tend de même vers la transformée de Fourier H, car

$$\| H_n - H \|_{L^2} = \| K_n - K \|_{L^2}.$$

Que peut-on en déduire sur le comportement de la suite de fonctions de corrélation γ_n? On a

$$\gamma_n(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\omega\tau} |H_n(\omega)|^2 d\omega$$

$$\gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\omega\tau} |H(\omega)|^2 d\omega.$$

Montrons le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Si* $n \to \infty$, $\gamma_n(\tau)$ *tend uniformément vers* $\gamma(\tau)$.

En effet, d'après l'inégalité du triangle,

$$|\,|H_n|^2 - |H|^2\,| \leqslant |H_n^2 - H^2| = |H_n - H|\,|H_n + H| \leqslant |H_n - H|(|H_n| + |H|).$$

Par intégration, on voit que

$$\begin{aligned} |\gamma_n(\tau) - \gamma(\tau)| &\leqslant \int |H_n(\omega) - H(\omega)|(|H_n(\omega)| + |H(\omega)|)d\omega \\ &\leqslant \| H_n - H \|_{L^2} \left(\int (|H_n(\omega)| + |H(\omega)|)^2 d\omega \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Comme H_n tend vers H au sens L^2, le premier facteur du second membre tend vers 0. Mais $|H|$ et $|H_n|$ appartiennent à L^2, donc aussi leur somme. Il en résulte que le second facteur du second membre existe et même qu'il reste inférieur à un nombre fixe indépendant de n. Donc $|\gamma_n(\tau) - \gamma(\tau)|$

est inférieur à ε dès que n est supérieur à un nombre fixe, indépendant de τ.

Nous retrouverons aux deux paragraphes suivants ce résultat comme conséquence de la manière dont la suite f_n elle-même tend vers la limite. La convergence uniforme de $\gamma_n(\tau)$ vers $\gamma(\tau)$ permet d'énoncer la règle suivante :

NOTATIONS.

$$(\mathscr{F}u)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\omega s}u(s)ds$$

est la transformée de Fourier d'une fonction u.

$f_0(t) = e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}$ est une fonction pseudo-aléatoire du type usuel (φ polynôme, $\hat{t}$ partie entière de t) ayant $\gamma_0(\tau)$ pour fonction de corrélation. γ_0 est réelle, avec

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma_0(\tau)d\tau = 1.$$

Problème. — Trouver une fonction f dont la fonction de corrélation approche, uniformément sur l'axe réel, une fonction de corrélation réelle donnée $\gamma(\tau)$ du type pseudo-aléatoire.

Solution :

1° On pose

$$\psi = \overline{\mathscr{F}}\gamma, \qquad \gamma = \mathscr{F}\psi \qquad (\psi \text{ densité spectrale réelle}).$$

On choisit une fonction réelle ou complexe H telle que $|\mathrm{H}|^2 = \psi$.

On pose

$$\mathrm{K} = \mathscr{F}\mathrm{H}.$$

On approche K (élément de L^2) par une fonction $\mathrm{K}_n \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$, obtenue en posant

$$\begin{aligned} \mathrm{K}(t) &= \mathrm{K}_n(t) \qquad \text{si} \quad |t| \leqslant n \\ \mathrm{K}(t) &= 0 \qquad \text{si} \quad |t| > n. \end{aligned}$$

2° Lorsque $\lambda \to \infty$, la fonction de corrélation de

$$\sqrt{\lambda}f_0(\lambda t) * \mathrm{K}_n(t)$$

converge, uniformément sur l'axe réel, vers $\mathrm{K}_n * \overline{\mathrm{K}}_n$.

Lorsque $n \to \infty$, cette dernière fonction converge, uniformément sur l'axe réel, vers la fonction γ donnée.

N. B. — Si $\mathrm{K} \in \mathrm{L}^1$, la première étape (remplacement de K par K_n) est superflue.

6. — ESPACES DE FONCTIONS STATIONNAIRES

Nous venons de voir que, par un procédé régulier, on sait trouver une fonction pseudo-aléatoire f dont la fonction de corrélation approche uniformément une fonction de corrélation donnée. Nous nous posons maintenant la question suivante : la fonction f elle-même tend-elle vers une limite, dans chacune des deux étapes de l'approximation utilisée?

Il faut pour cela définir le type de convergence qui est adapté à ce genre de questions. Rappelons d'abord quelques résultats [*2*, *3*]. L'espace le plus naturel dans lequel se placent les fonctions stationnaires (pseudo-aléatoires, presque périodiques, ...) est *l'espace de Marcinkiewicz* $\mathscr{M}^2$. C'est l'espace des fonctions f à valeurs complexes de la variable réelle t, localement intégrable, telles que

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt$$

soit un nombre fini (dépendant de f). On démontre que $\mathscr{M}^2$ est un espace vectoriel.

L'expression

$$\| f \| = \left[\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt\right]^{1/2}$$

est une *semi-norme* dans $\mathscr{M}^2$. Une fonction peut avoir une semi-norme nulle sans être identiquement nulle, car la définition de l'espace $\mathscr{M}^2$ ne fait intervenir que des propriétés à l'infini.

On peut associer à l'espace $\mathscr{M}^2$ son quotient par l'ensemble des fonctions telles que $\| f \| = 0$. On obtient ainsi un espace vectoriel dans lequel $\| f \|$ est une vraie norme, et l'on démontre que cet espace est complet. C'est un espace de Banach.

Pour éviter quelques difficultés d'expression et de terminologie, nous ne ferons pas de distinction entre l'espace $\mathscr{M}^2$ semi-normé, et l'espace quotient normé. Mais il faudra constamment se rappeler que *les fonctions f appartenant à $\mathscr{M}^2$ sont définies à une équivalence près* et que, si $\| f - g \| = 0$, f et g peuvent cependant avoir des valeurs tout à fait différentes sur tout intervalle fini.

Bien entendu, si l'on s'intéresse à des sous-ensembles de $\mathscr{M}^2$ constitués par des fonctions ayant une stricte définition locale, ces réserves cessent d'être valables. C'est le cas par exemple pour les fonctions de la forme $e^{2i\pi\varphi(t)}$ introduites ci-dessus.

L'espace $\mathcal{M}^2$ est très vaste. Il contient des sous-espaces importants : ceux qui, *a priori*, seront les plus utiles sont, dans l'ordre de généralité décroissant :

a) l'ensemble des fonctions f pour lesquelles

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt$$

existe (fonctions ayant une moyenne quadratique) ;

b) l'ensemble des fonctions f ayant une fonction de corrélation ;

c) l'ensemble des fonctions f ayant une fonction de corrélation continue ;

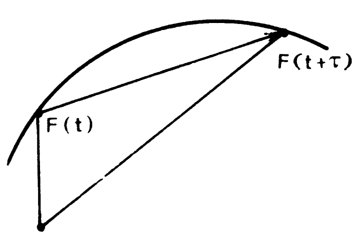
d) l'ensemble des fonctions pseudo-aléatoires.

Mais ces quatre sous-ensembles de $\mathcal{M}^2$ sont peu maniables, car ce ne sont pas des espaces vectoriels.

Toute fonction stationnaire f donnée engendre un sous-espace vectoriel V_f de $\mathcal{M}$. Il suffit de considérer dans $\mathcal{M}^2$ la trajectoire des translatées de f. L'espace V_f est le plus petit espace vectoriel fermé contenant cette trajectoire. Il est constitué par la fermeture, au sens de la norme dans $\mathcal{M}^2$, des combinaisons linéaires finies de translatées de f, c'est-à-dire des expressions de la forme

$$a_1 f(t + \tau_1) + a_2 f(t + \tau_2) + \ldots + a_n f(t + \tau_n),$$

où $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sont n nombres réels et $a_1, \ldots, a_n$ sont n nombres complexes.



Quel que soit le sous-ensemble de $\mathcal{M}^2$ dans lequel on décide de se placer, la convergence est celle de l'espace $\mathcal{M}^2$. Une suite f_n de fonctions converge vers une fonction f si

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n - f \| = 0.$$

Comme les sous-ensembles utiles sont ceux dans lesquels $\| f \|$ est une vraie limite (et non une limite supérieure), la définition ci-dessus équivaut à

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{M} \, | f_n - f |^2 = 0$$

où M est l'opérateur de moyenne habituel. Il est clair que, si $f_n \to f$, toute translatée de f_n tend vers la translatée correspondante de f. Cette définition n'implique en aucune façon que $f_n(t)$ tende vers $f(t)$ en un point t.

Elle a un caractère purement asymptotique, relatif au comportement à l'infini de f_n et de f. Mais, si $f_n \to f$, il en résulte des propriétés de convergence des moyennes du second ordre.

THÉORÈME.

1° *Si* $f_n \to f$, $\| f_n \| \to \| f \|$. *En particulier, si* $M |f_n|^2$ *et* $M |f|^2$ *existent,* $M |f_n|^2 \to M |f|^2$.

2° *Si* f_n *a une fonction de corrélation* γ_n, f *a une fonction de corrélation* γ, *et* γ_n *tend uniformément vers* γ.

Démonstration.

1° Le premier résultat est valable dans tout espace vectoriel normé. Il résulte de l'inégalité

$$\big| \, \| f_n \| - \| f \| \, \big| \leqslant \| f_n - f \|.$$

2° Supposons que f_n admette une fonction de corrélation. Pour alléger les notations, nous poserons ici

$$f' = f(t + \tau), \qquad f_n' = f_n(t + \tau).$$

Écrivons

$$\bar{f}f' = (\bar{f} - \bar{f}_n)(f' - f_n') + \bar{f}f_n' + \bar{f}_n f' - \bar{f}_n$$
$$\bar{f}f' - \bar{f}_n f_n' = (\bar{f} - \bar{f}_n)(f' - f_n') + f_n'(\bar{f} - \bar{f}_n) + \bar{f}_n(f' - f_n').$$

Prenons les moyennes sur un intervalle fini $(-T, T)$ et appliquons aux termes du second membre l'inégalité de Schwarz:

$$\left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (\bar{f}f' - \bar{f}_n f_n') dt \right| \leqslant \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f - f_n|^2 dt \cdot \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f' - f_n'|^2 dt \right)^{1/2}$$
$$+ \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f_n'|^2 dt \cdot \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f - f_n|^2 dt \right)^{1/2}$$
$$+ \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f_n|^2 dt \cdot \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f' - f_n'|^2 dt \right)^{2}.$$

Si $T \to \infty$, les termes du second membre ont des limites, et l'on a

$$\limsup_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^{T} (\bar{f}f' - \bar{f}_n f_n') dt \right|$$
$$\leqslant \| f - f_n \|^2 + \| f_n' \| \cdot \| f - f_n \| + \| f_n \| \cdot \| f' - f_n' \|.$$

Lorsque $T \to \infty$, $\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \bar{f}_n f_n' dt$ a une limite, égale à γ_n. Lorsque $n \to \infty$, le second membre tend vers 0. Il en résulte bien que $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \bar{f}f'dt$ a une limite γ, et que cette limite est la limite uniforme de la suite γ_n.

7. — APPLICATION

Soit K_n une suite de fonctions appartenant à $L^1 \cap L^2$ et tendant, au sens L^2, vers une limite K. Soit f_0 une fonction stationnaire. Nous avons considéré ci-dessus la suite de fonctions

$$f_n = f_0 * K_n.$$

Nous allons démontrer que la suite de *fonctions de corrélation* γ_n des f_n converge uniformément vers une limite. Cela résultera du théorème suivant:

THÉORÈME. — *Si la fonction de corrélation γ_0 de f_0 est intégrable; la suite de fonctions f_n converge vers une certaine limite f, au sens de l'espace $\mathcal{M}^2$.*

Démonstration. — Comme $\mathcal{M}^2$ est complet, il suffit d'appliquer à f_n le critère de Cauchy. Montrons que, si n et p sont suffisamment grands, $\| f_n - f_p \|$ peut être rendu inférieur à ε.

On a

$$\| f_n - f_p \| = \| f_0 * (K_n - K_p) \|.$$

Comme $f_n - f_p$ est la convolution de f_0 par $K_n - K_p$, on peut calculer $M\,| f_n - f_p |^2$ par la formule du paragraphe 3 (qui peut même servir à calculer la fonction de corrélation de $f_n - f_p$):

$$M\,| f_n - f_p |^2 = \iint \gamma_0(s-u)[\bar{K}_n(s) - \bar{K}_p(s)][K_n(u) - K_p(u)]dsdu.$$

On fait le changement de variables

$$s - u = \alpha, \qquad s + u = \beta_i:$$

$$M\,| f_n - f_p |^2 = \frac{1}{2}\iint \gamma_0(\alpha)[\bar{K}_n - \bar{K}_p]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}[K_n - K_p]_{\frac{\beta-\alpha}{2}}d\alpha d\beta.$$

Or, d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{K}_n - \bar{K}_p)_{\frac{\alpha+\beta}{2}}(K_n - K_p)_{\frac{\beta-\alpha}{2}}d\beta \right| \leqslant \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} | K_n - K_p |^2_{\frac{\alpha+\beta}{2}}d\beta}$$
$$\sqrt{\int | K_n - K_p |^2_{\frac{\beta-\alpha}{2}}d\beta} = 2 \| K_n - K_p \|^2_{L^2}.$$

(Car la norme au sens L^2 pour la mesure de Lebesgue est invariante par translation). Donc

$$\mathrm{M}\,|\,f_n - f_p\,|^2 \leqslant \|\,\mathrm{K}_n - \mathrm{K}_p\,\|_{\mathrm{L}^2}^2 \times \int_{-\infty}^{\infty} |\,\gamma_0(\alpha)\,|\,d\alpha.$$

On peut encore écrire ceci

$$\|\,f_n - f_p\,\|_{\mathcal{M}^2} \leqslant \|\,\mathrm{K}_n - \mathrm{K}_p\,\|_{\mathrm{L}^2}\sqrt{\|\,\gamma_0\,\|_{\mathrm{L}^1}}.$$

Comme K_n est une suite de Cauchy dans L^2, f_n est une suite de Cauchy dans $\mathcal{M}^2$. Elle a donc une limite f, dont on sait par ailleurs qu'elle admet bien une fonction de corrélation.

Si donc, pour représenter la fonction de corrélation γ, on doit faire appel *a priori* à une fonction $\mathrm{K} \in \mathrm{L}^2$, l'approximation au sens L^2 de K par une suite K_n de fonction de $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$ fournit en même temps :

a) une approximation uniforme γ_n de γ ;

b) une fonction f_n, admettant γ_n pour fonction de corrélation, et qui constitue une approximation au sens $\mathcal{M}^2$ d'une fonction f admettant γ pour fonction de corrélation.

En ce qui concerne $\sqrt{\lambda}f_0(\lambda t)$, la question est beaucoup moins simple. Nous vérifierons plus loin que, lorsque $\lambda \to \infty$,

$$\sqrt{\lambda}f_0(\lambda t) * \mathrm{K} \qquad (\mathrm{K} \in \mathrm{L}^1)$$

ne tend vers aucune limite au sens de la convergence dans $\mathcal{M}^2$. Mais nous avons besoin pour cela de propriétés d'orthogonalité que nous n'avons pas encore introduites. Avant de les étudier, nous devons donner quelques indications sur la question de l'irrégularité locale des fonctions stationnaires.

8. — IRRÉGULARITÉ LOCALE

On peut admettre (quoique le point de vue opposé soit parfois adopté) que les fonctions stationnaires f qui représentent la plupart des phénomènes naturels sont localement très régulières, au sens mathématique usuel : elles sont continues, dérivables, peut-être indéfiniment dérivables. Les « pointes » qu'elles semblent présenter correspondent à des variations rapides, mais s'arrondissent par changement d'échelle.

Leur apparence d'irrégularité est cependant frappante. Il s'agit d'une irrégularité à grande échelle. On peut faire à son sujet quelques remarques générales :

La fonction f n'est pas périodique. Elle n'est même pas « presque-périodique » (1), car sa fonction de corrélation tend vers zéro à l'infini. Il n'y a pas de « corrélation » sensible entre $f(t)$ et $f(t+\tau)$ dès que τ est suffisamment grand. Cela revient bien à dire que f ne possède pas de presque-périodes.

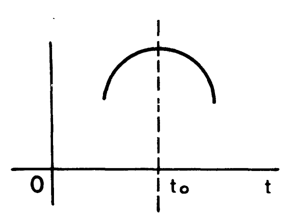
Il est d'autre part bien évident que les conditions asymptotiques relatives à f (la fonction de corrélation existe et tend vers zéro à l'infini) ne permettent pas de définir une « irrégularité semi-locale » moins fine que l'irrégularité locale (continuité, différentiabilité locales) et plus fine que l'irrégularité d'ensemble. En effet, en remplaçant sur un intervalle *fini* la fonction de f par une fonction absolument quelconque, même très régulière, on ne change rien à ses propriétés asymptotiques.

Aux propriétés moyennes, il faut donc ajouter les propriétés plus locales, et c'est bien ce qu'on fait lorsqu'on part de fonctions bien définies, de la forme

$$f_0(t) = e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}$$

ou mieux $f_0 * \mathrm{K}$ (pour assurer les propriétés de continuité) par exemple. Nous allons voir que, pour ces fonctions, qui ont toutes, quel que soit le polynôme φ, les mêmes propriétés du second ordre, on peut faire apparaître des distinctions qui permettent de définir ce que nous appellerons l'*irrégularité semi-locale.*

Une fonction localement régulière admet des centres et des axes de symétrie locaux. Car elle est localement voisine d'un polynôme. Tout point est donc, très localement, un centre de symétrie. En tout maximum ou minimum il passe, très localement, un axe de symétrie, car si t_0 est l'abscisse du maximum, $f(t)$ est localement fonction paire de $t-t_0$.



Mais il peut arriver que ces symétries se manifestent à une échelle beaucoup plus grande, et deviennent alors tout à fait inadmissibles. Étudions l'exemple suivant :

$$f_0(t) = \cos 2\pi \mathrm{A}\hat{t}^2$$
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t-s)\mathrm{K}(s)ds,$$

(1) On dit que la fonction f est presque périodique si, pour chaque ε donné,
1° il existe des « nombres de translation » τ telles que, quel que soit t,

$$|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon$$

2° il existe un nombre l tel que dans tout intervalle de longueur l, il y ait un nombre de translation (à tout a on peut associer un τ tel que $a \leqslant \tau < a + l$).

où K est une fonction réelle, paire, telle que $K(s)$, $sK(s)$, $s^2K(s)$ soient intégrables sur $(-\infty, +\infty)$. Nous allons montrer les résultats suivants :

1° Si l'on remplace A pour un nombre « voisin » B, il existe un intervalle centré sur l'origine dans lequel les fonctions $\cos 2\pi A\hat{t}^2$ et $\cos 2\pi B\hat{t}^2$ sont voisines (leur différence est uniformément inférieure à un nombre qui dépend de $|B - A|$.

2° Au voisinage de chaque point t_0, il existe un intervalle dans lequel fonction

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi A(\widehat{t - s})^2 K(s)ds, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi B(\widehat{t - s})^2 K(s)ds$$

restent uniformément voisines.

3° Si B est rationnel, la fonction

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi B(\widehat{t - s})^2 K(s)ds$$

admet des axes de symétrie.

Démonstration.

$$1° \qquad \cos 2\pi A\hat{t}^2 - \cos 2\pi B\hat{t}^2 = 2 \sin \pi(B - A)\hat{t}^2 \sin \pi(B + A)\hat{t}^2$$
$$|\cos 2\pi A\hat{t}^2 - \cos 2\pi B\hat{t}^2| \leqslant 2|\sin \pi(B - A)\hat{t}^2| \leqslant 2\pi|B - A|\hat{t}^2.$$

Si $|B - A|$ est inférieure à un nombre η considéré comme petit, le premier membre est inférieur à

$$2\pi\eta\hat{t}^2.$$

Donc, pour tout t tel que

$$2\pi\eta\hat{t}^2 < \varepsilon$$

on a une bonne approximation de $\cos 2\pi A\hat{t}^2$ par $\cos 2\pi B\hat{t}^2$. Cette approximation, bien entendu, n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

$$2° \quad \left| \int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi A(\widehat{t - s})^2 K(s)ds - \int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi B(\widehat{t - s})^2 K(s)ds \right|$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\cos 2\pi A(\widehat{t - s})^2 - \cos 2\pi B(\widehat{t - s})^2| K(s)ds$$
$$\leqslant 2\pi\eta \int_{-\infty}^{\infty} (\widehat{t - s})^2 K(s)ds.$$

Donnons-nous une valeur particulière t_0 de t. Comme

$$(\widehat{t - s})^2 \leqslant (t - s)^2 \leqslant 2(t - t_0)^2 + 2(t_0 - s)^2,$$

on a

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} (t-s)^2 |K(s)ds| \leqslant 2(t-t_0)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |K(s)|ds + 2\int_{-\infty}^{\infty} (t_0-s)^2|K(s)|ds \right|.$$

Nous avons naturellement supposé que $K(s)$, $sK(s)$, $s^2K(s)$ sont intégrables. Alors (t_0 étant choisi) les deux intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(s)|\,ds, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} (t_0-s)^2\,|K(s)|\,ds$$

ont des valeurs P et Q déterminées (dépendant de t_0). On a donc

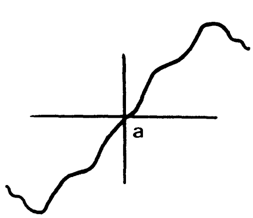
$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi A(\widehat{t-s})^2 K(s)ds - \int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi B(\widehat{t-s})^2 K(s)ds \right| \leqslant 4\pi\eta[P(t-t_0)^2 + Q].$$

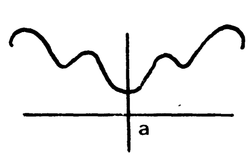
On voit que, si t reste suffisamment proche de t_0, cette quantité est de l'ordre de η. Autour de tout point t_0, il y a un intervalle où, en remplaçant, dans l'expression de f, A par B, on fait une erreur de l'ordre de $\eta = |A - B|$.

3° Montrons maintenant que, si B est rationnel, et si K est une fonction paire, la fonction

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi B(\widehat{t-s})^2 K(s)ds$$

a des centres de symétrie et des axes de symétrie.





Remplaçons t par $2a - t$. Il y a au point a :
un centre de symétrie si

$$f(t) = -f(2a-t)\,;$$

un axe de symétrie si

$$f(t) = f(2a-t).$$

Or, si x est un nombre réel,

$$(\widehat{-x}) = -(\hat{x}+1).$$

Donc

$$\widehat{2a - t - s} = -(\widehat{t + s - 2a} + 1)$$

et

$$f(2a - t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi B(\widehat{t + s - 2a} + 1)^2 K(s) ds.$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi B(\widehat{t - s - 2a + 1})^2 K(s) ds$$

(car K est paire).

Commençons par choisir a de façon que $2a - 1$ soit entier. Alors

$$\widehat{t - s - 2a + 1} = \widehat{t - s} - (2a - 1).$$

et

$$f(2a - t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi B[(\widehat{t - s})^2 - 2(2a - 1)(\widehat{t - s}) + (2a - 1)^2] K(s) ds.$$

La condition de symétrie est réalisée si

$$B[(\widehat{t - s})^2 - 2(2a - 1)(\widehat{t - s}) + (2a - 1)^2] = \pm B(\widehat{t - s})^2 + \frac{k}{2}$$

k entier pair : axe de symétrie,
k entier impair : centre de symétrie.
Donc soit :

$$(2a - 1)^2 B - 2(2a - 1)(\widehat{t - s}) B = \frac{k}{2}$$

soit

$$(2a - 1)^2 B - 2(2a - 1)(\widehat{t - s}) B + 2(\widehat{t - s})^2 B = \frac{k}{2}.$$

Si $a = \frac{1}{2}$, la première condition est vérifiée avec $k = 0$ (axe de symétrie d'abscisse $\frac{1}{2}\Big)$.

Examinons maintenant la première condition sous sa forme générale. Le nombre rationnel B est égal à une fraction irréductible $\frac{P}{Q}$.

On veut trouver un entier $2a - 1$ tel que

$$(2a - 1)^2 \frac{P}{Q} - 2(2a - 1)(\widehat{t - s}) \frac{P}{Q} = \frac{k}{2}.$$

Une fois $2a - 1$ choisi, il faut associer aux valeurs successives

$$0 \quad 1 \quad 2 \ \ldots n \ \ldots \qquad \text{de } \widehat{t - s}$$

des valeurs

$$k_0 \quad k_1 \quad k_2 \dots k_n \dots \qquad \text{de l'entier } k$$

de telle sorte que

$$(2a-1)^2\mathrm{P} - 2(2a-1)n\mathrm{P} = \frac{k_n}{2}\mathrm{Q}.$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on a

$$(2a-1)^2\mathrm{P} = \frac{k_0}{2}\mathrm{Q}, \qquad (2a-1)^2\mathrm{P} - 2(2a-1)\mathrm{P} = \frac{k_1}{2}\mathrm{Q}.$$

Il en résulte que

$$\frac{k_0 - k_1}{4(2a-1)} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}, \qquad k_0 = \frac{(2a-1)(k_0-k_1)}{2}$$

puis

$$k_0 - k_n = n(k_0 - k_1).$$

La fraction $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ étant irréductible, il existe un entier λ, au moins égal à 1, tel que

$$k_0 - k_1 = \lambda\mathrm{P}, \qquad 4(2a-1) = \lambda\mathrm{Q}, \qquad k_0 = \frac{\lambda^2\mathrm{PQ}}{8}, \qquad k_n = \frac{\lambda^2\mathrm{PQ}}{8} - n\lambda\mathrm{P}.$$

On distingue alors deux cas.

Q impair. — La plus petite valeur de λ est $\lambda = 4$, d'où

$$2a - 1 = \mathrm{Q}, \qquad k_0 - k_1 = 4\mathrm{P}, \qquad k_0 = 2\mathrm{PQ}$$
$$k_n = 2\mathrm{PQ} - 4n\mathrm{P}.$$

k_n est toujours pair et, au point d'abscisse $\frac{\mathrm{Q}+1}{2}$, il y a un axe de symétrie.

Q pair. — Soit $\mathrm{Q} = 2\mathrm{Q}'$:

$$k_n = \frac{\lambda^2\mathrm{PQ}'}{4} - n\lambda\mathrm{P}.$$

Diverses circonstances peuvent alors se produire.

P pair, donc Q′ impair. Avec $\lambda = 2$, k_n est pair (axe de symétrie).
P impair, donc Q′ pair. Avec $\lambda = 2$, k_n est pair (axe de symétrie).
P impair, donc Q′ impair. Avec $\lambda = 2$, k_n est la différence d'un nombre impair PQ′ et d'un nombre pair $2n$P. Le point d'abscisse $\frac{\mathrm{Q}'+1}{2}$ est un centre de symétrie.

La fonction $\int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi \mathrm{P}\widehat{(t-s)^2}\mathrm{K}(s)ds$ présente donc, suivant les cas, et pour certaines valeurs de λ, un centre ou un axe de symétrie au point $a = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\lambda \mathrm{Q}}{4}\right)$. Il en résulte que, si B est un rationnel voisin de l'irrationnel A, la fonction

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi \mathrm{A}\widehat{(t-s)^2}\mathrm{K}(s)ds,$$

qui diffère peu, sur un certain intervalle, de la fonction précédente, admet *localement* au même point un centre ou un axe de symétrie, d'autant plus visible que la coïncidence entre les deux fonctions est acceptable sur un plus long intervalle.

Or il existe un procédé pour représenter avec une approximation excellente un nombre irrationnel A par un nombre rationnel B. La théorie des *fractions continues* affirme qu'il existe une suite de fractions irréductibles $\frac{\mathrm{P}_m}{\mathrm{Q}_m}$ ayant les propriétés suivantes :

Q_m est une suite croissante d'entiers, $\lim\limits_{m \to \infty} \frac{\mathrm{P}_m}{\mathrm{Q}_m} = \mathrm{A}$, et

$$\left| \mathrm{A} - \frac{\mathrm{P}_m}{\mathrm{Q}_m} \right| \leqslant \frac{1}{\mathrm{Q}_m \mathrm{Q}_{m+1}} < \frac{1}{2^m} \frac{1}{\mathrm{Q}_0 \mathrm{Q}_1}.$$

On choisit pour B l'une des fractions $\frac{\mathrm{P}_m}{\mathrm{Q}_m}$.

Exemple numérique.

Choisissons $\mathrm{A} = \frac{1}{2\pi}$. Les premières approximations de π par des fractions $\frac{\mathrm{P}_m}{\mathrm{Q}_m}$ sont

$$3 \quad \frac{22}{7} \quad \frac{333}{106} \quad \frac{355}{113}$$

La dernière est très bonne. En effet

$$\frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots \qquad (= \pi \text{ à moins de } 3.10^{-7} \text{ près})$$

et

$$355 - 113\pi = 0 \text{ avec une erreur inférieure à } 4.10^{-5}.$$

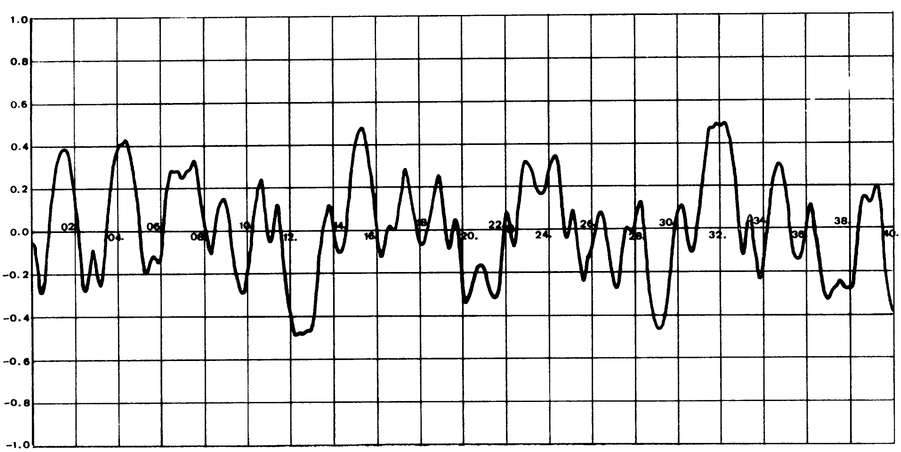
On choisit donc, pour approcher $\frac{1}{2\pi}$, la fraction $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ telle que

$$\mathrm{P} = 113 \qquad \mathrm{Q} = 2 \times 355 = 710.$$

Q est pair, $\mathrm{Q}' = \frac{\mathrm{Q}}{2}$ est impair, P est impair. La fonction correspondante a donc un bon *centre* de symétrie au point d'abscisse

$$a = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mathrm{Q}}{2}\right) = 178.$$

On a ici $k_0 = 113 \times 355$, $k_n = 113(355 - 2n)$, impair.



9. — ORTHOGONALITÉ DES DILATÉES. INTRODUCTION

Nous avons eu l'occasion d'utiliser un changement d'échelle sur l'axe des t, et de considérer, en même temps qu'une fonction stationnaire $f(t)$, les fonctions $f(\lambda t)$, où λ est un nombre réel. L'opération qui, à $f(t)$, fait correspondre $f(\lambda t)$, sera appelée *dilatation*, de même que l'opération $f(t) \to f(t + \tau)$ est une *translation*. La dilatation (comme la translation) conserve la moyenne quadratique (norme dans $\mathscr{M}^2$) car,

$$\frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} |f(\lambda t)|^2 dt = \frac{1}{2\lambda\mathrm{T}} \int_{-\lambda\mathrm{T}}^{\lambda\mathrm{T}} |f(t')|^2 dt'$$

et la deuxième expression tend bien vers M $|f|^2$ lorsque T (ou λT) augmente indéfiniment.

En ce qui concerne la fonction de corrélation, on a

$$M\bar{f}(\lambda t)f(\lambda t + \lambda\tau) = M\bar{f}(t)f(t + \lambda\tau).$$

Donc, si $\gamma(\tau)$ est la fonction de corrélation de $f(t)$, celle de $f(\lambda t)$ est $\gamma(\lambda\tau)$.

Si $f(t) = e^{it}$, les dilatées de f sont les fonctions $e^{i\lambda t}$. On sait que, si $\lambda' \neq \lambda$,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{i\lambda t}e^{-i\lambda' t}dt = 0.$$

Nous dirons que les fonctions $e^{i\lambda t}$ sont deux à deux *orthogonales.* L'orthogonalité est bien liée à une notion de produit scalaire. Il suffit de considérer l'espace préhilbertien engendré par les polynômes trigonométriques

$$\Sigma a_k e^{i\lambda k t},$$

et d'y définir le produit scalaire de deux polynômes trigonométriques f, g par

$$(f, g) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \bar{f}(t)g(t)dt.$$

Considérons d'une façon analogue une fonction pseudo-aléatoire $f(t)$. Est-elle orthogonale à ses dilatées $f(\lambda t)$?

Il n'y a aucune raison pour que la réponse soit affirmative dans des conditions très générales ([1]). On ne sait même pas si le produit $\bar{f}(t)f(\lambda t)$ a une moyenne. Mais nous allons donner une réponse pour les fonctions de la forme $e^{2i\pi\varphi(\hat{t})}$ du type déjà considéré ci-dessus.

Pour comparer $f(\lambda t)$ et $f(\lambda' t)$, avec $\lambda' \geqslant \lambda$, on peut toujours se ramener à $f\left(\frac{\lambda}{\lambda'} t\right)$ et $f(t)$, où $\alpha = \frac{\lambda}{\lambda'}$ est tel que $|\alpha| \leqslant 1$. Plus généralement, on se propose de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si φ est un polynôme de la forme*

$$\varphi(t) = At^{\nu} + \dots \qquad \nu \geqslant 2, \text{ A irrationnel,}$$

et si

$$f(t) = e^{2i\pi\varphi(\hat{t})},$$

([1]) Pour les fonctions presque-périodiques, le résultat dépend de λ. La fonction $ae^{i\omega t} + be^{i\omega' t}$ n'est pas orthogonale à sa dilatée $ae^{i\lambda\omega t} + be^{i\lambda\omega' t}$ si

$$\lambda = \frac{\omega}{\omega'} \qquad \text{ou} \qquad \lambda = \frac{\omega'}{\omega}.$$

la moyenne du produit $\bar{f}(t)f(\alpha t + \beta)$ *est nulle si* $\alpha > 0$ *différent de* 1 *et si* $\alpha = 1$, $|\beta| \geqslant 1$, *sauf peut-être dans le cas suivant :*

$\nu = 2$; α *irrationnel quadratique positif tel que* $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ *soit rationnel*; A *lié à* α *par une relation linéaire à coefficients entiers.*

(Le cas où $\alpha < 0$ sera examiné plus loin).

10. — DÉMONSTRATION [1]

On veut démontrer que la moyenne du produit $\bar{f}(t)f(\alpha t + \beta)$ est nulle. Mais son existence même n'est pas évidente *a priori*. Certaines précautions seront donc nécessaires. On utilise les résultats suivants [*8*] :

Soit f une fonction *régulière* en moyenne quadratique, c'est-à-dire telle que, pour tout a fixé,

$$\lim_{T \to = \infty} \frac{1}{2T} \int_{T}^{T+a} |f(t)|^2 dt = 0.$$

Une fonction bornée est régulière. On démontre que, si f admet une moyenne quadratique (sans être nécessairement bornée), f est régulière. On peut alors démontrer la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ P. — Si f est régulière, et si

$$\limsup_{T \to \infty} \left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \bar{f}(t)f(t + \tau)dt \right|$$

tend vers 0 quand $\tau \to \infty$, alors :

1) Mf existe et a pour valeur zéro ;

2) pour toute fonction ψ presque périodique au sens de l'espace $\mathcal{M}^2$ (non nécessairement continue), $M(f\psi) = 0$.

Un cas particulier de validité est celui où

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \bar{f}(t)f(t + \tau)dt = 0$$

pour tout τ en dehors d'un intervalle borné.

---

[1] Cette démonstration est due à M. Bertrandias. On peut donner une démonstration plus élémentaire, mais un peu plus longue, utilisant directement les propriétés des suites équiréparties.

Pour éviter des complications d'écriture, prenons pour φ un polynôme du 3^e^ degré :

$$\varphi(t) = \mathrm{A}t^3 + \mathrm{B}t^2 + \mathrm{C}t + \mathrm{D} \quad , \quad \mathrm{A} \text{ irrationnel.}$$

On veut montrer que la moyenne de

$$f_1(t) = e^{2i\pi[\varphi(\widehat{\alpha t + \beta}) - \varphi(\hat{t})]}$$

existe et est nulle. Appliquons la propriété P et formons

$$f_2(t) = \bar{f}_1(t) f_1(t + \tau)$$

$$\bar{f}_1(t) f_1(t + \tau_1) = e^{2i\pi[\varphi(\widehat{\alpha t + \beta + \alpha\tau_1}) - \varphi(\widehat{\alpha t + \beta}) - \varphi(\widehat{t + \tau_1}) + \varphi(\hat{t})]} \tag{1}$$

Mais

$$\begin{aligned}
\widehat{\alpha t + \beta + \alpha\tau_1} &= \widehat{\alpha t + \beta} + \widehat{\alpha\tau_1} && \text{si} \quad \underset{\smile}{\alpha t + \beta} < 1 - \underset{\smile}{\alpha\tau_1} \\
&= \widehat{\alpha t + \beta} + \widehat{\alpha\tau_1} + 1 && \text{si} \quad \alpha t + \beta \geqslant 1 - \underset{\smile}{\alpha\tau_1} \\
\widehat{t + \tau_1} &= \hat{t} + \hat{\tau}_1 && \text{si} \quad \underset{\smile}{t} < 1 - \underset{\smile}{\tau_1} \\
&= \hat{t} + \hat{\tau}_1 + 1 && \text{si} \quad \underset{\smile}{t} \geqslant 1 - \underset{\smile}{\tau_1}
\end{aligned}$$

Il y a donc, dans l'expression (1), quatre termes distincts, suivant que la combinaison d'inégalités

$$\underset{\smile}{\alpha t + \beta} < 1 - \underset{\smile}{\alpha\tau_1} \qquad \text{et} \qquad \underset{\smile}{t} < 1 - \underset{\smile}{\tau_1},$$

est vérifiée, ou l'une des trois autres combinaisons possibles.

Soit $\rho_1(t)$ l'indicateur de l'ensemble périodique d'intervalles définis par $0 \leqslant \underset{\smile}{t} < 1 - \underset{\smile}{\tau_1}$.

Soit de même $\rho'_1(t)$ l'indicateur des intervalles définis par

$$0 \leqslant \underset{\smile}{\alpha t + \beta} \leqslant 1 - \underset{\smile}{\alpha\tau_1}$$

Le premier des 4 termes de (1) a pour exposant

$$\psi(0) = \varphi(\widehat{\alpha t + \beta} + \widehat{\alpha\tau_1}) - \varphi(\widehat{\alpha t + \beta}) - \varphi(\hat{t} + \hat{\tau}_1) + \varphi(\hat{t}).$$

On doit prendre la moyenne, sur tout $\mathbb{R}$, de

$$f_2(t) = \rho_1(t)\rho'_1(t)e^{2i\pi\psi(t)}$$

et montrer que cette moyenne est nulle pour les valeurs suffisamment grandes de τ_1. Or $\rho_1(t)$ et $\rho'_1(t)$ sont des foncteurs périodiques de périodes 1 et $\dfrac{1}{\alpha}$. Leur produit est une fonction presque périodique (non continue. mais au sens de Besicovitch). On demande que la fonction de corrélation de $f_2(t)$ tende vers 0 lorsque l'accroissement τ_2 augmente indéfiniment. Mais on sait [8] que le produit d'une fonction presque périodique par une fonction pseudo-aléatoire est pseudo-aléatoire (quasi pseudo-aléatoire au sens de Bertrandias).

Il suffit donc que $e^{2i\pi\psi(t)}$ soit pseudo-aléatoire, et l'on va pouvoir considérer la fonction $e^{2i\pi\psi}$, sans facteur $\rho_1\rho'_1$. Si sa fonction de corrélation tend vers 0 lorsque $\tau_2 \to \infty$, il en est de même de celle de $\rho_1\rho'_1 e^{2i\pi\psi}$, et (pour les valeurs convenables de τ_1), $\rho_1\rho'_1 e^{2i\pi\psi}$ a une moyenne nulle. Il en est bien entendu de même des trois autres termes dont (1) est la somme.

Or $\psi(t)$ a l'expression suivante.

$$\begin{aligned}\psi(t) = {} & 3\mathrm{A}\widehat{\alpha\tau}_1\widehat{\alpha t + \beta}^2 + (3\mathrm{A}\widehat{\alpha\tau}_1^2 + 2\beta\widehat{\alpha\tau}_1)\widehat{\alpha t + \beta} \\ & - [3\mathrm{A}\hat{\tau}_1\hat{t}^2 + (3\mathrm{A}\hat{\tau}_1^2 + 2\mathrm{B}\hat{\tau}_1)\hat{t}] \\ & + \mathrm{A}\widehat{\alpha\tau}_1^3 + \mathrm{B}\widehat{\alpha\tau}_1^2 + \mathrm{C}\widehat{\alpha\tau}_1 - (+\mathrm{A}\hat{\tau}_1^3 + \mathrm{B}\hat{\tau}_1^2 + \mathrm{C}\hat{\tau}_1)\end{aligned}$$

La troisième ligne ne dépend pas de t. Dans les moyennes, elle fournit un facteur de module 1 fonction de τ_1.

L'exposant contient deux polynômes du *second* degré en $\widehat{\alpha t + \beta}$ et $\hat{t}$ respectivement. On les traite de la même façon avec un nouvel accroissement τ_2. Les termes de f_3 contenant t correspondent à l'exposant :

$$\begin{aligned}3\mathrm{A}\alpha\tau_1[(\widehat{\alpha t+\beta+\alpha\tau_2})^2 + (3\mathrm{A}\widehat{\alpha\tau}_1^2 + 2\mathrm{B}\widehat{\alpha\tau}_1)(\widehat{\alpha t+\beta+\alpha\tau_2} - \widehat{\alpha t+\beta}) - (\widehat{\alpha t+\beta})^2] \\ - 3\mathrm{A}\hat{\tau}_1(\widehat{t+\tau}_2^2 - \hat{t}^2) - (3\mathrm{A}\hat{\tau}_1^2 + 2\mathrm{B}\hat{\tau}_1)(\widehat{t+\tau_2} - \hat{t})\end{aligned}$$

On décompose à nouveau les parties entières

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha t + \beta + \tau_2} &= \widehat{\alpha t + \beta} + \widehat{\alpha\tau}_2 && \text{si} \quad \underset{\smile}{\alpha t + \beta} < 1 - \underset{\smile}{\alpha\tau_2} \\ &= \widehat{\alpha t + \beta} + \widehat{\alpha\tau}_2 + 1 && \text{si} \quad \underset{\smile}{\alpha t + \beta} \geqslant 1 - \underset{\smile}{\alpha\tau_2} \\ \widehat{t + \tau_2} &= \hat{t} + \hat{\tau}_2 && \text{si} \quad \underset{\smile}{t} < 1 - \underset{\smile}{\tau_2} \\ &= \hat{t} + \hat{\tau}_2 + 1 && \text{si} \quad \underset{\smile}{t} \geqslant 1 - \underset{\smile}{\tau_2}\end{aligned}$$

On introduit les indicateurs ρ_2, ρ'_2 des intervalles

$$(0, 1 - \underset{\smile}{\alpha\tau_2}) \qquad \text{et} \qquad (0, 1 - \underset{\smile}{\tau_2})$$

On doit à nouveau faire la somme de 4 termes, dont le premier contient, multiplié par un facteur de module 1, la fonction

$$\rho_2(t)\rho'_2(t)e^{6i\pi\mathrm{A}[\widehat{\alpha\tau}_1\widehat{\alpha\tau}_2\widehat{\alpha t+\beta} - \hat{\tau}_1\hat{\tau}_2\hat{t}]} \tag{3}$$

Il s'agit de montrer que, pour toute valeur de τ_1 supérieure à une valeur fixe, la moyenne de (3) tend vers 0 lorsque $\tau_2 \to \infty$. (Les trois autres termes se traitent d'une façon analogue).

Or

$$\widehat{\alpha t + \beta} = \alpha t + \beta - \underbrace{\alpha t + \beta}$$
$$\hat{t} = t - \underset{\smile}{t}$$

D'où la fonction

$$(4) \quad \rho_2(t)\rho_2'(t)e^{6i\pi \mathrm{A}[\widehat{\alpha\tau}_1\widehat{\alpha\tau}_2(\alpha t+\beta) - \hat{\tau}_1\hat{\tau}_2 t]}e^{6i\pi \mathrm{A}[\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2\underset{\smile}{t} - \widehat{\alpha\tau}_1\widehat{\alpha\tau}_2\underbrace{\alpha t+\beta}]}$$
$$= \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \times e^{6i\pi \mathrm{A}(\alpha\widehat{\alpha\tau}_1\widehat{\alpha\tau}_2 - \hat{\tau}_1\hat{\tau}_2)t}\rho_2(t)e^{6i\pi \mathrm{A}\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2\underset{\smile}{t}}\rho_2'(t)e^{-6i\pi \mathrm{A}\widehat{\alpha\tau}_1\widehat{\alpha\tau}_2\underbrace{\alpha t+\beta}}$$

C'est le produit d'un facteur exponentiel pur par deux fonctions périodiques, de périodes respectives 1 et $\dfrac{1}{\alpha}$. Comme α est irrationnel, c'est une fonction presque périodique ne contenant plus de facteur pseudo-aléatoire.

Cette fonction presque périodique admet des coefficients de Fourier. Sa moyenne est égale à celui de ses coefficients de Fourier correspondant à une exponentielle de fréquence nulle. Or ce coefficient peut se calculer en faisant le produit formel des développements en série de Fourier des facteurs périodiques. Posons

$$(5) \qquad \rho_2(t)e^{6i\pi \mathrm{A}\tau_1\tau_2\underset{\smile}{t}} = \sum_k a_k e^{2i\pi kt}$$

$$(6) \qquad \rho_2'(t)e^{-6i\pi \mathrm{A}\widehat{\alpha\tau}_1\widehat{\alpha\tau}_2\underbrace{\alpha t+\beta}} = \Sigma b_l e^{2i\pi\alpha lt}$$

Ces séries sont d'ailleurs convergentes aux différents sens usuels.

La fonction (4) de la variable t, à un facteur constant près, admet le développement formel.

$$(7) \qquad \sum_{k,l} a_k b_l e^{2i\pi[k+\alpha l + 3\mathrm{A}\alpha\widehat{\alpha\tau}_1\widehat{\alpha\tau}_2 - 3\mathrm{A}\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2]t}$$

et la moyenne cherchée vaut

$$(8) \qquad \Sigma a_k b_l,$$

la somme étant étendue à l'ensemble des k, l tels que

$$(9) \qquad k + \alpha l + 3\mathrm{A}\alpha\widehat{\alpha\tau}_1\widehat{\alpha\tau}_2 - 3\mathrm{A}\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2 = 0.$$

Si (8) a la valeur 0, le théorème est établi (pour α irrationnel).

Donnons à τ_1 et τ_2 des valeurs particulières. L'équation (8) devient une relation homographique à coefficients entiers entre les irrationnels A et α.

Donc, si A et α ne sont pas *a priori* liés par une relation de cette nature, la série (7) n'a pas de terme dont l'exposant soit nul, et la moyenne de (4) est nulle quels que soient τ_1 et τ_2.

Le théorème est alors vrai.

Supposons maintenant qu'il existe des entiers P, Q, R, S tels que

$$\text{(10)} \qquad \mathrm{PA}\alpha + \mathrm{Q}\alpha + \mathrm{RA} + \mathrm{S} = 0.$$

Deux cas sont possibles :

1° l'équation (10) où A et α sont considérés comme donnés, a une solution unique, P, Q, R, S, à un facteur entier près. On doit donc avoir

$$\frac{3\widehat{\alpha\tau_1}\widehat{\alpha\tau_2}}{\mathrm{P}} = \frac{l}{\mathrm{Q}} = \frac{3\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2}{\mathrm{R}} = \frac{k}{\mathrm{S}}$$

Donnons à τ_1 une valeur fixe quelconque, telle cependant que $\hat{\tau}_1$ et $\alpha\hat{\tau}_2$ ne soient pas nuls.

Si $\tau_2 \to \infty$, $\dfrac{\widehat{\alpha\tau_2}}{\alpha\hat{\tau}_2}$ tend vers 1. En effet

$$\frac{\widehat{\alpha\tau_2}}{\alpha\hat{\tau}_2} \leqslant \frac{\alpha\tau_2}{\alpha\hat{\tau}_2} < \frac{\widehat{\alpha\tau_2}+1}{\alpha\hat{\tau}_2},$$

et $\dfrac{\tau_2}{\hat{\tau}_2}$ tend vers 1.

Mais

$$\text{(11)} \qquad \frac{\widehat{\alpha\tau_2}}{\alpha\hat{\tau}_2} = -\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}}\frac{\hat{\tau}_1}{\widehat{\alpha\tau_1}}$$

Le premier membre tend vers 1 et (pour τ_1 fixé) le second membre est un irrationnel donné. L'égalité (11) ne peut donc avoir lieu que pour un nombre fini de valeurs de τ_2 et la moyenne de f_2 est bien nulle. Donc la fonction de corrélation de f_2 a une moyenne nulle. Il en résulte que, pour tout τ_1 fixé, $\mathrm{M}f_2 = 0$. La fonction de corrélation de f_1 a donc une moyenne nulle, et $\mathrm{M}f_1 = 0$. Le théorème est alors démontré.

2° Supposons que l'équation (10) ait en P, Q, R, S deux solutions non proportionnelles :

$$\text{(12)} \qquad \begin{aligned} \mathrm{PA}\alpha + \mathrm{Q}\alpha + \mathrm{RA} + \mathrm{S} &= 0 \\ \mathrm{P'A}\alpha + \mathrm{Q'}\alpha + \mathrm{R'A} + \mathrm{S'} &= 0 \end{aligned}$$

Par élimination de A, on trouve que

$$(\mathrm{P}\alpha + \mathrm{R})(\mathrm{Q'}\alpha + \mathrm{S'}) - (\mathrm{P'}\alpha + \mathrm{R'})(\mathrm{Q}\alpha + \mathrm{S}) = 0$$

ou

$$(\mathrm{PQ'} - \mathrm{P'Q})\alpha^2 + (\mathrm{PS'} - \mathrm{P'S} + \mathrm{RQ'} - \mathrm{R'Q})\alpha + \mathrm{RS'} - \mathrm{R'S} = 0.$$

Les nombres PQ′ − P′Q et RS′ − R′S ne sont pas nuls. Car s'ils l'étaient, A ou α seraient rationnels. α est donc solution d'une équation du second degré à coefficients entiers :

$$\text{(13)} \qquad X\alpha^2 + Y\alpha + Z = 0$$

En éliminant Aα entre les équations (12), on voit que A et α sont liés par par une relation linéaire

$$\text{(14)} \qquad LA + M\alpha + N = 0.$$

La relation (9) entre les indices k et l devient alors :

$$k + \alpha l - 3\frac{M\alpha + N}{L}\alpha\widehat{\alpha\tau_1}\widehat{\alpha\tau_2} + \frac{3M\alpha + N}{L}\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2 = 0,$$

ou encore

$$L(k + \alpha l) + \left(3M\frac{Y\alpha + Z}{X} - 3N\alpha\right)\widehat{\alpha\tau_1}\widehat{\alpha\tau_2} + 3(M\alpha + N)\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2 = 0$$

Elle est linéaire en α. Comme α est irrationnel, elle doit être identiquement vérifiée.

$$\text{(15)} \qquad \begin{cases} LXk + 3MZ\widehat{\alpha\tau_1}\widehat{\alpha\tau_2} + 3NX\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2 = 0. \\ LXl + 3MY\widehat{\alpha\tau_1}\widehat{\alpha\tau_2} - 3NX\widehat{\alpha\tau_1}\widehat{\alpha\tau_2} + 3MX\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2 = 0. \end{cases}$$

L et X ne sont pas nuls, car autrement A et α seraient rationnels ; cela détermine donc, pour chaque τ_1 et τ_2, les indices k et l et la moyenne cherchée est $a_n b_l$. Nous voulons examiner si, pour τ_1 fixé, elle tend vers 0 lorsque $\tau_2 \to \infty$.

Il faut pour cela calculer a_k et b_l.

$$\text{(16)} \qquad \begin{aligned} a_k &= \int_0^1 \rho_2(t)e^{6i\pi A\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2 t}e^{-2i\pi kt}dt \\ &= \int_0^{1-\underset{\smile}{\tau_2}} e^{6i\pi A\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2 - 2i\pi kt}dt \\ &= \frac{1 - e^{-2i\pi(k - 3A\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2)(1 - \underset{\smile}{\tau_2})}}{2i\pi(k - 3A\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2)} \\ b_l &= \int \rho_2'(t)e^{-6i\pi A\widehat{\alpha\tau_1}\widehat{\alpha\tau_2}(\alpha t + \beta) - 2i\pi\alpha lt}dt, \end{aligned}$$

l'intégrale étant étendue à un intervalle sur lequel

$$\underset{\smile}{\alpha t + \beta} < 1 - \underset{\smile}{\alpha\tau_2}$$

par exemple

$$\left(-\frac{\beta}{\alpha}, \frac{1-\underline{\alpha\tau_2}}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\right).$$

b_l est le quotient de deux termes, un numérateur de module 1, et un dénominateur égal à

$$2i\pi\alpha(l + 3A\widehat{\alpha\tau}_1\widehat{\alpha\tau}_2)$$

Donc $a_k b_l$ est de la forme

$$\frac{C}{(k - 3A\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2)(l + 3A\widehat{\alpha\tau}_1\widehat{\alpha\tau}_2)}, \text{ C borné.} \tag{17}$$

Mais on connaît les expressions de k et l. On en déduit une expression explicite à un facteur constant près, des dénominateurs :

$$Z\widehat{\alpha\tau}_1\widehat{\alpha\tau}_2 - \alpha X\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2 \tag{18}$$

On peut encore écrire, à un facteur non nul constant près,

$$\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2\left[\frac{\widehat{\alpha\tau}_1\widehat{\alpha\tau}_2}{\alpha\hat{\tau}_1\alpha\hat{\tau}_2} - \frac{X}{\alpha Z}\right]$$

Lorsque $\tau_2 \to \infty$, le crochet tend vers

$$\frac{\widehat{\alpha\tau}_1}{\alpha\hat{\tau}_1} - \frac{X}{\alpha Z}$$

Pour τ_1 fixé suffisamment grand, cette quantité n'est pas nulle, comme on l'a déjà vu. Donc, lorsque $\tau_2 \to \infty$, la moyenne en t de $\overline{f_2}(t)f_2(t + \tau_2)$ (fonction de corrélation de f_2) tend, pour tout τ_1 fixé, vers l'infini. Le théorème est vérifié.

Mais le résultat repose sur l'existence de grandes valeurs de τ_1. Il est valable pour un polynôme φ de degré 3 (ou plus comme on le vérifie facilement). Il n'est pas évident qu'il le soit pour un polynôme du *second degré.* Dans ce cas, les calculs se font de la même façon, mais sont plus simples. Tous les raisonnements restent valables, jusqu'à la fin exclue. Au lieu du dénominateur (18), on trouve :

$$Z\widehat{\alpha\tau}_1 - \alpha X\hat{\tau}_1 \tag{19}$$

ou

$$\alpha\hat{\tau}_1\left[z\frac{\widehat{\alpha\tau}_1}{\alpha\hat{\tau}_1} - X\right]$$

Comme $\dfrac{\widehat{\alpha\tau}_1}{\alpha\hat{\tau}_1}$ tend vers 1 lorsque $\tau_1 \to \infty$, le crochet tend vers une limite finie $Z - X$, et le dénominateur augmente indéfiniment.

Il y a exception pour $Z = X$. Dans ce cas, le dénominateur

$$X(\widehat{\alpha\tau}_1 - \alpha\hat{\tau}_1)$$

n'a aucun comportement simple. Si par exemple τ_1 varie par valeurs entières n, il vaut $X(\widehat{\alpha n} - \alpha n) = X\widecheck{\alpha n}$. Il est uniformément distribué sur l'intervalle $(0, X)$ et ne tend pas vers l'infini. On ne peut conclure.

Le théorème est donc vrai, sauf peut-être si φ est un polynôme du second degré, si α est irrationnel et vérifie une équation de la forme

$$X\alpha^2 + Y\alpha + X = 0,$$

et si A est lié à α par une relation linéaire à coefficients entiers.

Cas où $\alpha < 0$. — La formule $\widehat{-u} = -(\hat{u} + 1)$ montre que, si $\alpha' = -\alpha$, $\beta' = 1 - \beta$, on a

$$\widehat{\alpha t + \beta} = -(\widehat{\alpha' t + \beta'}), \qquad \alpha' > 0.$$

En refaisant les calculs, on voit que les conclusions ne sont pas changées tant que α est irrationnel, ou rationnel différent de -1. Si $\alpha' = 1$, on a

$$\varphi(\widehat{-t + \beta}) - \varphi(t) = \varphi[-(\widehat{t + \beta'})] - \varphi(\hat{t}) = A(-1)^\nu(\widehat{t + \beta'})^\nu + \dots - A\hat{t}^\nu \dots$$

Pour prendre les moyennes, on pose $t = n + s$, et l'on se place sur l'intervalle $(-N, N)$, N entier. On doit calculer les limites, lorsque $N \to \infty$, de

$$(1 - \widecheck{\beta'})\frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N-1} e^{2i\pi[A(-1)^\nu(n+\beta')^\nu + \dots - An^\nu - \dots]}$$
$$+ \frac{1}{2N}\sum_{n=N}^{N} e^{2i\pi[A(-1)^\nu(n+\beta'+1)^\nu \dots - An^\nu - \dots]}$$

Si ν est impair, on a en exposant un polynôme de degré ν commençant par le terme $-2An^\nu$. Les moyennes sont donc nulles, et $\overline{f}(t)f(\widehat{-t + \beta})$ a une moyenne nulle quel que soit β.

Si ν est pair, les termes de plus haut degré du polynôme en exposant peuvent dépendre des coefficients des termes de degré inférieur à ν. Il n'est pas possible de donner une conclusion simple et générale. Chaque cas particulier doit s'examiner à part.

Cependant, si le polynôme est pair (uniquement des termes pairs), la moyenne est nulle pour $|\beta'| \geqslant 1$, égale à $1 - |\beta'|$ si $|\beta'| \leqslant 1$.

11. — DÉMONSTRATION *(SUITE).* α RATIONNEL

Posons $\alpha = \frac{p}{q}$, p et q étant entiers et premiers entre eux.

Il faut calculer

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{2i\pi\left[\varphi\left(\widehat{\frac{p}{q}t+\beta}\right) - \varphi(\hat{t})\right]} \tag{20}$$

On peut se limiter à des valeurs de T qui soient multiples de q : $T = qN$. Si l'on pose

$$t = r + sq,$$

on fait varier r par valeurs entières de $-N$ à $N-1$, et s de 0 à 1. (20) devient

$$\lim_{N'\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{r=N}^{N-1} \int_0^1 e^{2i\pi[\varphi(pr+\widehat{ps+\beta}) - \varphi(qr+\widehat{qs})]} ds$$

$$= \lim \int_0^1 ds \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N-1} e^{2i\pi[\varphi(pr+\widehat{ps+\beta}) - \varphi(qr+\widehat{qs})]}$$

Pour chaque s fixé, le crochet en exposant est un polynôme commençant par

$$A(p^\nu - q^\nu)r^\nu,$$

terme à coefficient irrationnel, puisque p et q sont entiers et différents. Sa limite est donc nulle.

Or on ne sait pas si la convergence des moyennes sous le signe $\int$ vers 0 est uniforme. Mais on peut remarquer que, lorsque s varie de 0 à 1, on peut diviser [0, 1] en un nombre *fini* d'intervalles dans chacun desquels

$$\widehat{ps} + \beta \qquad \text{et} \qquad \widehat{qs}$$

restent constants.

Soit $[s_1, s_2]$ l'un de ces intervalles. Si

$$s_1 \leqslant s < s_2, \qquad \widehat{ps+\beta} = \widehat{\alpha s_1 + \beta}, \qquad \widehat{qs} = qs_1.$$

Pour la portion d'intégrale $\int_{s_1}^{s_2}$, tout se passe comme si s était constant et l'on a

$$(s_2 - s_1) \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{r=N}^{N-1} e^{2i\pi[\varphi(pr+\widehat{ps_1+\beta}] - \varphi(qr+\widehat{qs_1})}$$

Or la limite est nulle.

Donc, au total,

$$\mathrm{M}e^{2i\pi\left[\varphi\left(\frac{p}{q}t+\beta\right)-\varphi(\hat{t})\right]}=0$$

(p, q entiers, $p \neq q$).

Donc, *si α est rationnel, différent de* 1,

$$\mathrm{M}e^{2i\pi[\varphi(\widehat{\alpha t+\beta})-\varphi(\hat{t})]}=0$$

Si $\alpha = 1$, $\mathrm{M}e^{2i\pi[\varphi(\widehat{t+\beta})-\varphi(\hat{t})]}$ est la fonction de corrélation de $e^{ri\pi\varphi(\hat{t})}$, nulle si $|\beta| \geqslant 1$, égale à $1 - |\beta|$ si $|\beta| \leqslant 1$.

12. — APPLICATIONS

1. — Séries de dilatées

à des fonctions $u(t, x, y, z)$, stationnaires en t pour tout point (x, y, z), et définies dans un domaine borné Ω de l'espace. Dans la suite, on simplifiera les notations en écrivant une seule variable x d'espace.

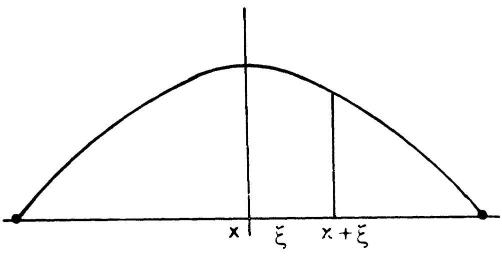
Ces fonctions admettent généralement une *fonction de corrélation spatio-temporelle*

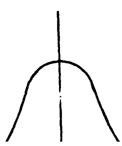
$$(1) \qquad \gamma(\tau, \xi, x) = \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \bar{u}(t, x)u(t+\tau, x+\xi)dt.$$

C'est une moyenne purement temporelle, où l'espace ne joue qu'un rôle de paramètre. Elle n'est pas en général *homogène* dans l'espace, car elle dépend de ξ, mais aussi de x.

Il arrive souvent que, sur la frontière de Ω, u s'annule. Alors, pour chaque x fixé, $\gamma(\tau, \xi, x)$ tend vers 0 lorsque le point $x + \xi$ tend vers un point de Ω.

Pour x (et t) fixés, le graphe de γ a donc souvent l'aspect suivant (première figure).





On sait que la fonction de corrélation de $\sqrt{\lambda}f(\lambda t)$ est $\lambda\gamma_0(\lambda\tau)$. On peut seulement dire que, dans les hypothèses du paragraphe 4, la fonction de corrélation de

$$\sqrt{\lambda}f_0(\lambda t) * \mathrm{K}(t)$$

tend vers une limite.

Dans le cas où f_0 satisfait aux hypothèses du théorème d'orthogonalité, nous allons donner une réponse négative à la question posée :

$$\sqrt{\lambda}f_0(\lambda t) * \mathrm{K}(t)$$

ne tend vers aucune limite au sens de la convergence dans $\mathscr{M}^2$, bien que la moyenne quadratique (ou la norme) reste bornée et tende vers une limite K(0).

Appliquons en effet le critère de Cauchy dans $\mathscr{M}^2$. Considérons

$$\| \sqrt{\lambda}f_0(\lambda t) * \mathrm{K}(t) - \sqrt{\mu}f_0(\mu t) * \mathrm{K}(t) \|^2$$

ou

$$\lambda \| f_0(\lambda t) * \mathrm{K}(t) \|^2 + \mu \| f_0(\mu t) * \mathrm{K}(t) \|^2$$
$$- 2\mathscr{R}\sqrt{\lambda\mu}\mathrm{M}[\overline{f_0(\lambda t) * \mathrm{K}}(t) . f_0(\mu t) * \mathrm{K}(t)]$$

Les deux normes ont une limite commune N, et la première ligne tend vers 2N. En ce qui concerne le produit scalaire, il s'écrit

$$\iint \mathrm{M}[\bar{f}_0(\lambda t - \lambda s) f_0(\mu t - \mu s')]\mathrm{K}(s)\mathrm{K}(s')ds ds'$$

Or, si $\lambda \neq \mu$, les fonctions $f_0(\lambda t - \lambda s)$, $f_0(\mu t - \mu s')$ sont orthogonales, et la moyenne dans le signe $\iint$ est nulle. Donc le critère de Cauchy ne s'applique pas, et il n'y a aucune limite au sens de la convergence naturelle dans $\mathscr{M}^2$ (¹).

13. — PROBLÈMES SPATIO-TEMPORELS

Jusqu'à ce point, nous avons seulement étudié des fonctions d'une seule variable t, le temps. Or l'expérience fournit des fonctions, scalaires ou vectorielles, du temps *et de l'espace*. Dans le cas le plus simple, on a affaire

(¹) Remplaçons $f_0(\lambda t)$ par sa partie réelle $\cos \varphi(\widehat{\lambda t})$. M. Pham Phu Hien a démontré que, lorsque $\lambda \to \infty$, la distribution asymptotique des valeurs de $\sqrt{\lambda} \cos \varphi(\widehat{\lambda t}) * \mathrm{K}(t)$ tend vers une distribution gaussienne (moyennant quelques hypothèses simples). Ce résultat confirme l'intérêt pratique que présente la fonction $\sqrt{\lambda}f_0(\lambda t) * \mathrm{K}(t)$ pour les grandes valeurs de λ.

à des fonctions $u(t, x, y, z)$, stationnaires en t pour tout point (x, y, z), et définies dans un domaine borné Ω de l'espace. Dans la suite, on simplifiera les notations en écrivant une seule variable x d'espace.

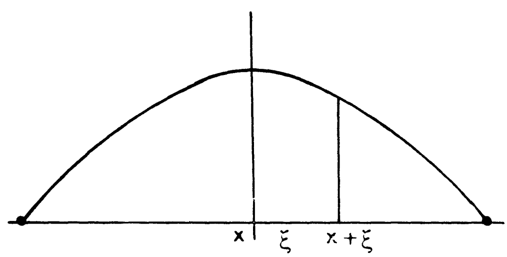
Ces fonctions admettent généralement une *fonction de corrélation spatio-temporelle*

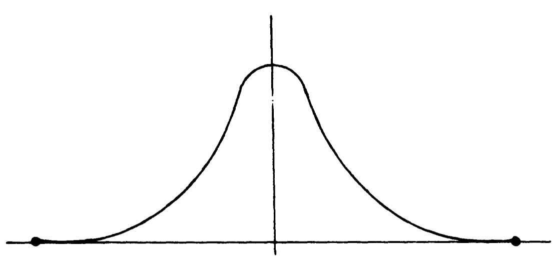
$$\gamma(\tau, \xi, x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \bar{u}(t, x)u(t + \tau, x + \xi)dt. \tag{1}$$

C'est une moyenne purement temporelle, où l'espace ne joue qu'un rôle de paramètre. Elle n'est pas en général *homogène* dans l'espace, car elle dépend de ξ, mais aussi de x.

Il arrive souvent que, sur la frontière de Ω, u s'annule. Alors, pour chaque x fixé, $\gamma(\tau, \xi, x)$ tend vers 0 lorsque le point $x + \xi$ tend vers un point de Ω.

Pour x (et t) fixés, le graphe de γ a donc souvent l'aspect suivant (première figure).





Or, l'expérience montre que, dans bien des circonstances usuelles, la décroissance de γ en fonction de ξ est bien plus rapide. Bien que Ω soit borné, γa, relativement à ξ un aspect tout à fait comparable à son aspect comme fonction de τ, variable non limitée.

Le problème qui se pose est donc de trouver une classe de fonctions de t et de x, pseudo-aléatoires relativement à t, et dont la fonction de corrélation *spatiale* ait des propriétés voisines de la fonction de corrélation temporelle, bien que ce soit toujours une moyenne *temporelle*.

L'expérience fournit d'ailleurs sur $\gamma(\tau, \xi, x)$ des renseignements plus précis. Dans le cas de la turbulence en soufflerie, on peut admettre qu'on a d'une façon assez approchée :

$$\gamma(\tau, \xi; x) = \mathrm{A}(\xi)\mathrm{B}\left(\tau - \frac{\xi}{\mathrm{U}}\right), \tag{2}$$

où U est une vitesse fixée, et où

$$\mathrm{B}(0)\mathrm{A}(\xi) = \gamma\left(\frac{\xi}{\mathrm{U}}, \xi; x\right) \tag{3}$$
$$\mathrm{A}(0)\mathrm{B}(\tau) = \gamma(\tau, 0; x)$$

Dans un domaine spatial assez étendu, γ dépend peu de x. Est-il possible de construire des modèles de fonction u dont la fonction de corrélation réponde à toutes ces exigences ?

Montrons d'abord que, sous une hypothèse qui sera précisée, les conditions (2) ne sont pas compatibles avec l'homogénéité spatiale stricte : γ doit dépendre de x.

Pour cela, représentons u, en tant que fonction de t, par une intégrale relativement à une mesure spectrale vectorielle dans l'espace $\mathcal{M}^2$ [3]. Cette mesure $\mathrm{Y}(t, d\omega)$ a la propriété suivante : il existe une mesure scalaire positive bornée σ telle que

$$\mathrm{M}\overline{\mathrm{Y}}(t, \mathrm{A})\mathrm{Y}(t, \mathrm{B}) = \int_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}} d\sigma(\omega).$$

pour tout couple A, B de boréliens de la droite. En particulier, si A et B sont disjoints, $\mathrm{Y}(t, \mathrm{A})$ et $\mathrm{Y}(t, \mathrm{B})$ sont orthogonales.

On peut alors représenter $u(t, x)$ par une intégrale de la forme

$$u(t, x) = \int a(x, \omega)\mathrm{Y}(t, d\omega), \tag{4}$$

où a est une fonction qui, pour chaque x fixé, appartient à $\mathrm{L}^2(\sigma)$.

Et dans ces conditions,

$$\gamma(\tau, \xi; x) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{a}(x, \omega)a(x + \xi, \omega)e^{i\omega\tau}d\sigma(\omega). \tag{5}$$

Si u est pseudo-aléatoire, $\sigma(\omega)$ admet une dérivée intégrable $\sigma'(\omega)$.

Nous faisons ici l'hypothèse essentielle que u dépend de x par la seule fonction a, c'est-à-dire que Y ne dépend pas de x : la représentation spectrale de u aux différents points de l'espace fait partout intervenir la même mesure spectrale. Cette hypothèse ne peut être prouvée *a priori*. Elle dépend de conditions plus précises qu'on sera conduit à imposer à la fonction u. Si par exemple u, fonction de x, t, satisfait à une équation fonctionnelle (équations de Navier-Stokes), les solutions cherchées, appartenant à certains espaces fonctionnels, ont ou n'ont pas la propriété en question. Il serait d'ailleurs intéressant de le savoir.

Supposons que γ ne dépend pas de x. On a alors :

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x, \omega)a(x + \xi, \omega)e^{i\omega\tau}\sigma'(\omega)d\omega = \int \bar{a}(0, \omega)a(\xi, \omega)e^{i\omega\tau}\sigma'(\omega)$$

La fonction $[\bar{a}(x, \omega)a(x + \xi, \omega) - \bar{a}(0, \omega)a(\xi, \omega)]\sigma'(\omega)$ a donc une transformée de Fourier nulle. Il en résulte qu'elle est nulle presque partout. Si on la suppose continue, comme il est raisonnable de le faire pour représenter des faits expérimentaux, elle est nulle pour tout ω. Si enfin il n'existe pas d'intervalle où la densité spectrale $\sigma'(\omega)$ soit nulle, on a

$$\bar{a}(x, \omega)a(x + \xi, \omega) = \bar{a}(0, \omega)a(\xi, \omega)$$

Les solutions continues de cette équation sont de la forme

$$a(x, \omega) = c(\omega)e^{ixb(\omega)}, \qquad b \text{ réelle.}$$

D'où

$$\gamma(\tau, \xi, x) = \int_{-\infty}^{\infty} |c(\omega)|^2 e^{i\xi b(\omega)}e^{i\omega\tau}\sigma'(\omega)d\omega.$$

Il existe donc des fonctions γ qui ne dépendent pas de x. Peuvent-elles être de la forme $A(\xi)B\left(\tau - \frac{\xi}{U}\right)$:

Posons $$\tau - \frac{\xi}{U} = s, \qquad b(\omega) + \frac{\omega}{U} = b_1(\omega)$$

$$\gamma(\tau, \xi) = \gamma_1(s, \xi).$$

$$\begin{aligned}\gamma_1(s, \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} |c(\omega)|^2 e^{i\xi b_1(\omega)}e^{i\omega s}\sigma'(\omega)d\omega \\ &= A(\xi)B(s).\end{aligned}$$

Pour $\xi = 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |c(\omega)|^2 e^{i\omega s}\sigma'(\omega)d\omega = A(0)B(s)$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} |c(\omega)|^2 e^{i\xi b_1(\omega)}e^{i\omega s}\sigma'(\omega)d\omega = \frac{A(\xi)}{A(0)} \int_{-\infty}^{\infty} |c(\omega)|^2 e^{i\omega s}\sigma'(\omega)d\omega$$

et la fonction

$$| c(\omega) |^2 \sigma'(\omega) \left[e^{i\xi b_1(\omega)} - \frac{A(\xi)}{A(0)} \right]$$

a une transformée de Fourier nulle. Elle est donc nulle, ce qui montre que

$$A(\xi) = A(0) e^{i\xi b_1(\omega)}$$

où $b_1(\omega)$ est une simple constante k.

Finalement,

$$\gamma_1(s, \xi) = \gamma(\tau, \xi) = e^{ik\xi} \int_{-\infty}^{\infty} | c(\omega) |^2 e^{i\omega\left(\xi - \frac{\tau}{U}\right)} d\omega$$

Telle est la forme que doit prendre la fonction de corrélation spatio-temporelle pour que, avec un certain nombre d'hypothèses, elle soit homogène et de la forme proposée.

La plupart de ces hypothèses sont bien naturelles et inspirées de l'expérience. Mais la première (Y(t, $d\omega$) ne dépend pas de x) n'est pas intuitive, et devra être démontrée dans des conditions précises d'utilisation.

Or

$$A(\xi) = A(0) e^{ik\xi}$$

Mais $A(\xi)$ est le maximum, pour une valeur donnée de ξ, de la fonction $\gamma(\tau, \xi)$ de la variable τ.

Dans les cas expérimentaux usuels, $A(\xi)$ est une fonction réelle décroissante et qui tend vers 0 lorsque $\xi \to \infty$. La forme qu'on vient de trouver est incompatible avec cette nouvelle exigence.

En résumé, on ne trouve pas (moyennant une hypothèse initiale non évidente) de fonctions de corrélation spatio-temporelles qui soient compatibles avec l'homogénéité spatiale et avec les propriétés usuelles des courbes expérimentales.

On va donc chercher des solutions approchées du problème.

14. — CHAMPS SPATIO-TEMPORELS DE VITESSE

Soit $f_0(t)$ une fonction pseudo-aléatoire élémentaire du type $e^{2i\pi\varphi(t)}$, ayant pour fonction de corrélation $\gamma_0(\tau) = \max(1 - |\tau|, 0)$.

Posons

(1) $$f(t) = \Sigma a_k f_0(\lambda_k t), \qquad \Sigma | a_k | < \infty, \qquad \lambda_k \text{ réels distincts.}$$

On sait que f a pour fonction de corrélation

$$\Sigma |a_k|^2 \gamma_0(\lambda_k \tau).$$

Pour introduire l'espace, imaginons, suivant une idée de M. Maurin, que l'indice k dépend de x. Au lieu de k, écrivons

$$k + m(x')$$

où m est un *entier* fonction de x. On peut par exemple choisir

$$m(x) = \widehat{\theta x}$$

où θ est un nombre réel donné et où $\widehat{\theta x}$ est la partie entière du nombre réel θx. On a donc

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \Sigma a_k f_0(\lambda_{k+m(x)} t) \\ f(t+\tau, x+\xi) &= \Sigma a_l f_0(\lambda_{l+m(x+\xi)}(t+\tau)) \end{aligned} \tag{2}$$

Comme la série Σa_k converge absolument, on peut faire le produit

$$\bar{f}(t, x) f(t+\tau, x+\xi)$$

et prendre les moyennes terme à terme.

La fonction de corrélation spatio-temporelle de f est alors

$$\gamma_f(\tau, \xi; x) = \sum_{kl} \bar{a}_k a_l \mathrm{M}\bar{f}(\lambda_{k+m(x)} t) f(\lambda_{l+m(x+\xi)}(t+\tau))$$

Mais le produit a une moyenne nulle sauf si les deux indices sont égaux :

$$k + m(x) = l + m(x+\xi).$$

x, puis ξ étant choisis, cela établit une liaison entre k et l, et

$$\gamma_f(\tau, \xi; x) = \sum_k \bar{a}_k a_{k+m(x)-m(x+\xi)} \gamma_0(\lambda_{k+m(x)} \tau) \tag{3}$$

Mais on désire que γ_f soit approximativement, pour chaque x fixé, le produit d'une fonction de ξ par une fonction de τ. Or γ_0 est une fonction continue. Si λ_k est une fonction peu variable de l'indice k, $\gamma_0(\lambda_k \tau)$, et de même $\gamma_0(\lambda_{k+m(x)}\tau)$, est pratiquement indépendant de λ_k, donc de x. Il est facile de construire une suite de nombres λ_k tous distincts et variant peu. Il suffit par exemple de choisir

$$\lambda_k = a + b\underbrace{\theta' k}$$

où θ' est irrationnel et où b est petit (par rapport à 1). La suite $\underbrace{\theta' k}$ varie entre 0 et 1 (elle est d'ailleurs équirépartie sur (0, 1)). Donc λ_k varie dans le petit intervalle

$$(a, a + b).$$

Si enfin nous remplaçons τ par $\tau - \frac{\xi}{U}$, nous voyons que

$$\Sigma \bar{a}_k a_{k+m(x)-m(x+\xi)} \gamma_0 \left[\lambda_{k+m(x)} \left(\tau - \frac{\xi}{U} \right) \right]$$

est une fonction de corrélation acceptable, dont la forme est très voisine de $A(\xi)B\left(\tau - \frac{\xi}{U}\right)$.

Pour $\tau = \frac{\xi}{U}$, on a approximativement

$$A(\xi) = \Sigma \bar{a}_k a_{k+m(x)-m(x+\xi)}$$

Il est facile de choisir pour a_k une suite réelle telle que $A(\xi)$ décroisse et tende vers 0. Si $m(x) = \widehat{\theta x}$, on a d'autre part

$$\begin{aligned} m(x+\xi) - m(x) &= \widehat{\theta x + \theta \xi} - \widehat{\theta x} \\ &= \widehat{\theta \xi} \qquad \text{si} \quad \underset{\vee}{\theta \xi} + \underset{\vee}{\theta x} < 1 \\ &= \widehat{\theta \xi} + 1 \quad \text{si} \quad \underset{\vee}{\theta \xi} + \underset{\vee}{\theta x} \geqslant 1. \end{aligned}$$

x étant fixé on a

$$A(\xi) = \Sigma \bar{a}_k a_{k - \widehat{\theta \xi}}$$

si ξ varie dans un intervalle de la forme

$$\left(\frac{n}{\theta}, \frac{n}{\theta} + \frac{1 - \underset{\vee}{\theta x}}{\theta} \right);$$

$$A(\xi) = \Sigma \bar{a}_k a_{k - \widehat{\theta \xi} - 1}$$

si ξ varie dans un intervalle de la forme

$$\left(\frac{n}{\theta} + \frac{1 - \underset{\vee}{\theta x}}{\theta}, \frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta} \right)$$

Si l'on choisit θ suffisamment grand, $A(\xi)$, bien qu'étant une fonction discontinue en escalier, varie par paliers très petits, et apparaît pratiquement comme une fonction continue de ξ. Lorsque ξ augmente, $h = \widehat{\theta \xi}$ augmente.

Si la suite a_k est réelle et positive, décroît et tend vers 0, $A(\xi)$ a les propriétés imposées. En effet,

$$\sum_k a_k a_{k-h} = a_h a_0 + a_{h+1} a_1 + \dots$$

$$\sum_k a_k a_{k-(h-1)} = a_{h-1} a_0 + a_h a_1 + \dots$$

Chaque terme de la première suite est inférieur au terme de même rang de la seconde. D'autre part, si h est suffisamment grand, on a

$$a_h < \varepsilon, \qquad a_{h+1} < \varepsilon, \dots,$$

et
$$\sum_k a_k a_{k-h} < \varepsilon(a_0 + a_1 + \dots)$$

la fonction de corrélation γ_f dépend de x, conformément au résultat général démontré ci-dessus (§ 11). Mais, puisque λ_k dépend peu de k, le terme $B(\tau) = \gamma_0(\lambda\tau)$ (où λ est une valeur moyenne des λ_k) n'en dépend pas.

Si l'on remplace x par $x + \frac{1}{\theta}$, on ne change pas θx. Donc $A(\xi)$ est une fonction *périodique* de x, dont la période $\frac{1}{\theta}$ a été choisie très petite. A défaut de l'homogénéité, cette périodicité de $A(\xi)$ est assez encourageante.

La forme trouvée pour f n'est pas encore tout à fait satisfaisante, parce que f est une fonction discontinue de t. On la régularise par convolution avec une fonction K intégrable. On pose donc

$$f(t, x) = \Sigma a_k f_0(\lambda_{k+m(x)} t)$$
$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - s, x) k(s) ds$$

La fonction de corrélation $\gamma(\tau, \xi; x)$ de u est égale à

$$\gamma(\tau, \xi; x) = \iint \gamma_f(\tau + s - s', \xi; x)\bar{k}(s)k(s')dsds'$$
$$= \Sigma a_k \bar{a}_l \underline{\iint \gamma_0[\lambda_{k+m(x)}(\tau + s - s')]K(s)K(s')dsds'}$$

(avec toujours $l = k + m(x) - m(x + \xi)$).

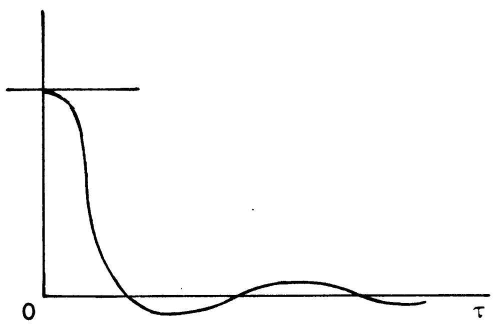
Elle a les mêmes propriétés que γ_f, le terme souligné remplaçant $\gamma_0[\lambda_{k+m(x)}]$.

Bien entendu, dans le résultat, on doit remplacer τ par $\tau - \frac{\xi}{U}$.

15. — EXEMPLE NUMÉRIQUE

Il est facile de construire numériquement des suites a_k permettant de représenter correctement le facteur $A(\xi)$ de la fonction de corrélation $\gamma\left(\xi, \tau - \frac{\xi}{U}\right)$. Moyennant le choix d'une bonne suite λ_k et d'une bonne fonction $m(x)$, le problème pratique de représentation d'une famille de corrélations spatio-temporelles se réduit donc à celui de la fonction de corrélation purement temporelle $\gamma(0, \tau)$. D'ailleurs le choix de λ_k et de $m(x)$ est assez arbitraire, et aucun critère précis ne le délimite, dans l'état actuel de la théorie.

Or la fonction $\gamma(0, \tau)$ a une forme assez spéciale.



Elle semble décroître assez vite, mais présente ensuite des alternances de signe très nettes. Sa tangente à l'origine ($\tau = 0$) est horizontale, la décroissance est ensuite très rapide. Dans chaque expérience, les positions des trois premiers zéros sont assez bien fixées, ainsi que les abscisses et les ordonnées des maxima et minima.

En outre, il est essentiel de se rappeler que $\gamma(0, \tau)$ est la transformée de Fourier d'une fonction non négative.

En ce qui concerne l'aire totale du graphe de $\gamma(0, \tau)$ il est difficile de donner des résultats précis. A l'aide de la densité spectrale ψ, on a

$$\gamma(0, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\omega\tau}\psi(\omega)d\omega$$

et

$$\int_{-A}^{A} \gamma(0, \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi(\omega A)}{\pi\omega}\psi(\omega)d\omega$$

Par suite, puisque ψ est intégrable et localement dérivable,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma(0, \tau) d\tau$$

existe et a pour valeur $\psi(0)$.

Mais il est difficile de demander à l'expérience des renseignements sur $\psi(0)$, valeur de la densité spectrale à la fréquence nulle. En fait, les courbes expérimentales correspondent à un enregistrement d'où sont exclues les très basses fréquences.

Quoi qu'il en soit, il est difficile de trouver une fonction $\gamma(\tau)$ analytiquement définie qui possède toutes les propriétés qualitatives de $\gamma(0, \tau)$ et qui soit compatible avec les données numériques (position des zéros et des maxima, rayon de courbure à l'origine). Le problème pratique consiste à calculer les zéros de $\gamma(\tau)$ et à écrire en même temps la condition pour que la transformée de Fourier de $\gamma(\tau)$ soit positive. Or, si l'une de ces conditions s'exprime simplement, il est difficile de choisir la formule de $\gamma(\tau)$ de telle sorte que l'autre ait un mode d'expression maniable.

Supposons par exemple que $\gamma(\tau)$ soit une fraction rationnelle paire. Il est facile de choisir les zéros du polynôme au numérateur. Il n'est pas trop compliqué de calculer la transformée de Fourier de $\gamma(\tau)$, mais en général la condition de positivité est algébriquement inextricable.

Voici un exemple des difficultés qu'on peut rencontrer. La fonction

$$\frac{a^2 - \tau^2}{(b^2 + \tau^2)(c^2 + \tau^2)} \qquad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$$

est une fraction rationnelle simple, paire, qui possède le zéro $\tau = a$, et qui tend vers zéro à l'infini. Elle a pour transformée de Fourier

$$\frac{\pi}{c^2 - b^2}\left[\frac{a^2 + b^2}{b} e^{-b|\omega|} - \frac{a^2 + c^2}{c} e^{-c|\omega|}\right], \quad \text{pour} \quad b \neq c$$

et

$$\frac{\pi}{2b^2}\left[\frac{a^2 - b^2}{b} + (a^2 + b^2)|\omega|\right] \quad \text{pour} \quad b = c$$

Elle est positive si

$$bc \leqslant a^2$$

On peut ensuite construire une fonction de type positif, ayant une transformée de Fourier positive, en faisant le produit de plusieurs facteurs de ce type :

$$\Pi_k \frac{a_k^2 - \tau^2}{(b_k^2 + \tau^2)(c_k^2 + \tau^2)}, \qquad b_k c_k \leqslant a_k^2 \qquad \text{pour chaque } k.$$

Cette fonction a des zéros explicites, et convient qualitativement.

Malheureusement, il n'est pas possible de choisir les coefficients a_k, b_k, c_k de telle façon que les positions des maxima et minima soient en accord raisonnable avec les données numériques. Il n'est pas *a priori* exclu qu'une fraction rationnelle plus compliquée réponde à ces exigences, mais alors, si ses zéros sont explicités, la condition de positivité devient inextricable.

Pour traiter jusqu'au bout un exemple numérique, on a choisi la fonction

$$\gamma(\tau) = e^{-k\tau^2} \frac{(1 - a)(\cos q\tau - a)}{1 + a^2 - 2a \cos q\tau}, \qquad 0 < a < 1,$$

avec des valeurs de a, q, k ajustées à une courbe expérimentale choisie. Comme $\gamma(\tau)$ est la somme de la série

$$\gamma(\tau) = e^{-k\tau^2} \frac{1 - a}{a} (a \cos q\tau + \ldots + a^n \cos nq\tau + \ldots),$$

$\gamma(\tau)$ est une somme de termes ayant des transformées de Fourier positives et l'on est sûr que $\gamma(\tau)$ est de type positif. La densité spectrale correspondante est

$$\varphi(\omega) = \frac{1 - a}{a} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{4k}(2\pi\omega - nq)^2}$$

$\gamma(\tau)$ est une fonction périodique amortie, ce qui n'est pas tout à fait satisfaisant. Les deux premiers zéros sont placés correctement. Ensuite l'amortissement est suffisamment rapide pour que les autres zéros, qui n'ont pas de signification physique, soient pratiquement inactifs.

On a calculé numériquement la transformée de Fourier en cosinus $\psi(\omega)$ de γ, puis la transformée de Fourier K(s) de $\sqrt{\psi(\omega)}$. On a fait ensuite la convolution de K(s) par la partie réelle d'une fonction pseudo-aléatoire élémentaire. Pour éviter les symétries semi-locales, on a choisi un polynôme du quatrième degré. On a donc posé

$$u_\lambda(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos [\widehat{\lambda(t - s)}]^4 \mathrm{K}(s) d^s,$$

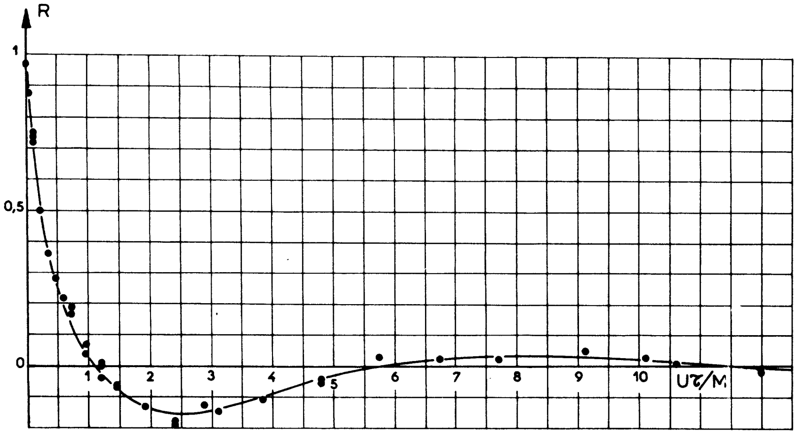
puis on a fait un mélange de fonctions $u_\lambda(t)$ pour des valeurs de λ voisines de 8. Comme le calcul numérique de la somme d'une série (réduite à un nombre fini, mais grand, de termes) serait très long, même avec un ordinateur de grande capacité, on s'est contenté de calculer :

1° Les valeurs de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos [\widehat{8(t - s)}]^4 \mathrm{K}(s) ds$$

CORRELATION DANS LE TEMPS

U = 12,20 m s   M = 1"   dist = 40 M



Courbe expérimentale obtenue par M.M. FAVRE . GAVIGLIO . DUMAS

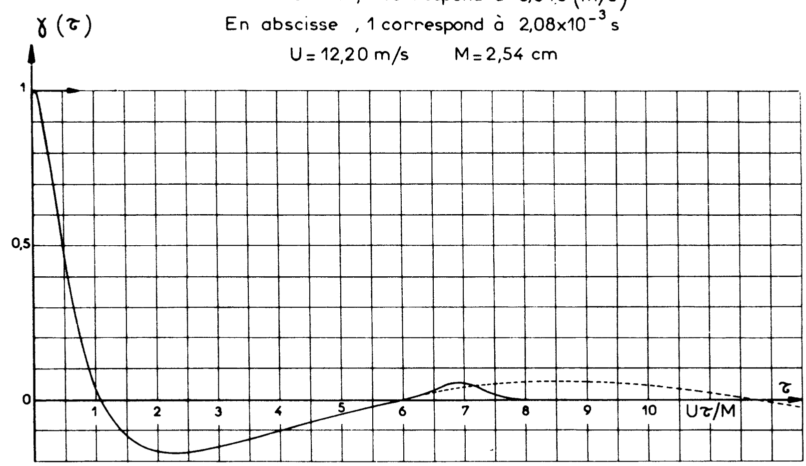
Note technique ONERA
N° 25 _ 522 A du 1_6_1953

FONCTION DE CORRELATION TEMPORELLE

En ordonnée , 1 correspond à $0{,}048\ (m/s)^2$

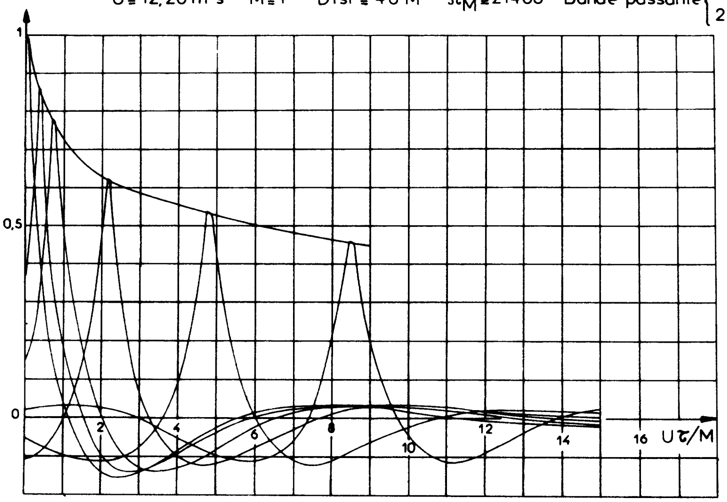
En abscisse , 1 correspond à $2{,}08 \times 10^{-3}$ s

U = 12,20 m/s   M = 2,54 cm



CORRELATION DANS LE TEMPS ET L'ESPACE LONGITUDINALEMENT

U = 12,20 m s M = 1" Dist = 40 M $\mathcal{R}_M$ = 21400 Bande passante {55 à 2500 cps



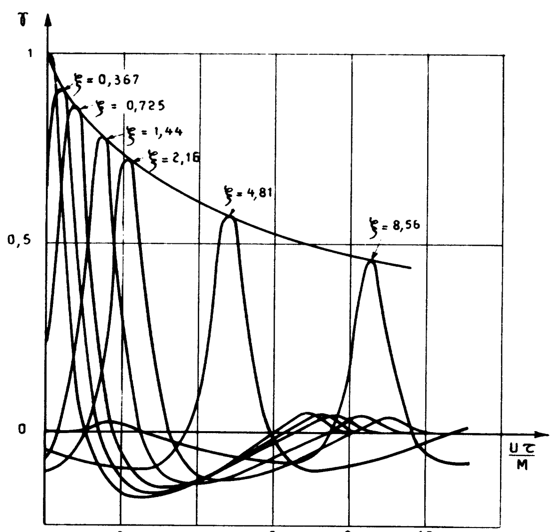
Courbes expérimentales obtenues par M.M FAVRE GAVIGLIO . DUMAS

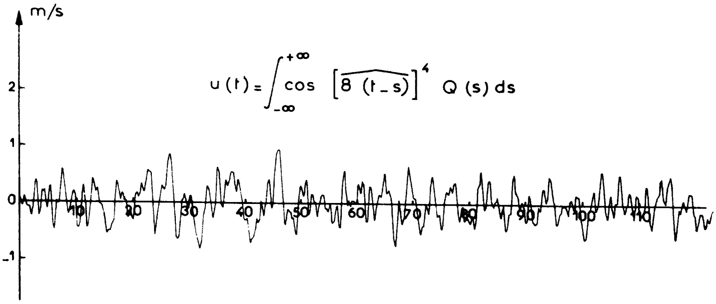
Note technique ONERA N° 25_522A du 1_6_1953

CORRELATIONS SPATIO-TEMPORELLES LONGITUDINALES CALCULEES

ξ décalage d'espace
(Mξ = décalage vrai)

u = 12,20 m/s
M = 2,54 cm
τ en secondes





En abscisse on a porté $\frac{U\tau}{M}$ avec $\begin{cases} U = 12{,}20 \text{ m/s} \\ M = 2{,}54 \text{ cm} \\ \tau \text{ en secondes} \end{cases}$

pour un certain nombre de valeurs de t à partir de $t = 0$. Si t devient grand, la fonction ainsi obtenue commence à se distinguer de la somme de la série (2) du paragraphe 12.

2° Les valeurs de la fonction

$$e^{-k\tau^2} \frac{(1-a)(\cos q\tau - a)}{1 + a^2 - 2a \cos q\tau},$$

et des fonctions $\psi(\omega)$ et $K(s)$.

Remarque. — Il est probablement possible de trouver une meilleure représentation analytique de $\gamma(\tau)$. Mais du point de vue qui nous intéresse on pourrait à la rigueur se contenter d'une représentation empirique. L'important est d'en déduire, par des méthodes *numériques, une représentation locale de $u_\lambda(t)$, ce qui se fait toujours par convolution.*

16. — EXTENSIONS POSSIBLES DES REPRÉSENTATIONS SPATIO-TEMPORELLES

Comme l'a montré M. Metzger, le procédé utilisé dans les paragraphes précédents pour représenter un phénomène spatio-temporel est un cas particulier d'une technique plus générale. Partons de la formule du paragraphe 14:

$$f(t, x) = \sum_k a_k f_0(\lambda_{k+m(x)} t) \tag{1}$$

Commençons par remplacer $f_0(\lambda_k t)$ par $f_k(t)$, terme général d'une suite quelconque de fonctions pseudo-aléatoires orthogonales entre elles, et même orthogonales à leurs translatées (au sens de la moyenne temporelle). On en connaît d'autres exemples que les dilatées d'une même fonction f_0. Le plus simple est celui des fonctions $f_k(t) = e^{2i\pi\varphi_k(t)}$, où φ_k est un polynôme dont l'indice k est égal au degré : $\varphi_k(t) = A_k t^k + \ldots$, A_k irrationnel.

Posons donc

$$f(t, x) = \sum_k a_k f_{k+m(x)}(t), \tag{2}$$

la sommation étant étendue à l'ensemble des k entiers. Ensuite, pour chaque x fixé, faisons sur k la translation

$$k + m(x) = n,$$

d'où

$$f(t, x) = \sum_n a_{k-m(x)} f_n(t) \tag{3}$$

La sommation s'étend à l'ensemble des valeurs de n telles que $n - m(x)$ appartienne à l'ensemble initial des indices k. La formule (3) est un cas particulier de la formule suivante :

Soit $\mathrm{I}(x)$ un sous-ensemble de l'ensemble des indices entiers k. On pose

$$f(t, x) = \sum_{n \in \mathrm{I}(x)} a_n(x) f_n(t), \tag{4}$$

où $a_n(x)$ est une suite de fonctions données de x. A cause des propriétés d'orthogonalité des f_n, la fonction de corrélation spatio-temporelle de $f(t, x)$ est

$$\gamma(t, \xi; x) = \sum_{n \in \mathrm{I}(x) \cap \mathrm{I}(x+\xi)} \bar{a}_n(x) a_n(x + \xi) \gamma_n(\tau), \tag{5}$$

où γ_n est la fonction de corrélation de f_n.

Ces formules ont un sens tout au moins si la série $\Sigma a_n(x)$ converge absolument et uniformément.

Supposons par exemple que l'intervalle de définition des $a_n(x)$ soit tout l'axe réel. Si, lorsque $\xi \to \infty$, l'intersection $\mathrm{I}(x) \cap \mathrm{I}(x + \xi)$ tend vers l'ensemble vide, on a bien, pour tout x fixé,

$$\lim_{\xi \to \infty} \gamma(t, \xi; x) = 0$$

Cela arrive alors même que les fonctions $a_n(x)$ ne tendent pas vers 0 à l'infini. $\gamma(t, x; \xi)$ a donc le comportement voulu en fonction de ξ. Un modèle de cette circonstance est facile à donner. Il suffit que $I(x)$ soit un ensemble fini d'indices, subissant une translation proportionnelle à x. Par exemple, $I(x)$ représente l'ensemble des n compris entre x et $x + h$, où h est un entier positif donné.

Mais ce schéma présente des difficultés. Il n'est pas facile de rendre la fonction de corrélation strictement continue, et surtout il n'est pas sûr que $\gamma(\tau, \xi ; x)$ ait, dans l'espace, les propriétés d'une fonction de corrélation. Un autre schéma, plus simple, a été proposé (J. Bass, *C. R. Acad. Sci.*, 268, 1969, p. 421). Il est valable dans un domaine spatial borné $0 < x < l$, et est de la forme

$$u(x, t) = \Sigma a_n e^{2i\pi \frac{n}{l} x} f_n(t).$$

Les f_n sont des fonctions pseudo-aléatoires orthogonales d'un type un peu différent de celles qu'on vient d'utiliser, et elles présentent des propriétés intéressantes de multiplicativité. Ce nouveau schéma semble donner satisfaction.

17. — SUR L'INTÉGRATION DES FONCTIONS PSEUDO-ALÉATOIRES

Quand la vitesse d'un fluide est « une fonction turbulente », on peut se demander si le « mouvement des particules fluides » est d'une nature analogue. Bien que la question ainsi posée soit assez confuse, elle conduit à un problème mathématique précis, celui de l'intégration des fonctions stationnaires.

Si $f(t)$ est une fonction presque-périodique de valeur moyenne nulle, on sait que $\int_0^t f(s)ds$ n'est pas nécessairement presque-périodique.

Que peut-on dire de la primitive d'une fonction pseudo-aléatoire?

Nous allons examiner deux exemples, qui montreront seulement que la réponse à la question posée n'est pas simple.

1. — Nous savons que, si φ est un polynôme réel de degré au moins égal à 2, tel que φ'' ait au moins un coefficient irrationnel,

$$f_0(t) = e^{2i\pi\varphi(t)}$$

est une fonction pseudo-aléatoire. Il en est de même de la fonction $Y(t)f_0(t)$ égale à $e^{2i\pi\varphi(t)}$ si $t > 0$, à 0 si $t < 0$, comme on le vérifie immédiatement.

Si donc $K(s)$ est une fonction absolument intégrable et nulle pour $s < 0$, la fonction

$$f(t) = \int_0^t f_0(t-s)K(s)ds = \int_0^t f_0(s)K(t-s)ds,$$

convolution de K par Yf_0, est pseudo-aléatoire.

Supposons que K soit continue pour tout t et pourvue d'une dérivée continue pour tout $t > 0$, ce qui implique en particulier que $K(0) = 0$. $f(t)$ admet une dérivée, qui est égale à

$$f'(t) = \int_0^t f_0(s)K'(t-s)ds = \int_0^t f_0(t-s)K'(s)ds.$$

Si $K' \in L^1$, $f'(t)$ est aussi pseudo-aléatoire.

Inversement, on voit que

$$f(t) = \int_0^t f'(s)ds$$

On a donc un exemple d'une fonction pseudo-aléatoire f' telle que $\int_0^t f'(s)ds$ soit aussi pseudo-aléatoire. Les conditions à réaliser sont les suivantes : K et K′ absolument intégrables, K nulle à l'origine. Exemple :

$$K(t) = te^{-t}, \qquad K'(t) = (1-t)e^{-t}(t \geqslant 0).$$

2. — Mais cet exemple n'a rien de général. Nous allons sur un autre exemple nous faire une idée des circonstances qui peuvent apparaître. Cependant, avant d'étudier cet exemple, nous allons élargir l'énoncé du problème.

Si $f(t)$ est pseudo-aléatoire et a pour fonction de corrélation $\gamma(\tau)$, $f(t)e^{2i\pi\omega t}$ est pseudo-aléatoire et a pour fonction de corrélation $\gamma(\tau)e^{2i\pi\omega\tau}$.

$f(t)$ étant donnée, existe-t-il des valeurs de ω pour lesquelles

$$\int_0^t f(s)e^{2i\pi\omega s}ds$$

soit pseudo-aléatoire?

Dans le cas de l'exemple précédent, on sait que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(s)e^{2i\pi\omega s}ds = 0$$

On a une indication sur la *moyenne*, mais non sur l'intégrale.

Choisissons

$$f(t) = e^{2i\pi A\hat{t}^2}$$

et supposons que A soit un nombre quadratique (racine irrationnelle d'une équation du second degré à coefficients entiers).

On sait alors (théorème d'Hardy-Littlewood [9]) que

$$\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi An^2} = 0(\sqrt{N})$$

Il en résulte bien en particulier que

$$Mf = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi An^2} = 0$$

Formons alors l'intégrale

$$J = \int_0^t e^{2i\pi\omega s} f(s) ds = \int_0^t e^{2i\pi\omega s} e^{2i\pi A\hat{s}^2} ds$$

Si $N = \hat{t}$, on écrit

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{n-1}^{n} e^{2i\pi\omega s} e^{2i\pi An^2} ds + \int_N^t e^{2i\pi\omega s} e^{2i\pi AN^2} ds$$

Si ω n'est pas entier,

$$J = \left(\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi(An^2+\omega n)}\right) \times \frac{1-e^{-2i\pi\omega}}{2i\pi\omega} + e^{2i\pi AN^2} \times \frac{e^{2i\pi\omega t} e^{2i\pi N}}{2i\pi\omega}$$

Si ω est entier non nul, J se réduit au dernier terme, qui s'écrit alors

$$J = e^{2i\pi AN^2} \frac{e^{2i\pi\omega t} - 1}{2i\pi\omega}$$

(où l'on peut remplacer t par sa partie fractionnaire $\underline{t}$).

$$\text{Si} \quad \omega = 0, \quad J = \sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi An^2} + \underline{t} e^{2i\pi AN^2}$$

Examinons le comportement de J pour les grandes valeurs de t.
Si $\omega = 0$, J est la somme d'un terme borné et d'un terme $0(\sqrt{N})$, ou $N = \hat{t}$.

La fonction $J(t)$ ne reste donc pas bornée, alors que $f(t)$ était borné. On peut affirmer qu'il existe des valeurs de t pour lesquelles $J(t)$ est de l'ordre de $\sqrt{t}$. Cette remarque ne permet pas d'affirmer que $J(t)$ n'est pas pseudo-aléatoire, car on ne sait pas si les valeurs de t pour lesquelles $J(t)$ est $0(\sqrt{t})$ sont suffisamment rares pour ne pas influer sur les moyennes quadratiques, ou au contraire sont telles que $J(t)$ ne soit pas une fonction stationnaire. On peut seulement dire, à ce stade du raisonnement, qu'il y a « peu de chances » pour que $J(t)$ soit pseudo-aléatoire.

Si ω n'est pas entier, J est encore la somme d'un terme borné et d'un terme $0(\sqrt{N})$.

Si ω est un entier non nul k, J est le produit de deux facteurs : une fonction périodique

$$\frac{e^{2i\pi k t} - 1}{2i\pi k}$$

et une fonction pseudo-aléatoire $e^{2i\pi A t^2}$. On peut écrire

$$J(t) = \int_0^t e^{2i\pi k s} f(s) ds = \frac{e^{2i\pi k t} - 1}{2i\pi k} f(t).$$

J est alors pseudo-aléatoire.

En effet, la fonction de corrélation de J est la moyenne de

$$\frac{1}{4\pi^2 k^2}[(e^{2i\pi k(t+\tau)} - 1)(e^{-2i\pi k t} - 1)]\bar{f}(t) f(t+\tau)$$
$$= \frac{1}{4\pi^2 k^2}(e^{2i\pi k\tau} + 1)\bar{f}(t) f(t+\tau) - \frac{1}{4\pi k^2} e^{2i\pi k\tau} e^{2i\pi k t}\bar{f}(t) f(t+\tau)$$
$$- \frac{1}{4\pi^2 k^2} e^{-2i\pi k t}\bar{f}(t) f(t+\tau).$$

Les deux premiers termes ont pour moyenne $\gamma(\tau)$, à un facteur borné près.

Tout revient à calculer

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T e^{2i\pi k t}\bar{f}(t) f(t+\tau) dt$$

(on peut se limiter à $\tau > 0$, et f est nulle pour $t < 0$). On fait varier T par valeurs entières N, ce qui n'est pas une restriction. On écrit

$$\int_0^N = \sum_{n=1}^{N} \int_{n-1}^{n}, \qquad t = n + s \qquad 0 < s < 1.$$

On trouve

$$\int_0^1 \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \overline{f}(n) f(n + \widehat{s+\tau}) . e^{2i\pi ks} ds$$

soit

$$\gamma(\hat{\tau}) \int_0^{1-\underset{\sim}{\tau}} e^{2i\pi ks} ds + \gamma(\hat{\tau}+1) \int_{1-\underset{\sim}{\tau}}^{1} e^{2i\pi ks} ds.$$

Comme $\gamma(\hat{\tau}) = 0$ si $\hat{\tau} \geqslant 1$, il reste, pour $\tau \geqslant 0$,

$$\gamma(\hat{\tau}) \int_0^{1-\underset{\sim}{\tau}} e^{2i\pi ks} ds$$

ce qui est bien une fonction de corrélation du type pseudo-aléatoire.

En résumé, si

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{2i\pi A\hat{t}^2} && \text{pour} \quad t > 0 \\ &= 0 && \text{pour} \quad t < 0, \end{aligned}$$

(A irrationnel quadratique),

la fonction $\qquad \displaystyle\int_0^t e^{2i\pi\omega s} f(s) ds$

est pseudo-aléatoire pour ω entier non nul,
n'est peut-être pas pseudo-aléatoire pour $\omega = 0$ et ω non entier.

Pour une fonction pseudo-aléatoire, la *moyenne* de $e^{2i\pi\omega t} f(t)$ est nulle : tous les coefficients de Fourier sont nuls, et ils ne peuvent jouer aucun rôle utile pour caractériser la fonction, contrairement à ce qui a lieu dans le cas des fonctions presque-périodiques. Par contre, cet exemple montre que l'*intégrale* de $e^{2i\pi\omega t} f(t)$ peut avoir certaines propriétés qui, jusqu'à un certain point, nous renseignent sur la fonction f.

RÉFÉRENCES

[*1*] J. Bass, Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires. *Bull. Soc. Math. France*, **78**, 1959.

[*2*] J. Bass, *Les fonctions pseudo-aléatoires*, Mémorial des sciences mathématiques, Gauthier-Villars, 1962.

[*3*] J. Bass, Espaces de Besicovitch, fonctions presque périodiques, fonctions pseudo-aléatoires. *Bull. Soc. Math. France*, **91**, 1963.

[*4*] J. Bass, Suites stationnaires dans l'espace de Hilbert, moyennes temporelles, moyennes abstraites. *J. de Math.*, **43**, 1964.

[*5*] J. Bass, Fonctions admettant une fonction de corrélation donnée. *C. R. Acad. Sci.*, **266**, 1968, 912.

[6] J. BASS et J. P. BERTRANDIAS, Sur les dilatées des fonctions pseudo-aléatoires. *C. R. Acad. Sci.*, 267, 1968, p. 768.
[7] J. BASS et J. MAURIN, Corrélations spatio-temporelles dans un fluide turbulent. *C. R. Acad. Sci.*, **266**, 1968, 376.
[8] J. P. BERTRANDIAS, Espaces de fonctions continues et bornées en moyenne asymptotique d'ordre *p*. *Thèse*, *Mémoires de la société Math. de France*, Paris, n° 5, 1965.
[9] G. H. HARDY et J. E. LITTLEWOOD, Some problems of diophantine approximation. *Acta mathematica*, **37**, 1917.
[10] VO KHAC KHOAN, Étude des fonctions quasi stationnaires et de leurs applications aux équations différentielles opérationnelles. *Thèse*, *Mémoires de la société Math. de France*, Paris, n° 6, 1966.

TABLE DES MATIÈRES

Reçu le 11 décembre 1968.